LOCALIZACION DE CENTROS PELIGROSOS

José Muñoz Pérez
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla
Francisco Velasco Morente
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Sevilla

El problema considerado consiste en maximizar el mínimo de la distancia euclídea en un conjunto de puntos situados en el plano. Presentamos diversas mejoras a lo anteriormente escrito y realizamos un algoritmo para la resolución del problema en el plano.

1.–INTRODUCCION

Para resolver situaciones sociales difíciles, como la situación de centrales nucleares, basureros atómicos y en general lugares potencialmente peligrosos, siempre desearemos que dichos lugares estén lo más alejados posible de las ciudades populosas o de centros que puedan entrar en colisión, por ejemplo, no sería bueno situar un basurero atómico cerca de una refinería petrolífera. Ahora bien, tampoco podemos alejarnos mucho de dichas poblaciones, ya que entonces no podríamos utilizar dicho servicio; es el caso de un basurero municipal donde está claro que debe de estar en el extrarradio, suficientemente alejado, pero no lo podemos estar en exceso, ya que impediría el poder llevar lo recogido en la ciudad en un tiempo prudencial y a un coste que siempre está limitado. En definitiva nos hemos de plantear nuestro problema dentro de unos límites determinados, que supondremos será un polígono S convexo con p lados y de forma que los puntos de demanda pertenezcan a dicho polígono. Aunque las distancias que se suelen recorrer no son líneas rectas, podemos suponerlas, teniendo en cuenta el kilometraje, por lo que la distancia que emplearemos va a ser la distancia euclídea.

Drezner and Wesolowsky (1) se plantean el problema de maximizar las distancias mínimas, obligando a que el conjunto donde se pueda mover el futuro emplazamiento buscado, esté en un radio determinado para cada punto de demanda.

Dasarathy and White (2) resuelven el problema suponiendo que los pesos de cada punto de demanda es la unidad, restringiéndose a un poliedro convexo y acotado, presentando un algoritmo para el problema en tres dimensiones.

Hansen - peeters - Thisse (3) suponen la función peso como una función decreciente y continua de la distancia, siendo S un conjunto cerrado y acotado. Ellos dan un algoritmo para resolver los problemas de maximización y minimización.

Drezner - Wesolowsky presentan otro trabajo en que se plantean localizar n facilidades, y para ello obtienen dos problemas que demuestran que son duales.

Melachrinoudis - Cullinae (4) se plantean su formulación basándose en la ley física de que los niveles de emisiones no deseables a una población están en razón inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Es por lo que presentan un criterio minimax.

2.–PROPOSICIONES INICIALES

2.1.–Proposición: Sean $P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2, y_2)$; $Q_1(0,0)$;

$Q_2(a, 0)$, $a > 0$. Sea $Q(b, 0)$ con $b = \lambda a$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, cumpliéndose además que:

$$d(P_1, Q_1) \leq d(P_2, Q_1) \quad d(P_1, Q_2) \leq d(P_2, Q_2)$$

Entonces: $d(P_1, Q) \leq d(p_2, Q)$.

Definamos el conjunto $V_i = (P \varepsilon R^2 / d(P, P_i) \leq d(P, P_j) \quad \forall \quad j)$

2.2.–Proposición: El conjunto V_i es convexo

3.–PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos m puntos P_i en el plano, nuestro propósito es encontrar algún punto P^* en un conjunto convexo que maximice la expresión

$$f(P) = \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Min}} (w_i d(P, P_i)),$$ es decir hemos de:

$$\underset{P \varepsilon S}{\mathrm{Max}} \ \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Min}} (w_i d(P, P_i))$$

donde S es un polígono convexo y acotado

3.a) Si $w_i = w_j \quad \forall \quad i, j$, Shamos (5) demuestra que los conjuntos V_i, llamados Polígonos de Voronoi contienen a lo sumo (3 m - 6) lados y (2 m - 4) vértices. El diagrama de Voronoi se puede construir en un tiempo óptimo o (mlogm).

Análogamente, un vértice de Voronoi será óptimo local si pertenece a S y esto se hace en un tiempo o (plogp), siendo p el número de vértices del polígono S.

De ambas propiedades, y de la definición de los polígonos de Voronoi, tenemos que el conjunto de las posibles soluciones, son los vértices del polígono de Voronoi, los vértices de S o los puntos de corte de los lados de los polígonos de Voronoi con los lados de S.

Ahora bien, un vértice de Voronoi para ser solución ha de pertenecer a S y esto lo podemos determinar en un tiempo o (logp). Shamos and Hoey (6) demuestran que los o (m) vértices de Voronoi se pueden generar en un tiempo o (mlogm) y de estos los que no pertenecen a S pueden ser excluídos en un tiempo o (mlogp).

Dasarathy - White prueban que los o (m) puntos de corte de los lados de Voronoi con los lados de S pueden ser obtenidos en un tiempo o (m logp). Los vértices de S pueden ser testados para la optimalidad en un tiempo o ($\log^2 m + m \log m$), luego se tiene un algoritmo con tiempo de cómputo o ($\log^2 m + m \log m + m \log p$)

Nosotros planteamos un criterio maxmin cuando los pesos w_i son no negativos y con la distancia euclídea, suponiendo que nos movemos dentro de un polígono convexo acotado en el plano.

La función f (P) podemos expresarla en S de la siguiente forma:

$$f(P) = \begin{cases} d(P, P_1) & \text{si } P \varepsilon V_1 \\ d(P, P_2) & \text{si } P \varepsilon V_2 \\ \quad \bullet & \\ \quad \bullet & \\ d(P, P_n) & \text{si } P \varepsilon V_n \end{cases}$$

Donde $S = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, con $V_i \Lambda V_j = Fr(V_i) \ \Lambda \ Fr(V_j)$, para $1 \leq i, j \leq n$

Llamemos a $d_{i,j} = d(P_i, P_j)$; $m_{i,j}$ la mediatriz entre los puntos P_i, P_j y al punto intersección de $m_{i,j}$ con $m_{i,k}$ por $Q^i_{j,h}$

Para obtener los conjuntos V_i, fijado el punto P_i, hemos de encontrar las mediatrices $m_{i,j}$ más cercanas. Dasarathy - White obtienen todas las mediatrices y luego se quedan con los disten menos a P_i. Nosotros veremos unas proposiciones que nos acortará este camino obteniendo únicamente las mediatrices necesarias para obtener V_i.

Supongamos por comodidad que se cumple:

$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) \leq \ldots\ldots \leq d(P_1, P_n)$$

3.1.–Proposición: Sea $0 < \alpha < \pi / 2$, el ángulo que forman los puntos P_1, P_2, P_3. Si $d_{1,3} > d_{1,2} / \cos \alpha$, entonces la mediatriz $m_{1,3}$ no corta a la mediatriz $m_{1,2}$ en la región $V_1(\alpha)$ formada por P_1, P_2, P_3.

Consecuencia 1: Sea $P_j \varepsilon V_1(\alpha)$, si $d_{1j} > d_{1,2} / \cos \alpha$, entonces $m_{1,j}$ no corta a $m_{1,2}$ en $V_1(\alpha)$, por lo que podemos prescindir de $V_1(\alpha)$.

Cabría pensar que el punto P_j, formase parte de alguna otra región adyacente $V_1(\alpha)$; esto solo es posible si $P_j = P_3$, pues V_1 es un conjunto convexo. Luego si $P_j \varepsilon V_1(\alpha)$ y verifica $d(P_j, P_1) > d_{1,2} / \cos \alpha$, él y todos los demás puntos de $V_1(\alpha)$ no forman parte de $V_1(\alpha)$, por lo que tampoco de V_1.

Consecuencia 2: Si $d_{1,3} < d_{1,2} / \cos \alpha$, $m_{1,3}$ corta a $m_{1,2}$ en la región $V_1(\alpha)$.

3.2.–Proposición: Sea $d_{1,3} < d_{1,2} / \cos \alpha$ y sea $Q_{2,3}$ el punto intersección de $m_{1,2}$ y $m_{1,3}$. Supongamos que $P_j \varepsilon V_1(\alpha)$. Si $d_{1,j} > 2\, d(Q_{2,3}, P_1)$ entonces $m_{1,j}$ no forma parte de $V_1(\alpha)$, ni de las adyacentes, por lo que no forma parte de V_1. (fig. 3.2)

Demostración:

Como $d(P_1, P_j) > 2\ d(P_1, Q_{2,3})$, $m_{1,j}$ es tangente a la circunferencia $C_P\ (d_{1,j}/2)$, que no corta a los rayos que salen de $Q_{2,3}$ y con direcciones hacia los puntos $M_{1,2}$ y $M_{1,3}$ respectivamente; $m_{1,j}$ no forma parte de las regiones adyacentes a $V_1(\alpha)$ pues V_1 es convexo.

Si sucediese que el punto $P_j \varepsilon V_1(\alpha)$ cumple que $d_{1,j} < 2\ d(Q_{2,3}, P_1)$ la mediatriz $m_{1,j}$ corta a $m_{1,2}$ y $m_{1,3}$. Dividimos $V_1(\alpha)$ en dos regiones $P_1 P_3 A_2$ y aplicamos las dos proposiciones anteriores■

Si fuese $\pi / 2 < \alpha < \pi$, la proposición anterior es válida. El punto $Q_{2,3}$ nos divide la región $V_1(\alpha)$ en dos partes, una de ellas al menos posee un ángulo inferior a $\pi / 2$, al que le aplicamos las dos proposiciones anteriores. En la segunda región tomamos otro punto y así sucesivamente.

Tomemos como ejemplo los puntos

P_i	x_i	y_i	w_i
1	0	0	1
2	0	2	1
3	2	1	1
4	4	1	1
5	5	2	1
6	2	3	1
7	4	3	1
8	4	0	1
9	2	4	1
10	4	4	1
11	5	4	1
12	3	5	1
13	7	0	1

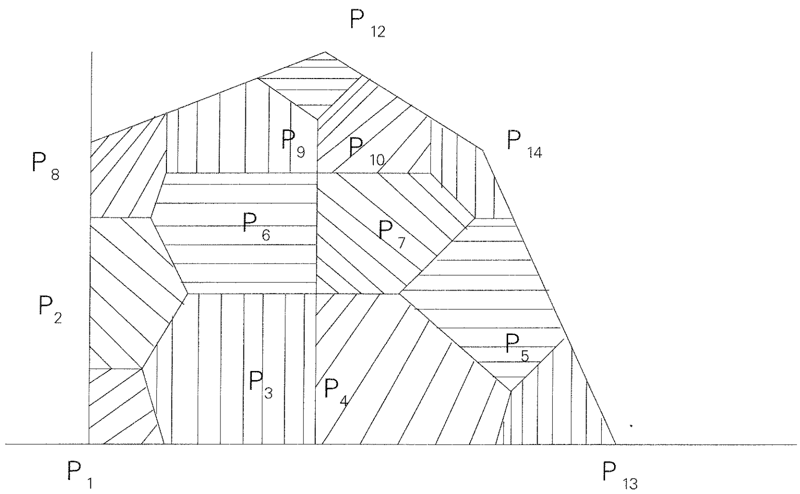
3. b) En a) planteamos el caso en que $w_i = w_j$ $\forall$ i , j; en este segundo caso supondremos que en general esa igualdad no se dará al menos para alguna pareja i , j .

Drezner - Wesolowsky proponen un método iterado para encontrar la solución al problema

$$\max_{(x,y)\in S} \ \min_{1 \leq i \leq n} \ (w_i \, d_i(x,y))$$

Siendo S el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones $d_i(x,y) \leq r_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Hansen - Thisse presentan un método simple, llamado Black and White donde S es un conjunto cerrado y acotado.



Obtención de los polígonos de Voronoi
(fig. 3. 1.)

Melachrinoudis - Cullinae resuelven el problema de minimizar el máximo de la inversa de las distancias, es decir:

$$\underset{(x,y)\,\varepsilon\, S}{\text{Min}} \quad \underset{1<i<n}{\text{Max}} \quad (w_i / r_i)$$

siendo S un conjunto convexo.

Ellos introducen una nueva variable, pasando por tanto a un espacio tridimensional, obteniendo un camino en el cual trabajan con curvas definidas por la intersección de dos superficies.

Nosotros, vamos a ha cer algo análogo, a lo hecho anteriormente, estudiando los nuevos conjuntos V_i obtenidos, y comprobando algunas propiedades que nos ayudarán a encontrar el máximo en un conjunto finito de puntos.

4.–FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Nuestro problema de maximizar, lo podemos escribir en la forma siguiente:

$$\underset{s\,\varepsilon\, S}{\text{Max}} \; f(s)$$

donde $f(s) = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{Min}} \; (w_i d_i(s))$, siendo w_i un peso no negativo

y S un conjunto convexo que contiene a la envolvente convexa de los puntos de demanda.

Al igual que hicimos en el apartado anterior, la función f (s) podemos expresarla en la forma:

$$f(P) = \begin{cases} d(P, P_1) & \text{si } P\,\varepsilon\, V_1 \\ d(P, P_2) & \text{si } P\,\varepsilon\, V_2 \\ \quad\bullet & \\ \quad\bullet & \\ d(P, P_n) & \text{si } P\,\varepsilon\, V_n \end{cases}$$

$$\text{Donde } V_i = \left\{ s\,\varepsilon\, S / w_i d_i(s) \leq w_j d_j(s) \right\}$$

Estos conjuntos en general no son convexos. Para ver la forma de estos conjuntos, veremos algunas propiedades simples.

Consideremos el lugar geométrico de los puntos que cumplen la siguiente igualdad:

$w_i\, d(P, P_i) = w_j\, d(P, P_j)$, tendremos entonces

$$w_i((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2) = w_j((x-x_j)^2 + (y-y_j)^2)$$

con lo que obtendremos la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2a_{i,j}x - 2b_{i,j}y + D_{i,j} = 0$$

Donde $a_{i,j} = (w_i^2 x_i - w_j^2 x_j) / (w_i^2 - w_j^2)$

$b_{i,j} = (w_i^2 y_i - w_j^2 y_j) / (w_i^2 - w_j^2)$

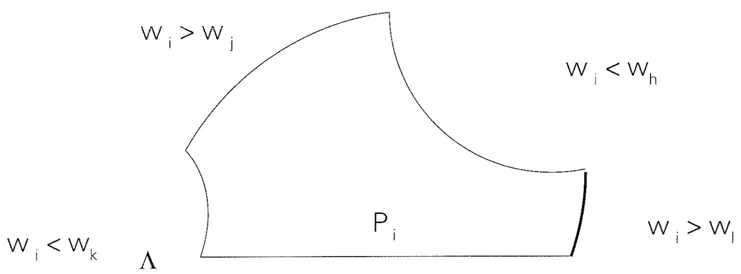
$$D_{i,j} = \frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} (x_i^2 + y_i^2) - \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} (x_j^2 + y_j^2)$$

Por lo que $r^2_{i,j} = a^2_{i,j} + b^2_{i,j} - D_{i,j} = \dfrac{w_i^2 w_j^2}{(w_i^2 - w_j^2)^2} (d (P_i , P_j)) > 0$

Pues $P_i \neq P_j$ y $w_i \neq w_j$

Donde el punto $(a_{i,j} , b_{i,j})$ pertenece a la recta definida por los puntos P_i, P_j si $w_i > w_j$, entonces el centro de la circunferencia está hacia el lado opuesto de la semirrecta P_i, P_j.

Teniendo esto en cuenta y como sabemos que si $w_i = w_j$, entonces el lugar geométrico de los puntos equidistantes es la recta mediatriz, el conjunto V_i es un conjunto no convexo en general, que podrá tener la forma de la (fig. 4.1.), donde los puntos extremos son las intersecciones entre las circunferencias descritas anteriormente.



(fig. 4. 1.)

4. 1.–Proposición: El óptimo local en V_i, se encuentra en un extremo de V i .

Demostración:

El conjunto V_i, así obtenido, no es convexo en general. Nuestro problema se limita entonces a calcular

$$\operatorname*{Max}_{P \, \varepsilon \, V_i} \quad w_i \, d (P , P_i)$$

Ahora bien, como w_i es el mismo en V_i, nos quedamos con encontrar el punto P_i * tal que maximice $d (P , P_i)$.

Visto desde P_i, el trozo de circunferencia que se ve en dirección a P_j es cóncava si $w_i > w_j$, estando el centro de dicha circunferencia en la línea que une P_i con P_j e inmediatamente antes de P_i, por lo que el máximo en ese ángulo de región viene dado por el punto extremo más alejado de P_i.

Las circunferencias P_i Q y OQ son tangentes interiores, por lo que $d (P_i , B) > d (P_i , Q)$.

De igual forma si estuviésemos en V_j, se tiene que $d (P_j , Q) < d (P_j , B)$.

Si $\alpha_2 > \alpha_1$, entonces $d(P_i, C) > d(P_i, B)$ por el mismo razonamiento hecho anteriormente y de igual forma si $\beta_2 > \beta_1$, entonces $d(P_j, C) > d(P_j, B)$.

Con esto llegamos a la conclusión de que el punto óptimo es un punto extremo de V_i, por la forma en la que está construida V_i ■

Debido a Hansen - Thisse, tenemos el siguiente resultado:

Definición: Dado un conjunto X, decimos que $s \in S$ es remoto de X si $\exists\ x \in X$ tal que la recta que sale de x y que pasa por s, no contiene puntos de S más allá del punto s.

4. 2.–Teorema: El conjunto constituido por los puntos de $S \wedge C$ y por los puntos de S - C remotos de C, contiene al menos una solución al problema. Donde C es la envolvente convexa.

Con esto podemos asegurar que el punto solución ó bien se encuentra en la envolvente convexa, o en la frontera del conjunto convexo S.

Las circunferencias obtenidas por los puntos P_i, P_j, P_k se cortan en un punto, cualquiera que sea w_i, w_j, w_k, salvo en el caso en que se tenga que la circunferencia $C_{i,j}$ esté contenida en la circunferencia $C_{i,k}$ ya que entonces no se obtiene ningún punto. Por lo que si el punto solución se encuentra en el interior, esté es un punto intersección de estos.

Los puntos máximos locales en la frontera, se encuentran por lo tanto como los puntos intersección de una circunferencia $C_{i,j}$ con la frontera ya sea de C o del conjunto convexo, en su caso.

4.3.–Teorema: Un mínimo local en C ° w - equidista al menos de tres puntos, siendo por tanto la intersección de al menos tres w - circunferencias.

Demostración

Por la forma en que hemos construido V_i, un punto extremo Q, se encuentra como la intersección de dos w - circunferencias. Ahora una w - circunferencia es el lugar geométrico de P_i con P_j digamos, y la otra, es el lugar geométrico de P_i con P_l, es decir, se cumple que:

$$d_i(P_i, Q) = d_j(P_j, Q) \qquad\qquad d_i(P_i, Q) = d_l(P_l, Q)$$

luego tenemos que $d_i(p_i, Q) = d_j(P_j, Q) = d_l(P_l, Q)$

Por lo tanto Q es la intersección de al menos tres w - circunferencias ■

Ahora bien, si el mínimo local se encuentra en un lado de S, entonces al menos se cumple una w - circunferencia pues el conjunto S es convexo y el máximo se encuentra entonces en un extremo.

Para construir el conjunto V_i, igual que cuando $w_i = w_j \quad \forall_{i,j}$ veremos algunas propiedades semejantes en aquel caso.

Sea $V_i(\alpha)$ la región formada por P_i, P_j, P_k.

En $V_i(\alpha)$ podemos tener los siguientes casos:

1) $C_{i,j} \wedge C_{i,k} = \phi$, entonces en esta región $C_{i,j} \subset C_{i,k}$ o viceversa, o bien ser $w_i > w_j$ y $w_k > w_i$, luego podemos prescindir de uno de ellos según la inclusión o el signo > o < ; en este caso del punto P_k.

2) $C_{i,j} \wedge C_{i,k} = \phi$,

Sea un punto de demanda $P_l \in V_i(\alpha)$, tendremos los siguientes casos:

a) Si $w_i > w_l \quad R_{i,l} = p_i + /p_l - p_i/^{-1}(p_l - p_i)(r_{i,l} - /p_i - A_l/)$

b) Si $w_i < w_l \quad R_{i,l} = p_l + /p_l - p_i/^{-1}(p_i - p_l)(r_{i,l} - /p_i - p_l/)$

c) Si $w_i = w_l \quad R_{i,l} = p_l + \dfrac{1}{2}(p_i - p_l)$

Por la propiedad anterior, sabemos que la solución es un punto w - equidistante de P_i, P_j, P_k;

es decir, los vértices de $V_i(\alpha)$ pertenecientes a V_i son los puntos intersección de algunas circunferencias. Esto nos sugiere un sistema de $\binom{n}{3}$ ecuaciones del tipo:

$$x^2 - 2a_{i,j}x + y^2 + 2b_{i,j}y + D_{i,j} = 0 \qquad C_{i,j}$$

$$x^2 - 2a_{i,k}x + y^2 + 2b_{i,k}y + D_{i,k} = 0 \qquad C_{i,k}$$

$$x^2 - 2a_{j,k}x + y^2 + 2b_{j,k}y + D_{j,k} = 0 \qquad C_{j,k}$$

Ahora bien, no siempre hay corte entre las circunferencias.
Supongamos el corte entre $C_{i,j}$ y $C_{i,k}$
resolviendo el sistema

$$x^2 - 2a_{i,j}x + y^2 + 2b_{i,j}y + D_{i,j} = 0$$

$$x^2 - 2a_{i,k}x + y^2 + 2b_{i,k}y + D_{i,k} = 0$$

Llamando $a_{i,j,k} = a_{i,k} - a_{i,j}$; $b_{i,k,j} = b_{i,k} - b_{i,j}$

$$D_{i,k,j} = D_{i,j} - D_{i,k} \; ; \; C_{i,k,j} = -b_{i,k,j} / a_{i,k}$$

$$d_{i,k,j} = -D_{i,k,j} / a_{i,k,j} \; ; \; A = C^2_{i,k,j} + 1$$

$$B = C_{i,k,j}\, d_{i,k,j} - a_{i,k,j}\, C_{i,k,j} - b_{i,k,j}$$

$$C = d_{i,k,j} - 2a_{i,k,j}\, d_{i,k,j} + D_{i,k,j}$$

Llamando $\Delta = B^2 - 4AC$, tendremos:

Si $\Delta < 0$ entonces no hay ningún corte, por lo que nos olvidamos de esa terna. Luego el orden de este método es menor que $O\binom{n}{3}$.

Si $\Delta \geq 0$ entonces hay corte entre las circunferencias.

Llamemos en este caso $Q^1_{j,k}$ $Q^2_{j,k}$ los dos puntos de corte; notemos que con la igualdad ambos puntos son el mismo. A continuación vemos si pertenecen a S.

Obtenemos los puntos $Q^1_{j,k}$ $Q^2_{j,k}$ como puntos de intersección de las circunferencias $C_{i,j}$ y $C_{j,k}$.

Al hacer el corte entre $C_{i,k}$ y $C_{j,k}$ nos da $Q^1_{i,j}$, $Q^2_{i,j}$.

De estas tres parejas de puntos, uno de los puntos en cada pareja, aparece en las otras tres, al menos una vez. Este es el punto extremo en cuestión, y decimos que P_j , P_k pertenece a $V_i(\alpha)$.

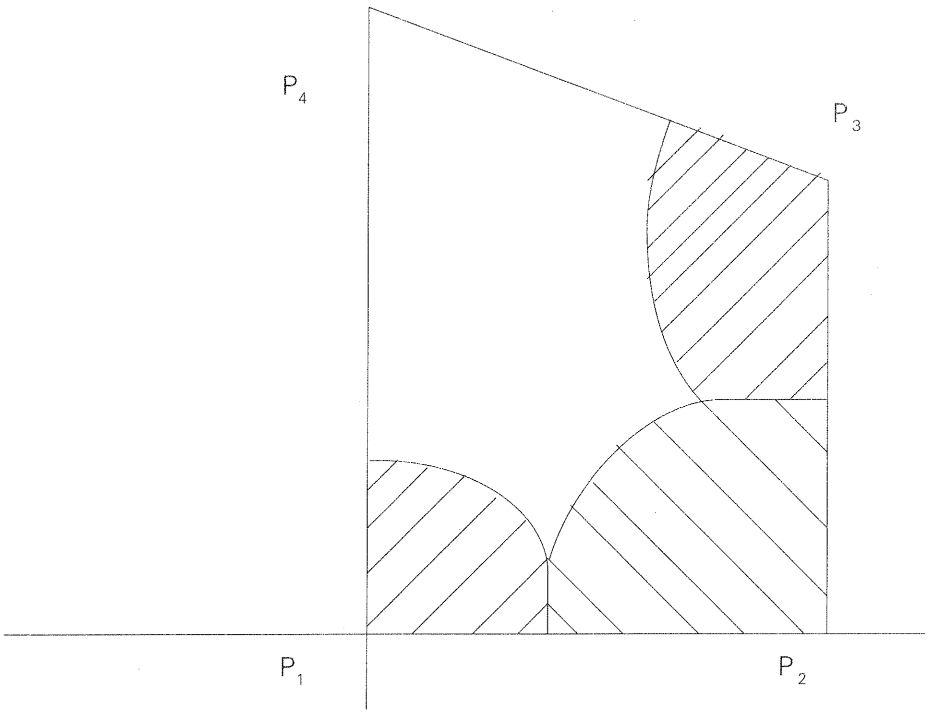
Si esto anterior no sucede, prescindimos de dichos puntos.

Pasamos a continuación a encontrar el óptimo en la frontera de S. Para ello, hemos de encontrar las intersecciones entre las w - circunferencias con las rectas que definen Fr (S).

También hemos de encontrar el óptimo en los extremos de Fr (S).

Para aclarar lo dicho anteriormente, realizamos el siguiente ejemplo con los puntos siguientes. (fig 4 . 2.)

i	x_i	y_i	w_i
1	0	0	3
2	3	0	2
3	3	3	2
4	0	4	1



(fig. 4 . 2.)

5.–BIBLIOGRAFIA

(1) Z. DREZNER - G . O . WESOLOWSKY,«A Maximin Location Problem with Maximun Distance Constraints», AIIE Transactions, 12, 249 - 252 (1980).

(2) B. DASARATHY - L . J . WHITE, «A Maximin Location Problem», Operations Research, 28, 1385-1400 (1980).

(3) P . HANSEN - D. PEETERS and J . F . Thisse, «An algorithm for a constrained Weber problem», Management Science, 28 , 1285 - 1295, (1982).

(4) Z . DREZNER - G . O . WESOLOWSKY, «Location of Multiple Obnoxius Facilities», Transportation Science 19, 193 - 202 (1985).

(5) E . MELACHRINOUDIS - T . P . CULLINAAE, «Locating on undesirable facility with a minimax criterion», European Journal of Operational Research 24, 239 - 146 (1986).

(6) M. I . SHAMOS, «Geometric Complexity», In Proceeding of the Seventh ACM Symposium on theory of Computing 224 - 233 (1975).

(7) M. I. SHAMOS - D. HOEY «Closest Point Problems», In 16th Annual IEEE Simposium on Foundations of Computer Science, 151 - 162 (1975).