



Facultad de Física

Departamento de Física de la Materia Condensada

———— TRABAJO FIN DE GRADO ————

**Fundamentos de la Teoría de la
Relatividad General: predicciones
teóricas y verificación experimental**

Laura Brenes Gil

Sevilla, Junio de 2018



Facultad de Física

Departamento de Física de la Materia Condensada

———— TRABAJO FIN DE GRADO ————

**Fundamentos de la Teoría de la
Relatividad General: predicciones
teóricas y verificación experimental**

El profesor tutor:

Fdo: **Diego Gómez García**

Catedrático de Universidad

Fdo: **Laura Brenes Gil**

A mis padres.

Resumen

En este libro se pretende que el lector adquiriera unas nociones básicas sobre la teoría de la relatividad general de Einstein. Para ello, en primera instancia, lo acercaremos al lenguaje en el que se escribe dicha teoría: la geometría semiriemanniana y la métrica de Schwarzschild. Se estudiarán, por tanto, los elementos geométricos necesarios para elaborarla, así como la descripción del espacio-tiempo que envuelve dicha teoría.

Una vez asentados los conocimientos tanto de las herramientas matemáticas que usaremos como del espacio de trabajo, procederemos a formular la teoría de la relatividad general de una forma compacta, sencilla y, a la vez, elegante, como son las ecuaciones de campo de Einstein. Tras dotar a las ecuaciones anteriormente mencionadas de un significado físico, se estudiará una única solución particular hallada por Schwarzschild.

Como es de esperar, no puede faltar la concordancia de la teoría formulada con los hechos experimentales, que estudiaremos en el último capítulo. Estos hechos proporcionan apoyo y consistencia a las predicciones teóricas.

Por último, el libro finaliza con un apéndice que será de utilidad para una lectura adecuada, ya que constituye la teoría previa a la que se desarrolla aquí, también formulada por Einstein: la teoría de la relatividad especial.

Abstract

This book pretends the reader to acquire basic notions about Einstein's theory of general relativity. To achieve it, in a first instance, we will introduce the language in which the theory is written: the semiriemannian geometry and the Schwarzschild's metric. Thus, we will study the required geometric elements to develop it, as well as the description of the spacetime where the theory is involved.

Once we settle the knowledge of the mathematical tools and the workspace, we proceed to formulate the general theory of relativity in a compact, simple and, at the same time, elegant way, as the Einstein's field equations are. After we endow these equations with their physical meaning, we will study a particular solution found by Schwarzschild for a mass point in an otherwise empty spacetime.

As required, the agreement between the formulated theory and the experimental results must be assessed, and this is the goal of the last chapter. These pieces of evidence provide support and consistency to the theoretical predictions.

Finally, the book concludes with an useful appendix to help the reader with the previous theoretical background, i.e., the theory of special relativity.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
1. Introducción	1
2. Fundamentos de la geometría semiriemanniana	5
2.1. Coordenadas curvilíneas en el espacio Euclídeo	5
2.1.1. Sistemas de coordenadas	5
2.1.2. Transformación de sistemas de coordenadas	7
2.2. Campos de tensores en un espacio vectorial	9
2.2.1. Ejemplos de tensores	10
2.2.2. Álgebra de tensores	11
2.3. Variedades Diferenciables	12
2.3.1. Espacios Topológicos	12
2.3.2. Variedades	13
2.4. Campos de tensores en variedades	15
2.5. Métrica	15
3. El espacio-tiempo de la relatividad general	19
3.1. Geodésicas	19
3.1.1. Ecuaciones de movimiento	20
3.1.2. La ecuación de la geodésica	21
3.2. Transporte paralelo de vectores a lo largo de una curva	22
3.3. Derivada absoluta y covariante	23

3.3.1.	Derivada absoluta	24
3.3.2.	Derivada covariante	26
3.4.	Espacio-tiempo	28
3.5.	Conexión entre el potencial gravitacional y la geodésica	30
3.6.	Tensores de curvatura	33
3.7.	Desviación geodésica	36
4.	Fundamentos de la teoría de gravitación de Einstein	39
4.1.	El tensor energía-momento	39
4.2.	Ecuaciones de campo de Einstein	42
4.2.1.	Ecuaciones de campo en el vacío	43
4.3.	Límite Newtoniano	43
4.3.1.	Límite en el vacío	44
4.3.2.	Límite a la ecuación de Poisson	45
4.4.	La solución de Schwarzschild	46
4.4.1.	Discusión general de la solución de Schwarzschild	49
4.5.	Longitud y tiempo	50
5.	Tests clásicos de la relatividad general	53
5.1.	El efecto Doppler gravitacional	53
5.2.	Movimiento general de partículas	56
5.2.1.	Partícula de masa m	56
5.2.2.	Fotones	58
5.3.	El perihelio de Mercurio	58
5.4.	La deflexión de la luz	61
I	Apéndice	65
A.	Breve repaso de la relatividad especial	67
A.1.	Cinemática relativista	68
A.2.	Dilatación del tiempo	69
A.3.	Contracción de longitudes	70

A.4. Dinámica relativista 71

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la relatividad especial fue formulada por Einstein en 1905, pero tan solo dos años después, él mismo advirtió que era incompatible con la teoría de la gravedad newtoniana, por lo que era necesaria una nueva teoría: La teoría de la relatividad general.

De acuerdo con la teoría desarrollada por Newton, si consideramos una partícula en un campo gravitatorio, esta sufre una aceleración causada por la fuerza gravitatoria:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.1)$$

donde el potencial ϕ está relacionado con la densidad de materia ρ local según la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.2)$$

siendo G la constante de gravitación universal.

Las incompatibilidades aparecen cuando ninguna de las ecuaciones anteriores permanecen invariantes bajo transformaciones de Lorentz (TL). Además, en la ecuación 1.1 aparecen vectores en lugar de cuadvectores y una segunda derivada temporal. Pero ¿con respecto al tiempo de qué observador derivamos?

Para Newton esto no suponía ningún problema, pues para él existía un solo tiem-

po absoluto correspondiente a un sistema de referencia absoluto ligado a las estrellas fijas, igual para cualquier observador; sin embargo, ya en la relatividad especial, cada observador tiene su tiempo propio.

Con respecto a la ecuación 1.2, vemos que aparece el operador laplaciano en vez del operador invariante bajo TL d'alambertiano $\square\phi$. Además, un cambio en la distribución de materia ρ produce una alteración inmediata en el potencial a velocidad infinita en todo el universo, en lugar de hacer uso de los potenciales retardados y avanzados como ocurriría con el d'alambertiano.

Aparte de que estamos hablando de velocidades superiores a la de la luz en el vacío, ¿con respecto a qué observador se da la simultaneidad del cambio en la distribución de materia en el universo y en el potencial, respectivamente? Si suponemos pues que la gravedad newtoniana usa un observador especial para que así se cumplan las ecuaciones anteriores ya estaríamos violando el Principio de la Relatividad, cuya idea principal es que las leyes físicas son las mismas en cualquier sistema de coordenadas.

Estos no son los únicos problemas que surgen; la ecuación 1.2 es válida para el caso estático, i.e., cuando la distribución de materia no varía, pero no explica bien el caso de fuentes no estáticas.

En resumidas cuentas, al incorporar la gravedad tenemos que tratar con observadores acelerados y no inerciales, no considerados por la relatividad especial. A Einstein se le ocurrió la idea de considerar las partículas libres en un sistema de referencia no inercial como partículas en un sistema de referencia inercial sobre las que actúa una fuerza ficticia: la gravedad.

Esto se puede considerar partiendo de que el *principio de equivalencia* es cierto, es decir, de que la masa inercial y gravitacional son idénticas. Esta igualdad condujo a Einstein a su experimento mental del ascensor en caída libre, donde la aceleración

de cualquier partícula respecto al ascensor es cero: la partícula y el ascensor tienen la misma aceleración relativa a la Tierra como resultado de la equivalencia entre masa gravitacional e inercial. Todas estas observaciones mentales se mantendrían exactamente si el campo gravitatorio de la Tierra fuese realmente uniforme. Pero esto no es así, pues actúa radialmente. Sin embargo, podemos considerar que el ascensor cae durante un corto periodo de tiempo y que es espacialmente pequeño, por tanto, podríamos considerarlo como un sistema de referencia inercial. De este modo, las leyes de la relatividad especial se mantendrían en el interior del ascensor.

La solución estará en considerar un espacio-tiempo con gravedad como un conjunto de pequeños trozos de espacio-tiempo plano, de forma que en cada trozo de cumplan las leyes de la relatividad especial y el conjunto forme un espacio que tiene curvatura globalmente. Así, las trayectorias de partículas aceleradas por la gravedad no son más que líneas rectas (trayectorias de partículas libres) en un espacio curvo.

Es necesario por tanto trabajar en un espacio con curvatura, pero que localmente parezca un espacio plano. Lo llamaremos *variedad* y a la herramienta de trabajo en dicho espacio, *geometría diferencial*.

Capítulo 2

Fundamentos de la geometría semiriemanniana

En este primer capítulo nos familiarizaremos con las herramientas matemáticas que son base para la teoría de la relatividad general de Einstein. Comenzaremos por tomar coordenadas en un sistema de referencia y estudiar las relaciones entre distintos sistemas de coordenadas. Aprenderemos qué es un tensor y cómo podemos trabajar con ellos, para así después poderlos emplear en nuestro espacio de trabajo, al que llamaremos variedad diferencial.

2.1. Coordenadas curvilíneas en el espacio Euclídeo

2.1.1. Sistemas de coordenadas

Sea el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Podemos tomar coordenadas cartesianas en dicho espacio (x, y, z) y referirlas a cualquier otro sistema de coordenadas (u, v, w) :

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (2.1)$$

y, en el caso en el que la matriz de cambio de base sea invertible:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (2.2)$$

Usando las ecuaciones 2.1, podemos construir un vector que dé la posición de los puntos en el espacio en función de las coordenadas u, v, w :

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}.$$

Si diferenciamos parcialmente la ecuación respecto de cada coordenada obtenemos un conjunto de vectores tangentes a las curvas coordenadas (no necesariamente ortogonales), obteniendo una base en cada punto P de \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}.$$

Análogamente, empleando las ecuaciones 2.2 y diferenciándolas, obtenemos una base alternativa en cada punto P, $\{\mathbf{e}^u, \mathbf{e}^v, \mathbf{e}^w\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^u &= \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}^v &= \nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}^w &= \nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

En el caso en que cada vector de las dos bases sean ortonormales entre sí, las bases coinciden. Una vez construidas las bases, podemos escribir cualquier vector en función de las mismas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \lambda^u \mathbf{e}_u + \lambda^v \mathbf{e}_v + \lambda^w \mathbf{e}_w, \\ \boldsymbol{\lambda} &= \lambda_u \mathbf{e}^u + \lambda_v \mathbf{e}^v + \lambda_w \mathbf{e}^w. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observación 1 (Criterio de suma de Einstein). *A partir de ahora, cada vez que aparezca un mismo índice como superíndice y como subíndice, se entenderá que se está sumando en él. Así, las ecuaciones 2.3 se pueden escribir como:*

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^i \mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_i \mathbf{e}^i.$$

Definición 1. *Las componentes λ^i de un vector $\boldsymbol{\lambda}$ que surgen de la base natural $\{\mathbf{e}_i\}$ reciben el nombre de **componentes contravariantes**, mientras que las componentes λ_i de un vector $\boldsymbol{\lambda}$ que surgen de la base dual $\{\mathbf{e}^i\}$ reciben el nombre de*

componentes covariantes.

Definición 2. Llamamos **coeficientes métricos** g_{ij} al producto escalar de los vectores i -ésimo y j -ésimo de la base natural, i.e., $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Análogamente, $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$.

Observación 2. Los coeficientes métricos son simétricos, i.e., $g_{ij} = g_{ji}$ y $g^{ij} = g^{ji}$. Además, $g_{kj}g^{ji} = \delta_k^i$, donde δ_k^i es la delta de Kronecker.

Definición 3. Podemos por tanto escribir el **producto escalar** de dos vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ como:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda^i \mathbf{e}_i \cdot \mu^j \mathbf{e}_j = g_{ij} \lambda^i \mu^j = \lambda_i \mathbf{e}^i \cdot \mu_j \mathbf{e}^j = g^{ij} \lambda_i \mu_j = \lambda_i \mu^i = \lambda^i \mu_i. \quad (2.4)$$

2.1.2. Transformación de sistemas de coordenadas

Consideremos dos sistemas de coordenadas curvilíneas en el espacio Euclídeo, que denotaremos por (u, v, w) y (u', v', w') , con bases $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}^i\}$ y $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, $\{\mathbf{e}^{i'}\}$ respectivamente.

Escalares

Definición 4. Llamamos **escalares** a aquellos elementos que permanecen invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

Un ejemplo de escalar sería el producto escalar de dos vectores.

Vectores contravariantes

Trabajando en la región donde ambos sistemas de coordenadas están bien definidos, podemos escribir uno en función del otro como $u^{i'} = u^i(u^j)$ y $u^i = u^i(u^{j'})$.

Sea

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \quad (2.5)$$

Observación 3. A partir de aquí notaremos $\mathbf{e}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ y $\mathbf{e}_{i'} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}}$.

En virtud de la regla de la cadena, si llamamos $U_j^{i'}$ a la matriz de derivadas parciales $\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}$, tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j},$$

de modo que

$$\mathbf{e}_j = U_j^{i'} \mathbf{e}_{i'}.$$

Así tenemos que $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^j \mathbf{e}_j = \lambda^j U_j^{i'} \mathbf{e}_{i'}$. Comparando con 2.5 tenemos la transformación para las componentes contravariantes de un vector:

$$\lambda^{i'} = U_j^{i'} \lambda^j.$$

Vectores covariantes

Sea $\boldsymbol{\mu} = \mu_{i'} \mathbf{e}^{i'}$. Por definición, $\mathbf{e}^i \equiv \nabla u^i$ y $\mathbf{e}^{i'} \equiv \nabla u^{i'}$. Por la regla de la cadena tenemos que:

$$\nabla u^j = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} \nabla u^{i'} \implies \mathbf{e}^j = U_{i'}^j \mathbf{e}^{i'}.$$

Así tenemos que $\boldsymbol{\mu} = \mu_j \mathbf{e}^j = \mu_j U_{i'}^j \mathbf{e}^{i'}$. Comparando tenemos la transformación para las componentes covariantes de un vector:

$$\mu_{i'} = U_{i'}^j \mu_j.$$

Coefficientes métricos

Partiendo de que $\mathbf{e}_{j'} = U_{j'}^i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}^{j'} = U_i^{j'} \mathbf{e}^i$, tenemos que:

$$g_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = (U_{i'}^k \mathbf{e}_k) \cdot (U_{j'}^l \mathbf{e}_l) = U_{i'}^k U_{j'}^l g_{kl},$$

de modo que la fórmula de transformación sería:

$$g_{i'j'} = U_{i'}^k U_{j'}^l g_{kl},$$

y análogamente

$$g^{i'j'} = U_k^{i'} U_l^{j'} g^{kl}.$$

2.2. Campos de tensores en un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales.

Definición 5. Dado $r \in \mathbb{N}$, sea $T_r^0(V) = \{f : V^r \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es } r\text{-lineal}\}$. Los elementos de $T_r^0(V)$ se llaman **tensores covariantes de tipo** $(0, r)$.

Podemos considerar su suma directa

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r^0(V),$$

que se denomina **álgebra de los tensores covariantes** de V .

Definición 6. Sean $\omega_r \in T_r^0(V)$, $\omega_s \in T_s^0(V)$. Se llama **producto tensorial** de ω_r y ω_s , que se denota por $\omega_r \otimes \omega_s$ a un elemento de $T_{r+s}^0(V)$, que será tal que si

$$(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \in V^{r+s},$$

entonces:

$$(\omega_r \otimes \omega_s)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) = \omega_r(v_1, \dots, v_r) \omega_s(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}).$$

Definición 7. Sea $r \in \mathbb{N}$. A los elementos de $T_0^r(V) = T_r^0(V^*)$ se les llaman **tensores contravariantes de tipo** $(r, 0)$, donde V^* es el dual de V . Al espacio

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_0^r(V),$$

se denomina **álgebra de los tensores contravariantes** de V .

Puesto que $T_0^1(V) = T_1^0(V^*) = V$, puede considerarse el producto tensorial de dos vectores de V . Por último definimos una nueva clase de tensores:

Definición 8. Sean $r, s \in \mathbb{N}$. Entonces, los elementos de $T_s^r(V) = \{f : V^s \times V^{*r} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es } (s+r)\text{-lineal}\}$ se llaman **tensores mixtos de tipo** (r, s) . Además, al conjunto $T(V) = \sum_{r,s \in \mathbb{N}} T_s^r(V)$ se le denomina **álgebra tensorial de** V .

Definición 9. Sean $T \in T_s^r(V)$ y $S \in T_{s'}^{r'}(V)$. Definimos el **producto tensorial** en $T(V)$ como

$$\left(\sum_{r,s} T_{(r,s)} \right) \otimes \left(\sum_{r',s'} S_{(r',s')} \right) = \sum_{r,s,r',s'} T_{(r,s)} \otimes S_{(r',s')}.$$

Sea $\{\mathbf{e}_a\}$ una base de $T(V)$. Entonces se induce una base dual en $T^*(V)$, $\{\mathbf{e}^a\}$ y una base para T_s^r , $\{\mathbf{e}_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_r}^{\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_s}\}$. Así, cada tensor $\tau \in T_s^r$ puede expresarse como:

$$\tau = \tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} \mathbf{e}_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_r}^{\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_s}.$$

Si cambiamos la base de $T(V)$, las componentes del tensor se verán afectadas de la siguiente forma:

$$\tau_{b'_1 \dots b'_s}^{a'_1 \dots a'_r} = X_{c_1}^{a'_1} \dots X_{c_r}^{a'_r} X_{b'_1}^{d_1} \dots X_{b'_s}^{d_s} \tau_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r}, \quad (2.6)$$

donde las matrices $[X_c^{a'}]$ y $[X_{b'}^d]$ son las matrices jacobianas del cambio.

2.2.1. Ejemplos de tensores

A continuación introducimos un par de tensores relevantes:

Definición 10. Definimos la **delta de Kronecker** como un tensor de rango $(1, 1)$:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{cuando } i \neq j \\ 1 & \text{cuando } i = j \end{cases}$$

Cabe destacar que la delta de Kronecker tendrá las mismas componentes en cualquier sistema de coordenadas empleado.

Definición 11. Se define el **tensor Levi-Civita** $\varepsilon^{i_1 \dots i_N}$ como:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_N} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } (i_1 \dots i_N) \text{ es una permutación par de } (12 \dots N) \\ -1 & \text{cuando } (i_1 \dots i_N) \text{ es una permutación impar de } (12 \dots N) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2.2.2. Álgebra de tensores

Definición 12. Llamamos *tensor simétrico* a aquel tensor que cumple que $T^{ij} = T^{ji}$. Diremos que es *antisimétrico* si se cumple que $T^{ij} = -T^{ji}$.

Por ejemplo, el tensor métrico $[g_{ij}]$ es simétrico. A continuación veremos cómo operaremos con estos nuevos elementos-

Suma de tensores

Sean $A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ y $B_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r}$ dos tensores de rango (r, s) . Entonces la operación suma genera otro tensor $C_{f_1 \dots f_s}^{e_1 \dots e_r}$ del mismo rango:

$$A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} + B_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r} = C_{f_1 \dots f_s}^{e_1 \dots e_r}.$$

Producto por un escalar

Sea $A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ un tensor de rango (r, s) . Multiplicar por un escalar genera otro tensor $B_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r}$ del mismo rango.

Producto de tensores

Sean $A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ un tensor de rango (r, s) y $B_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_p}$ un tensor de rango (p, q) . El producto de ambos genera un tensor de rango $(r + p, s + q)$.

Contracción de tensores

Comenzaremos por bajar y subir índices en un tensor. Sea $A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ un tensor de rango (r, s) . Podemos obtener un tensor de rango $(r - 1, s + 1)$ bajando índices, i.e.:

$$B_{kb_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{r-1}} = \delta_{kl} A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{r-1} l}.$$

Del mismo modo, podemos subir índices para conseguir un tensor de rango $(r + 1, s - 1)$. También podemos bajar índices mediante la **contracción** de un índice contravariante con uno covariante. Así, podemos conseguir un tensor de rango $(r -$

$1, s - 1)$ como:

$$B_{b_1 \dots b_{s-1}}^{a_1 \dots a_{r-1}} = A_{b_1 \dots b_{s-1} k}^{a_1 \dots a_{r-1} k}.$$

También podemos contraer dos índices del mismo tipo obteniendo un tensor de orden $(r - 2, s)$:

$$B_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{r-2}} = \delta_{kl} A_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{r-2} kl}.$$

Por último veremos como transforman las derivadas parciales. Consideremos la derivada parcial ∂_j actuando sobre un campo escalar ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} U_j^{i'},$$

de forma que ∂_j transforma como un vector covariante:

$$\partial'_j \phi = (U^{-1})^i_j \partial_i \phi.$$

Análogamente, la derivada $\partial^j \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ transforma como un vector contravariante.

2.3. Variedades Diferenciables

2.3.1. Espacios Topológicos

Definición 13. Un **espacio topológico** es un par (X, T) , donde X es un conjunto y T una familia de subconjuntos de X , llamada una **topología sobre X** y cuyos elementos son llamados **conjuntos abiertos**, verificándose las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío \emptyset y X son conjuntos abiertos.
2. La intersección finita de abiertos es abierta.
3. La unión de abiertos es abierta.

Definición 14. Un conjunto es **entorno** de un punto si y sólo si existe un abierto del conjunto que contenga al punto. Un conjunto es **abierto** si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

Definición 15. Diremos que un espacio topológico (X, T) es \mathbf{T}_2 o de **Hausdorff** si todo par de puntos distintos de X se pueden separar por abiertos disjuntos.

Definición 16. Diremos que un espacio topológico **segundo numerable** ($2^\circ N$) si T tiene una base numerable.

Definición 17. Una aplicación $f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ es un **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y con inversa continua.

2.3.2. Variedades

Una vez introducidos los espacios topológicos, estamos ya preparados para estudiar las variedades diferenciables. Una variedad es una abstracción de la idea de superficie suave en el espacio Euclídeo. Con este término lo que se pretende es introducir objetos locales en los cuales se pueda diferenciar y luego unirlos de forma suave.

Sea M un espacio topológico T_2 y $2^\circ N$.

Definición 18. Una **carta local** de dimensión m en M es un par (U, ϕ) tal que:

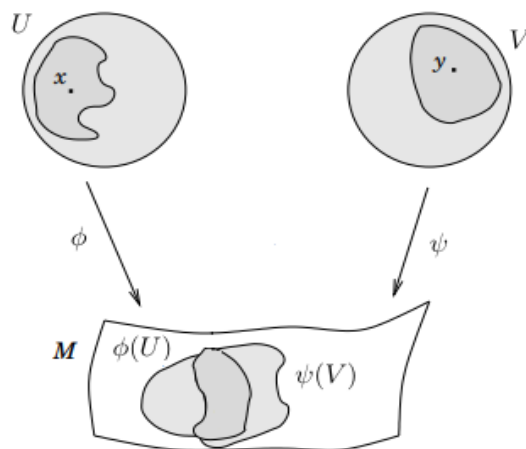
1. U es un abierto de M , llamado **dominio** de la carta.
2. ϕ es un homeomorfismo de U en un abierto $\phi(U)$ de \mathbb{R}^3 , llamado **aplicación coordenada** de la carta.

Definición 19. Se dice que dos cartas locales de dimensión m sobre M (U, ϕ) y (V, ψ) están **relacionadas** si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $U \cap V = \emptyset$
2. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las aplicaciones cambio de cartas, i.e.:

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \\ \phi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)\end{aligned}$$

son de clase C^∞ .

Figura 2.1: Diferentes cartas en M .

Definición 20. Un **atlas** de dimensión m en M es una familia de cartas locales de dimensión m sobre M tales que sus dominios recubren a M y que están relacionadas dos a dos.

Definición 21. Dos atlas de la misma dimensión sobre M se dicen **compatibles** si su unión es otro atlas. Esta relación de compatibilidad define una relación de equivalencia.

Por último, podemos definir nuestro espacio de trabajo para la teoría de la relatividad general:

Definición 22. Una **variedad diferenciable** de dimensión m es un par (M, A) donde M es un espacio topológico T_2 y $2^\circ N$ y A un atlas de dimensión m sobre M . A la clase de equivalencia por la relación de equivalencia del atlas A se le llama **estructura diferenciable** de la variedad.

A partir de ahora, por comodidad, se dirá que M es la variedad diferenciable, omitiendo nombrar explícitamente el atlas.

2.4. Campos de tensores en variedades

Sea $P \in M$, con M variedad diferenciable. Recordamos cómo se transforma un tensor bajo un cambio en el sistema de coordenadas (2.6):

$$\tau_{b'_1 \dots b'_s}^{a'_1 \dots a'_r} = X_{c_1}^{a'_1} \dots X_{c_r}^{a'_r} X_{b'_1}^{d_1} \dots X_{b'_s}^{d_s} \tau_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_r},$$

donde las matrices jacobianas $[X_c^{a'}]$ y $[X_b^d]$ están evaluadas en P . Si $\forall P \in U \subset M$ abierto tenemos un tensor de rango (r, s) definido, tendremos un campo de tensores en V .

A continuación veremos cómo asociar tensores de distinto rango contrayendo con el tensor métrico $[g_{ij}]$. Consideremos $\tau^{ab}{}_c$ las componentes de un tensor de rango $(2, 1)$. Entonces, podemos usar el tensor métrico para obtener un tensor de rango $(1, 2)$ de componentes $\tau_a{}^b{}_c$ como:

$$\tau_a{}^b{}_c = g_{ad} \tau^{db}{}_c.$$

Si usamos el tensor métrico contravariante $[g^{ij}]$ para subir el índice bajado, se recupera el tensor original:

$$g^{ad} \tau_a{}^b{}_c = g^{ad} g_{de} \tau^{eb}{}_c = \delta_e^a \tau^{eb}{}_c = \tau^{ab}{}_c.$$

Definición 23. Diremos que un tensor obtenido de subir o bajar índices de otro tensor original está **asociado** con este último.

Por último, aclaramos que las operaciones de tensores explicada en la sección 2,2,2 es válida en la variedad M .

2.5. Métrica

El tensor métrico g_{ab} nos proporciona un producto escalar interno definido en 2.4 para cada punto $P \in M$, con M variedad diferenciable. Normalmente pedi-

mos que un producto escalar sea definido positivo, es decir, $g_{ab}\lambda^a\lambda^b \geq 0$, $\forall \lambda^a$ y con $g_{ab}\lambda^a\lambda^b = 0$ si y solo si $\lambda^a = 0$. Sin embargo solo vamos a exigir que el tensor métrico sea no singular, existiendo así la matriz inversa $[g^{ab}]$.

En el marco de la relatividad general no vamos a tener una métrica definida positiva pues tendremos un tensor métrico indefinido. Por tanto, nos encontramos ante una descripción **semiriemanniana** del espacio. Bajo estas condiciones, podemos generalizar ciertas propiedades del espacio Euclídeo incluyendo valores absolutos.

Definición 24. Llamamos **longitud** de un vector λ^a a:

$$|g_{ab}\lambda^a\lambda^b|^{1/2} = |g^{ab}\lambda_a\lambda_b|^{1/2} = |\lambda_a\lambda^a|^{1/2}.$$

Diremos que dicho vector es **unitario** si su longitud es uno.

Como el tensor métrico es indefinido, existen vectores no nulos de longitud cero.

Definición 25. El **ángulo** θ entre dos vectores λ^a y μ^a no nulos se define como:

$$\cos \theta = \frac{\lambda \cdot \mu}{|\lambda| |\mu|}.$$

En nuestro caso, el ángulo está dado por

$$\cos \theta = \frac{g_{ab}\lambda^a\mu^b}{|g_{cd}\lambda^c\lambda^d|^{1/2} |g_{ef}\mu^e\mu^f|^{1/2}}.$$

Definición 26. Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

Definición 27. Sea γ una curva diferenciable en M variedad diferenciable dada por $x^a = x^a(t)$, con $t \in [a, b]$. Si notamos $\dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{dt}$, la **longitud** de γ será

$$L = \int_a^b |g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b|^{1/2} dt.$$

Podemos hallar la distancia entre dos puntos cercanos en una curva como la longitud de dicha curva entre esos puntos. Llamaremos a esta distancia **elemento**

de línea, que en su versión infinitesimal tiene la expresión siguiente:

$$ds^2 = | g_{ab} dx^a dx^b | .$$

Es espacio sobre el que se construye el espacio-tiempo de la teoría de la relatividad general es una variedad semiriemanniana de cuatro dimensiones cuyo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, con $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ está indefinido como $(+ - - -)$, i.e., en cada punto P tendremos un tensor métrico diagonal con un elemento positivo y el resto negativos.

Cualquier vector no nulo está descrito como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tipo temporal si} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu > 0 \\ \text{nulo si} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu = 0 \\ \text{tipo espacial si} & g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu < 0 \end{array} \right.$$

Capítulo 3

El espacio-tiempo de la relatividad general

En este capítulo se realiza un estudio exhaustivo de las geodésicas y su gran importancia para la física, en concreto, en el marco de la gravitación. Aprenderemos un nuevo concepto de derivada que nos llevará a formular en el marco de la relatividad general ecuaciones válidas en la física newtoniana. Para finalizar, conoceremos unos tensores relevantes relacionados con la curvatura y sus principales propiedades.

3.1. Geodésicas

Estamos acostumbrados a que cuando queremos ir de un sitio a otro por el camino más cercano, la trayectoria a seguir sea la recta que une esos dos lugares. Pues bien, una vez más, el sentido común nos juega una mala pasada. Lo anterior no es del todo cierto, y se debe a que depende de en qué espacio nos encontremos. En el espacio Euclídeo esta afirmación sí que sería cierta, pero en general, en un espacio cualquiera, lo común es que no lo sea. Esto nos lleva a introducir un nuevo concepto:

Definición 28. *Llamamos **geodésica** a la curva de mínima longitud que une dos puntos.*

Como hemos indicado, en el espacio Euclídeo las geodésicas son líneas rectas,

pero en general no se cumplirá en una variedad. ¿Qué condición debe satisfacerse para que una curva sea una geodésica? Este será nuestro propósito en este apartado.

3.1.1. Ecuaciones de movimiento

Consideremos una partícula libre. En ese caso, la Lagrangiana coincidirá con su energía cinética:

$$L = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = \frac{m}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Las ecuaciones de Lagrange que han de cumplirse son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} - \frac{\partial L}{\partial x^l} = 0. \quad (3.1)$$

De ahora en adelante notaremos $\frac{\partial}{\partial x^l}(\dots) = (\dots)_{,l}$. Por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} = mg_{il}\dot{x}^i, \quad \frac{\partial L}{\partial x^l} = L_{,l} = \frac{m}{2}g_{ij,l}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Y de 3.1 se tiene que

$$g_{il}\ddot{x}^i + g_{il,j}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{2}g_{ij,l}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0.$$

Despejando

$$g_{il,j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}(g_{il,j} + g_{jl,i})\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Multiplicando por $g^{\mu\nu}$ y sumando en l tenemos:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,$$

donde hemos escrito

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}). \quad (3.2)$$

En la ecuación 3.2 quedan definidos los **coeficientes de Christoffel**, que desempeñan un papel importante en la geometría diferencial. Estos coeficientes son simétricos

cos, i.e.:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

y como consecuencia, en el espacio tridimensional solo existen dieciocho coeficientes distintos.

3.1.2. La ecuación de la geodésica

Como hemos indicado, una geodésica debe minimizar la distancia entre dos puntos de una variedad:

$$\int ds = \text{extremo}.$$

Sin embargo, la labor se dificulta en un espacio semiriemanniano ya que ds^2 puede ser cero y negativo. Emplearemos por tanto el *Principio variacional*.

Sea t un parámetro inicialmente arbitrario que tome el mismo valor en los puntos inicial y final P y Q respectivamente. Entonces:

$$s = \int_P^Q ds = \int_P^Q \frac{ds}{dt} dt = \int_P^Q \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt = \text{extremo}. \quad (3.3)$$

Este problema variacional tiene la forma matemática del *Principio de Hamilton* con la Lagrangiana

$$L = \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} = \sqrt{F}, \quad x'^i \equiv \frac{dx^i}{dt}. \quad (3.4)$$

Por tanto, la geodésica debe cumplir las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'^l} - \frac{\partial L}{\partial x^l} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{il} x'^i}{\sqrt{F}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{F}} g_{ij,l} x'^i x'^j \\ &= \frac{1}{2F\sqrt{F}} \left[-\frac{dF}{dt} g_{il} x'^i + 2F \frac{d}{dt} (g_{il} x'^i) - F g_{ij,l} x'^i x'^j \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De las ecuaciones 3.3 y 3.4 se tiene que F es constante y de 3.5 obtenemos la ecuación diferencial de la geodésica:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Si elegimos t como un parámetro afín tenemos que la geodésica dada por $x^i(u)$ satisface:

$$\frac{d^2 x^k}{du^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} = 0.$$

donde Γ_{ij}^k son los *coeficientes de Christoffel* definidos en 3.2.

3.2. Transporte paralelo de vectores a lo largo de una curva

Sea γ una curva en el espacio tridimensional Euclídeo dada paramétricamente por $u^i(t)$, P_0 con parámetro t_0 un punto inicial en la curva y $\boldsymbol{\lambda}_0$ un vector. Podemos transportar el vector $\boldsymbol{\lambda}_0$ a lo largo de la curva γ sin cambiar su dirección o longitud, de forma que obtenemos un campo de vectores paralelos $\boldsymbol{\lambda}(t)$ a lo largo de γ . Puesto que no hay cambio en la longitud ni dirección, se satisface:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = 0, \text{ con } \boldsymbol{\lambda}_0(t) = \boldsymbol{\lambda}_0.$$

Escribiendo $\boldsymbol{\lambda}$ en la base natural, i.e., $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^i \mathbf{e}_i$ y usando puntos para diferenciar respecto a t tenemos:

$$0 = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \frac{d\lambda^i \mathbf{e}_i}{dt} = \dot{\lambda}^i \mathbf{e}_i + \lambda^i \dot{\mathbf{e}}_i. \quad (3.6)$$

Además, $\dot{\mathbf{e}}_i = \partial_j \mathbf{e}_i \dot{u}^j$ y en cada punto del espacio:

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

Sustituyendo en 3.6:

$$(\dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{u}^k) \mathbf{e}_i = 0 \implies \dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{u}^k = 0.$$

La ecuación anterior es la ecuación de transporte paralelo a lo largo de una curva en el espacio Euclídeo. Extendiéndola a una variedad M n-dimensional:

$$\dot{\lambda}^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \dot{x}^c = 0, \quad (3.7)$$

donde Γ_{bc}^a son los *coeficientes de Christoffel* definidos en 3.2 y \dot{x}^a es el vector tangente que surge de la parametrización $x^a(u)$ de la curva γ .

Supongamos ahora que transportamos un vector λ^a en P con parámetro u a lo largo de la curva parametrizada γ hasta un punto cercano Q , con parámetro $u + \delta u$. Sea $\bar{\delta}^a \equiv \lambda^a + \delta\lambda^a$ el vector transportado. Tenemos que:

$$\delta\lambda^a \simeq \frac{d\lambda^a}{du} \delta u.$$

De la ecuación 3.7 $\frac{d\lambda^a}{du} = -\Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du}$, llegando así a:

$$\bar{\lambda}^a \simeq \lambda^a - \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du} \delta u \simeq \lambda^a - \Gamma_{bc}^a \lambda^b \delta x^c, \quad (3.8)$$

así que tenemos una aplicación lineal desde el espacio tangente en P hasta el espacio tangente en Q .

3.3. Derivada absoluta y covariante

En esta sección consideramos campos definidos a lo largo de una curva mejor que en una región U de la variedad M cuyas componentes son funciones del parámetro u empleado para etiquetar los puntos de dicha curva, de modo que las derivadas serán respecto a u .

Cuando derivamos un campo de vectores respecto a u , el resultado no es necesariamente componente de un tensor. Por ello es necesaria una modificación de derivada total que dirige al concepto de *derivada absoluta*. Además, debemos modificar también las derivadas parciales de los campos de tensores definidos en una región, teniendo así la llamada *derivada covariante*.

Ambas derivadas dependen de la noción de paralelismo introducida previamente y suponen un papel importante en la formulación de la teoría de la relatividad

general.

3.3.1. Derivada absoluta

Sea $\lambda^a(u)$ un campo de vectores definido a lo largo de una curva γ dada paramétricamente por $x^a(u)$. Como hemos indicado previamente, las derivadas $\frac{d\lambda^a}{du}$ no son las componentes de un vector. Para verlo, usamos otro sistema de coordenadas (prima) que relacionamos con el anterior:

$$\frac{d\lambda^{a'}}{du} = \frac{d(X_b^{a'}\lambda^b)}{du} = X_b^{a'}\frac{d\lambda^b}{du} + X_{bc}^{a'}\frac{dx^c}{du}\lambda^b,$$

donde el término $X_{bc}^{a'} = \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^b \partial x^c}$ sería nulo si $\frac{d\lambda^a}{du}$ fuesen componentes de un vector.

Supongamos que tenemos P un punto de γ con valor de parámetro u y Q un punto cercano a P con valor de parámetro $u + \delta u$. Entonces $\lambda^a(u + \delta u)$ es un vector en Q . Sea $\bar{\lambda}^a$ el vector obtenido por transporte paralelo de $\lambda^a(u)$ en P a Q . La diferencia $\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a$ es un vector en Q , al igual que el cociente $\frac{\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a}{\delta u}$. Si hacemos $\delta u \rightarrow 0$, obtenemos la derivada absoluta $\frac{D\lambda^a}{du}$ de $\lambda^a(u)$ en γ . Así:

$$\lambda^a(u + \delta u) \simeq \lambda^a(u) + \frac{d\lambda^a}{du}\delta u,$$

y de la ecuación 3.8:

$$\frac{\lambda^a(u + \delta u) - \bar{\lambda}^a}{\delta u} \simeq \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b(u) \frac{\delta x^c}{\delta u}.$$

Definición 29. Llamamos **derivada absoluta** al límite del cociente que resulta al hacer $\delta u \rightarrow 0$ en la expresión anterior, con el punto Q tendiendo a P , i.e.,

$$\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du}, \quad (3.9)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en el mismo punto P de γ .

Así, la derivada absoluta de un campo de vectores λ^a a lo largo de una curva γ no solo involucra la derivada total $\frac{d\lambda^a}{du}$, sino también los coeficientes de conexión Γ_{bc}^a .

Cabe destacar que una vez definida la derivada absoluta, la ecuación 3.7 para el transporte paralelo de un vector contravariante a lo largo de una curva se reduce a $\frac{D\lambda^a}{du} = 0$. Esta condición puede ser extendida a un campo de tensores $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ definidos en la curva γ como $\frac{D\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}}{du} = 0$.

A continuación imponemos una serie de condiciones en el operador diferencial D/du aplicado a campos de tensores definidos a lo largo de una curva parametrizada por u :

1. D/du aplicado a un campo de tensores devuelve otro campo de tensores del mismo tipo.
2. D/du es un operador lineal:

$$D(\sigma_c^{ab} + \tau_c^{ab})/du = D\sigma_c^{ab}/du + D\tau_c^{ab}/du$$

$$D(k\tau_c^{ab})/du = k(D\tau_c^{ab}/du), \text{ con } k \text{ constante.}$$

3. D/du satisface la regla de Leibniz respecto al producto de tensores:

$$D(\sigma_b^a \tau^{cd})/du = (D\sigma_b^a/du)\tau^{cd} + \sigma_b^a(D\tau^{cd}/du).$$

4. $D\phi/du = d\phi/du, \forall \phi$ campo escalar.

A continuación veremos cómo resultarían las derivadas absolutas para ciertos campos:

Derivada absoluta de un campo escalar

De la condición cuarta:

$$\frac{D\phi}{du} = \frac{d\phi}{du}. \tag{3.10}$$

Derivada absoluta de un campo de vectores contravariantes

Notando las derivadas con puntos, la ecuación 3.9 queda como:

$$\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \dot{\lambda}^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \dot{x}^c. \quad (3.11)$$

Derivada absoluta de un campo de vectores covariantes

Sean μ_a y λ^a un campo de vectores covariantes y contravariantes respectivamente. Entonces $\lambda^a \mu_a$ es un campo escalar. Usando 3.10 y la condición 3 se obtiene:

$$\frac{D\mu_a}{du} = \dot{\mu}_a - \Gamma_{ac}^d \mu_d \dot{x}^c.$$

Derivada absoluta de un campo de tensores de tipo (r, s)

Sea $\tau_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ un tensor de tipo (r, s) . Su derivada covariante estará dada por la suma de las derivadas totales $\dot{\tau}_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$ de sus componentes, r términos de la forma $\Gamma_{cd}^{a_k} \tau_{\dots c \dots}^{\dots} \dot{x}^d$ y s términos de la forma $-\Gamma_{b_k d}^c \tau_{\dots c \dots}^{\dots} \dot{x}^d$. Por ejemplo:

$$\frac{D\tau_c^{ab}}{du} = \dot{\tau}_c^{ab} + \Gamma_{de}^a \tau_c^{db} \dot{x}^e + \Gamma_{de}^b \tau_c^{ad} \dot{x}^e - \Gamma_{ce}^d \tau_d^{ab} \dot{x}^e.$$

3.3.2. Derivada covariante

La derivada covariante surge cuando el campo de tensores está definido en un abierto $U \subseteq M$ variedad diferenciable. De modo que sea λ^a un campo de vectores contravariantes definido en U y sea γ una curva en U . Entonces, podemos restringir λ^a a γ y por 3.11:

$$\frac{D\lambda^a}{du} \equiv \dot{\lambda}^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \dot{x}^c,$$

pero $\dot{\lambda}^a = \frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} \dot{x}^c$, así que:

$$\frac{D\lambda^a}{du} = \left(\frac{\partial \lambda^a}{\partial x^c} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \right) \dot{x}^c.$$

La expresión entre paréntesis constituye las componentes de un tensor de tipo $(1, 1)$ que no depende de la curva, tan solo de las componentes λ^a y de sus derivadas

en el punto en cuestión.

Observación 4. Recordamos que abreviábamos $\partial/\partial x^a$ como ∂_a . También es válido notarlo con una coma seguida de un subíndice a escrito después del objeto sobre el que se actúa.

Definición 30. Llamamos **derivada covariante** a la expresión anteriormente descrita, y la notamos por $\lambda^a_{;c}$:

$$\lambda^a_{;c} = \partial_c \lambda^a + \Gamma_{bc}^a \lambda^b = \lambda^a_{,c} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b.$$

Vemos ahora cómo queda la derivada covariante para ciertos campos.

Derivada covariante para un campo escalar

Sea ϕ un campo escalar. Entonces:

$$\phi_{;a} \equiv \partial_a \phi.$$

Derivada covariante para un campo de vectores contravariantes

Sea λ^a un campo de vectores contravariantes. La derivada covariante será:

$$\lambda^a_{;b} \equiv \partial_b \lambda^a + \Gamma_{cb}^a \lambda^c.$$

Derivada covariante para un campo de vectores covariantes

Supongamos μ_a un campo de vectores covariantes. Tenemos que:

$$\mu_{a;c} \equiv \partial_c \mu_a - \Gamma_{ac}^b \mu_b.$$

Derivada covariante para un campo de tensores

Consideremos ahora un campo de tensores τ^{ab} de tipo (2, 0). Entonces:

$$\tau^{ab}_{;c} \equiv \partial_c \tau^{ab} + \Gamma_{dc}^a \tau^{db} + \Gamma_{dc}^b \tau^{ad}.$$

Si tenemos un tensor de tipo $(0, 2)$:

$$\tau_{ab;c} \equiv \partial_c \tau_{ab} - \Gamma_{ac}^d \tau_{db} - \Gamma_{bc}^d \tau_{ad}.$$

Análogamente se pueden hallar fácilmente las expresiones de las derivadas covariantes de campos de tensores de otros rangos.

Observación 5. *El tensor métrico g_{ab} , el campo de tensores de la delta de Kronecker con componentes δ_b^a y el campo de tensores métricos contravariantes g^{ab} tienen derivadas covariantes nulas, y en una curva γ sus derivadas absolutas también son cero:*

$$\begin{aligned} g_{ab;c} = 0, \quad \delta_{b;c}^a = 0, \quad g^{ab}{}_{;c} = 0; \\ Dg_{ab}/du = 0, \quad D\delta_b^a/du = 0, \quad Dg^{ab}/du = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.4. Espacio-tiempo

El espacio-tiempo de la relatividad general es una variedad diferenciable semi-riemanniana cuatridimensional con la propiedad de que existe un sistema local de coordenadas llamadas coordenadas en el que el tensor métrico toma la forma:

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usamos x^μ para representar los puntos del espacio-tiempo, donde los índices griegos toman los valores $0, 1, 2, 3$. Denotarán $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. A cada punto del espacio-tiempo se le denominará *suceso*.

Teorema 1. *Sean M v.d. semi-riemanniana de dimensión 4, $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ los coeficientes de Christoffel y $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Entonces, en cada punto $P \in M$ existe un*

sistema de coordenadas en el cual

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \approx 0, \quad g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}.$$

Sea $P \in M$ en el que $(\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu})_P = 0$ y $(x^{\mu})_P = (0, 0, 0, 0)$. Es decir, $(\partial_{\sigma}g_{\mu\nu})_P = 0$, y para los puntos cercanos a P donde las coordenadas x^{μ} son pequeñas, en virtud del teorema de Taylor, se tiene:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu})_P x^{\alpha}x^{\beta}.$$

Así, para puntos muy cercanos a P , el segundo término se anula, de forma que $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$, aproximación que será válida hasta que las segundas derivadas sean más relevantes.

Corolario 1. *En la relatividad especial tenemos sistemas de coordenadas cartesianas globales en los que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ exactamente, mientras que en la relatividad general solo tenemos sistemas locales de coordenadas cartesianas en los que $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$.*

En vista de lo anterior podemos afirmar que el espacio-tiempo de la relatividad especial es *plano*, mientras que el de la relatividad general es *curvo*.

A continuación presentamos un principio que permite transformar ecuaciones válidas en relatividad especial a la relatividad general en cualquier sistema de coordenadas:

Principio del mínimo acoplo: *Las leyes de la física en espacios curvos son las mismas que las de la relatividad especial, donde se sustituyen las derivadas parciales ∂_{μ} por derivadas covariantes, las derivadas totales por absolutas y la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu\nu}$.*

Por ejemplo, consideremos el camino de una partícula con masa en la relatividad especial. Si su velocidad es $u^{\mu} \equiv dx^{\mu}/d\tau$, donde τ es su tiempo propio definido por

$$c^2\tau^2 \equiv \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu},$$

entonces generalizando a la relatividad general, el tiempo propio quedará definido por

$$c^2 d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.13)$$

3.5. Conexión entre el potencial gravitacional y la geodésica

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas en el que el campo de tensor métrico viene dado por

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

donde $h_{\mu\nu}$ es una cantidad pequeña y cuasiestática, i.e., $\partial_0 h_{\mu\nu} \equiv c^{-1} \partial h_{\mu\nu} / \partial t \ll \partial_i h_{\mu\nu}$.

Nuestro objetivo es obtener una aproximación de la ecuación de la geodésica cuando $g_{\mu\nu}$ no es exactamente $\eta_{\mu\nu}$. Usaremos la coordenada temporal t definida como $x^0 \equiv ct$ en lugar de τ .

Lema 1. *En el contexto definido anteriormente, la ecuación de la geodésica para una partícula libre tiene la forma*

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = h(t) \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (3.14)$$

donde

$$h(t) \equiv -\frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} = \frac{d^2 \tau}{dt^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

Demostración:

Sabemos que la ecuación de la geodésica es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

donde τ es el tiempo propio. Por tanto,

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Despejando de 3.14 y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \left[h(t) \frac{dx^\mu}{dt} - \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Veamos si la función $h(t)$ propuesta cumple la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{dx^\mu}{dt} - \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (3.16)$$

Escribiendo $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{dx^\mu}{dt} \frac{d^2 t}{d\tau^2}$ se obtiene que 3.16 es igual a cero.

Por último, veamos que $h(t)$ se puede escribir también de la segunda forma:

$$-\frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} = -\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} = -\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = -\frac{dt}{d\tau} \frac{d^2 \tau}{dt^2} = \frac{d^2 \tau}{dt^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1},$$

lo cual termina la demostración.

□

Dividiendo por c^2 , la parte espacial de la ecuación 3.14 queda

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) + \Gamma_{jk}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{dx^k}{dt} \right) = \frac{1}{c} h(t) \left(\frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \right). \quad (3.17)$$

El último término de la izquierda es despreciable. Escribiendo $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} h_{\sigma\rho}$ y desarrollando hasta primer orden

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad y \quad \Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}).$$

Hasta primer orden,

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\rho}(\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00}), \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00} = \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00},\end{aligned}\tag{3.18}$$

donde hemos despreciado $\partial_0 h_{\mu\nu}$. Análogamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\rho}(\partial_0 h_{j\rho} + \partial_j h_{0\rho} - \partial_\rho h_{0j}), \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}).\end{aligned}$$

Ya hemos aproximado todos los términos del miembro de la izquierda; a continuación aproximaremos el de la derecha. Siguiendo los mismos pasos y despreciando cuadrados y productos de $c^{-1}dx^i/dt$, tenemos de

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt},$$

que

$$\begin{aligned}d\tau/dt &= (1 + h_{00})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h_{00}, \\ d^2\tau/dt^2 &= \frac{1}{2}ch_{00,0}, \\ \frac{1}{c}h(t) &= \frac{1}{2}h_{00,0}(1 - \frac{1}{2}h_{00}) = \frac{1}{2}h_{00,0}.\end{aligned}$$

De ahí se sigue que el lado de la derecha de 3.17 es despreciable, así que tenemos que

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} - \delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})\frac{1}{c}\frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Introduciendo la masa m de la partícula y reagrupando términos:

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\delta^{ij}\partial_j\left(\frac{1}{2}c^2h_{00}\right) + mc\delta^{ik}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})\frac{dx^j}{dt}.$$

Los términos de la izquierda son masa \times aceleración, así que el lado derecho es la fuerza gravitatoria en la partícula. El primer término de la derecha es la fuerza $-m\nabla V$, con $V \equiv 1/2c^2h_{00}$ potencial; el segundo término de la derecha representa la dependencia con la velocidad debida a una rotación.

Si empleamos un sistemas de coordenadas no rotatorio en el cual $\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j} = 0$, tenemos

$$d^2 x^i / dt^2 = -\delta^{ij} \partial_j V, \quad \text{con} \quad V \equiv \frac{1}{2} c^2 h_{00} + \text{constante}.$$

Esta es la ecuación de movimiento newtoniana para una partícula en un campo gravitatorio de potencial v . Esto da

$$g_{00} = 2V/c^2 + \text{constante},$$

y si elegimos esa constante como 1, entonces g_{00} debe tomar su valor en el espacio-tiempo plano cuando $V = 0$. Por tanto,

$$g_{00} = 1 + 2V/c^2, \quad (3.19)$$

relaciona g_{00} con el potencial newtoniano V en esta aproximación.

3.6. Tensores de curvatura

Sean M una v.d. N -dimensional, a, b , etc., índices latinos de 1 a N y μ, ν , etc., índices griegos de 0 a 3. Hemos definido la derivada covariante de un campo de vectores covariantes λ_a como

$$\lambda_{a;b} \equiv \partial_b \lambda_a - \Gamma_{ab}^d \lambda_d.$$

Aunque exista una relación tan directa con la derivada parcial, existe una diferencia fundamental: mientras que en las derivadas parciales no importa el orden de las mismas, en las derivadas covariantes sí que es un factor a tener en cuenta, pues cambia el resultado notablemente. Si derivamos el campo $\lambda_{a;b}$ covariantemente resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_{a;bc} &= \partial_c (\lambda_{a;b}) - \Gamma_{ac}^e \lambda_{e;b} - \Gamma_{bc}^e \lambda_{a;e} = \\ &= \partial_c \partial_b \lambda_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) \lambda_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c \lambda_d - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \lambda_e - \Gamma_{eb}^d \lambda_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e \lambda_a - \Gamma_{ae}^d \lambda_d). \end{aligned}$$

Intercambiando b y c y restando podemos observar cómo varía el resultado al cambiar el orden de las derivadas covariantes:

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d.$$

Definición 31. Llamamos *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* al tensor de tipo $(1,3)$ siguiente:

$$R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d. \quad (3.20)$$

Observación 6. Las derivadas covariantes de un tensor pueden ser intercambiadas si y solo si $R_{bcd}^a = 0$.

Una vez introducido el tensor de Riemann, podemos dar una definición formal de espacio plano:

Definición 32. Sea M una v.d. Se dirá que $U \subseteq M$ abierto es **plano** si en cada punto $P \in U$ se verifica que $R_{bcd}^a = 0$. En otro caso, se dirá que U es **curvo**.

En principio R_{bcd}^a tiene N^4 componentes, pero en realidad gracias a las simetrías que cumple, que se ven seguidamente, se reduce a $N^2(N^2 - 1)/12$ componentes independientes.

Identidad cíclica: $R_{bcd}^a + R_{cbd}^a + R_{dbc}^a = 0$.

Escribiendo $R_{abcd} \equiv g_{ae} R_{bcd}^e$ podemos escribir las simetrías de forma simplificada:

Teniendo en cuenta las siguientes expresiones y manipulando un poco:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abc} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc}), \\ \Gamma_{abc} &= g_{ad} \Gamma_{bc}^d, \\ \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} &= \partial_c g_{ab}, \end{aligned}$$

obtenemos:

$$R_{abcd} \equiv \frac{1}{2}(\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_a \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}) - g^{ef}(\Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}),$$

de donde es fácil ver las siguientes relaciones de simetría:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{bacd}, \\ R_{abcd} &= -R_{abdc}, \\ R_{abcd} &= R_{cdab}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De lo anterior se sigue que $R^a_{acd} = 0$. De las derivadas covariantes también surge otra identidad:

Identidad de Bianchi: $R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0$.

A continuación vemos otros elementos relevantes que surgen del tensor de curvatura:

Definición 33. Llamamos **tensor de Ricci** (simétrico) a la contracción del tensor de curvatura:

$$R_{ab} \equiv R^c_{abc}.$$

Definición 34. Llamamos **escalar de curvatura** a la contracción del tensor de Ricci:

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R^a_a.$$

Definición 35. Llamamos **tensor de Einstein** al tensor simétrico G_{ab} a:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}.$$

Lema 2. La divergencia del tensor de Einstein $G^{ab}{}_{;a}$ es cero.

Demostración:

Contrayendo a con d en la identidad de Bianchi resulta

$$R_{bc;e} + R^a_{bae;e} + R^a_{bec;a} = 0,$$

o, con la segunda ecuación de 3.21,

$$R_{bc;e} - R_{be;c} + R^a_{bec;a} = 0.$$

Subiendo b y contrayendo con e :

$$R_{c;b}^b - R_{;c} + r^{ab}{}_{bc;a} = 0.$$

Pero de la tercera ecuación de 3.21,

$$R^{ab}{}_{bc;a} = R^{ba}{}_{cb;a} = R_{c;a}^a = R_{c;b}^b,$$

así que lo anterior queda reducido a

$$2R_{c;b}^b - R_{;c} = 0,$$

que, dividiendo por dos y usando la primera ecuación para la delta de 3.12, da:

$$\left(R_c^b - \frac{1}{2} R \delta_c^b \right)_{;b} = 0.$$

Por tanto, $G_{c;b}^b = 0$, que implica que $G^{bc}{}_{;b} = 0$.

□

3.7. Desviación geodésica

En esta sección vamos a ver cuál es la desviación entre dos geodésicas cercanas.

Sean $x^a(u, p)$ una familia de geodésicas y u, p los parámetros.

Consideremos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x^a}{\partial u} \equiv t^a, \quad \frac{\partial x^a}{\partial p} \equiv \xi^a, \quad \frac{\partial t^a}{\partial p} \equiv \frac{\partial \xi^a}{\partial u},$$

donde el vector tangente t^a apunta en la dirección de la velocidad, y $\xi^a dp$ es el vector de desplazamiento entre dos geodésicas cercanas. Según la definición de derivada

absoluta para un campo de vectores contravariantes dada por la ecuación 3.9:

$$\begin{aligned}\frac{Dt^a}{dp} &= \frac{\partial^2 x^a}{\partial u \partial p} + \Gamma_{cb}^a t^c \xi^b, \\ \frac{D\xi^a}{du} &= \frac{\partial^2 x^a}{\partial u \partial p} + \Gamma_{cb}^a \xi^c t^b.\end{aligned}$$

De modo que gracias a la simetría de los coeficientes de Christoffel $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$, se tiene que

$$\frac{Dt^a}{dp} = \frac{D\xi^a}{du}.$$

Calculemos ahora $\frac{D^2 \xi^a}{du^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{D^2 \xi^a}{du^2} &= \frac{D}{du} \left(\frac{Dt^a}{dp} \right) = \frac{D}{du} \left(\frac{\partial t^a}{\partial p} + \Gamma_{cb}^a t^c \xi^b \right) = \\ &= \frac{\partial^2 t^a}{\partial u \partial p} + \Gamma_{cb,d}^a t^d t^c \xi^b + \Gamma_{cb}^a \left(\frac{\partial t^c}{\partial u} \xi^b + t^c \frac{\partial \xi^b}{\partial u} \right) + \Gamma_{ef}^a \left(\frac{\partial t^e}{\partial p} + \Gamma_{cb}^e t^c \xi^b \right) t^f.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Podemos simplificar la ecuación anterior utilizando que:

$$0 = \frac{D}{dp} \frac{Dt^a}{du} = \frac{D}{dp} \left(\frac{\partial t^a}{\partial u} + \Gamma_{cb}^a t^c t^b \right).$$

Esto conduce a

$$\frac{\partial^2 t^a}{\partial u \partial p} = -\Gamma_{cb,d}^a \xi^d t^c t^b - \Gamma_{cb}^a \left(\frac{\partial t^c}{\partial p} t^b + \frac{\partial t^b}{\partial p} t^c \right) - \Gamma_{ef}^a \left(\frac{\partial t^e}{\partial u} + \Gamma_{cb}^e t^c t^b \right) \xi^f.$$

Sustituyendo en 3.22 y teniendo en cuenta la simetría de los coeficientes de Christoffel se tiene:

$$\frac{D^2 \xi^a}{du^2} = t^d t^c \xi^b (\Gamma_{cb,d}^a - \Gamma_{cd,b}^a + \Gamma_{ed}^a \Gamma_{cb}^e - \Gamma_{eb}^a \Gamma_{cd}^e).$$

Por la definición de tensor de curvatura y usando las propiedades 3.21 se tiene que:

$$\frac{D^2 \xi^a}{du^2} = t^d t^c \xi^b R_{cdb}^a.$$

De modo que la *ecuación de la desviación de la geodésica* es:

$$\frac{D^2 \xi^a}{du^2} + R_{cbd}^a \xi^b \dot{x}^c \dot{x}^d = 0. \quad (3.23)$$

Cabe destacar que en una v.d. plana ($R_{bcd}^a = 0$), y en coordenadas cartesianas $D/du = d/du$, la ecuación anterior se reduce a $\frac{D^2 \xi^a}{du^2}$.

Capítulo 4

Fundamentos de la teoría de gravitación de Einstein

En este capítulo estudiaremos un nuevo tensor que será clave para la relatividad general. En él quedará recogida toda la información referente al objeto masivo que produce un campo gravitatorio. Además, estableceremos la relación existente entre dicha masa y la deformación producida en la curvatura del espacio-tiempo. A esta relación se le conoce como ecuaciones de campo de Einstein, que formulan toda la teoría de la relatividad general de una forma sencilla y elegante. Para finalizar, estudiaremos una solución particular hallada por Schwarzschild a estas ecuaciones y el significado físico de la misma.

4.1. El tensor energía-momento

Consideremos en primer lugar una v.d. plana y un sistema de coordenadas inercial. Antes de introducir el tensor energía-momento necesitamos algunas nociones previas. Puesto que vamos a trabajar con vectores de tres y cuatro componentes, los denotamos como:

$$\lambda^\mu \equiv (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \equiv (\lambda^0, \boldsymbol{\lambda}).$$

Consideremos una partícula que se mueve en la variedad. Usaremos cantidades

como:

$$\begin{aligned}
 m &\equiv \text{masa propia de la partícula,} \\
 t &\equiv \text{tiempo propio,} \\
 \gamma &\equiv dt/d\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \text{ donde } v \text{ es la velocidad de la partícula,} \\
 E &\equiv \gamma mc^2 \equiv \text{energía de la partícula,} \\
 u^\mu &\equiv dx^\mu/d\tau \equiv \text{velocidad del mundo,} \\
 v^\mu &\equiv dx^\mu/dt \equiv u^\mu/\gamma \equiv \text{componentes de la velocidad,} \\
 p^\mu &\equiv mu^\mu \equiv \text{tetravector momento de la partícula.}
 \end{aligned}$$

Para una partícula en movimiento, $p^\mu \equiv mu^\mu = \gamma mv^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p})$, es decir, en la relatividad, energía y momento son las componentes temporal y espaciales del tetravector p^μ .

Si pasamos a una distribución continua de materia como puede ser un fluido perfecto, hemos de emplear tanto sus campos escalares y vectoriales característicos. Estos son su densidad ρ , su presión p y su velocidad del mundo u^μ respectivamente. Para que ρ sea un campo escalar hemos de definir la *densidad propia*, que es la masa propia por unidad de volumen. En lugar del tetravector momento p^μ usaremos el tetravector densidad momento ρu^μ .

Buscamos un tensor que represente la energía del fluido y que cuando trabajemos en una variedad curva pueda actuar como fuente del campo gravitatorio. Puesto que en relatividad no hay distinción entre energía y masa, todas las formas de energía producen un campo gravitatorio. Es más, la fuente debe contener el tetravector densidad momento del fluido. Definimos por tanto el tensor energía-momento para un fluido perfecto:

Definición 36. Llamamos *tensor energía-momento* para un fluido perfecto en una variedad diferencial plana a

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu},$$

donde p es la presión del fluido y ρ su densidad.

Lo primero que debemos observar es que el tensor es simétrico, i.e.,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

Además se tiene que

$$T^{\mu\nu}u_\nu = c^2(\rho + p/c^2)u^\mu - pu^\mu = c^2\rho u^\mu,$$

de modo que $T^{\mu\nu}u_\nu$ es, salvo un factor c^2 , el tetravector densidad momento del fluido.

Observación 7. Las ecuaciones de continuidad del fluido quedan recogidas como $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, i.e., divergencia del tensor energía momento es cero.

La ecuación anterior no es más que una ecuación de continuidad que rige el movimiento de la materia bajo la influencia de un campo gravitatorio.

Ahora ya podemos dar el salto a una variedad curva. Para ello empleamos el principio de mínimo acoplo:

Definición 37. Llamamos **tensor energía-momento** para un fluido perfecto en una variedad diferencial curva a

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

donde p es la presión del fluido y ρ su densidad.

Por último, en virtud de la observación anterior y del principio de mínimo acoplo se tiene que la derivada covariante del tensor en cuestión es nula:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0.$$

4.2. Ecuaciones de campo de Einstein

Como ya sabemos, la idea de la teoría de la gravitación de Einstein se basa en geometrizar la fuerza gravitatoria. En 1909-13 Einstein se dio cuenta de que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que describe la geometría del espacio-tiempo parece estar relacionado con la cantidad de materia en la región en cuestión. Los campos gravitatorios están producidos por la materia, entendiéndose materia en el contexto de la relatividad general. Es por ello por lo que se comienza a buscar unas ecuaciones que plasmen dicha relación, conocidas como *ecuaciones de campo*.

Parece razonable que las ecuaciones de campo satisfazcan ciertos requisitos:

1. Las ecuaciones de campo deben ser ecuaciones de tensores (independientes del sistema de coordenadas).
2. Al igual que las otras ecuaciones de campo de la física, deben ser ecuaciones diferenciales (parciales) de al menos segundo orden en las funciones a determinar (las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$).
3. También deben, en el límite, tender a la *ecuación de Poisson* 1.2: $\nabla^2 = 4\pi G\rho$.
4. Como el tensor energía-momento es el análogo de la densidad de masa en la relatividad especial, dicho tensor debería ser la causa (fuente) del campo gravitatorio.
5. Si la variedad diferencial M es plana, entonces $T^{\mu\nu}$ debe ser nulo.

De lo anterior se deduce que necesitamos un tensor que contenga solo derivadas de la métrica de mínimo segundo orden. Por la condición 4 se sigue que las **ecuaciones de campo** tienen la forma:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde la constante κ está aún sin determinar y $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. Esta expresión es consistente con la simetría y la divergencia cero del tensor energía-momento si y solo si:

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \text{y} \quad G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu},$$

pero eso ya lo teníamos de antes.

Las ecuaciones de campo de Einstein muestran cómo la curvatura del espacio (representada por el tensor de Ricci) está relacionada con la distribución de materia (representado por el tensor energía-momento). Constituyen un total de diez ecuaciones diferenciales para hallar los diez coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$. Sin embargo, incluso sujeto a condiciones iniciales, el sistema no tiene solución única, siendo siempre posible llevar a cabo transformaciones de coordenadas.

4.2.1. Ecuaciones de campo en el vacío

Las ecuaciones de campo 4.2 también pueden ser escritas como:

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g^{\mu\nu} \right), \quad (4.3)$$

donde $T = T^\mu_\mu$.

Definición 38. *Se dirá que una región está **vacía** si $T^{\mu\nu} = 0$, i.e., si dicha región no contiene materia ni tampoco energía radiactiva o momento.*

De la ecuación 4.3 se sigue fácilmente que para una región vacía las ecuaciones de campo toman la forma:

$$R^{\mu\nu} = 0.$$

4.3. Límite Newtoniano

A continuación vamos a comprobar la validez de las ecuaciones de campo de Einstein en el límite newtoniano. Lo haremos en primer lugar en el vacío, y finalmente, en general.

4.3.1. Límite en el vacío

Hemos visto que en vacío las ecuaciones de campo se reducen a $R^{\mu\nu} = 0$. Considerando τ como parámetro, la ecuación de la desviación geodésica 3.23 se escribe como

$$D^2\xi^\mu/d\tau^2 + R^\mu_{\sigma\nu\rho}\xi^\nu\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = 0,$$

donde $\xi^\mu(\tau)$ es el vector que conecta puntos de geodésicas próximas. Comparando con el homólogo newtoniano, podemos escribirlo como

$$D^2\xi^\mu/d\tau^2 = -K_\nu^\mu\xi^\nu, \quad (4.4)$$

donde $K_\nu^\mu \equiv R^\mu_{\sigma\rho\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = -R^\mu_{\sigma\rho\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho$. La situación correspondiente en la teoría de gravitación newtoniana es dos partículas en movimiento bajo la gravedad cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$d^2\tilde{x}^i/dt^2 = -\delta^{ik}\tilde{\delta}_k V \quad \text{y} \quad d^2x^i/dt^2 = -\delta^{ik}\delta_k V,$$

donde $\tilde{\delta}_k$ indica que el gradiente del potencial gravitatorio V está evaluado en $\tilde{x}^i(t)$. Escribiendo $\xi^i(t) \equiv \tilde{x}^i(t) - x^i(t)$, para ξ^j pequeños se tiene

$$\tilde{\delta}_k V = \partial_k V + (\delta_j \delta_k V)\xi^j.$$

Por tanto,

$$d^2\xi^i/dt = -\delta^{ik}(\partial_j \partial_k V)\xi^j \implies d^2\xi^i/dt = -K_j^i \xi^j, \quad (4.5)$$

donde $K_j^i \equiv \delta^{ik}\partial_j \partial_k V$.

La ecuación 4.5 es el homólogo newtoniano de 4.4 e implica que:

$$K_\nu^\mu \equiv -R^\mu_{\sigma\rho\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho \longleftrightarrow K_j^i \equiv \delta^{ik}\partial_j \partial_k V.$$

Así, la ecuación de campo en el vacío en el límite newtoniano es $K_i^i = 0$, o

equivalentemente, $\nabla^2 V = 0$, como cabía esperar.

4.3.2. Límite a la ecuación de Poisson

En la aproximación de campo débil para las ecuaciones de campo de Einstein se debe obtener la ecuación de Poisson. De 4.3 se sigue que

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right).$$

Consideremos que la fuente del campo gravitatorio son partículas con velocidad $v \ll c$ en nuestro sistema de referencia, así que $\gamma \approx 1$ y también que $p/c^2 \ll \rho$, de modo que

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \implies T = \rho c^2,$$

y por tanto

$$R_{00} = \kappa \rho \left(u_0 u_0 - \frac{1}{2} c^2 g_{00} \right).$$

Pero como $u_0 \approx c$ y $g_{00} \approx 1$:

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^2.$$

De la definición del tensor de curvatura, despreciando los términos cuadráticos en los coeficientes de Christoffel, se tiene que

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu.$$

Usando la condición cuasiestática se sigue que $R_{00} \approx -\delta_i \Gamma_{00}^i$. De la ecuación 3.18 se tiene

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00},$$

por lo que de igualar R_{00} ,

$$-\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^2.$$

Como $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ y de la ecuación 3.19 $h_{00} = 2V/c^2$ se llega a que $\nabla^2 \approx$

$-\frac{1}{2}\kappa\rho c^4$, que corresponde a la ecuación de Poisson siempre que $\kappa = -8\pi G/c^4$. Así, la ecuación resulta:

$$\nabla^2 V \approx 4\pi G\rho.$$

4.4. La solución de Schwarzschild

Schwarzschild pretendía encontrar los coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ resolviendo las ecuaciones de campo, pero debido a su alta complejidad en cuanto al orden de no linealidad, se limitó a encontrarlos para un campo estático y simétricamente esférico en el espacio-tiempo vacío alrededor de un objeto esférico y masivo como puede ser una estrella. Para ello se asume que:

1. El campo es estático,
2. El campo es simétrico esféricamente,
3. El espacio-tiempo está vacío, excepto por una masa puntual en el origen,
4. El espacio-tiempo es asintóticamente plano.

En lo que refiere a las coordenadas empleadas, emplearemos (t, r, θ, ϕ) , donde t es una coordenada espacial, θ y ϕ son ángulos polares como de costumbre, y r alguna coordenada radial. De esta forma el elemento de línea resulta:

$$c^2 d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.6)$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones de r a determinar.

La primera condición se cumple puesto que $g_{\mu\nu}$ no depende de t ; la segunda condición se refleja en el hecho de que las superficies dadas por r y t constantes tienen elementos de línea de la forma:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

La tercera condición se traduce en que $A(r)$ y $B(r)$ deben ser encontrados a partir de las ecuaciones de campo en el vacío $R_{\mu\nu} = 0$, mientras que la cuarta condición impone las condiciones de contorno:

$$A(r) \rightarrow c^2 \quad \text{y} \quad B(r) \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Observación 8. *El hecho de que $B(r)$ no sea necesariamente 1 implica que no podemos asumir que r sea la distancia radial. El único significado que se le puede dar a esta coordenada entonces es que una superficie dada por r y t constantes tiene área igual a $4\pi r^2$.*

A continuación, para encontrar la solución de Schwarzschild, procedemos a usar $g_{\mu\nu}$ obtenidos del elemento de línea como solución de prueba para las ecuaciones de campo en el vacío. Del tensor de curvatura tenemos que

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma.$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de las geodésicas para el elemento de línea 4.6 podemos hallar los coeficientes de conexión:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= A'/2A, & \Gamma_{00}^1 &= A'/2B, & \Gamma_{11}^1 &= B'/2B, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r/B, & \Gamma_{33}^1 &= -(r \sin^2 \theta)/B, & \Gamma_{12}^2 &= 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \end{aligned}$$

donde los apóstrofes denotan derivadas respecto a r , y $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \phi$. El resto de coeficientes son nulos.

Tras sustituir en $R_{\mu\nu} = 0$, obtenemos que para $\mu \neq \nu$, $R_{\mu\nu} = 0$ y:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0, \\ R_{11} &= \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0, \\ R_{22} &= \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 0, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Multiplicando la primera ecuación de 4.8 por B/A y sumarla a la segunda ecuación resulta

$$A'B + AB' = 0 \Rightarrow AB = \text{constante} = c^2 \text{ por 4.7, } \Rightarrow B = c^2/A.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación de 4.8 tenemos $A+rA' = c^2$, o $d(rA)/dr = c^2$, que integrando resulta $rA = c^2(r+k)$, con k constante. Así, las funciones A y B deben ser

$$A(r) = c^2(1+k/r) \quad y \quad B(r) = (1+k/r)^{-1}.$$

Hemos conseguido obtener la solución de Schwarzschild en la forma

$$c^2 d\tau^2 = c^2(1+k/r)dt^2 - (1+k/r)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

con k constante aún sin identificar.

En la región asintótica del espacio-tiempo donde k/r es pequeño, el elemento de línea difiere muy poco del correspondiente al espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas, por lo que aquí r es aproximadamente la distancia radial. Si tomamos

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 \equiv r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 \equiv r \cos \theta,$$

obtenemos un tensor métrico de la forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $h_{\mu\nu}$ es pequeño en esta región, siendo $h_{00} = k/r$. Como r es aproximadamente la distancia radial, el potencial newtoniano correspondiente será $V = -MG/r$, con M la masa del cuerpo que produce el campo, y G la constante gravitacional. Puesto que $h_{00} \equiv 2V/c^2$, concluimos que $k = -2MG/c^2$. En resumen, la solución de Schwarzschild para el espacio-tiempo vacío y exterior a un cuerpo esférico de masa M es

$$c^2 d\tau^2 = c^2(1 - 2MG/c^2r)dt^2 - (1 - 2MG/c^2r)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.9)$$

Es decir,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 - 2MG/c^2r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2MG/c^2r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

4.4.1. Discusión general de la solución de Schwarzschild

Hemos obtenido la solución de Schwarzschild en el espacio-tiempo vacío, pero es necesario hacer ciertas aclaraciones.

En primer lugar, hemos considerado como M la masa del cuerpo que crea el campo gravitatorio. Cuando esta masa M tiende a cero, podemos observar cómo el elemento de línea definido en 4.9 queda reducido al elemento de línea correspondiente al espacio-tiempo plano. Las coordenadas t y r tomarán por tanto significados físicos simples: t será el tiempo medido por los relojes estacionarios en el sistema de referencia empleado, mientras que r será la distancia radial desde el origen. Por otro lado, conforme M crece se introduce la curvatura en la variedad y con ello ya no podemos asumir que las coordenadas tengan significados físicos tan simples como en la variedad plana.

Respecto al rango de valores que pueden tomar las coordenadas usadas, diremos que, puesto que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no depende de t , siendo así la solución estática, t podrá tomar cualquier valor real, i.e., $t \in \mathbb{R}$. Las coordenadas θ y ϕ , como las coordenadas angulares en las coordenadas esféricas, tomarán los valores $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

La coordenada r sin embargo es más discutible. Esta puede decrecer desde el infinito hasta que alcance el valor r_B correspondiente a la frontera del objeto, o hasta el valor $2GM/c^2$, en el caso de que r_B no sea alcanzado primero. La razón para el primer límite inferior r_B es que la solución que hemos obtenido es la solución exterior,

válida solo donde se cumplen las ecuaciones de campo en el vacío. El motivo del segundo límite inferior $2GM/c^2$ no es otro que cuando r tiende a él, la componente g_{11} del tensor métrico tiende a infinito, de modo que el conjunto de valores que puede tomar la coordenada r es $r_B < r < \infty$ o bien $2GM/c^2 < r < \infty$. En el caso de que r decreciera hasta $2GM/c^2$ sin que r_B sea alcanzado primero, el objeto en cuestión se tratará de un *agujero negro*, aunque no entraremos a discutir tal cuestión.

4.5. Longitud y tiempo

La ecuación 4.9 puede ser escrita denotando $m \equiv GM/c^2$ como

$$c^2 d\tau^2 = (1 - 2m/r)c^2 dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.10)$$

En el caso de t constante, el elemento de línea resulta:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.11)$$

Para una esfera de radio r constante, el elemento de línea anterior se reduce a

$$dL^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

lo cual lleva a

$$dL \equiv r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^{1/2},$$

de forma que la esfera tiene la geometría de una esfera bidimensional en el espacio Euclídeo. Cuando las distancias radiales θ y ϕ son constantes, el elemento de línea 4.11 queda

$$dR \equiv (1 - 2m/r)^{-1/2} dr, \quad (4.12)$$

es decir, $dR > dr$, o, dicho de otro modo, r ya no mide la distancia radial.

Respecto al ámbito temporal, un reloj situado en el espacio (r, θ, ϕ) constante,

medirá el tiempo propio, que de 4.11 toma la expresión

$$d\tau = (1 - 2m/r)^{1/2} dt. \quad (4.13)$$

Analizando la expresión anterior observamos que cuando la masa m tiende a cero (variedad plana), el tiempo propio que mide el reloj es el tiempo t de las coordenadas. Sin embargo, para espacio-tiempos no planos, $d\tau < dt$ y el reloj ya no medirá t .

No obstante, tanto para dR como para $d\tau$, cuando $r \rightarrow \infty$, se tiene que $dR \rightarrow dr$ y que $d\tau \rightarrow dt$. Por último, en la siguiente tabla comparamos las expresiones de longitud y tiempo para la relatividad especial y general respectivamente:

Relatividad especial	Relatividad general
$dl = dl_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$	$dr = dR(1 - 2m/r)^{1/2}$
$dt = d\tau(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$	$dt = d\tau(1 - 2m/r)^{-1/2}$

Cuadro 4.1: Longitud y tiempo en distintas métricas.

Cabe destacar que, para la relatividad especial, v es constante, y ni la longitud ni el tiempo infinitesimal dependen de la posición. En cambio, en la métrica de Schwarzschild sí que dependen de la coordenada r variable.

Capítulo 5

Tests clásicos de la relatividad general

En los capítulos anteriores hemos formulado la Teoría de la Relatividad General, una teoría de la gravedad a la que hemos llegado con las ecuaciones de Einstein, las cuales establecen una clara relación entre la masa y la deformación del espacio-tiempo producida por la curvatura. Sin embargo, esta teoría debe adaptarse bien a la naturaleza, es decir, debe estar de acuerdo con las evidencias experimentales. En este capítulo se exponen varias pruebas que apoyan esta famosa teoría de Einstein, aportándole más confianza aún.

5.1. El efecto Doppler gravitacional

Los famosos corrimiento hacia el rojo o hacia el azul son evidencias experimentales que respaldan la relación 4.13 entre el tiempo propio y la coordenada temporal. Supongamos que una señal es enviada desde un punto (r_E, θ_E, ϕ_E) en el momento t_E para el emisor, de forma que el suceso ocurre en $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$. Esta señal es recibida en el punto (r_R, θ_R, ϕ_R) en el momento t_R para el receptor, i.e., el suceso ocurre en $(t_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$. Sea u es un parámetro afín tal que $u = u_E$ en el suceso de emisión, y $u = u_R$ en el suceso de recepción. Si el camino seguido por la señal es

una geodésica nula, i.e., $c^2 d\tau^2 = 0$, entonces de la ecuación 4.11 se deduce que:

$$(1 - 2m/r)c^2(dt/du)^2 = (1 - 2m/r)^{-1}(dr/du)^2 + r^2(d\theta/du)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi/du)^2,$$

de modo que, si $\tilde{g}_{ij} = -g_{ij}$,

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{c} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} \right]^{1/2}.$$

Integrando obtenemos

$$t_R - t_E = \frac{1}{c} \int_{u_E}^{u_R} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} \right]^{1/2} du.$$

Como podemos comprobar, el miembro de la derecha solo depende del camino seguido, por lo que no depende de la señal en sí. Es decir, si tuviésemos otra señal 2, el tiempo que tarda en recibirse desde que se envió es el mismo que para la señal 1:

$$t_R^{(1)} - t_E^{(1)} = t_R^{(2)} - t_E^{(2)}.$$

De lo anterior se deduce que el retardo en recibir la señal 2 tras recibir la señal 1 es exactamente el tiempo de diferencia de emisión de cada señal, i.e.,

$$\Delta t_R = t_R^{(2)} - t_R^{(1)} = t_E^{(2)} - t_E^{(1)} = \Delta t_E. \quad (5.1)$$

Por otro lado conocemos la relación del tiempo propio con la coordenada temporal para cada observador:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_E &= (1 - 2m/r_E)^{1/2} \Delta t_E, \\ \Delta\tau_R &= (1 - 2m/r_R)^{1/2} \Delta t_R. \end{aligned}$$

Como de 5.1 se tiene que $\Delta t_R = \Delta t_E$, tenemos

$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \left[\frac{1 - 2m/r_R}{1 - 2m/r_E} \right]^{1/2}.$$

A continuación vemos la interpretación física. Imaginemos que la señal enviada se

trata de un átomo pulsante que emite n pulsos en un tiempo $\Delta\tau_E$, i.e., la frecuencia de emisión es $\nu_E = n/\Delta\tau_E$. Análogamente, la frecuencia de recepción de los pulsos será $\nu_R = n/\Delta\tau_R$. Como $\Delta\tau_E \neq \Delta\tau_R$, la frecuencia de emisión y recepción de los pulsos de cada observador respectivamente no será la misma. De hecho:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left[\frac{1 - 2m/r_E}{1 - 2m/r_R} \right]^{1/2} = \left[\frac{1 - 2GM/r_E c^2}{1 - 2GM/r_R c^2} \right]^{1/2}, \quad (5.2)$$

con $m \equiv GM/c^2$. En el caso en el que $r_E c^2 \gg 2GM$ y $r_R c^2 \gg 2GM$, desarrollando en serie se tiene

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} \approx 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_R} - \frac{1}{r_E} \right).$$

De lo anterior resulta:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_E} \equiv \frac{\nu_R - \nu_E}{\nu_E} \approx \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_R} - \frac{1}{r_E} \right). \quad (5.3)$$

Esta última ecuación tiene un gran significado físico: si el emisor está más cerca del objeto masivo que el receptor, entonces $1/r_R < 1/r_E$, siendo así $\Delta\nu/\nu_E < 0$. La traducción sería que se produce un *corrimiento hacia el rojo*. Por el contrario, si es el receptor el que está más cerca del objeto masivo se tiene que $1/r_R > 1/r_E$, y por tanto $\Delta\nu/\nu_E > 0$, produciéndose así un *corrimiento hacia el azul*.

La ecuación 5.3 ha sido verificada experimentalmente en 1960 por Robert Pound y Glen Rebka en el Jefferson Laboratory de la Universidad de Harvard. El experimento estaba basado en la emisión y absorción de fotones por parte de un átomo excitado o en su estado fundamental. La luz emitida o absorbida dependerá del campo gravitatorio terrestre, ya que se dará el efecto Doppler gravitacional. Para poder cuantificar dicho efecto, los científicos anteriormente mencionados trataron de contrarrestarlo con el efecto Doppler cinemático. Para ello movieron la fuente con una velocidad v con respecto al detector. Sus resultados confirmaron las predicciones de la relatividad general con una exactitud del 10%, aunque actualmente la precisión llega a ser de hasta un 0.01%.

Otro experimento que apoya la dilatación temporal gravitacional es el satélite Gravity Probe A, lanzado en 1976 a una altura de 10.000 km. Teóricamente, a esta altura el reloj del satélite debería correr $4,5 \cdot 10^{-8} \%$ más rápido que un reloj terrestre, lo cual fue comprobado con una precisión de $7 \cdot 10^{-5} \%$.

Sin embargo, el experimento más conocido y probablemente la única aplicación de la relatividad general en la vida cotidiana, es el sistema de GPS (Global Positioning System). Para determinar una posición en la superficie terrestre, es necesario que, al menos, el aparato GPS contacte mediante señales electromagnéticas con cuatro satélites de la red GPS. Dicha red está formada por un total de 24 satélites orbitando a una altura de 20.000 km sobre la superficie terrestre. A esta altura hay que considerar dos efectos relativistas: la dilatación temporal cinemática de la relatividad especial, que produce un atraso en los relojes de los satélites respecto a los terrestres, y el efecto de la relatividad general, que produce un adelanto en los mismos debido a la diferencia de potencial gravitatorio. Concretamente, a la altura a la que orbitan, domina el efecto de la relatividad general, resultando un adelanto neto de $38 \mu s$ por día en los relojes de los satélites. Por ello este efecto ha de ser considerado, pues de no ser así, el sistema GPS resultaría inútil en cuestión de horas.

5.2. Movimiento general de partículas

Cuando estudiamos la métrica del espacio de la relatividad general vimos que las geodésicas pueden ser de tipo espacial, temporal o nula. Pues bien, el camino que seguirán las partículas con masa cerca de un objeto masivo será de tipo temporal, mientras que el camino seguido por los fotones serán las geodésicas nulas.

5.2.1. Partícula de masa m

En principio, consideremos una partícula con masa en general, y sea el tiempo propio τ un parámetro afín. Queremos obtener una ecuación de movimiento para dicha partícula que esté relacionada con su energía E . De las ecuaciones de Euler-

Lagrange podemos obtener las cuatro geodésicas de tipo temporal para la partícula en cuestión, tomando como Lagrangiana

$$L(\dot{x}^\sigma, x^\sigma) \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left(c^2(1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)\right),$$

donde se ha tomado $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, y $x^3 \equiv \phi$. Además, el punto denota la derivada respecto a τ y $m = GM/c^2$.

Sin pérdida de generalidad, podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la Lagrangiana en el punto $\theta = \pi/2$. Para este valor, la ecuación con $\mu = 2$ se satisface, y la correspondiente a $\mu = 1$ queda como

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\ddot{r} + \frac{m c^2}{r^2}\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2}\frac{m}{r^2}\dot{r}^2 - r\dot{\phi}^2 = 0. \quad (5.4)$$

Puesto que t y ϕ son coordenadas cíclicas (no aparecen como tal en la Lagrangiana), conocemos dos integrales inmediatas:

$$\partial L/\partial \dot{t} = \text{constante}, \quad \partial L/\partial \dot{\phi} = \text{constante}.$$

que con $\theta = \pi/2$ lleva a:

$$(1 - 2m/r)\dot{t} = k \quad y \quad r^2\dot{\phi} = h,$$

con k y h constantes. De la relación 3.13 se sigue que

$$\begin{aligned} c^2(1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 &= c^2 \\ c^2(1 - 2m/r)\dot{t}^2/\dot{\phi}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}(dr/d\phi)^2 - r^2 &= c^2/\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

y de las integrales inmediatas

$$(dr/d\phi)^2 + r^2(1 + c^2r^2/h^2)(1 - 2m/r) - c^2k^2r^4/h^2 = 0.$$

Escribiendo $u \equiv 1/r$ y $m = GM/c^2$ obtenemos la ecuación que estábamos bus-

cando:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = E + \frac{2GM}{h^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3, \quad (5.6)$$

donde $E \equiv c^2(k^2 - 1)/h^2$. Analizando la ecuación anterior, observamos que corresponde a una ecuación de energía donde el último término de la derecha no es más que una corrección relativista como veremos posteriormente cuando estudiemos el perihelio de Mercurio.

5.2.2. Fotones

En el caso de las partículas con masa en reposo nula no podemos usar τ como parámetro afín, de modo que usaremos otro parámetro afín, w . Las ecuaciones del apartado anterior son válidas (para $\theta = \pi/2$) hasta la ecuación 5.5, donde c^2 del miembro de la derecha debe ser sustituido por cero:

$$c^2(1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0.$$

Análogamente al caso anterior, obtenemos la ecuación equivalente a 5.6 para fotones:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = F + \frac{2GM}{c^2}u^3, \quad (5.7)$$

donde $F \equiv c^2k^2/h^2$. Volveremos a esta ecuación cuando estudiemos la deflexión de la luz.

5.3. El perihelio de Mercurio

La ecuación de movimiento que sigue una partícula de masa m sometida a un campo gravitatorio newtoniano creado por un objeto de masa M situado en el origen se siguen de las consideraciones energéticas y del momento angular:

$$(du/d\phi)^2 + u^2 = E + 2GMu/h^2, \quad (5.8)$$

donde $u \equiv 1/r$, E es la energía que corresponde a la órbita y h es el momento angular por unidad de masa, i.e., $h = r^2 d\phi/dr$. La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$u = (GM/h^2)[1 + e \cos(\phi - \phi_0)],$$

siendo ϕ_0 es una constante de integración y $e^2 = 1 + Eh^4/G^2M^2$ representa la excentricidad de la trayectoria cónica. Comparando 5.6 y 5.8 observamos un término adicional en 5.6: es una corrección relativista a la energía como advertimos antes. Este término extra se hace notar aún más en el sistema solar, provocando un avance en el perihelio (punto de la trayectoria más cercano al Sol) de los planetas, aunque es más evidente en Mercurio por su cercanía al Sol.

El afelio (punto más lejano al Sol) y el perihelio cumplen que $du/d\phi = 0$, con u verificando la ecuación 5.6:

$$\frac{2GM}{c^2}u^3 - u^2 + \frac{2GM}{h^2}u + E = 0.$$

Esta ecuación tiene, obviamente, tres soluciones u_1, u_2, u_3 . Supongamos que u_1 corresponde al afelio y u_2 al perihelio, con $u_1 \leq u \leq u_2$. Sean $u_0 \equiv (u_1 + u_2)/2$, $\bar{u} \equiv u/u_0$ y $\epsilon \equiv 2GMu_0/c^2$. Entonces:

$$\epsilon\bar{u}^3 - \bar{u}^2 + \frac{2GM}{h^2u_0}\bar{u} + \frac{E}{u_0^2} = 0,$$

que es equivalente a

$$(d\bar{u}/d\phi)^2 = \epsilon(\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u})(\bar{u}_3 - \bar{u}).$$

Además, $\epsilon\bar{u}_3 = 1 - \epsilon(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = 1 - 2\epsilon$, siendo la suma de las raíces $1/\epsilon$ $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = 2$, por lo que

$$(d\bar{u}/d\phi)^2 = (\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u})(1 - \epsilon(2 + \bar{u})).$$

Desarrollando hasta el primer orden en ϵ , ya que toma valores muy pequeños, se

tiene

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon(2 + \bar{u})}{[(\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u})]^{1/2}},$$

y denotando $\beta \equiv \frac{1}{2}(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$ queda

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon(\bar{u} - 1) + 1 + \frac{3}{2}\epsilon}{[\beta^2 - (\bar{u} - 1)^2]^{1/2}}.$$

Integrando la expresión anterior entre \bar{u}_1 y \bar{u}_2 obtenemos la diferencia angular entre los sucesivos afelios y perihelios:

$$\Delta\phi = \left[-\frac{1}{2}\epsilon(\beta^2 - (\bar{u} - 1)^2)^{1/2} + \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) \arcsin \frac{\bar{u} - 1}{\beta} \right]_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} = \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right)\pi.$$

Para $\epsilon = 0$ se obtiene $\Delta\phi = \pi$, como cabía esperar, el afelio y el perihelio opuestos. Sin embargo, $2\Delta\phi = (2+3\epsilon)\pi \neq 2\pi$, de modo que no volvemos al perihelio, si no que avanzamos un poco más, concretamente $3\epsilon\pi$. Es lo que se conoce como avance del perihelio:

$$3\epsilon\pi = \frac{3GM\pi}{c^2}(u_1 + u_2) = \frac{3GM\pi}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (5.9)$$

donde r_1 y r_2 son los valores de r en el afelio y perihelio respectivamente. Aunque la cantidad 5.9 es muy pequeña, su efecto es acumulativo. Sobre todo se percibe en Mercurio, con un avance de hasta $43''$ de arco por siglo. En la siguiente figura podemos ver el avance del perihelio para Mercurio.

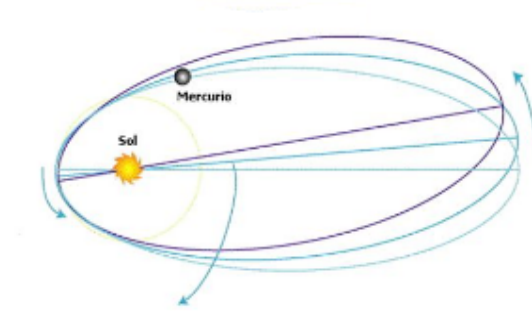


Figura 5.1: Avance del perihelio de Mercurio.

En otras palabras, el planeta no sigue una trayectoria perfectamente elíptica, sino que el elipse va girando un poco en cada revolución, de modo que el planeta alcanza su perihelio un poquito más tarde cada vez. El retraso viene dado por el parámetro ϵ , que es independiente de la masa del planeta, pero que disminuye con la distancia del planeta al Sol.

5.4. La deflexión de la luz

Cuando la trayectoria la describen partículas sin masa, como los fotones, la ecuación de su movimiento viene dada por 5.7. Como podemos ver en dicha ecuación, la trayectoria de un rayo de luz dependerá de la masa M del cuerpo que crea el campo gravitatorio.

Cuando esta masa es cero, es decir, no hay campo gravitatorio, la luz seguirá una línea recta, sin desviarse. A este resultado se llega analíticamente resolviendo 5.7 con $M = 0$:

$$(du/d\phi)^2 + u^2 = F,$$

con solución

$$u = u_0 \sin \phi \quad \text{o} \quad r_0 = r \sin \phi,$$

donde $u_0^2 \equiv 1/r_0^2 = F$. Efectivamente, la trayectoria es una línea recta de infinito a infinito ($\phi = 0, \pi$), con el punto más cercano al origen en $\phi = \pi/2$.

Veamos qué ocurre cuando aumentamos M . Sea $\bar{u} \equiv u/u_0$, con u_0 el valor de u en el punto más próximo al origen y sea $\epsilon \equiv 2GMu_0/c^2$ una cantidad muy pequeña. Desarrollando hasta primer orden en ϵ :

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\phi}\right)^2 + \bar{u}^2 = \frac{F}{u_0^2} + \epsilon\bar{u}^3.$$

Con la condición de que en el máximo acercamiento, $d\bar{u}/d\phi = 0$ y $\bar{u} = 1$, se tiene

que $F/u_0^2 = 1 - \epsilon$, de modo que

$$(d\bar{u}/d\phi)^2 + \bar{u}^2 = 1 - \epsilon + \epsilon\bar{u}^3. \quad (5.10)$$

Esta ecuación debe tener como solución $\bar{u} = \sin \phi$ cuando $M = 0$, i.e., cuando $\epsilon = 0$. Sea

$$\bar{u} = \sin \phi + \epsilon v,$$

donde v es una función de ϕ a determinar. Sustituyendo en 5.10, se tiene que, hasta primer orden en ϵ :

$$\begin{aligned} 2(dv/d\phi) \cos \phi + 2v \sin \phi &= \sin^3 \phi - 1, \\ d/v \sec \phi / d\phi &= \frac{1}{2}(\sec \phi \tan \phi - \sin \phi - \sec^2 \phi). \end{aligned}$$

Integrando,

$$v = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \phi - \sin \phi) + A \cos \phi,$$

con A una constante de integración. Imponiendo que el fotón viene de infinito cuando $\phi = 0$, $v = 0$ y $A = -1$, por lo que la ecuación del camino del fotón es

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) \sin \phi + \frac{1}{2}\epsilon(1 - \cos \phi)^2.$$

A continuación, imponemos que cuando $\phi = \pi + \alpha$, con α a determinar, el fotón se va hacia el infinito, $\bar{u} = 0$:

$$0 = -\alpha + 2\epsilon \Rightarrow \alpha = 2\epsilon.$$

Es decir, la trayectoria del fotón se ha desviado de una línea recta un ángulo

$$\alpha = 4GM/r_0c^2.$$

Esta desviación aumenta conforme r_0 disminuye. En la siguiente figura se puede ver cómo la luz procedente de una estrella E se desvía un ángulo α de una línea recta en presencia de una masa M que crea un campo gravitatorio, de forma que

desde la Tierra parece que la estrella está situada en el punto E' :

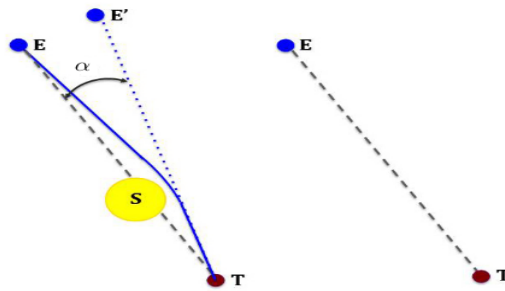


Figura 5.2: Efecto del campo gravitatorio producido por el Sol en la deflexión de la luz.

Para el Sol, el ángulo de deflexión de una estrella es de unos 1.7 segundos de arco, si la luz pasa justo fuera del radio del Sol. Realmente no lo notaríamos, pues la propia luz del Sol taparía la de la estrella, pero sí que podría manifestarse durante los eclipses solares.

En 1919 dos expediciones inglesas comprobaron este efecto durante un eclipse solar. Uno de los equipos, desde isla de Príncipe, midió una deflexión entre 1.31 y 1.91 segundos de arco, mientras que el segundo equipo, desde Brasil, obtuvo 1.91 y 0.86 segundos de arco, según el instrumento empleado. Aunque la calidad de los resultados no era muy buena debido a las dificultades técnicas propias de aquella época, los resultados fueron recibidos como la confirmación de la relatividad general.

Parte I

Apéndice

Apéndice A

Breve repaso de la relatividad especial

El tiempo y el espacio se creían totalmente independientes con la mecánica de Newton. Sin embargo, Einstein descubrió que están íntimamente relacionados y juntos forman lo que se denomina el espacio-tiempo. De esta forma damos paso a la *teoría especial de la relatividad*, descubierta sobre 1905. Esta teoría consta de dos postulados básicos:

1. La velocidad de la luz c es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales,
2. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales,

entendiéndose como sistema de referencia inercial a aquel donde las leyes de Newton se cumplen. Tomamos coordenadas en un sistema de referencia inercial K

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z,$$

y las expresamos como x^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$) de forma compacta. Si consideramos otro sistema de referencia inercial K' , podemos introducir el invariante espacio-tiempo

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu.$$

En virtud del segundo postulado trabajaremos en un sistema inercial de coordenadas cartesianas, donde

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma el espacio-tiempo de la relatividad especial queda definido como una variedad diferencial semiriemanniana de cuatro dimensiones. En lo que refiere a la métrica, cualquier vector no nulo está descrito como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tipo temporal si} & \eta_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu > 0 \\ \text{nulo si} & \eta_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = 0 \\ \text{tipo espacial si} & \eta_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu < 0 \end{array} \right.$$

Por otro lado, dado un sistema de referencia K y una partícula, definimos el tiempo propio τ entre dos puntos de la trayectoria de dicha partícula como el tiempo medido por un reloj en reposo respecto a la partícula:

$$c^2 d\tau^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow d\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt, \quad (\text{A.1})$$

con v la velocidad de la partícula.

A.1. Cinemática relativista

Sea K un sistema de referencia inercial, y K' otro. Nuestro objetivo es ser capaces de establecer una relación entre las coordenadas de un evento en cada sistema de referencia.

Definición 39. *Una transformación de Lorentz es una transformación de coordenadas desde un sistema de referencia inercial K a otro también inercial K' que se mueve respecto a K a una velocidad v .*

Tras varios experimentos se concluyó que las ecuaciones de transformación de Lorentz para un sistema inercial K' que deslaza en el eje x con velocidad v respecto de K son:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma/c & 0 & 0 \\ -v\gamma/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

o también, $x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}$.

A continuación veremos cómo se transforman las velocidades u del movimiento de una partícula de K en K' , considerando que K' se mueve con velocidad v respecto de K . Derivando con respecto al tiempo t en las ecuaciones de Lorentz y si el movimiento se da en el plano XY , se tiene:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, & u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2}, & u'_y &= \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2}. \end{aligned}$$

A.2. Dilatación del tiempo

Consideremos un reloj en movimiento que mide su tiempo propio τ . La ecuación A.1 muestra que el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$ medido por un reloj en movimiento con velocidad constante v respecto a K viene dado por

$$\Delta\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \Delta t,$$

donde Δt es el intervalo de tiempo medido por un reloj estacionario en K . Como podemos ver, $\Delta t > \Delta\tau$, de forma que para el reloj en movimiento el tiempo corre más despacio. A este fenómeno se le conoce como *dilatación del tiempo*.

A.3. Contracción de longitudes

Supongamos ahora una varilla en el eje x durante un tiempo t y en reposo en K . Su longitud será por tanto

$$l_0 = x_2 - x_1,$$

con x_2 y x_1 sus extremos en K . Esa misma varilla para un sistema de referencia inercial K' que se mueve con velocidad v con respecto a K es:

$$l = x'_2 - x'_1.$$

Utilizando las transformaciones de Lorentz:

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'),$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + vt').$$

Por tanto,

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1),$$

y, en consecuencia,

$$l = l_0/\gamma = l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Es decir, los extremos de la varilla en el mismo instante en el que se está midiendo, l es menor que l_0 , lo que se conoce como *contracción de las longitudes*. El criterio de simultaneidad es diferente en cualquier otro sistema y, en consecuencia, el resultado de medir la longitud será también diferente.

A.4. Dinámica relativista

En esta sección introduciremos algunos 4–vectores característicos de la relatividad especial. La notación que emplearemos será

$$\lambda^\mu = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = (\lambda^0, \boldsymbol{\lambda}),$$

donde la negrita representa la parte espacial.

Llamaremos $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ a la velocidad del mundo de una partícula, que será diferente de la velocidad v^μ (que es un vector tridimensional):

$$\begin{aligned} v^\mu &\equiv dx^\mu/dt = (c, \mathbf{v}), \\ u^\mu &= (dt/d\tau)v^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Definimos el tetravector momento de una partícula de masa m como

$$p^\mu \equiv mu^\mu = (E/c, \mathbf{p}),$$

con E la energía de la partícula y \mathbf{p} su momento lineal.

Cabe destacar que la segunda ley de Newton se modifica como

$$dp^\mu/d\tau = f^\mu,$$

donde f^μ es el tetravector fuerza que actúa sobre la partícula:

$$f^\mu \equiv \gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F})$$

y \mathbf{F} la fuerza aplicada como vector tridimensional.

Bibliografía

- [1] B. Janssen. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Granada: Universidad de Granada.

- [2] Foster, J. and Nightingale, J. (2006). *A short course in general relativity*. New York: Springer.

- [3] French, A. (2002). *Relatividad especial*. Barcelona: Reverté.

- [4] H. Stephani. (2004). *General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge: Cambridge University Press.

- [5] R. Abraham, J., E. Marsden and T. Ratiu. (1993). *Manifolds, Tensor, Analysis, and Applications*. New York: Springer.

- [6] R. M. Wald. (1984). *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press.

- [7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. (2008). *The large scale structure of space-time*. New York: Cambridge monographs on mathematical physics.

- [8] W. Rindler. (2007). *Relativity Special, General and Cosmology*. Oxford: Oxford University Press.