



Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

**Resultados teóricos y
numéricos para problemas
de control gobernados por
EDOs y EDPs**

Autor: Alberto Becerra Tomé

Tutor: Enrique Fernández Cara

19 de junio de 2018

Índice general

1. Un modelo para el control del SIDA	11
1.1. Existencia de control óptimo	15
1.2. Sistema de optimalidad	18
1.3. Obtención numérica del control óptimo	22
1.3.1. Resolución como problema de contorno	23
1.3.2. Algoritmo de punto fijo	26
1.3.3. Resolución directa	27
1.3.4. Análisis cualitativo de los resultados	28
2. Control de la terapia tumoral	29
2.1. Existencia de control óptimo	31
2.2. Sistema de optimalidad	33
2.3. Cálculo de la proyección	35
2.4. Resolución numérica	38
2.4.1. Algoritmo de punto fijo	39
2.4.2. Resolución directa	40
2.5. Análisis cualitativo de los resultados	41
3. Control de la trayectoria de un proyectil	43
3.1. Existencia de control óptimo	45
3.2. Obtención numérica del control óptimo	49
3.3. Análisis cualitativo de los resultados	52
4. Un modelo para el control de un condensador eléctrico	53
4.1. Existencia de control óptimo	55

4.2. Sistema de optimalidad	58
4.2.1. Métodos de tipo gradiente para problemas de optimización	61
4.3. Obtención numérica del control óptimo	68
4.3.1. Algoritmo de punto fijo	69
4.3.2. Algoritmos de tipo gradiente	70
4.3.3. Resultados numéricos	76
4.4. Análisis cualitativo de los resultados	78
4.5. Otras experiencias numéricas	80
5. Un problema de control óptimo para la EDP del calor	83
5.1. Existencia de control óptimo	84
5.2. Sistema de optimalidad	89
5.3. Obtención numérica del control óptimo	92
5.4. Resultados numéricos	96
5.5. Otras experiencias numéricas	97
6. Un problema de control bi-objetivo	99
6.1. Introducción	99
6.2. Problema de control biobjetivo	100
6.3. Existencia de óptimos de Pareto	101
6.4. Sistema de optimalidad	102
6.5. Obtención numérica del equilibrio de Pareto	104
6.5.1. Algoritmo de Punto Fijo	104
6.5.2. Algoritmos de tipo gradiente	105
6.6. Resultados numéricos	108
Bibliografía	111

Introducción

Es un problema recurrente en Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales, la búsqueda de una solución óptima frente a una situación o experimento concretos. Ésta no suele resultar una tarea sencilla por lo que, en muchos casos, es necesaria la construcción de un Modelo Matemático que nos permita realizar simulaciones del fenómeno en cuestión. En este trabajo vamos a estudiar seis Modelos Matemáticos basados en Ecuaciones Diferenciales con origen en Física y Biología.

Para ello, es necesario un amplio abanico de herramientas matemáticas fundamentadas en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales Lineales, Análisis Funcional aplicado al Cálculo de Variaciones, Análisis Numérico de EDOs, Métodos Numéricos en Optimización y Programación No Lineal, además de herramientas de Simulación Numérica: utilizaremos los **softwares** MatLab y FreeFem++.

En cada uno de los problemas demostraremos la existencia de control(es) óptimo(s), estudiaremos su unicidad y daremos una caracterización de los mismos para, seguidamente, realizar una aproximación numérica y presentar los resultados obtenidos, con su correspondiente análisis cualitativo e interpretación práctica.

Los principales resultados que utilizaremos son el Teorema de Mazur para la convergencia débil, el Teorema de Ascoli - Arzelá de compacidad en espacios de funciones, la Desigualdad de Poincaré, el Teorema de Lax-Milgram y el Teorema de Lions y sus corolarios.

En los tres primeros capítulos se tratan problemas de control óptimo de siste-

mas gobernados por EDOs no lineales. En los tres últimos se abordan problemas gobernados por EDPs lineales.

El primer capítulo está dedicado al control óptimo de un modelo que describe la evolución de un paciente con SIDA sometido a terapias específicas. Aparece un inconveniente: el funcional no es cuadrático. Es necesario demostrar la convergencia fuerte de los estados mediante el Teorema de Ascoli-Arzelá. Otra consecuencia es que no se puede garantizar la unicidad de control óptimo.

En el segundo capítulo, se describe la evolución de un tumor sometido a quimioterapia y se optimiza el tratamiento aplicado al paciente. Este problema presenta una dificultad añadida: aparecen restricciones en los estados. Sin embargo, usando la expresión del estado, podemos convertirlas en restricciones sobre los controles. El carácter global de estas restricciones complica notablemente el cálculo de las proyecciones.

En el tercer capítulo, tratamos el control de la trayectoria de un proyectil. Las principales dificultades aparecen, de nuevo, en la complejidad de las restricciones.

En los capítulos cuarto y quinto, se estudian el control óptimo de la carga en un condensador eléctrico y de la aportación de calor en un recinto cerrado mediante una EDP de Poisson y la EDP del calor respectivamente. Se describe el Método de los Elementos Finitos y la discretización en tiempo de problemas de evolución a partir del Método de Euler. Además, se presentan los algoritmos de tipo gradiente y se estudia su convergencia en función de los parámetros del problema.

Por último, en el sexto capítulo, se introduce un problema de control bi-objetivo. Usamos el concepto de equilibrio de Pareto. Se deducen un resultado de existencia y una condición de optimalidad basada en el Principio de Lagrange. Finalmente se aplican resultados a un modelo de control de la temperatura en una habitación.

Introduction

It is a recursive problem in Mathematics, Natural Sciences and Social Sciences, the search for an optimal solution for a situation or a precise experiment. It is not frequently a simple task the construction of a Mathematical Model that allows us to perform simulations of the phenomena in question. In this work we are going to study six Mathematical Models based on Differential Equations with origin in Physics and Biology.

To this purpose, a wide range of mathematical tools from the Theories of Ordinary Differential Equations (ODEs), Linear Partial Differential Equations (PDEs), Functional Analysis applied to the Calculus of Variations, Numerical Analysis of Differential Equations, Numerical Methods in Optimization and Non-Linear Programming, in addition to Numerical Simulation tools; in this area, we will use the **MatLab** and **FreeFem++** tools.

In each of the problems we will demonstrate the existence of optimal control(s), we will study uniqueness and we will give a characterization of them to then carry out a numerical approximation and show the results of appropriate experiments, with their corresponding qualitative analysis and interpretation.

The main results that we will use are Mazur's Theorem for the weak convergence, the Ascoli - Arzelá criteria of compactness in spaces of functions, Poincaré's Inequality, the Lax-Milgram Theorem and Lions' Theorem and their corollaries.

The first three chapters deal with optimal control problems for systems governed by non-linear ODEs. In the last three, problems are governed by linear PDEs.

The first chapter is devoted to the optimal control of a model that describes the evolution of a patient with AIDS undergoing specific therapies. An inconvenience appears: the functional is not quadratic. It is necessary to demonstrate the strong convergence of states through the Ascoli-Arzelà Theorem. Another feature is that the uniqueness of an optimal control cannot be guaranteed.

In the second chapter, we describe the evolution of a tumor subject to chemotherapy and the treatment applied to the patient is optimized. This problem presents an added difficulty: restrictions appear in the states. Nevertheless, using the state system, we can convert them into restrictions on the controls. The global definition of these restrictions considerably complicate the calculation of the projections.

In the third chapter, we deal with the control of the trajectory of a projectile. The major difficulties appear, again, in the complexity of the restrictions.

In the fourth and fifth chapters, the optimal control of the charge in an electric capacitor using a Poisson PDE and the heat flux governed by a classical parabolic PDE are studied. The Finite Elements Method and the discretization in time of problems of evolution from the Euler Method are described. Also, algorithms of the gradient kind are presented and their convergence depending on the parameters of the problem is analyzed-

Finally, in the sixth chapter, a biobjective optimal control problem is introduced, relying on the Pareto equilibrium concept. We return to the Poisson PDE used in the fourth chapter. A result of existence and an optimality condition based on Lagrange multipliers are proved. Finally, this is applied in the particular situation of the control of temperature in a room.

Capítulo 1

Un modelo para el control del SIDA

El SIDA, o Síndrome de la Inmunodeficiencia Adquirida, es una enfermedad que comenzó a afectar a personas en todo el mundo tan solo 20 años después de que fuera detectado por primera vez. Es causado por el Virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH) y de los 34,3 millones de personas infectadas hoy en día, unos 24 millones pertenecen a países desarrollados.

Aún no son muchos los avances en lo referido a la búsqueda de una vacuna para el VIH. Sin embargo, a día de hoy, los científicos están desarrollando nuevos métodos para tratar a los pacientes infectados consistentes en la reducción del virus con el simultáneo refuerzo de la respuesta inmunitaria. Esta solución aporta nuevas esperanzas al tratamiento del VIH. A continuación, exploraremos estrategias de este tipo mediante técnicas de control óptimo que podemos encontrar, por ejemplo, en [15],[32] y [34].

Este primer ejemplo, de gran interés aplicado, describe la evolución óptima del virus del SIDA (ver [18]). El problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(v) := \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha_1 |v_1|^2 + \alpha_2 |v_2|^2) dt - \int_0^T Y dt \\ \text{Sujeto a } v = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (Y, V, v) \text{ verifica (1.2),} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(0, T)^2 : a_i \leq v_i \leq b_i \text{ c.p.d., } i \in \{1, 2\}\},$$

$$\begin{cases} Y' = s_1 - \frac{s_2 V}{B_1 + V} - \mu Y - k Y V + v_1 Y, & t \in (0, T) \\ V' = \frac{g(1 - v_2) V}{B_2 + V} - c Y V, & t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Aquí, $Y = Y(t)$ es el número de anticuerpos generados por el organismo y $V = V(t)$ describe la evolución del virus. Además, Y_0 y V_0 son datos iniciales que determinan la cantidad inicial de anticuerpos en el paciente y la población inicial del virus, respectivamente. Por motivos obvios, se supone que $Y_0, V_0 \geq 0$. Los otros datos son constantes no negativas, con $s_2 \leq s_1$.

Por lo que representan, $Y = Y(t)$ y $V = V(t)$ han de tomar siempre valores no negativos. Veamos que las soluciones del SDO (1,2) satisfacen esto.

La ecuación de V puede reescribirse como

$$\begin{cases} V' = \phi_V(t) V, & t \in (0, T) \\ V(0) = V_0. \end{cases}$$

Integrando, tenemos que

$$V(t) = V_0 e^{\int_0^t \phi_V(s) ds} \geq 0 \quad \forall t \in (0, T).$$

De la misma manera,

$$\begin{cases} Y' = \psi_V(t) + \eta_V(t)Y, & t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

Por lo cual, usando que $\psi_V(t) = s_1 - \frac{s_2 V}{B_1 + V} \geq 0$ y bajo la condición de que $s_1 \geq s_2$,

$$Y(t) = Y_0 e^{\int_0^t \eta_V(s) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \eta_V(\sigma) d\sigma} \psi_V(\sigma) d\sigma \geq 0 \quad \forall t \in (0, T).$$

No obstante, antes de estudiar el problema de control, es importante conocer el modelo que usamos para la evolución del paciente en ausencia de medicación. Éste viene dado por el SDO siguiente.

$$\begin{cases} Y' = s_1 - \frac{s_2 V}{B_1 + V} - \mu Y - k Y V, & t \in (0, T) \\ V' = \frac{g V}{B_2 + V} - c Y V, & t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Se trata de un SDO no lineal de primer orden en el cual las ecuaciones se encuentran acopladas por medio de términos bilineales y de saturación. Esto hace que su resolución tenga que ser necesariamente numérica debido a su elevada complejidad. Además, en el caso en el que consideramos los controles, éstos aparecen en términos bilineales como $v_1 Y$, que conllevan una pérdida de convexidad en el conjunto de controles. Ésto influye en que no podamos garantizar la unicidad del control óptimo de forma sencilla, como veremos posteriormente. Estas dificultades serán las que trataremos de solventar y las que dotan de un mayor interés desde el punto de vista matemático a este modelo.

Los términos de saturación son $\frac{s_2 V}{B_1 + V}$ y $\frac{g V}{B_2 + V}$ y reciben este nombre porque, para valores pequeños de V , se comportan de manera aproximadamente lineal mientras que, para valores suficientemente grandes, se vuelven aproximadamente constantes. De esta manera, si V es pequeño, podemos aproximar (1,3)

como

$$\begin{cases} Y' = s_1 - \frac{s_2}{B_1}V - \mu Y - kYV, & t \in (0, T) \\ V' = \frac{g}{B_2}V - cYV, & t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Este sistema continúa siendo no lineal, aunque se asemeja en cierta manera a un sistema lineal en el que las variables se encuentran acopladas junto con un término bilineal en Y y V .

Por otra parte, si V es suficientemente grande, podemos aproximar (1,3) como

$$\begin{cases} Y' = s_1 - s_2 - \mu Y - kYV, & t \in (0, T) \\ V' = g - cYV, & t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

De esta manera, el término $\frac{s_2 V}{B_1 + V}$ representa la proliferación de anticuerpos, alcanzando un valor límite $s_1 - s_2$ que, como hemos visto, es siempre no negativo. Por otra parte, hay una fuente de virus $\frac{gV}{B_2 + V}$ que pone de manifiesto las contribuciones de virus al plasma tanto por parte del sistema linfático como a partir de las células infectadas en el plasma. Es conocido que la mayor parte del virus reside en el sistema linfático, el cual se satura en la etapa asintomática de la enfermedad. Este es el motivo por el cual usamos un término de saturación para describir la proliferación del virus, alcanzando un valor asintótico constante g .

También encontramos términos bilineales en Y y V , que son $-kYV$ y $-cYV$. Son lo que se conoce en modelos de dinámica de poblaciones como términos de competición. Una gran cantidad de anticuerpos produce un significativo decreci-

miento en la evolución del virus y viceversa. El primero corresponde a la pérdida de anticuerpos causada por la acción del virus y el segundo a la eliminación de virus debida a la respuesta inmunitaria natural del paciente.

Tenemos como controles v_1 y v_2 que son las dosis de dos medicamentos distintos, administrados a lo largo del intervalo $(0, T)$. Podemos apreciar que minimizar el funcional de coste $J : \mathcal{U}_{ad} \subset L^2(0, T)^2 \mapsto \mathbb{R}$ supone buscar la menor dosis de medicamentos (con factores de calibración α_1 y α_2) a la vez que maximizamos el número de anticuerpos generados en el paciente.

1.1. Existencia de control óptimo

Teorema 1.1. *El problema (1.1) posee al menos una solución.*

Para la demostración de la existencia de solución de nuestro problema, será necesario analizar las propiedades del conjunto de controles admisibles, de modo que podamos garantizar que dicho conjunto es **secuencialmente débilmente cerrado** para la topología débil de $L^2(0, T)^2$.

En segundo lugar, será necesario realizar un estudio del funcional de coste para asegurar que éste es **secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente**.

En base a estas dos propiedades, podremos construir un argumento que muestre la existencia de un control que minimice el valor de J en el conjunto de controles admisibles para todo $t \in [0, T]$.

Demostración 1.1.1. Sea $\{v_n\} \subset \mathcal{U}_{ad}$ una sucesión *minimizante*, de manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \beta := \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

1. Propiedades de \mathcal{U}_{ad} .

■ Es **acotado**:

Tenemos que probar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|v\|_{L^2(0,T)^2} \leq C \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

En efecto, la definición de \mathcal{U}_{ad} , tenemos

$$\|v\|_{L^2(0,T)^2}^2 = \int_0^T (|v_1|^2 + |v_2|^2) dt \leq b_1^2 T + b_2^2 T$$

Luego efectivamente \mathcal{U}_{ad} es un conjunto acotado en $L^2(0, T)^2$.

■ **Es cerrado :**

Lo demostraremos comprobando que, dada una sucesión $\{v^n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{U}_{ad}$ convergente hacia $v \in L^2(0, T)^2$, necesariamente $v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Por la definición de \mathcal{U}_{ad} , sabemos que

$$a_i \leq v_i^n \leq b_i \quad \forall n \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

De donde tenemos que la sucesión es uniformemente acotada y existe una subsucesión (de nuevo denotada $\{v^n\}$) tal que

$$v^n \rightarrow v \text{ c.p.d en } (0, T).$$

Como $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 , deducimos que

$$a_i \leq v_i \leq b_i, \quad i = 1, 2.$$

Concluimos así que $v \in \mathcal{U}_{ad}$.

■ **Es convexo:**

Para comprobarlo apliquemos directamente la definición, es decir, veamos que dados $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ y $\lambda \in (0, 1)$, necesariamente

$$a_i \leq \lambda v_i + (1 - \lambda)w_i \leq b_i \quad i = 1, 2.$$

Pero esto es consecuencia directa de la convexidad de los intervalos $[a_i, b_i]$.

Como estamos en el espacio de Hilbert $L^2(0, T)^2$ (reflexivo), podemos deducir que existe una subsucesión, que por comodidad denotaremos también $\{v^n\}$, convergente débilmente a un control $u^* \in L^2(0, T)^2$.

Por otra parte, \mathcal{U}_{ad} es convexo y cerrado por lo que, por el Teorema de Mazur, (para más detalles véase [10]) tenemos que es cerrado para la topología débil. Gracias a esto, podemos afirmar que $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$.

2. Propiedades del funcional de coste.

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha_1 |v_1|^2 + \alpha_2 |v_2|^2) dt - \int_0^T Y dt$$

Queremos comprobar que J es, al menos, secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente. Para ello, haremos uso en primer lugar de un resultado que nos dice que, si una función es convexa, entonces es semicontinua inferiormente (en adelante s.c.i.) si y sólo si es secuencialmente débilmente s.c.i.. En [10]

Este resultado se puede aplicar a la función $P : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$P(v) := \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha_1 |v_1|^2 + \alpha_2 |v_2|^2) dt = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \|v_1\|_{L^2(0, T)}^2 + \alpha_2 \|v_2\|_{L^2(0, T)}^2 \right).$$

Por tanto,

$$\liminf P(v^n) \geq P(u^*).$$

Aceptemos de momento que la sucesión de los estados (Y_n, V_n) asociados a los v^n posee una subsucesión, de nuevo denotada $\{(Y_n, V_n)\}$, que converge fuertemente en $L^2(0, T)^2$ hacia un estado (Y^*, V^*) asociado a u^* . Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(v^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(v^n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_0^T Y_n dt \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} P(v^n) - \int_0^T Y^* dt \geq P(u^*) - \int_0^T Y^* dt = J(u^*). \end{aligned}$$

Por tanto, necesariamente $J(u^*) = \beta$ y, como $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$, se trata de un

control óptimo.

Comprobemos finalmente lo que se ha afirmado sobre $\{(Y_n, V_n)\}$. Observamos en primer lugar que existe una constante $C > 0$ tal que $0 \leq Y_n \leq C$ y $0 \leq V_n \leq C$; esto es consecuencia de (1,2) y las restricciones impuestas a los v^n . Por tanto, también se tiene que $|Y'_n| + |V'_n| \leq C$ en $[0, T]$, de donde $\{(Y_n, V_n)\}$ contiene subsucesiones fuertemente convergentes en $C^0([0, T])^2$ (Teorema de Ascoli - Arzelá). Pasando al límite en (1,2), deducimos que el límite de cualquier subsucesión es necesariamente (Y^*, V^*) .

Veamos que los $\{(Y_n, V_n)\}$ están acotados. Sabemos que

$$Y(t) = Y_0 e^{\int_0^t \eta_V(s) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \eta_V(\sigma) d\sigma} \psi_V(\sigma) d\sigma \geq 0 \quad \forall t \in (0, T).$$

Por otra parte,

$$\eta_V(s) = v_1 - \mu - kV \leq b_1 - mu \leq D \Rightarrow Y_0 e^{\int_0^t \eta_V(s) ds} \leq C$$

$$\psi_V(s) = s_1 - \frac{s_2 V}{B_1 + V} \leq s_1 \Rightarrow \int_0^t e^{\int_s^t \eta_V(\sigma) d\sigma} \psi_V(\sigma) d\sigma \leq C.$$

Tenemos así acotado Y_n . Comprobemos que ocurre lo mismo con V_n .

$$\phi_V(s) = \frac{g(1 - v_2)}{B_2 + V} - cY \leq g(1 - b_2) - cC \leq F,$$

luego

$$V(t) = V_0 e^{\int_0^t \phi_V(s) ds} \leq C.$$

Finalmente, de las acotaciones de (Y_n, V_n) y de ϕ_V, ψ_V y η_V es inmediata la de (Y'_n, V'_n) a partir de la ecuación de estado (1,2).

□

1.2. Sistema de optimalidad

Una vez conocida la existencia de solución de nuestro problema de optimización, procedemos a buscar una caracterización de la misma. Para ello, haremos

uso de la condición necesaria (pero no suficiente) de optimalidad, un adecuado sistema diferencial ordinario de primer orden asociado al problema. Como hemos mencionado, no se trata de una condición suficiente. La resolución de este sistema nos dará un conjunto de posibles candidatos entre los que se encontrará la solución deseada, esto es, el control óptimo. En particular, si tenemos un único candidato, la solución quedará unívocamente determinada: existe el óptimo, existe un único punto extremal y ambos deben ser el mismo.

Para obtener el sistema de optimalidad, utilizaremos una función auxiliar, denominada Hamiltoniano por analogía con la situación encontrada en otros SDOs. El resultado es consecuencia del **principio del mínimo de Pontryaguin** y juega el mismo papel que la condición necesaria de extremo para funciones de una o varias variables reales.

Con carácter general, consideremos un problema de control con funcional de coste

$$J(v) = \int_0^T f_1(t, y) dt + f_2(y(T)) + \int_0^T f_3(t, v) dt,$$

definido en el convexo $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(0, T)^m$ y ecuación de estado

$$\begin{cases} y' &= F(t, y, v) \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

Por definición, el Hamiltoniano asociado es la función $H = H(t, y, \varphi, y_T, v)$, dada por

$$H(t, y, \varphi, y_T, v) := f_1(t, y) + f_2(y_T) + f_3(t, v) + \varphi \cdot F(t, y, v).$$

En lo que sigue, señalaremos con acento circunflejo los valores óptimos de las variables consideradas.

Teorema 1.2 (Sistema de optimalidad). *En las condiciones precedentes, si las funciones F y las f_i son suficientemente regulares y \hat{v} es un control óptimo, entonces \hat{v} verifica, junto con el estado asociado \hat{y} y una función adicional $\hat{\varphi}$,*

el sistema de optimalidad siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{y}'_i = \frac{\partial H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, \hat{v})}{\partial \varphi_i}, & 1 \leq i \leq n, \quad t \in (0, T) \\ \hat{y}(0) = y_0, \\ -\hat{\varphi}'_i = \frac{\partial H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, \hat{v})}{\partial y_i}, & 1 \leq i \leq n, \quad t \in (0, T) \\ \hat{\varphi}_i(T) = \frac{\partial H(T, \hat{\varphi}(T), \hat{y}_T, \hat{v}(T))}{\partial y_{T_i}}, & 1 \leq i \leq n, \quad t \in (0, T) \\ H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, \hat{v}) \leq H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, v), & \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad t \in (0, T) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La función $\hat{\varphi}$, de componentes $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$, se denomina estado adjunto asociado al control \hat{v} . La demostración de este resultado puede encontrarse, por ejemplo, en [15]. No obstante, podemos dar una idea acerca de la demostración en un caso particular.

Suponemos: \hat{v} óptimo, \hat{y} estado asociado, $\hat{\varphi}$ como en (1,6) y que la aplicación dada por $v \mapsto \int_0^T H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}(T), v) dt$ es convexa.

$$J(\hat{v}) \leq J(\hat{v} + \lambda(v - \hat{v})) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \quad \forall \lambda \in (0, 1]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} J(\hat{v} + \lambda(v - \hat{v})) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} (f_1(t, y_\lambda) - f_1(t, \hat{y})) dt + \frac{1}{\lambda} (f_2(y_\lambda(T)) - f_2(\hat{y}(T))) \\ &\quad + \int_0^T \frac{1}{\lambda} (f_3(t, \hat{v} + \lambda(v - \hat{v})) - f_3(t, \hat{v})) dt = A_\lambda + B_\lambda + C_\lambda \end{aligned}$$

En las condiciones del Teorema:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(t, \hat{y}) z_i dt \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} B_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial y_{T_i}}(\hat{y}(T)) z_i(T) \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} C_\lambda &= \int_0^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_3}{\partial v_j}(t, \hat{v})(v_j - \hat{v}_j) dt \end{aligned}$$

Donde z es la derivada de la aplicación $v \mapsto y(v)$ en \hat{v} .

Introducimos $\hat{\varphi}$, como en (1,6). Entonces:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(t, \hat{y}) z_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial y_{T_i}}(\hat{y}(T)) z_i(T) \\
&= - \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\hat{\varphi}_i' + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial y_i}(t, \hat{y}, \hat{v}) \hat{\varphi}_k \right) z_i dt + \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i(T) z_i(T) \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i z_i' dt - \int_0^T \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial y_i}(t, \hat{y}, \hat{v}) \hat{\varphi}_k z_i dt + \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i(0) z_i(0).
\end{aligned}$$

Pero $z_k' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial y_i}(t, \hat{y}, \hat{v}) z_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial v_j}(t, \hat{y}, \hat{v}) (v_j - \hat{v}_j)$ en $(0, T)$ y $z_i(0) = 0$.

Como consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} (J(\hat{v} + \lambda(v - \hat{v})) - J(\hat{v})) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} B_\lambda + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} C_\lambda \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial v_j}(t, \hat{y}, \hat{v}) \hat{\varphi}_i + \frac{\partial f_3}{\partial v_j}(t, \hat{v}) \right) (v_j - \hat{v}_j) dt \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial H}{\partial v_j}(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}(T), \hat{v}) (v_j - \hat{v}_j) dt,
\end{aligned}$$

cierto $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$. Por lo tanto, llegamos al sistema dado por (1,6). Usando este resultado, tenemos que nuestro sistema de optimalidad está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = s_1 - \frac{s_2 V}{B_1 + V} - \mu Y - k Y V + v_1 Y, \quad t \in (0, T) \\ V' = \frac{g(1 - v_2) V}{B_2 + V} - c Y V, \quad t \in (0, T) \\ \varphi_1' = 1 + \varphi_2(\mu + k V - v_1) + \varphi_2 c V \\ \varphi_2' = \varphi_1 \left(k Y + \frac{s_2 B_1}{(B_1 + V)^2} \right) + \varphi_2 \left(c Y - \frac{g(1 - v_2) B_2}{(B_2 + V)^2} \right) \\ Y(0) = Y_0, \quad V(0) = V_0, \quad \varphi_1(T) = 0 \quad \varphi_2(T) = 0 \\ v_1 = \mathcal{P}_{[a_1, b_1]} \left(-\frac{\varphi_1 Y}{\alpha_1} \right), v_2 = \mathcal{P}_{[a_2, b_2]} \left(\frac{1}{\alpha_2} \varphi_2 \frac{g V}{B_2 + V} \right), \end{array} \right. \quad (1.7)$$

donde, para cada convexo $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos $\mathcal{P}_A(\cdot)$ la proyección ortogonal asociada.

Hemos expresado, finalmente, v_1 y v_2 como proyecciones sobre los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$.

Esto se obtiene como consecuencia de la última desigualdad de (1.6):

$$H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, \hat{v}) \leq H(t, \hat{y}, \hat{\varphi}, \hat{y}_T, v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad t \in (0, T).$$

En efecto, utilizando la expresión del Hamiltoniano, tenemos

$$f_3(t, v) - f_3(t, \hat{v}) + \hat{\varphi} \cdot (F(t, \hat{y}, v) - F(t, \hat{y}, \hat{v})) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad t \in (0, T). \quad (1.8)$$

Pero esto implica

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial f_3(t, \hat{v})}{\partial v_i} + \hat{\varphi} \cdot \frac{\partial F(t, \hat{y}, \hat{v})}{\partial v_i} \right] \cdot (v_i - \hat{v}_i(t)) \geq 0, \\ \forall v \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad \forall t \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.9)$$

Sustituyendo f_3 y F y sus derivadas, obtenemos:

$$\begin{cases} \left[\alpha_i v_i - \left(-\hat{\varphi}(t) \cdot \frac{\partial F(t, \hat{y}, v)}{\partial v_i} \right) \right] (v_i - \hat{v}_i(t)) \geq 0 \\ \forall v \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad \forall t \in (0, 1). \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de la Proyección, vemos que existe un único $\hat{v}_i(t)$ que satisface esta desigualdad y está dado por

$$\hat{v}_i(t) = \mathcal{P}_{[a_i, b_i]} \left(-\frac{1}{\alpha_i} \hat{\varphi}(t) \cdot \frac{\partial F(t, \hat{y}, v)}{\partial v_i} \right) \quad \forall t \in (0, 1).$$

Llegamos así a que, en efecto,

$$v_1 = \mathcal{P}_{[a_1, b_1]} \left(-\frac{Y\varphi_1}{\alpha_1} \right), \quad v_2 = \mathcal{P}_{[a_2, b_2]} \left(\frac{1}{\alpha_2} \frac{gV\varphi_2}{B_2 + V} \right).$$

1.3. Obtención numérica del control óptimo

Una vez conocido el sistema de optimalidad y una expresión de los controles en función del estado y el estado adjunto, procederemos al cálculo aproximado del control óptimo. Es claro que para ello será necesario el empleo de un **Software** numérico. Como se trata de problemas diferenciales ordinarios, hemos escogido **MatLab**.

MatLab es un lenguaje de alto nivel para computación e ingeniería muy parecido a BASIC o C. Integra computación, visualización y programación. Originalmente fue escrito en FORTRAN y usaba las librerías LINPACK y EISPACK. No obstante, las últimas versiones están desarrolladas en C y utilizan las librerías LAPACK y BLAS.

Algunas de las aplicaciones más destacables de **MatLab** son:

- Matemáticas y computación.
- Desarrollo de algoritmos.
- Modelado, simulación y prototipado.
- Análisis de datos, exploración y visualización.
- Gráficos científicos y de ingeniería.
- Desarrollo de aplicaciones.

Una importante ventaja que presenta **MatLab** es que posee estructura modular. Dependiendo del objetivo buscado, se pueden utilizar diferentes **Toolboxes**. Cada uno de ellos incluye una colección completa de paquetes adaptados a las necesidades del usuario. Algunos ejemplos de **Toolbox** son: Simulink, Curve Fitting Toolbox, Optimization Toolbox, Image Processing Toolbox, etc. Para más información ver [31].

La simulación numérica se ha llevado a cabo con tres algoritmos diferentes, pudiendo así comparar los resultados en cada caso y ver que son coherentes. A continuación se hará una breve descripción de cada uno de los procedimientos y de sus resultados. Podemos encontrar más información sobre los métodos numéricos utilizados en [43], [35] y [33]. Como la solución es la misma independientemente del algoritmo empleado, sólo presentamos la obtenida en la resolución como problema de contorno.

1.3.1. Resolución como problema de contorno

Tal y como está descrito en (1.7), tenemos un problema de contorno standard para un sistema de primer orden en las variables Y , V , φ_1 y φ_2 . En **MatLab** existe

un **solver** concreto para problemas de este tipo, llamado **bvp4c**, que utiliza un método de colocación. Este método es el más sencillo de programar, pero no el que requiere un menor coste computacional ni el más robusto.

Supongamos que se quiere resolver el problema de contorno siguiente:

$$\begin{aligned} z'(t) &= F(t, z(t)), \quad t \in [a, b], \\ B_a z(a) + B_b z(b) &= \beta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Veamos en qué consiste el método de colocación polinómica de grado menor o igual que m . Sobre una partición del intervalo en el cual queremos resolver el problema, $\Delta = (a = t_0, \dots, t_N = b)$, aproximamos la solución analítica por una función de colocación dada por $p(t) := p_i(t)$, $i = 0, \dots, N-1$, donde p_i es un polinomio de grado, a lo sumo, m . La función $p(t)$ está especificada únicamente por las condiciones

$$\begin{aligned} p'_i(t_{ij}) &= F(t_{ij}, p_i(t_{ij})), \quad i = 0, \dots, N-1, j=1, \dots, m, \\ p_i(t_i) &= p_{i-1}(t_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ B_a p_0(a) + B_b p_{N-1}(b) &= \beta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Los nodos de colocación están dados por

$$t_{ij} := t_i + \rho_j(t_{i+1} - t_i), \quad 0 < \rho_1 < \dots < \rho_m < 1.$$

Se puede garantizar un orden de convergencia $O(h^m)$ en problemas regulares con datos apropiadamente suaves.

El método de colocación **enbvp4c** es de orden 4, resultando apropiado para niveles de precisión moderados. No es así cuando las tolerancias son más estrictas.

Por otra parte, para resolver las ecuaciones no lineales para los coeficientes de las funciones de colocación respecto de una base de polinomios a trozos, se emplean métodos de tipo Newton (es importante proporcionar una inicialización). Para estos algoritmos es importante el condicionamiento de los Jacobianos, puesto que afecta a la máxima precisión que se puede alcanzar. Una ventaja

de `bvp4c` frente a otros `solvers` basados en métodos de colocación es que no se necesita una especificación analítica del Jacobiano, sino que, por defecto, se aproxima por diferencias finitas. Puede encontrarse de manera más detallada en [3].

Tanto este como el algoritmo de punto fijo son métodos indirectos desde el punto de vista del Cálculo de Variaciones. Reciben este nombre debido a que no optimizan directamente el funcional (ver [13], [42]). El control óptimo se calcula a partir de la solución aproximada del sistema de optimalidad.

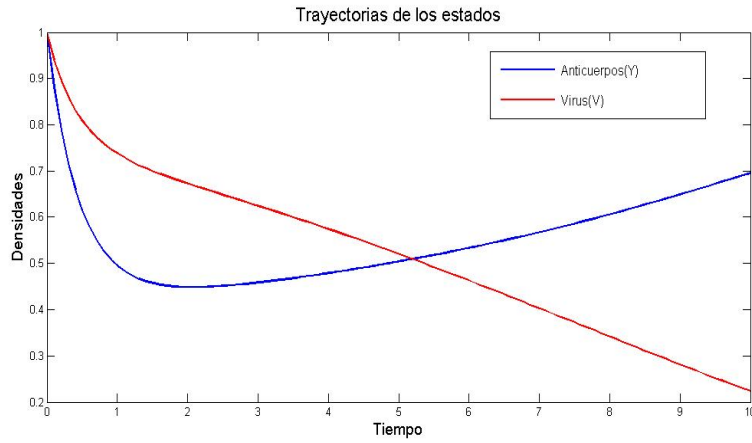


Figura 1.1: Componentes del estado.

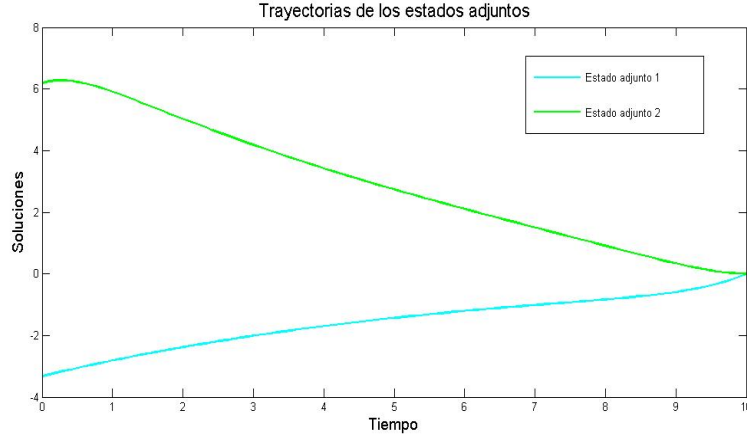


Figura 1.2: Componentes del estado adjunto.

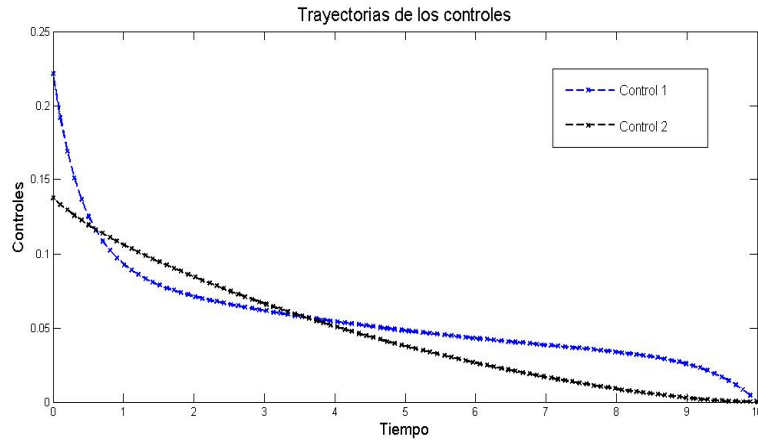


Figura 1.3: El control óptimo calculado.

1.3.2. Algoritmo de punto fijo

Otra forma de implementar la resolución de (1.7) es mediante un algoritmo de punto fijo. Se da una inicialización con valores concretos de v_1 y v_2 y se resuelven sucesivamente el sistema de ecuaciones de estado y de estado adjunto como problemas de Cauchy (el sistema adjunto como sistema retrógrado en el tiempo). Una vez conocidos el estado y el estado adjunto, se sustituye en las expresiones de los controles y se actualizan así sus valores. Repetimos este bucle hasta alcanzar convergencia, con un nivel de tolerancia que prefijamos en este

caso en $\|v_1^n - v_1^{n-1}\|_1 + \|v_2^n - v_2^{n-1}\|_1 < 10^{-3}$.

Por otra parte, obteniendo las soluciones de los problemas de Cauchy, hemos comprobado que se trata de un problema *stiff*. En términos generales, una ecuación diferencial se dice *stiff* (rígida) si aparecen en ella constantes o variables que toman valores de distintos órdenes de magnitud. Para un problema stiff, con métodos habituales de resolución numérica, la solución se vuelve numéricamente inestable a menos que el tamaño del paso en la integración sea extremadamente pequeño. De acuerdo con ello, el `solver` que hemos elegido para resolver los sucesivos problemas de Cauchy es `ode15s`, de orden variable y específico para problemas de este tipo (ver [31]).

Los resultados obtenidos son similares a los que proporciona el primer método.

1.3.3. Resolución directa

El tercer método numérico utilizado consiste en minimizar directamente el funcional de coste, teniendo en cuenta las restricciones en los controles. Se trata, por lo tanto, de un método directo desde el punto de vista del Cálculo de Variaciones. Hemos elegido la función de `MatLab` `fmincon`, cuyos principales argumentos de entrada son J , J' y la descripción de la región factible y cuyo principal argumento de salida es el extremo condicionado que deseamos: el control óptimo. Se trata de una resolución directa que, aunque requiere un mayor tiempo computacional, es robusta y con propiedades de convergencia prácticamente aseguradas.

Por otra parte, hemos seleccionado en las opciones de `fmincon` que realice la optimización con el algoritmo `sqp` de programación cuadrática sucesiva. Consiste en reducir el problema original a una sucesión de problemas cuadráticos; para ello el algoritmo necesita realizar sucesivos cálculos de gradientes y matrices Hessianas de la función objetivo paso a paso. Es aquí donde se origina el alto coste computacional del método. Para reducirlo, hemos proporcionado la función gradiente del coste (es fácil de obtener a partir del sistema de optimalidad). También podríamos haber proporcionado la matriz Hessiana tras

cálculos adecuados. Sin embargo, la velocidad de convergencia proporcionando el gradiente es suficiente para este problema en particular.

Además del `sqp`, `fmincon` ofrece otros tres algoritmos que podemos escoger dentro del conjunto de opciones `optimset`. Éstos son: `active-set`, `Trust region reflective` e `interior-point`. Para profundizar más, ver [31] o la web del distribuidor <https://es.mathworks.com/>.

De nuevo, los resultados obtenidos son similares a los proporcionados por los otros dos métodos. Esto aporta un mayor grado de confianza en nuestra solución.

1.3.4. Análisis cualitativo de los resultados

Es importante destacar que, en el caso simulado numéricamente, estamos suponiendo que enfermedad y terapia comienzan simultáneamente y que los niveles de densidad de anticuerpos y densidad de población del virus son del 100 %.

Comenzamos aplicando las dos terapias, una generadora de anticuerpos y otra que ataca al virus. Llegado un determinado instante de tiempo entre $t = 1$ y $t = 2$, la tendencia decreciente de la densidad de anticuerpos del sistema inmunitario cambia a creciente, comprobándose así que el control aplicado está haciendo efecto en el paciente. Además, cuando termina la terapia en $t = 10$, se anulan los controles. Esto se interpreta como un final suave, sin provocar alteraciones bruscas en el receptor. Una vez llegados a este punto, continúa habiendo presencia del virus en el paciente, pero la población es muy pequeña. Por otra parte, la recuperación de anticuerpos tampoco llega a ser total. De aquí deducimos que esta terapia, en el tiempo previsto, no erradica totalmente el virus. La explicación médica de este hecho es que el VIH se replica activamente en tan solo una pequeña proporción de linfocitos infectados, responsables de la enorme producción de virus observada en el paciente infectado. En la mayoría de los linfocitos el VIH se integra en el genoma celular, donde **permanece en estado de latencia**. Estas células constituyen un auténtico reservorio vírico que no parece modificarse con el tiempo o el tratamiento.

Capítulo 2

Control de la terapia tumoral

Se intenta describir (y optimizar) la evolución de un tumor sometido a quimioterapia (véase [22]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(v) := x_1(T) + \alpha \int_0^T (|v_1|^2 + |v_2|^2) dt \\ \text{Sujeto a } v = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in X_{ad}, \quad (x, v) \text{ verifica (2,3),} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in (L^2(0, T))^2 : 0 \leq v_i \leq b_i \text{ c.p.d}\}, \quad (2.2)$$

$$X_{ad} = \{x \in (C^1([0, T]))^3 : x_3(t) \leq B_3, \quad x_i(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]\}$$

y

$$\begin{cases} x_1' = -ax_1 \log \frac{x_1}{x_2} - bx_1v_2, & t \in (0, T), \\ x_2' = cx_1 - \mu x_2 - dx_1^{2/3}x_2 - ex_2v_1 - fx_1v_2, & t \in (0, T), \\ x_3' = v_1, & t \in (0, T), \\ x_i(0) = x_{i0}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Aquí, se está suponiendo que se está aplicando una terapia doble, anti-angiogénica y citotóxica, respectivamente determinada por los controles v_1 y v_2 . Por otra parte, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ representan el número de células tumorales, el número de células endoteliales con origen en un vaso sanguíneo próximo y la densidad de anticuerpos generados por la terapia en el tiempo t . Por lo tanto, las tres variables deben tomar valores no negativos. Supondremos que los x_{i0} y las constantes $b_i, B_3, a, b, c, \mu, d, e, f$ son positivas y además $B_3 > x_{30}$ y $fb_2 \leq c$. En principio, nos enfrentamos a un problema más complicado debido a que hay restricciones sobre los estados. Sin embargo, es posible escribirlas en términos de los controles.

En primer lugar, tenemos que

$$x_3(t) = x_{30} + \int_0^t v_1(s) ds, \quad t \in (0, T).$$

Por otra parte, como $x_{i0} \geq 0$ podemos demostrar la no negatividad de los estados. Efectivamente, si tratamos cada ecuación de (2.3) por separado,

$$\begin{cases} x_1' = M(t)x_1 \\ x_1(0) = x_{10}, \end{cases}$$

que no es más que un Problema de Cauchy asociado a una EDO lineal por lo que la solución será de la forma

$$x_1(t) = x_{10}e^{\int_0^t M(s) ds} \quad \forall t \in [0, T],$$

por lo que x_1 siempre es no negativo.

De igual forma,

$$\begin{cases} x_2' = N(t)x_2 + (c - fv_2)x_1 \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{\int_0^t N(s)ds} + e^{\int_0^t N(s)ds} \int_0^t (c - fv_2)e^{-\int_0^s N(\sigma)d\sigma} x_1 ds \quad \forall t \in [0, T],$$

La consecuencia es que podemos reformular el problema cambiando X_{ad} por $C^1([0, T])^3$ y el anterior \mathcal{U}_{ad} por este otro:

$$\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2, \quad (2.4)$$

donde

$$\mathcal{U}_1 = \{v \in (L^2(0, T))^2 : 0 \leq v_i \leq b_i\}$$

y

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ v \in (L^2(0, T))^2 : \int_0^T v_1(s) ds \leq C_3 = B_3 - x_{30} \text{ c.p.d} \right\}.$$

Debido a que hemos escogido $B_3 > x_{30}$, podemos afirmar que $C_3 > 0$.

Una característica importante: estamos ante un problema de control bilineal (el control actúa multiplicando al estado). Como consecuencia, cabe esperar que el estado sea menos sensible al control. Este es un tema de gran actualidad por su interés en una amplia variedad de aplicaciones. Se puede encontrar más información al respecto en [17].

2.1. Existencia de control óptimo

Teorema 2.1. *El problema (2,1) posee al menos una solución.*

Demostración 2.1.1. Sea $\{v_n\} \subset \mathcal{U}_{ad}$ una sucesión *minimizante*, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \beta := \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

1. Propiedades de \mathcal{U}_{ad} .

■ Es **no vacío**:

En efecto, escogemos $v = (D, G)$ tal que $0 \leq G \leq b_2$ y $0 \leq D \leq \min \left\{ b_1, \frac{C_3}{T} \right\}$.

■ Es **acotado**:

Nuestro conjunto es intersección de dos conjuntos, con uno de ellos acotado como hemos visto en la demostración del Teorema 1,1. Por lo tanto, \mathcal{U}_{ad} también lo es.

■ Es **secuencialmente débilmente cerrado** :

De nuevo, es fácil comprobar directamente que el límite débil de una sucesión en \mathcal{U}_{ad} pertenece a \mathcal{U}_{ad} . Sea pues $\{v^n\}_{n \geq 0}$ débilmente convergente hacia $v \in L^2(0, T)^2$, con los $v^n \in \mathcal{U}_{ad}$.

Por la definición de \mathcal{U}_{ad} , sabemos que

$$0 \leq v_i^n \leq b_i \quad \forall n \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Razonando como en la demostración del Teorema 1,1, deducimos que

$$0 \leq v_i \leq b_i, \quad i = 1, 2.$$

Por otra parte,

$$\int_0^T v_1^n(s) ds \rightarrow \int_0^T v_1(s) ds. \quad (2.5)$$

Luego, como

$$\int_0^T v_1^n(s) ds \leq C_3 \quad \forall n \geq 1,$$

también tenemos que

$$\int_0^T v_1(s) ds \leq C_3.$$

Concluimos así que $v \in \mathcal{U}_{ad}$ y por lo tanto es cerrado .

■ Es **convexo**:

El razonamiento es análogo al utilizado en el Teorema 1.1. Se omiten los detalles.

2. El funcional J es trivialmente continuo por ser la suma de funciones continuas. Además, el término cuadrático en v es convexo, por lo que dicho término es débilmente secuencialmente s.c.i..

En principio, no se puede decir nada sobre la unicidad, puesto que el funcional J no es convexo. La convexidad se pierde cuando se introduce el término $x_1(T)$ en J , puesto que el sistema de estado es no lineal.

□

2.2. Sistema de optimalidad

En primer lugar, construimos el Hamiltoniano asociado a nuestro problema

$$H(t, x, \varphi, x_T, v) := x_1(T) + \alpha(|v_1|^2 + |v_2|^2) - \varphi_1 \left(ax_1 \log \frac{x_1}{x_2} + bx_1 v_2 \right) + \varphi_2(cx_1 - \mu x_2 - dx_1^{3/2}x_2 - cx_2 v_1 - fx_1 v_2) + \varphi_3 v_1. \quad (2.6)$$

Aplicamos ahora el Teorema 1.2 a de manera que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{x}'_i = \frac{\partial H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, \hat{v})}{\partial \varphi_i}, & 1 \leq i \leq 3, \quad t \in (0, T) \\ \hat{y}(0) = y_0; \\ -\hat{\varphi}'_i = \frac{\partial H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, \hat{v})}{\partial x_i}, & 1 \leq i \leq 3, \quad t \in (0, T) \\ \hat{\varphi}_i(T) = \frac{\partial H(T, \hat{\varphi}(T), \hat{x}_T, \hat{v}(T))}{\partial x_{T_i}}, & 1 \leq i \leq 3, \quad t \in (0, T) \\ H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, \hat{v}) \leq H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, v), & \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (2.7)$$

llegando así al sistema de optimalidad

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = -ax_1 \log \frac{x_1}{x_2} - bx_1 v_2, \quad t \in (0, T), \\ x_2' = cx_1 - \mu x_2 - dx_1^{2/3} x_2 - cx_2 v_1 - fx_1 v_2, \quad t \in (0, T), \\ x_3' = v_1, \quad t \in (0, T), \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \hat{\varphi}_1' = \hat{\varphi}_1 \left(a \log \frac{x_1}{x_2} + a + bv_2 \right) - \hat{\varphi}_2 \left(c - \frac{2}{3} dx_1^{-1/3} x_2 - fv_2 \right) \\ \hat{\varphi}_2' = -\hat{\varphi}_1 \frac{x_1}{x_2} + \hat{\varphi}_2 (\mu + dx_1^{2/3} + cv_1) \\ \hat{\varphi}_3' = 0 \\ \hat{\varphi}_1(T) = 1, \hat{\varphi}_2(T) = 0, \hat{\varphi}_3(T) = 0 \\ \hat{v}_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 \right), \hat{v}_2 = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(\frac{b}{2\alpha} \hat{\varphi}_1 x_1 + \frac{f}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_1 \right). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Como podemos apreciar en (2.8),

$$\hat{\varphi}_3(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

resultado congruente con el hecho de que la ecuación para el estado x_3 se vuelva redundante una vez reescribimos el conjunto de controles admisibles como (2.4).

De nuevo, $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}}$ es el operador proyección sobre el conjunto de controles admisibles. La expresión del control óptimo la obtenemos aplicando

$$H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, \hat{v}) \leq H(t, \hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{x}_T, v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad t \in (0, T).$$

Esto conlleva el mismo resultado que en (1.8), equivalente a

$$(\nabla_v f_3 + \hat{\varphi} \cdot J_v F) \cdot (v - \hat{v}) \geq 0,$$

donde ∇_v denota el operador gradiente y J_v la matriz Jacobiana, ambos respecto de v .

$$\begin{cases} \left(v_1 - \frac{e}{2\alpha}\hat{\varphi}_2x_2\right)(v_1 - \hat{v}_1) \geq 0 \\ \left(v_2 - \left(\frac{b}{2\alpha}\hat{\varphi}_1x_1 + \frac{f}{2\alpha}\hat{\varphi}_2x_1\right)\right)(v_2 - \hat{v}_2) \geq 0 \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

Por el Teorema de la Proyección, enunciado y demostrado en [10], tenemos que la única solución es la proyección sobre \mathcal{U}_{ad} .

2.3. Cálculo de la proyección

Tenemos el problema de determinar

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}}(v_1, v_2) = (\mathcal{P}_1 v_1, \max(\min(v_2, b_2), 0)),$$

donde \mathcal{P}_1 es la proyección sobre $\mathcal{U}_{11} \cap \mathcal{U}_{12}$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11} &:= \{v_1 \in \mathcal{L}^2(0, T) : 0 \leq v_1 \leq b_1\} \\ \mathcal{U}_{12} &:= \left\{v_1 \in \mathcal{L}^2(0, T) : \int_0^T v_1 \, ds \leq C_3\right\}. \end{aligned}$$

La proyección sobre \mathcal{U}_{11} es inmediata y está dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11}}(z) = \max(\min(z, b_1), 0).$$

Calculemos la proyección sobre \mathcal{U}_{12} . En primer lugar, sabemos que es cerrado puesto que, si definimos

$$f(v_1) := \int_0^T v_1 \, dt,$$

entonces

$$\mathcal{U}_{12} = f^{-1}((-\infty, C_3]).$$

Como es preimagen por una función continua de un conjunto cerrado, \mathcal{U}_{12} es cerrado.

De esta manera, buscamos w tal que, para todo z cumpliendo $\int_0^T z \, dt > C_3$,

$$\|w - z\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|w' - z\|_{\mathcal{L}^2} \quad \forall w' \in \mathcal{U}_{12}$$

Dados dos puntos w y w' de $\partial\mathcal{U}_{12}$,

$$\int_0^T (w - w') dt = C_3 - C_3 = 0.$$

Por lo tanto, si llamamos $y = w - w'$, perteneciente a $\delta\mathcal{U}_{12}$, tenemos que $y \in [1]^\perp$.

De esta manera, sea u la proyección ortogonal de z , se cumple que

$$u - z \in [[1]^\perp]^\perp = [1].$$

Tenemos así que $u = k + z$ con $k \in \mathbb{R}$, e integrando cada uno de los términos,

$$C_3 = kT + \int_0^T z dt,$$

despejamos k y tenemos así

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}}(z) = z + \frac{1}{T} \left(C_3 - \int_0^T z dt \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \mathcal{P}_1 \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 \right) \\ \hat{v}_2 &= \max \left(\min \left(\frac{b}{2\alpha} \hat{\varphi}_1 x_1 + \frac{f}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_1, b_2 \right), 0 \right). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11}} \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 \right) &= \max \left(\min \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2, b_1 \right), 0 \right) \\ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}} \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 \right) &= \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 + \frac{1}{T} \left(C_3 - \int_0^T \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 x_2 dt \right). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es calcular una expresión para \mathcal{P}_1 a partir de $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11}}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}}$. Para ello utilizamos el algoritmo de Dykstra (ver [8] y [21]).

El algoritmo de Dykstra es un método para encontrar la proyección de un punto

x dado en un espacio de Hilbert X sobre la intersección $C = \bigcap_{i=1}^k C_i$ de un número finito de conjuntos convexos y cerrados. Es un algoritmo iterativo y convergente que reduce el problema al cálculo de las proyecciones sobre los conjuntos individuales C_i .

Teorema 2.2. *Sea X un espacio de Hilbert, A y B subconjuntos cerrados y convexos, y x un punto de X . Entonces:*

$$\begin{aligned} p_0 &:= q_0 := 0, & b_0 &:= 0, \\ a_n &:= P_A(b_{n-1} + p_{n-1}), & p_n &:= b_{n-1} + p_{n-1} - a_n, \\ b_n &:= P_B(a_n + q_{n-1}), & q_n &:= a_n + q_{n-1} - b_n. \end{aligned}$$

De manera que, si $A \cap B \neq \emptyset$,

$$a_n, b_n \rightarrow P_{A \cap B} x.$$

Aplicamos así el Teorema (2.2) al conjunto $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{11} \cap \mathcal{U}_{12}$, obteniendo la proyección \mathcal{P}_1 deseada.

Aplicaremos el Algoritmo de Dykstra para el cálculo de las proyecciones tal y como hemos visto. El principal problema reside en el cálculo de la proyección sobre \mathcal{U}_1 .

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11} \cap \mathcal{U}_{12}} \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 \right), \\ \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}} &= \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 \quad \text{si} \quad \int_0^T \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 dt \leq C_3 \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}} = \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 + \frac{1}{T} \left(C_3 - \int_0^T \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 dt \right) \quad \text{si no.}$$

Como podemos apreciar, para calcular el control óptimo es necesario conocer globalmente \hat{x}_2 y $\hat{\varphi}_2$. Sin embargo, a su vez, ambas funciones dependen del control en cada instante. Se presenta así lo que se conoce como un **problema con restricciones globales en tiempo**, este tipo de restricciones se tratan en [37]. No podemos introducir directamente \hat{v}_1 y \hat{v}_2 en el sistema de optimalidad directamente porque para conocerlos debemos calcular previamente las proyecciones y estas dan lugar a un problema integral con dependencia de \hat{x}_2 y

$\hat{\varphi}_2$.

Resolveremos este inconveniente parametrizando la integral y usando una aproximación usando un método iterativo de punto fijo:

1. Inicializamos con un valor λ^0 concreto.
2. Para $n \geq 0$, calculamos \hat{x}_1^n , \hat{x}_2^n , $\hat{\varphi}_1^n$, $\hat{\varphi}_2^n$ y actualizamos.

$$\lambda^{n+1} = \int_0^T \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2^n \hat{x}_2^n dt$$

Por lo tanto podemos definir, para $n \geq 0$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}}^n \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 \right) = \begin{cases} \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 & \text{si } \lambda^n \leq C_3 \\ \frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 + \frac{1}{T} (C_3 - \lambda^n) & \text{si } \lambda^n > C_3. \end{cases}$$

De esta manera,

$$\hat{v}_1^n = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11} \cap \mathcal{U}_{12}}^n \left(\frac{e}{2\alpha} \hat{\varphi}_2 \hat{x}_2 \right) = Dyks(\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11}}, \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}}(\lambda^n)) \forall n \geq 0.$$

Con $Dyks(\mathcal{P}_{\mathcal{U}_{11}}, \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{12}})$ hacemos referencia a la aplicación del algoritmo de Dykstra, proyectando sobre la intersección de los conjuntos \mathcal{U}_{11} y \mathcal{U}_{12} , ambos trivialmente cerrados y convexos.

2.4. Resolución numérica

En la resolución numérica llevada a cabo en el caso del SIDA, presentamos tres algoritmos distintos para obtener los mismos resultados: resolución del sistema de optimalidad como problema de contorno, mediante un algoritmo de punto fijo y por resolución directa del problema de mínimos condicionados. En este caso, al tratarse de un problema con restricciones globales en tiempo, no podemos resolver el problema de contorno dado por el sistema de optimalidad, ya que no tenemos una expresión analítica operativa de los controles como función de los estados y los estados adjuntos que podamos introducir en el mismo. Por lo tanto, nos limitaremos a la resolución mediante los otros dos métodos.

Cabe señalar que, para llevar a cabo los algoritmos, se ha necesitado implementar en ellos el algoritmo de Dykstra. La convergencia del mismo se garantiza con un nivel de tolerancia que prefijamos en $\|v_1^n - v_1^{n-1}\|_1 < 10^{-8}$.

2.4.1. Algoritmo de punto fijo

El procedimiento guarda una gran similitud con el realizado anteriormente. Proporcionamos valores iniciales de v_1 y v_2 y resolvemos de manera sucesiva los problemas de Cauchy asociados al SDO de ecuaciones de estado y de estado adjunto. Las soluciones de los mismos las sustituimos en las expresiones de los controles y realizamos las proyecciones necesarias con ayuda del algoritmo de Dykstra, actualizando así sus valores. Prefijamos un nivel de tolerancia para la convergencia de este bucle en $\|v_1^n - v_1^{n-1}\|_1 + \|v_2^n - v_2^{n-1}\|_1 < 10^{-8}$.

Por otra parte, la resolución numérica de los problemas de Cauchy la hemos llevado a cabo en **MatLab** con ayuda del **solver ode45**, basado en una fórmula explícita Runge-Kutta (4, 5). Es un **solver** de un único paso para computar $y(t_n)$, sólo necesita la solución en el instante precedente $y(t_{n-1})$.

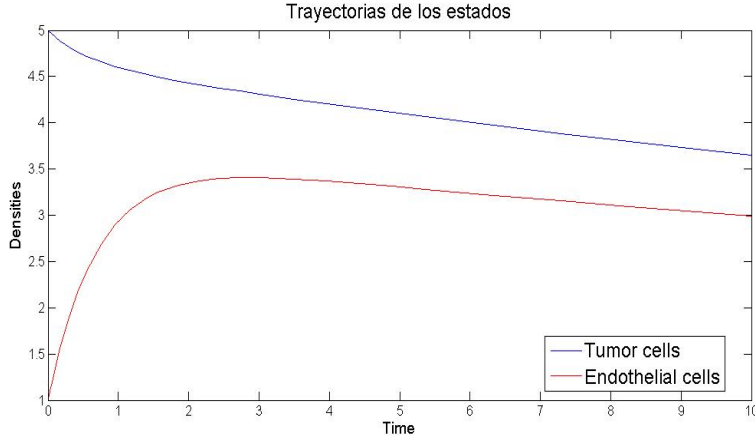


Figura 2.1: Componentes del estado.

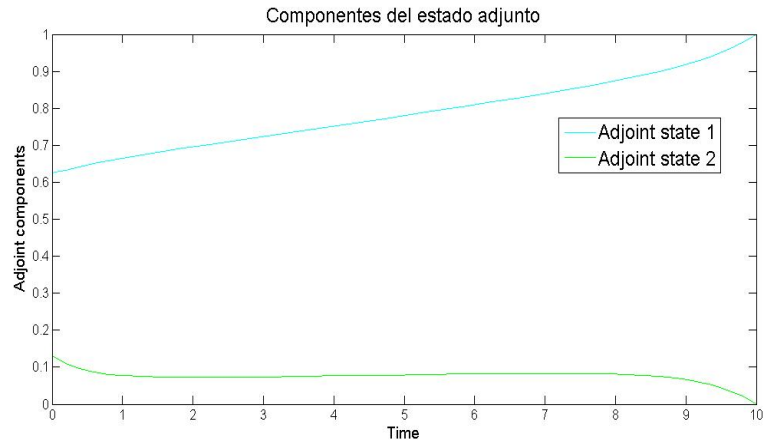


Figura 2.2: Componentes del estado adjunto.

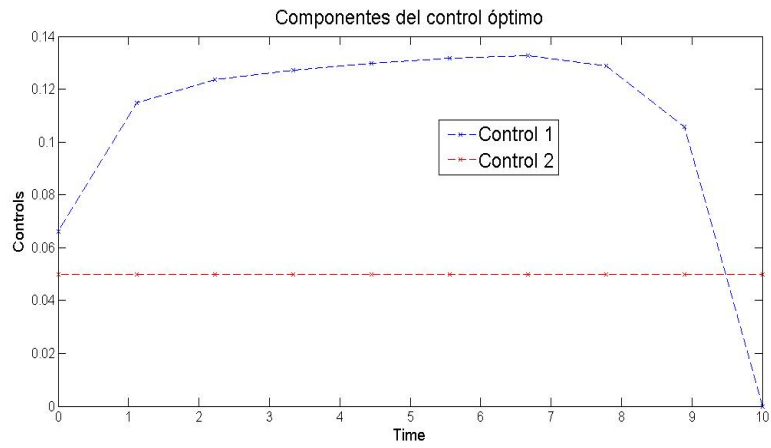


Figura 2.3: El control óptimo calculado.

2.4.2. Resolución directa

Al igual que hicimos con el modelo del SIDA, usamos la función predefinida en MatLab `fmincon` de optimización bajo restricciones. Obtenemos los mismos resultados que con el algoritmo de punto fijo.

2.5. Análisis cualitativo de los resultados

En el tratamiento óptimo, aplicamos durante el tratamiento una dosis de medicación citotóxica mientras, simultáneamente, incrementamos la acción anti angiogénica representada por el control 1 durante un primer intervalo temporal. En este tiempo, se observa un decrecimiento significativo de la densidad de células tumorales y un crecimiento aún más notable de la densidad de células endoteliales. Este es, posiblemente, el periodo de mayor riesgo para el paciente debido a la gran influencia del tratamiento en las células de su organismo.

Posteriormente, nos encontramos en un periodo en el que se estabiliza la terapia anti-angiogénica en su valor máximo, permaneciendo constante la otra terapia. Ahora ambos tipos de células disminuyen en densidad pero lo hacen de manera aproximadamente lineal; mucho más suave en comparación con la primera etapa, en la que las variaciones eran del orden de una función exponencial. El paciente se adapta a la terapia y pasa a un nivel de riesgo menor.

Finalmente, disminuimos la terapia anti-angiogénica hasta que esta se anula en el momento final del tratamiento. No obstante, esta disminución relativamente repentina, no afecta de manera destacable a la evolución de las densidades celulares, las cuales continúan disminuyendo linealmente hasta alcanzar sus valores finales. Cabe destacar que en estas dos últimas etapas del tratamiento, la diferencia entre las distintas densidades celulares se ha mantenido prácticamente constante.

Capítulo 3

Control de la trayectoria de un proyectil

El segundo problema de control considerado se refiere a la trayectoria de un proyectil $x = x(t)$ lanzado con un impulso $v = v(t)$ y sometido a ciertas restricciones durante todo el tiempo de vuelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(v) := \frac{1}{2} \int_0^1 |v|^2 dt \\ \text{Sujeto a } v \in \mathcal{U}_{ad}, x \in X_{ad} \quad (x, v) \text{ verifica (3.3)} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

donde

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(0, 1) : a \leq v \leq b \quad \text{c.p.d en } (0, 1)\}, \quad (3.2)$$

$$X_{ad} = \{x \in C^1([0, 1]) : x'(0) = -x'(1) = 1, \quad x(t) \leq \frac{1}{9} \quad \forall t \in [0, 1]\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = v, \quad t \in (0, 1) \\ x(1) = x(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Problemas similares a éste los podemos encontrar, por ejemplo, en [20] y [23]. La interpretación Física de cada magnitud que aparece en éste modelo es inmediata. El estado x representa la altura del proyectil en cada instante. El

control v es el impulso externo al que sometemos dicho proyectil y que puede tratarse de un motor que, como tal, consume algún tipo de combustible. De esta manera, queremos conocer la manera de suministrar este impulso para que el proyectil, partiendo del reposo y con una velocidad inicial no nula, vuelva a aterrizar en el instante deseado ($t = 1$) bajo ciertas restricciones sobre el impulso y la altura máxima que permitimos que alcance el móvil. A su vez, nuestro objetivo es conseguirlo consumiendo el mínimo combustible posible, lo cual queda reflejado en el funcional de coste J .

Este caso es esencialmente distinto del considerado en la Sección 1 debido a que, como vemos en (3.2), no tenemos únicamente restricciones sobre el control sino también hay sobre el estado. Sin embargo, gracias a la sencilla forma de (3.3) podemos obtener una expresión de x en función del control v y así reescribir X_{ad} como parte del conjunto de controles admisibles. Más precisamente, tenemos:

$$x'' = v$$

$$x' = \int_0^t v(s) ds + C$$

$$x = \int_0^t \left(\int_0^s v(r) dr \right) ds + Ct + D = \int_0^t (t-s)v(s) ds + Ct + D,$$

donde C y D son las constantes reales de integración habituales. Para conocerlas, simplemente aplicamos las condiciones de contorno de (3.3) y nos aseguramos de estar en la región de estados admisibles:

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

$$x(1) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (1-s)v(s) ds + C = -1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1$$

$$x'(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$x'(1) = -1 \Leftrightarrow \int_0^1 v(s) ds + C = -2 + C = -1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Obtenemos así que $C = 1$ y $D = 0$. De esta manera podemos proceder a la reescritura e incorporación de X_{ad} a \mathcal{U}_{ad} y a la siguiente reformulación de (3.4):

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(v) := \frac{1}{2} \int_0^1 |v|^2 dt \\ \text{Sujeto a } v \in \mathcal{V}_{ad}, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{ v \in L^2(0,1) : a \leq v \leq b, \int_0^1 (1-s)v(s) ds = -1, \right. \\ \left. \int_0^1 v(s) ds = -2, \int_0^t (t-s)v(s) ds + t \leq 1/9 \right\}.$$

3.1. Existencia de control óptimo

Teorema 3.1. *El problema (3.4) posee solución única.*

La demostración guarda analogía con la del Teorema 1.1. Aunque el conjunto de controles admisibles tenga una expresión más compleja que en el caso del SIDA, lo único que hemos introducido son integrales de funciones lineales en v . Sin embargo, la integral es un operador lineal luego nuestro conjunto de controles admisibles continúa estando definido por desigualdades dadas por funciones afines continuas.

Demostración 3.1.1. Sea $\{v_n\} \subset \mathcal{V}_{ad}$ una sucesión minimizante y pongamos de nuevo $\beta := \inf_{v \in \mathcal{V}_{ad}} J(v)$.

1. Propiedades de \mathcal{V}_{ad} .

■ Es **no vacío**:

Buscaremos polinomios que satisfagan las condiciones del conjunto, ya que su integración es sencilla. Al usar como función test constantes o polinomios de primer grado, observamos que se satisfacen trivialmente todas las restricciones excepto la última que podemos observar en la descripción de \mathcal{V}_{ad} anterior. No obstante, veamos que para una correcta elección de los parámetros reales M , N y P , $v(t) = Mt^2 + Nt + P$ pertenece a \mathcal{V}_{ad} .

De las condiciones $\int_0^1 v(s) ds = -2$ y $\int_0^1 (1-s)v(s) ds = -1$ obtenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas en M , P y N de las cuales obtenemos las relaciones

$$M = -N, \quad N = N, \quad P = -2 - \frac{N}{6}.$$

Por lo tanto, tenemos una familia uniparamétrica, de parámetro N , de posibles elementos de \mathcal{V}_{ad} . No obstante, aún queda imponer

$$\int_0^t (t-s)v(s) ds + t \leq \frac{1}{9} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sustituyendo nuestra familia de funciones candidatas, llegamos a que

$$-\frac{Nt^4}{12} + \frac{Nt^3}{6} - \left(2 + \frac{N}{6}\right) \frac{t^2}{2} + t \leq \frac{1}{9} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Esto se cumple, por ejemplo, para $N = -20/3$.

■ **Es acotado:**

El razonamiento es el mismo que empleamos en la demostración del Teorema 1.1.

$$\|v\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |v|^2 dt \leq b^2. \quad (3.5)$$

Como \mathcal{V}_{ad} se puede escribir como intersección de

$$E = \{v \in L^2(0, 1) : a \leq v \leq b\},$$

con otros conjuntos y hemos visto en (3.5) que E es acotado en $L^2(0, 1)$, deducimos que \mathcal{V}_{ad} también lo es.

■ **Es secuencialmente débilmente cerrado:**

En este caso, podemos probar directamente que el límite débil de una sucesión de \mathcal{V}_{ad} pertenece a \mathcal{V}_{ad} . Sea una sucesión $\{v^n\}_{n \geq 0}$ débilmente convergente hacia un cierto $v \in L^2(0, 1)$ y veamos que $v \in \mathcal{V}_{ad}$.

Para ello, usaremos directamente la definición de convergencia débil.

$$\int_0^1 (1-s)v^n(s) ds \rightarrow \int_0^1 (1-s)v(s) ds.$$

Luego

$$\int_0^1 (1-s)v(s) ds = -2.$$

De igual manera tenemos que

$$\int_0^1 v(s) ds = -1.$$

$$\int_0^t (t-s)v(s) ds + t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (t-s)v^n(s) ds + t \right) \leq 1/9 \text{ c.p.d. .}$$

$$a \leq v^n \leq b \text{ c.p.d. } \forall n \geq 1 \Rightarrow a \leq v \leq b \text{ c.p.d. .}$$

En efecto, si $\varphi \in L^2(0,1)$ y $\varphi \geq 0$ c.p.d., tenemos

$$\int_0^1 (b-v^n)\varphi dt \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 (b-v^n)\varphi dt \rightarrow \int_0^1 (b-v)\varphi dt.$$

Luego

$$\int_0^1 (b-v)\varphi dt \geq 0.$$

Como φ es arbitraria, necesariamente $v \leq b$ c.p.d.. De modo análogo se prueba que $v \geq a$ c.p.d..

De estos resultados concluimos que el límite de la sucesión $\{v^n\}$ está en \mathcal{V}_{ad} y, por lo tanto, \mathcal{V}_{ad} es secuencialmente cerrado para la topología débil.

■ Es **convexo**:

Probaremos que, dados $v, w \in \mathcal{V}_{ad}$ cualesquiera,

$$\lambda v + (1-\lambda)w \in \mathcal{V}_{ad} \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

En primer lugar, vemos fácilmente que

$$\left. \begin{array}{l} a \leq v \leq b \\ a \leq w \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq \lambda v + (1-\lambda)w \leq b.$$

A continuación, demostraremos que

$$\int_0^1 (1-s)(\lambda v(s) + (1-\lambda)w(s)) ds = -1.$$

Para ello, utilizamos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)(\lambda v(s)) ds &= \lambda \int_0^1 (1-s)v(s) ds = -\lambda, \\ \int_0^1 (1-s)((1-\lambda)w(s)) ds &= (1-\lambda) \int_0^1 (1-s)w(s) ds = -(1-\lambda). \end{aligned}$$

Sumamos ambas igualdades y tenemos

$$\int_0^1 (1-s)(\lambda v(s) + (1-\lambda)w(s)) ds = -1$$

Por último, las pruebas de las igualdades

$$\int_0^1 (\lambda v(s) + (1-\lambda)w(s)) ds = -2$$

y las desigualdades

$$\int_0^t (t-s)(\lambda v(s) + (1-\lambda)w(s)) ds + t \leq 1/9$$

son completamente análogas.

Aplicando el razonamiento de la demostración (1.1.1), deducimos de estas propiedades que existe una subsucesión de $\{v^n\}$ débilmente convergente a un cierto $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$.

2. Propiedades del funcional de coste:

Esta función es claramente continua y estrictamente convexa, por tratarse del cuadrado de una norma en un espacio de Hilbert, por lo que inmediatamente tenemos que es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente. Así ,

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) \geq J(u^*).$$

Por tanto,

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \geq J(u^*), \text{ de donde tenemos } \beta = J(u^*).$$

Esto muestra la existencia de control óptimo.

Por otra parte, como J es estrictamente convexa, el control óptimo es único (y, de hecho, toda la sucesión minimizante converge fuertemente hacia u^*).

En efecto, existe una subsucesión $\{v^{n'}\}$ de $\{v^n\}$ que converge débilmente al único control óptimo u^* . Entonces

$$\frac{1}{2} \|v^{n'} - u^*\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2} \|v^{n'}\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|u^*\|_{L^2(0,1)}^2 - \int_0^1 v^{n'} u^* dt.$$

Tomando límites cuando $n' \rightarrow \infty$, obtenemos $\beta - J(u^*)$, que es ≤ 0 . Por tanto,

$$\|v^n - u^*\|_{L^2(0,1)}^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

es decir, $\{v^{n'}\}$ converge fuertemente hacia u^* .

Por otra parte, de toda subsucesión de $\{v^n\}$ se puede siempre extraer una nueva subsucesión débilmente convergente, necesariamente hacia u^* . Aplicando el razonamiento precedente, vemos que esta sucesión converge en realidad fuertemente. Por tanto, la sucesión completa converge hacia u^* .

□

3.2. Obtención numérica del control óptimo

Al escribir las restricciones en los estados en condiciones sobre los controles a partir de la relación dada entre ellos por la ecuación de estado (3,3), hemos convertido nuestro problema inicial en uno de minimización de un funcional sobre el conjunto \mathcal{V}_{ad} . Por lo tanto, no es necesario dar una caracterización de la solución utilizando el sistema de optimalidad asociado al problema. De hecho,

por brevedad, omitimos el cálculo de éste, puesto que la proyección sobre \mathcal{V}_{ad} es excesivamente laboriosa. Además, el hecho de que las restricciones sean globales hace que descartemos la resolución con **bvp4c**.

Para la resolución, de nuevo hemos empleado el **Software** de simulación numérica **MatLab**, el cual dispone de un **solver** específico para problemas de optimización con restricciones, llamado **fmincon**. Sus principales argumentos de entrada son J , J' y la descripción de la región factible y su principal argumento de salida es el extremo condicionado deseado: el control óptimo. Cabe señalar que para la descripción de \mathcal{V}_{ad} ha sido necesaria la discretización del intervalo $(0, 1)$ con la consecuente conversión de las integrales en sumatorios sobre la partición del intervalo en cuestión. De hecho, hemos comprobado que es necesaria una partición en unos 300 subintervalos para obtener una correcta aproximación numérica y una representación gráfica en las que se aprecie completamente el cumplimiento de las restricciones. Principalmente que la altura final del proyectil sea nula, de gran importancia para la interpretación Física del problema.

Por otra parte, hemos establecido las mismas opciones para **fmincon** que en la sección 1, usando el algoritmo **sqp** de programación cuadrática sucesiva y proporcionando la función gradiente del coste para reducir el elevado número de cálculos de matrices Hessianas y vectores gradiente. No hemos necesitado proporcionar la matriz Hessiana ya que este problema es sencillo y únicamente con el gradiente conseguimos la velocidad de convergencia necesaria. Tenemos así un método robusto, con propiedades de convergencia prácticamente aseguradas y que no exige un excesivo tiempo computacional.

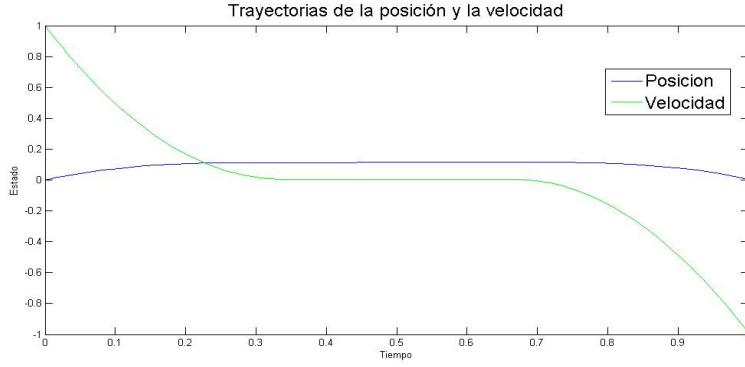


Figura 3.1: Posición y velocidad del proyectil.

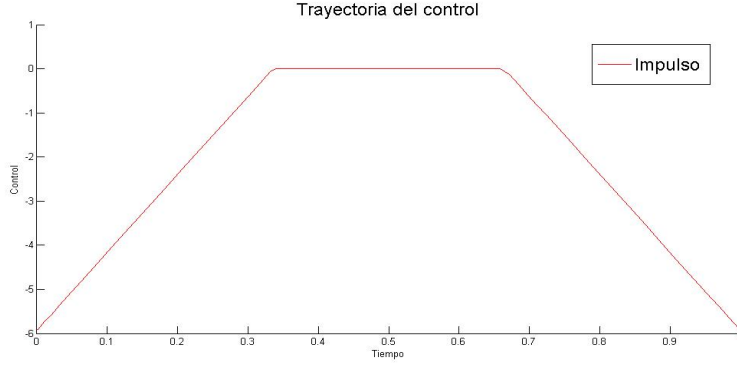


Figura 3.2: El control óptimo calculado.

Observación 3.1. Se puede calcular el estado adjunto a posteriori resolviendo el sistema de estado adjunto proporcionado por la regla del Hamiltoniano.

Si reescribimos la ecuación de estado (3.3) como un SDO lineal de primer orden,

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, & t \in (0, 1) \\ x'_2 = v, & t \in (0, 1) \\ x_1(1) = x_1(0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

se tiene que el Hamiltoniano es

$$H(t, x, \varphi, x_T, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \varphi_1 x_2 + \varphi_2 v \quad \forall t \in (0, 1), \forall v \in \mathcal{V}_{ad}. \quad (3.7)$$

Derivando (3.7) respecto de x_i , $i = 1, 2$ y respecto de x_{T_i} :

$$\begin{cases} -\varphi'_1 = 0, & t \in (0, 1) \\ -\varphi'_2 = \varphi_1, & t \in (0, 1) \\ \varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Se concluye que $\varphi = 0$.

3.3. Análisis cualitativo de los resultados

Como podemos observar, inicialmente aumentamos la intensidad con la que el motor actúa sobre el proyectil hasta que, al alcanzar el valor máximo de altura permitido por las restricciones, apagamos el motor, manteniendo así una altura constante durante un periodo de tiempo. Finalmente, para que aterrice en el instante $t = 1$, volvemos a encender el motor en sentido contrario. Aunque se trata de un modelo de gran simpleza, podemos considerarlo como uno de los precursores de los problemas de control de la trayectoria de vehículos de conducción autónoma.

Capítulo 4

Un modelo para el control de un condensador eléctrico

En este Capítulo, $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un abierto conexo y acotado no vacío, de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. Se supone que este objeto está ocupado por un medio sujeto a las leyes del electromagnetismo.

Son bien conocidas en Física las ecuaciones que modelan, de manera muy compacta, el electromagnetismo (ver [27]). Se trata de las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones deben verificarse en el conjunto $\Omega \times (0, T)$, donde $0 < T \leq +\infty$ y $(0, T)$ se interpreta como el intervalo de observación del fenómeno. Supondremos que el material del condensador tiene comportamiento eléctrico lineal, isótropo y homogéneo. El comportamiento lineal nos garantiza que la relación entre el vector desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , y el campo eléctrico, \mathbf{E} , está dada por una función tensorial $\bar{\epsilon}$ dependiente de la posición, que recibe el nombre de permitividad eléctrica del medio es decir,

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}(x)\mathbf{E}.$$

Por el hecho de ser isótropo, dicho tensor es en realidad una función escalar. Por último, por ser homogéneo tenemos garantizado que dicha aplicación es constante por lo que el desplazamiento eléctrico y el campo son funciones vectoriales colineales:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\bar{\varepsilon}(x)\mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \text{con } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Supondremos en lo que sigue que el fenómeno observado es estacionario, esto es, todas las variables $D, B, \text{etc.}$ son independientes del tiempo. Como \mathbf{E} es un campo vectorial conservativo, existe una función $\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, denominada potencial eléctrico, tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

De aquí deducimos fácilmente que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon (-\nabla \Phi)) = -\varepsilon \Delta \Phi.$$

Introducimos en la región Ω una densidad de carga libre $\rho_f = \rho_f(x)$, es decir, no debida a los efectos de polarización del medio y localizada en un subdominio $\omega \subset \Omega$. Por lo tanto, si establecemos el control sobre la carga introducida e imponemos que el potencial sea nulo sobre la frontera de Ω , tenemos

$$\begin{cases} -\Delta y = 1_\omega u & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $y = y(x)$ es el estado asociado al control u y 1_ω es la función característica de ω .

La solución $y = y(x)$ de (4.1) puede ser interpretada como el potencial eléctrico de un condensador al que se ha aplicado una densidad de carga 1_ω (multiplicado por una constante positiva ε^{-1}).

Nuestro objetivo es saber cómo elegir u en una familia $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)$ de manera que se obtenga un potencial tan próximo como sea posible a una función dada y_d sin tener que realizar para ello un esfuerzo excesivo.

Tomaremos

$$\mathcal{U}_{ad} := \{ u \in L^2(\Omega) : \underline{u} \leq u(x) \leq \bar{u} \text{ c.p.d.} \},$$

donde $\underline{u}, \bar{u} \in \mathbb{R}$.

Fijamos $y_d \in L^2(\Omega)$. Queremos que el potencial se aproxime tanto como sea posible al valor fijado y_d minimizando a su vez la carga introducida en el dispositivo. Definimos el funcional de coste J como sigue:

$$J(u) := \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |u|^2 dx \quad (4.2)$$

con a, b positivos. El problema de control óptimo que queremos resolver es entonces el siguiente:

PROBLEMA 4.1. *Hallar \hat{u} tal que $J(\hat{u}) \leq J(u)$ para todo $u \in \mathcal{U}_{ad}$, con J dado por (4.2).*

4.1. Existencia de control óptimo

Antes de probar la existencia de control óptimo, probaremos algunos resultados que serán de utilidad. En ellos se manifiestan algunas de las diferencias fundamentales entre los problemas de control asociados a EDOs y aquéllos cuyos estados se describen por medio de EDPs.

Recordemos que la norma H^1 cumple

$$\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \geq \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.3)$$

y también la desigualdad de Poincaré en subconjuntos acotados de \mathbb{R}^N , que nos garantiza la existencia de una constante C tal que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \quad \forall y \in H_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Lema 4.1. *Dado el problema de Dirichlet (4.1), para todo $v \in L^2(\omega)$, existe*

una única solución débil, $y \in H_0^1(\Omega)$. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} S : L^2(\omega) &\mapsto H_0^1(\Omega) \\ v &\mapsto y \end{aligned} \tag{4.5}$$

es lineal y continua.

Demostración 4.1.1. El problema (4.1) se puede escribir, en su formulación débil, como sigue:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx = \int_{\omega} v z \, dx \\ \forall z \in H_0^1(\Omega), y \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.6}$$

El teorema de Lax-Milgram (ver, por ejemplo, [10] O [45]) garantiza que este problema tiene solución única en $H_0^1(\Omega)$ y, además, (4.6) está bien planteado. La linealidad se deduce trivialmente del principio de superposición, puesto que la EDP de estado es lineal.

Por otra parte, si en (4.6) tomamos $z = y$, tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx = \int_{\omega} v y \, dx.$$

Por la desigualdad de Poincaré (4.4) sabemos que existe una constante $C(\Omega)$ tal que

$$\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C(\Omega)^{-1} \|y\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Además, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad (4.3),

$$\int_{\omega} v y \, dx \leq \|v\|_{L^2(\omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\omega)} \|y\|_{H^1(\Omega)}.$$

Tenemos así que (4.5) es acotada, ya que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\omega)},$$

y por tanto es continua.

□

Lema 4.2. *El funcional $J : L^2(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$J(u) = \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |u|^2 dx \quad \forall u \in L^2(\omega),$$

donde y es la solución débil de (4.1), es continuo, estrictamente convexo y G -diferenciable.

Demostración 4.1.2. Se puede probar la convexidad estricta directamente, comprobándose que, si $u \neq v$,

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall u, v \in L^2(\omega)$$

Por otra parte, se puede usar un argumento basado en la estructura de J . Más precisamente, tenemos que $J = \phi \circ \psi$, con

$$\begin{aligned} J : L^2(\omega) &\xrightarrow{\psi} L^2(\omega) \times H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \\ u &\mapsto (u, y) \mapsto \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Sabemos que ψ es una aplicación lineal continua gracias al Lema (4.1). Por otra parte, ϕ es combinación de aplicaciones lineales y cuadrados de normas, por lo que es continua, estrictamente convexa y G -diferenciable. \square

Proposición 4.1. *El problema (4.1) posee solución única, denominada control óptimo.*

Demostración 4.1.3. Sea $\{v^n\} \subset \mathcal{U}_{ad}$ una sucesión minimizante, de manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v^n) = \beta := \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

La estructura del conjunto de controles admisibles es la que teníamos en el problema de control (1.1) del Capítulo 1. En ese caso probamos que \mathcal{U}_{ad} era convexo, cerrado y acotado. Con un argumento análogo, obtenemos la misma conclusión en el caso actual.

Como estamos en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ (reflexivo), del hecho de que \mathcal{U}_{ad} sea acotado podemos deducir que existe una subsucesión, que por comodidad denotaremos también $\{v^n\}$, convergente débilmente a un control $u^* \in L^2(\Omega)$.

Por otra parte, sabemos que \mathcal{U}_{ad} es convexo y cerrado por lo que, por el Teorema de Mazur, tenemos que es débilmente secuencialmente cerrado. Gracias a esto tenemos que u^* está en \mathcal{U}_{ad} .

Además, como $J : \mathcal{U}_{ad} \mapsto \mathbb{R}$ es convexa y continua, tenemos que es s.c.i. para la convergencia débil. Por tanto,

$$\liminf J(v^n) \geq J(u^*).$$

Como $\{v^n\}$ es sucesión minimizante,

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v^n) \geq J(u^*).$$

Luego necesariamente $J(u^*) = \beta$ y tenemos que u^* es un control óptimo.

Veamos que el control óptimo es único. Dados dos controles óptimos distintos u^* y v^* , como J es estrictamente convexa,

$$J\left(\frac{1}{2}(u^* + v^*)\right) < \frac{1}{2}(J(u^*) + J(v^*)) = \inf_{\mathcal{U}_{ad}} J.$$

Pero esto es absurdo, puesto que \mathcal{U}_{ad} es convexo y por tanto $\frac{1}{2}(u^* + v^*) \in \mathcal{U}_{ad}$. Por lo que concluimos la unicidad.

□

4.2. Sistema de optimalidad

Teorema 4.1. *Sea \hat{u} la solución del problema (4,1) y sea \hat{y} el estado asociado. Entonces existe \hat{p} tal que la terna $(\hat{u}, \hat{y}, \hat{p})$ satisface el siguiente sistema de optimalidad:*

$$\begin{cases} -\Delta \hat{y} = \hat{u} 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ \hat{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta \hat{p} = \hat{y} - y_d & \text{en } \Omega, \\ \hat{p} = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

$$\int_{\omega} (a\hat{p} + b\hat{u})(u - \hat{u}) dx \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Estas últimas desigualdades equivalen a la identidad

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(-\frac{a}{b} p|_{\omega} \right),$$

donde $\mathcal{P}_{ad} : L^2(\omega) \mapsto \mathcal{U}_{ad}$ es el operador de proyección habitual.

Demostración 4.2.1. Como \hat{u} es la solución del problema (4,1) y $J : L^2(\omega) \mapsto \mathbb{R}$ es G-diferenciable, se tiene que cumplir

$$\langle J'(\hat{u}), u - \hat{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

En primer lugar, calculemos la derivada de J . Para ello, calculamos

$$\frac{1}{\varepsilon} (J(u + \varepsilon v) - J(u)) \quad \forall u, v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \varepsilon > 0.$$

Si llamamos z_{ε} al estado asociado a $u + \varepsilon v$,

$$J(u + \varepsilon v) = \frac{a}{2} \int_{\Omega} |z_{\varepsilon} - y_d|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |u + \varepsilon v|^2 dx.$$

Como la EDP de estado es lineal, es inmediato que $z_{\varepsilon} = y + \varepsilon z$, donde y, z son los estados asociados a u y v .

Tenemos así

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} (J(u + \varepsilon v) - J(u)) = \\ & \varepsilon \left(\frac{a}{2} \int_{\Omega} |z|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |v|^2 dx \right) + a \int_{\Omega} (y - y_d) z dx + b \int_{\omega} uv dx. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando ε tiende a 0,

$$\langle J'(u), v \rangle = a \int_{\Omega} (y - y_d) z dx + b \int_{\omega} uv dx \quad \forall u, v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Para tener una expresión explícita de la derivada de J , introducimos una

nueva función p , denominada estado adjunto (véase [37]), cumpliendo

$$\begin{cases} -\Delta p = y - y_d & \text{en } \Omega, \\ p = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

Pasando a su formulación variacional,

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} (y - y_d) w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad p \in H_0^1(\Omega).$$

Por otra parte, podemos hacer lo mismo con la ecuación de estado que relaciona z y v , teniendo así que

$$\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla w \, dx = \int_{\omega} v w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad z \in H_0^1(\Omega).$$

De esta manera,

$$\int_{\Omega} (y - y_d) z \, dx = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla z \, dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla p \, dx = \int_{\omega} v p \, dx$$

Por lo que

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\omega} (ap + bu)v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Concluimos así que la condición de optimalidad es

$$\int_{\omega} (a\hat{p} + b\hat{u})(u - \hat{u}) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.7)$$

Aplicando el Teorema de la Proyección, sabemos que la solución de (4.7) existe, es única y está caracterizada por verificar

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{ad} \left(-\frac{a}{b} p|_{\omega} \right).$$

□

4.2.1. Métodos de tipo gradiente para problemas de optimización

Para la obtención numérica del control óptimo se emplearán distintos algoritmos. Comenzamos viendo métodos para problemas sin restricciones y, a posteriori, generalizaremos para el caso en el que la región factible no es todo el espacio (ver [13] y [42]).

Dado un funcional J definido sobre un espacio vectorial V , se pretende encontrar u cumpliendo

$$u \in V \text{ y } J(u) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Para ello buscamos métodos iterativos en los cuales, comenzando con un vector inicial u_0 , se construye una sucesión de vectores u_k , $k \geq 0$, tal que para cualquier elección del vector de partida la sucesión converge a la solución del problema.

Para construir u_{k+1} en términos de u_k , es conveniente reducir el problema a una tarea fácil de resolver numéricamente, como por ejemplo la minimización de una función de una variable real. Para ello:

1. Se define una dirección de 'descenso' para el vector u_k , fijando un vector no nulo d_k .
2. Se minimiza la restricción de J sobre la recta que pasa por u_k en la dirección de d_k ; esto define u_{k+1} si y sólo si el problema de minimización en una variable,

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \rho(u_k, d_k) \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ J(u_k + \rho(u_k, d_k)d_k) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_k + \rho d_k), \end{cases}$$

tiene solución única (esto ocurre, en particular, si el funcional es elíptico).

En tal caso, ponemos

$$u_{k+1} = u_k + \rho(u_k, d_k)d_k.$$

Definición 4.1. Una función $J : V \mapsto \mathbb{R}$ definida en un espacio de Hilbert es elíptica si es continuamente diferenciable en V y existe una constante $\alpha > 0$ tal

que

$$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2 \quad \forall u, v \in V. \quad (4.8)$$

Aquí, para cada $v \in V$, denotamos $\nabla J(v)$ el gradiente de J en v , esto es, el único punto de V que verifica

$$(\nabla J(v), w) = \langle J'(v), w \rangle \quad \forall w \in V.$$

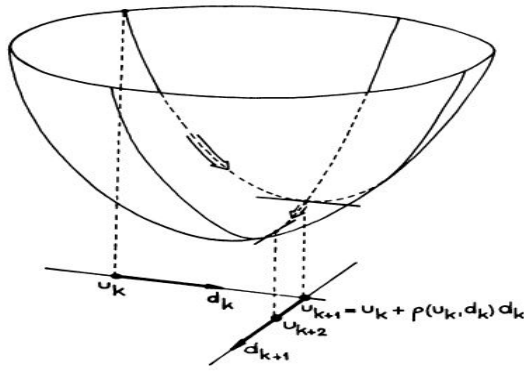


Figura 4.1: Optimización sobre un paraboloide escogiendo las direcciones de los ejes coordenados.

Es lógico pensar que la convergencia del algoritmo de optimización será mejor cuanto mayor sea la diferencia $J(u_k) - J(u_{k+1})$. La dirección de mayor crecimiento local de una función en cada punto la proporciona el vector gradiente en dicho punto, luego una buena dirección de descenso puede ser ésta con sentido opuesto.

Definición 4.2. Todo método iterativo para el cual el punto u_{k+1} es de la forma

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla J(u_k) \quad \rho_k > 0,$$

se denomina *método de tipo gradiente*.

Introducimos el *método del gradiente con parámetro óptimo*. Comenzando con un vector inicial u_0 , para cada $k \geq 0$, el vector u_{k+1} se construye en términos

de u_k mediante las relaciones

$$\begin{cases} J(u_k - \rho(u_k)\nabla J(u_k)) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_k - \rho\nabla J(u_k)) \\ u_{k+1} = u_k - \rho(u_k)\nabla J(u_k). \end{cases}$$

El signo negativo de ρ nos indica que la dirección de minimización es opuesta a la del gradiente: cabe esperar que $\rho(u_k)$ sea positivo.

Otro caso particular es el *método del gradiente con parámetro fijo*: ahora, inicializando con un vector arbitrario u_0 , la sucesión está definida por

$$u_{k+1} = u_k - \rho\nabla J(u_k), \quad k \geq 0,$$

donde el parámetro $\rho > 0$ se escoge previamente y de manera adecuada. De esta manera, se evita el cálculo repetido de problemas de minimización de funciones de una variable.

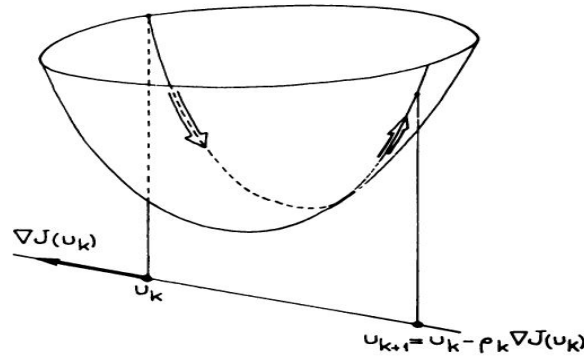


Figura 4.2: Optimización sobre un paraboloide escogiendo la dirección opuesta a la del gradiente.

Desde el punto de vista numérico, un inconveniente de este tipo de métodos reside en la necesidad de calcular el vector $\nabla J(u_k)$ en cada iteración. A esto hay que añadirle, en el caso del método del gradiente con parámetro óptimo, el coste computacional de la resolución iterada de problemas unidimensionales de mínimos. Es por esto que la elección de un método u otro depende de la importancia relativa dada a estos aspectos numéricos frente a la convergencia hacia la solución exacta.

Con el objetivo de mejorar la convergencia, se considera conveniente utilizar más información sobre el funcional para definir la dirección de los vectores $u_{k+1} - u_k$. Esto es lo que se hace, por ejemplo, en el método de Newton:

$$u_{k+1} = u_k - (\nabla^2 J(u_k))^{-1} \nabla J(u_k), \quad k \geq 0,$$

donde $\nabla^2 J(u_k)$ es el Hessiano de J en u_k .

Aunque este método no requiere la resolución de problemas de minimización en una variable, el principal inconveniente se encuentra en resolver problemas lineales (sistemas lineales si V posee dimensión finita) con el operador $\nabla^2 J(u_k)$ (una matriz cuadrada en la práctica) cambiando con k , teniendo así un alto coste numérico. Sin embargo, es posible encontrar direcciones de descenso mejores que la del gradiente sin necesidad de calcular las derivadas segundas del funcional. Con este objetivo se introduce el denominado *método del gradiente conjugado*.

Dado un vector inicial arbitrario u_0 , dados los vectores u_1, u_2, \dots, u_k calculados a partir de un método de tipo gradiente, supóngase que

$$\nabla J(u_l) \neq 0, \quad 0 \leq l \leq k,$$

puesto que en caso contrario el algoritmo ya habría finalizado. Para cada l , denotamos G_l al espacio generado por los $\nabla J(u_i), 0 \leq i \leq l$, que comprobaremos que son linealmente independientes. La idea principal del método consiste en la definición de u_{k+1} como el mínimo de la restricción de J al espacio afín

$$u_k + G_k := \{u_k + v_k : v_k \in G_k\} = \left\{ u_k + \sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla J(u_i) : \alpha_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq k \right\};$$

en otras palabras, u_{k+1} está definido por

$$u_{k+1} \in u_k + G_k \text{ y } J(u_{k+1}) = \inf_{v \in u_k + G_k} J(v). \quad (4.9)$$

El conjunto $u_k + G_k$ es cerrado y convexo (es la variedad lineal de V cuyo espacio de direcciones es G_k y pasa por el punto u_k) y J es coercitivo y estrictamente convexo, por lo que el problema de mínimos (4.9) tiene una única solución.

Las soluciones de los sucesivos problemas de minimización

$$u_{l+1} \in u_l + G_l \quad \text{y} \quad J(u_{l+1}) = \inf_{v \in u_l + G_l} J(v) = \inf_{v \in G_l} J(u_l + v), \quad 0 \leq l \leq k,$$

satisfacen, trivialmente,

$$(\nabla J(u_{l+1}), w) = 0 \quad \forall w \in G_l,$$

ya que los G_l son subespacios vectoriales; en particular,

$$(\nabla J(u_{l+1}), \nabla J(u_i)) = 0, \quad \text{para } 0 \leq i \leq l \leq k, \quad (4.10)$$

lo cual demuestra que los gradientes no sólo son linealmente independientes sino que son ortogonales dos a dos. Esta propiedad es más fuerte que la establecida para el método del gradiente con parámetro óptimo, donde sólo los gradientes consecutivos son ortogonales. Es esta ortogonalidad la que nos permite escribir que

$$\begin{aligned} d_k &= \nabla J(u_k) + \frac{\|\nabla J(u_k)\|^2}{\|\nabla J(u_{k+1})\|^2} d_{k-1} \\ &= \nabla J(u_k) + \frac{(\nabla J(u_k), \nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k-1}))}{\|\nabla J(u_{k+1})\|^2} d_{k-1}. \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones anteriores, se describe el algoritmo del gradiente conjugado de **Polak-Riviere** (1969)(AGCPR) como sigue:

1. Elegir $u_0 \in V$ y $\varepsilon > 0$, y tomar $d_0 = \nabla J(u_0)$.
2. Para $n = 1$, realizar una etapa del algoritmo del gradiente con paso óptimo.
Dados $n \geq 1$, $u_n \in V$ y $d_n \in V$:
3. Calcular $\nabla J(u_{n+1}) \in V$. Si $\|\nabla J(u_{n+1})\| < \varepsilon$ parar el algoritmo y tomar $u \simeq u_{n+1}$. En caso contrario pasar al punto siguiente.
4. Calcular

$$d_{n+1} = \nabla J(u_n) + \frac{(\nabla J(u_{n+1}), \nabla J(u_{n+1}) - \nabla J(u_n))}{\|\nabla J(u_n)\|^2} d_n.$$

5. Calcular $\rho_n \in \mathbb{R}$ tal que $J(u_n - \rho_n d_n) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_n - \rho d_n)$ y tomar $u_{n+1} = u_n - \rho_n d_n$.

Hacer $n = n + 1$ y volver a 3.

Una vez estudiados diversos algoritmos para la resolución de problemas de optimización sin restricciones, podemos extender estos resultados al caso más general en el que la región factible es un subconjunto del espacio completo. Consideramos un espacio de Hilbert V , un subconjunto $U \subset V$ y un funcional $J : U \mapsto \mathbb{R}$. Planteamos el problema:

PROBLEMA 4.2.

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & J(v) \\ \text{Sujeto a} & v \in U. \end{cases}$$

Recordamos el Teorema de la Proyección en espacios de Hilbert, cuya prueba se puede encontrar, por ejemplo, en [10]:

Teorema 4.2 (Teorema de la Proyección). *Sean V un espacio de Hilbert y $U \subset V$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de V . Entonces, dado $w \in V$, existe un único $Pw \in U$ tal que*

$$Pw \in U \quad y \quad \|w - Pw\| = \inf_{v \in U} \|w - v\|.$$

Además, Pw es el único elemento que verifica $Pw \in U$ y

$$(Pw - w, v - Pw) \geq 0, \quad \forall v \in U.$$

A partir del resultado anterior, probamos la existencia del operador de proyección definido como sigue:

$$w \in V \mapsto Pw \in U,$$

donde $Pw \in U$ es la única solución del problema $\|w - Pw\| = \inf_{v \in U} \|w - v\|$.

Además, se cumple que

$$\|Pv_1 - Pv_2\| \leq \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in V. \quad (4.11)$$

El caso que nos concierne es aquel en que U es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío y J es un funcional convexo en U y G-diferenciable. En estas

condiciones, u es solución del problema de mínimos si y sólo si

$$u \in U \quad \text{y} \quad (J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

que es equivalente a

$$u \in U \quad \text{y} \quad (u - [u - \rho J'(u)], v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U,$$

para cualquier $\rho > 0$. Gracias al Teorema de la Proyección, la condición anterior equivale a

$$u = P(u - \rho J'(u)),$$

con $\rho > 0$. Por tanto, buscar un mínimo de J en el convexo cerrado no vacío U equivale a la búsqueda de un punto fijo de la aplicación

$$T : v \in U \mapsto T(v) = P(v - \rho J'(v)) \in U.$$

Definimos entonces un método de aproximaciones sucesivas aplicado al operador T . En particular, este método construye la sucesión aproximante de la forma:

$$u_0 \in U \text{ dado, } u_{n+1} = T(u_n) = P(u_n - \rho J'(u_n)) \in U, \quad \forall n \geq 0.$$

Si $U \equiv V$, entonces $P \equiv Id$ y tenemos simplemente el algoritmo del gradiente con parámetro o paso fijo (AGPF) aplicado a un problema de mínimos sin restricciones. Es posible generalizarlo tomando pasos ρ_n variables. De esta manera tenemos el *algoritmo del gradiente con proyección y paso variable* (AGPPV): Dada la sucesión $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$

1. Elegir $u_0 \in U$.

Dados $n \geq 0$ y $u_n \in U$:

2. Calcular $J'(u_n) \in V$.
3. Tomar $u_{n+1} = P(u_n - \rho_n J'(u_n)) \in U$, hacer $n = n + 1$ y volver a 2.

De esta manera, es posible utilizar los métodos de tipo gradiente descritos anteriormente para problemas de mínimos con restricciones sin más que ha-

cer uso del operador proyección. Un razonamiento análogo, aunque algo más complicado, permite llegar a métodos de gradiente conjugado con restricciones.

4.3. Obtención numérica del control óptimo

A partir de la resolución aproximada del sistema de optimalidad que aparece en el Teorema 4,1 calcularemos el control óptimo. Para ello se hará uso del **Software** de libre distribución **FreeFem++**. Se trata de una herramienta informática de gran interés en la resolución numérica de EDPs, basada en el Método de Elementos Finitos (FEM en inglés), para el cual es necesario re-escribir el problema en su formulación débil:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \hat{y} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\omega} \hat{u} v \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \hat{y} \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\hat{y} - y_d) v \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \hat{p} \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

$$\int_{\omega} (a\hat{p} + b\hat{u})(u - \hat{u}) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(-\frac{a}{b} p|_{\omega} \right).$$

FreeFem++ no es un paquete, sino un producto integrado con su propio lenguaje de programación de alto nivel.

Además, **FreeFem++** es altamente adaptativo. Muchos fenómenos involucran varios sistemas acoplados, por ejemplo: interacción fluido-estructura, fuerzas de Lorentz para fundición de aluminio y los problemas océano-atmósfera son tres ejemplos de tales sistemas. Estos requieren el uso de distintos espacios de elementos finitos y grados polinomiales, posiblemente en diferentes mallas. **FreeFem++** puede dar solución a estas dificultades, es decir, puede resolver problemas en espacios arbitrarios de elementos finitos en mallas bi-dimensionales adaptadas arbitrariamente.

Algunas de las cosas que aporta **FreeFem++** son:

- Introducción sencilla de recintos geométricos mediante descripción analítica de las fronteras por partes.
- Generador automático de malla, basado en el algoritmo Delaunay-Voronoi; la densidad de puntos internos es proporcional a la densidad de puntos en las fronteras.
- Una gran variedad de elementos triangulares finitos: elementos de Lagrange lineales, cuadráticos y más, elementos discontinuos P1 y Raviart-Thomas, elementos de tipo no escalar, . . . Véanse [4], [29] y [43].

Para saber más sobre esta herramienta, véase [30].

4.3.1. Algoritmo de punto fijo

Utilizamos el método de punto fijo para la resolución del problema. El algoritmo es el siguiente:

ALG 1:

- Elegir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$
- Después, para $n \geq 0$ y $u^n \in \mathcal{U}_{ad}$ dados, calcular sucesivamente y^n , p^n y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = y^n - y_d & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

$$\int_{\omega} (ap^n + bu^{n+1})(u - u^{n+1}) dx \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad u^{n+1} \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.12)$$

Así, en cada etapa de **ALG 1**, la tarea se reduce a la resolución de dos problemas elípticos y el problema no lineal (4.12), que equivale a una proyección:

$$u^{n+1} = P_{ad} \left(-\frac{a}{b} p^n|_{\omega} \right).$$

Teorema 4.3. *Sea $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Existe $\epsilon_0(\Omega) > 0$ tal que, si $0 < a/b \leq \epsilon_0(\Omega)$, la sucesión $\{u^n\}$ generada por el algoritmo de punto fijo converge cuando $n \rightarrow +\infty$ hacia \hat{u} .*

Demostración 4.3.1. En el Lema 4,1 probamos que la aplicación que a cada control le asocia un estado es lineal y continua. De manera completamente análoga se tiene que la que a cada estado le asocia su adjunto también lo es, luego su composición también lo es de manera que si denominamos a dicha composición $Q : L^2(\omega) \mapsto L^2(\Omega)$, existe una constante $\epsilon_0 > 0$ (dependiente de Ω debido al uso intermedio de desigualdades de tipo Poincaré) tal que

$$\|Qw_1 - Qw_2\| \leq \epsilon_0(\Omega)\|w_1 - w_2\| \quad \forall w_1, w_2 \in L^2(\omega).$$

Por lo tanto, usando la contractividad del operador proyección (ver (4.11)), si escribimos el algoritmo como uno de punto fijo asociado al operador resultante de la composición de Q y P , llegamos a que se tiene que cumplir

$$\frac{a}{b}\epsilon_0(\Omega) < 1$$

para que sea contractiva y, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, el método de aproximaciones sucesivas pueda converger. \square

4.3.2. Algoritmos de tipo gradiente

En primer lugar se hace una observación sobre el funcional de coste J .

Observación 4.1. Dado el operador S visto en el Lema 4,1, podemos escribir J como

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{b}{2} \int_{\omega} |v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} ((aS^*S + bId)v, v)_{L^2(\omega)} - a(S^*y_d, v)_{L^2(\omega)}, \end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos que J es de la forma

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} (Av, v) - L(v) \\ A &= aS^*S + bId \\ L &= aS^*y_d, \end{aligned}$$

y su derivada

$$J'(v) = Av - L = aS^*(Sv - y_d) + bv = ap|_\omega + bv,$$

coincidente con la expresión obtenida previamente. Además,

$$\frac{1}{2}(Av, v) = \frac{a}{2}\|Sv\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{b}{2}\|v\|_{L^2(\omega)}^2 \geq \frac{b}{2}\|v\|_{L^2(\omega)}^2.$$

Concluimos que J es un funcional elíptico con constante de elipticidad $b/2$. Esto es de gran importancia para que los algoritmos que definamos en adelante tengan buenas propiedades de convergencia.

Nota 4.3.1. Dados dos espacios de Hilbert X, Y y un operador $T \in \mathcal{L}(X; Y)$, se usa T^* para denotar el operador adjunto de T . Por lo tanto, se cumple que $T^* \in \mathcal{L}(Y; X)$ y $T^*T \in \mathcal{L}(Y)$.

Comenzamos con el *algoritmo del gradiente con paso óptimo y proyección*. Aplicado al problema es

ALG 2:

- Elegir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$
- Después, para $n \geq 0$ y $u^n \in \mathcal{U}_{ad}$ dados, calcular sucesivamente y^n, p^n, d^n (el gradiente de J en u^n), ρ^n (el paso óptimo) y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = y^n - y_d & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$d^n = ap^n|_\omega + bu^n,$$

$$\rho^n \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J(u^n - \rho d^n) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$u^{n+1} = P_{ad}(u^n - \rho^n d^n).$$

Vemos entonces que en cada etapa la tarea se reduce a resolver dos problemas

elípticos (4.17) y (4.18) y un problema extremal unidimensional (4.15).

Nótese que, para $d^n \neq 0$, (4.15) posee solución única. En efecto, la función $\rho \mapsto J(u^n - \rho d^n)$ es cuadrática y estrictamente convexa.

Teorema 4.4. *Supongamos que $b > 0$ y $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\omega)$. Sea \hat{u} el control óptimo y sea $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Entonces la sucesión $\{u^n\}$ generada por **ALG2** converge en $L^2(\omega)$ hacia \hat{u} cuando $n \rightarrow +\infty$.*

Demostración 4.3.2. Como vimos en (4.10), los gradientes sucesivos son ortogonales en $L^2(\omega)$.

Por la elipticidad de J , para cada $n \geq 0$,

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \frac{b}{2} \|u^n - u^{n+1}\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (4.16)$$

y

$$J(u^0) - J(u^{n+1}) \geq \frac{b}{2} \sum_{k=0}^n \|u^k - u^{k+1}\|_{L^2(\omega)}^2.$$

Esto prueba que $\{J(u^n)\}$ es decreciente y está acotada inferiormente luego es convergente, por tanto, es de Cauchy y deducimos de (4.16) que $u^n - u^{n+1}$ tiende a cero en $L^2(\omega)$.

Por otra parte, de la expresión de J como funcional cuadrático,

$$\|J'(u^n) - J'(u^{n+1})\|_{L^2(\omega)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(\omega))} \|u^n - u^{n+1}\|_{L^2(\omega)},$$

se tiene que $J'(u^n) - J'(u^{n+1})$ también converge a cero. Además, como

$$\begin{aligned} \|J'(u^n)\|_{L^2(\omega)}^2 &= (J'(u^n), J'(u^n) - J'(u^{n+1}))_{L^2(\omega)} \\ &\leq \|J'(u^n)\|_{L^2(\omega)}^2 \|J'(u^n) - J'(u^{n+1})\|_{L^2(\omega)}^2 \end{aligned}$$

deducimos que lo mismo le ocurre a $J'(u^n)$.

Los controles u^n están uniformemente acotados en $L^2(\omega)$:

$$\|u^n\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{2}{b} J(u^0).$$

Por tanto, podemos extraer una sucesión $\{u^{n'}\}$ que converge débilmente hacia un \hat{u} . Usando de nuevo la expresión de $J'(u)$, vemos que $J'(u^{n'}) \rightarrow J'(\hat{u})$

en $L^2(\omega)$ -débil:

$$\begin{aligned} (J'(u^{n'}), v) &= (Au^{n'}, v)_{L^2(\omega)} + (l, v)_{L^2(\omega)} \\ &= (u^{n'}, A^*v)_{L^2(\omega)} + (l, v)_{L^2(\omega)} \rightarrow (\hat{u}, A^*v)_{L^2(\omega)} + (l, v)_{L^2(\omega)} \\ &= (J'(\hat{u}), v)_{L^2(\omega)} \quad \forall v \in L^2(\omega). \end{aligned}$$

Luego $J'(\hat{u}) = 0$. Pero esto muestra que el control es óptimo.

Así, existe una subsucesión de $\{u^n\}$ que converge débilmente hacia el control óptimo. Dado que el control óptimo es único, el argumento precedente aplicado a toda subsucesión de $\{u^n\}$ prueba que, en realidad, toda la sucesión converge débilmente.

Por último, se observa que la convergencia es fuerte: en efecto, como J es elíptico, tenemos que

$$\alpha \|u^n - \hat{u}\|^2 \leq (J'(u^n) - J'(\hat{u}), u^n - \hat{u}) = (J'(u^n), u^n - \hat{u}) \leq \|J'(u^n)\| \|u^n - \hat{u}\|$$

Por tanto,

$$\|u^n - \hat{u}\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|J'(u^n)\|_{L^2(\omega)}.$$

El término de la derecha converge fuertemente en $L^2(\omega)$. Por tanto, $u^n \rightarrow \hat{u}$ en $L^2(\omega)$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

□

Se describe a continuación el *algoritmo del gradiente con paso fijo* para nuestro problema.

ALG 2':

- Elegir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ y fijar $\bar{\rho} > 0$.
- Después, para $n \geq 0$ y $u^n \in \mathcal{U}_{ad}$ dados, calcular sucesivamente y^n , p^n , d^n y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = y^n - y_d & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$d^n = ap^n|_\omega + bu^n,$$

$$u^{n+1} = P_{ad}(u^n - \bar{\rho}d^n).$$

Teorema 4.5. *En las condiciones del Teorema 4.4, si en **ALG 2'** el valor de $\bar{\rho}$ es suficientemente pequeño, la sucesión generada converge hacia el control óptimo.*

Demostración 4.3.3. Definimos la función

$$g : v \in L^2(\omega) \mapsto g(v) = P(v - \bar{\rho}J'(v)) \in \mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\omega).$$

Por el hecho de que el operador proyección tiene norma unidad y J es un operador cuadrático y elíptico,

$$\begin{aligned} \|g(v_1) - g(v_2)\|^2 &\leq \|(v_1 - v_2) - \bar{\rho}(J'(v_1) - J'(v_2))\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|_{L^2(\omega)}^2 - 2\bar{\rho}(J'(v_1) - J'(v_2), v_1 - v_2)_{L^2(\omega)} \\ &\quad + \bar{\rho}^2 \|J'(v_1) - J'(v_2)\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\bar{\rho} + C^2\bar{\rho}^2) \|v_1 - v_2\|_{L^2(\omega)}^2, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de elipticidad de J y $C > 0$ la asociada a la continuidad de J' . Tenemos que para $\bar{\rho}$ suficientemente pequeño la aplicación g es contractiva. Por lo tanto, el algoritmo de punto fijo asociado es convergente. Además, como \hat{u} es un punto fijo de g , se puede escribir

$$\|u_{k+1} - \hat{u}\|_{L^2(\omega)} = \|g(u_k) - g(\hat{u})\|_{L^2(\omega)} \leq \beta \|u_k - \hat{u}\|_{L^2(\omega)}, \quad 0 < \beta < 1,$$

y se prueba la convergencia geométrica:

$$\|u_{k+1} - \hat{u}\|_{L^2(\omega)} \leq \beta^k \|u_0 - \hat{u}\|_{L^2(\omega)}, \quad 0 < \beta < 1.$$

□

Por último, se hace uso del *método del gradiente conjugado*. El algoritmo resultante es el siguiente:

ALG 3:

- Elegir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$

- Para $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ dado, calcular sucesivamente y^0 , p^0 , g^0 (el gradiente de J en u^0), $d^0 = g^0$, ρ^0 (el paso óptimo) y u^1 como sigue:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\Delta y^0 = u^0 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^0 = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \\ & \begin{cases} -\Delta p^0 = y^0 - y_d & \text{en } \Omega, \\ p^0 = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \\ & g^0 = ap^0|_\omega + bu^0, \quad d^0 = g^0, \\ & \rho^0 \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J(u^0 - \rho d^0) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases} \\ & u^1 = P_{ad}(u^0 - \rho^0 d^0). \end{aligned}$$

- Después, para $n \geq 1$ y $u^n \in \mathcal{U}_{ad}$ y $g^{n-1}, d^{n-1} \in L^2(\omega)$ dados, calcular sucesivamente y^n , p^n y g^n (el gradiente de J en u^n), γ^n , d^n , ρ^n (el paso óptimo) y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \\ & \begin{cases} -\Delta p^n = y^n - y_d & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \\ & g^n = ap^n|_\omega + bu^n, \\ & \gamma^n = \frac{\|g^n\|_{L^2(\omega)}^2}{\|g^{n-1}\|_{L^2(\omega)}^2}, \quad d^n = g^n + \gamma^n d^{n-1}, \\ & \rho^n \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J(u^n - \rho d^n) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases} \\ & u^{n+1} = P_{ad}(u^n - \rho^n d^n). \end{aligned}$$

Enunciaremos a continuación sin demostración un resultado de convergencia para **ALG 3**. Para la prueba véase por ejemplo [42].

Teorema 4.6. *Supongamos que $b > 0$ y $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\omega)$. Sea \hat{u} el control óptimo*

y sea $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que

$$(J'(u^n), d^n)_{L^2(\omega)} \geq \beta \|J'(u^n)\|_{L^2(\omega)} \|d^n\|_{L^2(\omega)} \quad \forall n \geq 0. \quad (4.19)$$

Entonces la sucesión $\{u^n\}$ generada por **ALG 3** converge en $L^2(\omega)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ hacia \hat{u} .

En realidad la condición (6.31), llamada **condición de Polak**, puede ser debilitada considerablemente: bastaría tener

$$(J'(u^n), d^n)_{L^2(\omega)} \geq \beta_n \|J'(u^n)\|_{L^2(\omega)} \|d^n\|_{L^2(\omega)}$$

para algunos $\beta_n > 0$ que verifiquen $\sum_{n \geq 0} \beta_n^2 = +\infty$. Ésta otra recibe el nombre de **condición de Zoutendijk**; véase [42].

4.3.3. Resultados numéricos

Los valores usados para las constantes son : $\underline{u} = 0$, $\bar{u} = 2$ (cotas de los controles admisibles); a y $b = 1 - a$, que se escogerán entre 0 y 1 de la manera más adecuada en cada algoritmo, atendiendo a las consideraciones sobre convergencia realizadas anteriormente. Además, definimos:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}, \\ \omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 3 \leq y \leq 6\}, \\ y_d(x, y) &= x^2 - y^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Se comienza con el algoritmo de punto fijo. Inicializamos con un valor de u igual a 0 y se resuelven de manera sucesiva los sistemas de estado y adjunto en su formulación débil, triangularizando Ω y escogiendo un espacio de elementos finitos de Lagrange del tipo P_2 , es decir, de funciones continuas en $\bar{\Omega}$ y cuadráticas a trozos en cada elemento del mallado. Se profundizará en este método en el Capítulo 5. No obstante, para ver una descripción exhaustiva, se propone ver [4], [29] y [14]. Conocidos el estado y el adjunto se actualizan los valores del control. Realizamos este proceso de manera iterativa hasta alcanzar convergencia con un nivel de tolerancia prefijado de $\|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\omega)} < 10^{-5}$.

En el Cuadro 4,1 queda de manifiesto que el número de iteraciones dismi-

nuye a medida que lo hace el cociente a/b . Se recuerda que dicho cociente es proporcional a la constante de contractividad correspondiente al operador cuyo punto fijo queremos calcular. Para valores de a por encima de 0,4 no hay convergencia.

Ahora realizamos el mismo cálculo usando el algoritmo del gradiente con paso óptimo.

Cabe destacar que, como se aprecia en el Cuadro 4,1, el número de iteraciones disminuye a la par que lo hace a/b . En este caso tenemos convergencia incluso para a próximo a la unidad.

A continuación se calcula la solución a partir del algoritmo del gradiente con paso fijo. Se establece $\bar{\rho} = 0,5$.

En esta ocasión, la convergencia es significativamente más lenta que la del algoritmo con paso óptimo. A cambio, el coste computacional disminuye al no tener que resolver de manera iterativa problemas de mínimos. El rango de valores de a para los que hay convergencia es mayor que en el algoritmo de punto fijo aunque no supera 0,7.

Por último, se implementa el algoritmo del gradiente conjugado con paso óptimo. Claramente este requiere un menor número de iteraciones y con garantía de convergencia para cualquier a entre 0 y 1. En general, el comportamiento de este algoritmo es sensiblemente mejor que el del gradiente con paso óptimo. Nótese que, sin embargo, el esfuerzo computacional es prácticamente el mismo. Por esta razón, el algoritmo del gradiente conjugado ha gozado de gran popularidad y distintas variantes del mismo se usan con frecuencia.

a	Punto Fijo	Gradiente (PO)	Gradiente (PF)	Gradiente C. (PO)
0,9	-	44	-	21
0,8	-	34	-	16
0,6	-	13	59	12
0,4	64	10	38	8
0,2	14	7	26	5
0,1	7	5	22	4

Cuadro 4.1: Resultados de convergencia de los algoritmos utilizados para distintos valores de a .

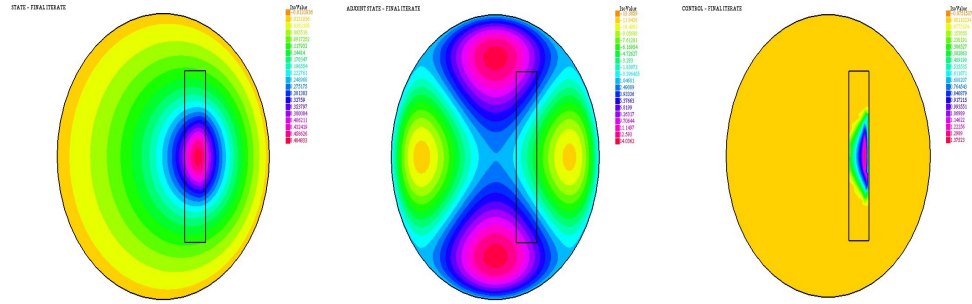


Figura 4.3: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo mediante algoritmo del gradiente con paso fijo($a=0,2$).

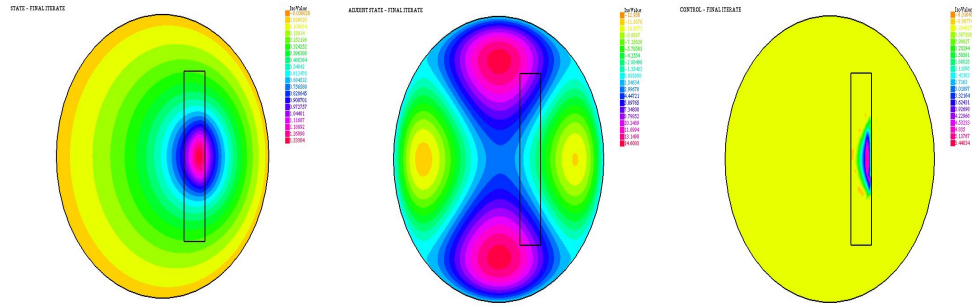


Figura 4.4: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo mediante algoritmo del gradiente con paso óptimo ($a=0,4$).

El estado varía en función del valor escogido de a (se observa en los isovalores). Esto se debe a que dicho coeficiente es el que, en el funcional, manifiesta el esfuerzo realizado para que el estado se parezca al estado objetivo y_d . No obstante, es importante incidir de nuevo en que, para un mismo valor de a , todos los algoritmos deben darnos la misma solución. Si presentamos los resultados numéricos con el algoritmo de punto fijo para $a = 0,2$, se obtiene el mismo resultado que en la Figura 4.3.

4.4. Análisis cualitativo de los resultados

En ausencia de ligaduras, la distribución de carga óptima se basa en la acumulación de la misma en la zona central derecha del condensador y una disminución progresiva de la misma, ubicando carga negativa en las esquinas del subdominio. Esto se puede explicar como un intento de reducción de los conocidos "efectos punta".

Cuando un material posee carga eléctrica, esta se distribuye por todo el cuerpo (superficie, si se trata de conductores). La Naturaleza hace un reparto equitativo y proporcional, por lo que su densidad será mayor en las zonas de menos volumen o menos superficie. Por esto se produce una acumulación de la misma en las zonas del material acabadas en punta o esquinas, donde su volumen es menor y se concentra mayor cantidad de carga.

Podemos entender entonces que la distribución de la carga que cumple nuestros objetivos de eficiencia energética sujetos a la aproximación al potencial deseado se asemeja a la que sería la respuesta natural del sistema. La Naturaleza se rige por principios variacionales.

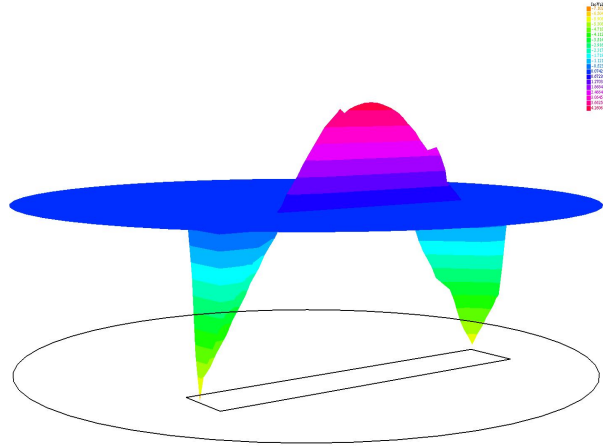


Figura 4.5: Distribución óptima de la carga (control) en el condensador.

Por otra parte, el potencial eléctrico se acumula en la región central del subdominio descrito por ω . De esta manera, va decreciendo a lo largo del dieléctrico, anulándose sobre la superficie del mismo, tal y como se impone en las condiciones de contorno.

Finalmente, al imponer que el control sea positivo en las restricciones, no se tiene el fenómeno natural de compensación de los efectos de punta introduciendo carga negativa. No obstante, la carga se encuentra acumulada en la parte central de ω y es nula en las zonas en las que, en el caso sin restricciones, era negativa. Es la mejor opción posible con las restricciones impuestas.

4.5. Otras experiencias numéricas

El mismo problema puede resolverse para encontrar el control óptimo de una fuente de calor en una habitación en la que deseamos que la temperatura, cuando ha pasado un tiempo suficientemente largo como para poder considerar estacionario el problema, se aproxime a una temperatura deseada sin que el consumo de energía sea demasiado alto. Se modifican las cotas del conjunto de controles admisibles para poder tener controles negativos.

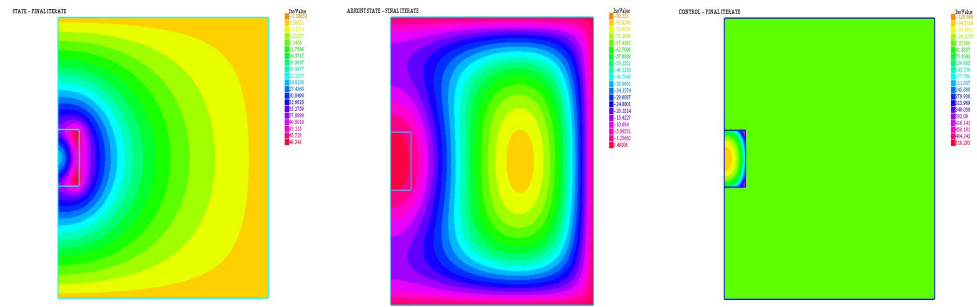


Figura 4.6: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo mediante algoritmo del gradiente con paso óptimo ($a=0,2$).

Se puede observar que, en el óptimo, la fuente (el control) suministra todo el calor en la parte que está en contacto directo con la habitación, mientras que, en su interior, lo extrae.

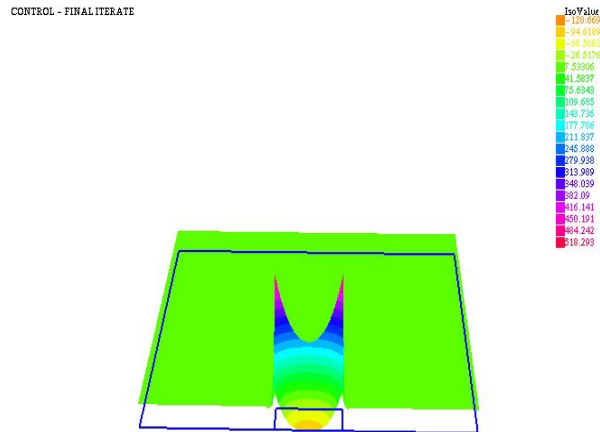


Figura 4.7: Distribución óptima del control en la habitación.

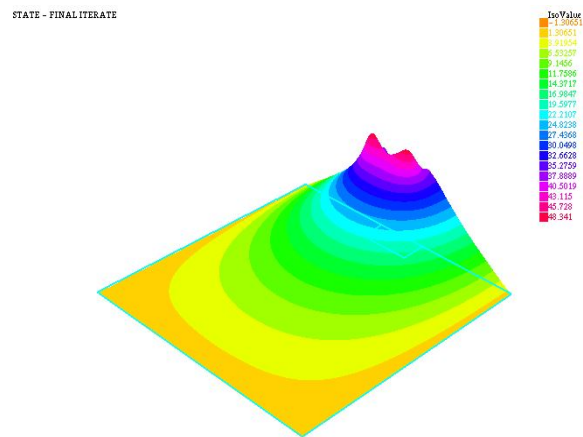


Figura 4.8: Distribución óptima de la temperatura en la habitación.

Capítulo 5

Un problema de control óptimo para la EDP del calor

Es de gran interés en Física, Química, Biología, etc. la descripción de la evolución temporal de fenómenos en los que se conoce la situación del sistema en un instante inicial, la ley que gobierna esta evolución y, eventualmente, alguna información adicional. Se considera una región espacial Ω donde se encuentran las partículas de un medio y un intervalo temporal $(0, T)$. Ejemplos de este tipo de problemas pueden encontrarse en [37], [39] y [24]. En este Capítulo se estudia el problema siguiente:

PROBLEMA 5.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(u) := \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y(x, T) - y_d(x)|^2 dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |u|^2 dx dt \\ \text{Sujeto a: } u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (u, y) \text{ cumpliendo (5.1),} \end{array} \right.$$

donde

$$\mathcal{U}_{ad} := \{u \in L^2(\omega \times (0, T)) : \underline{u} \leq u(x) \leq \bar{u} \text{ c.p.d } \omega \times (0, T)\}$$

y (5.1) es el siguiente problema de valores iniciales y de contorno para la

EDP del calor:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = 1_w u & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Aquí, suponemos que $a, b > 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $\bar{u}, \underline{u} \in [-\infty, +\infty]$ con $\underline{u} < \bar{u}$, $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío e $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Obsérvese que, en este caso, \mathcal{U}_{ad} es un convexo cerrado de $L^2(\omega \times (0, T))$; por otra parte, si $\bar{u}, \underline{u} \in \mathbb{R}$, \mathcal{U}_{ad} es además acotado.

En lo que sigue, mientras no se indique lo contrario, (\cdot, \cdot) y $\|\cdot\|$ denotarán respectivamente el producto escalar y la norma en $L^2(\Omega)$ (y también en $L^2(\Omega)^m$).

5.1. Existencia de control óptimo

En el Capítulo 4 utilizamos el Teorema de Lax-Milgram para demostrar, para cada control, la existencia y unicidad de un estado asociado, solución débil de un problema de contorno para una EDP elíptica. Existe un resultado que puede jugar un papel análogo en el contexto de problemas de Cauchy asociados a la EDP del calor como (5.1).

Supondremos dados

- Dos espacios de Hilbert separables V y H (de normas y productos escalares $\|\cdot\|_V$ y $(\cdot, \cdot)_V$, $\|\cdot\|_H$ y $(\cdot, \cdot)_H$, respectivamente).
- Una familia $\{a(t; \cdot, \cdot)\}_{t \in [0, T]}$ de formas bilineales sobre V .
- Los datos $F \in L^2((0, T); H)$ y $u_0 \in H$.

Teorema 5.1 (Lions). *Supongamos que*

$$V \subset H, \text{ la inyección de } V \text{ en } H \text{ es continua y } V \text{ es denso en } H. \quad (5.2)$$

Supongamos también que existen $M, \alpha > 0$ (independientes de t) tales que

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \text{ c.p.d. en } [0, T], \quad (5.3)$$

y

$$|a(t; v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \text{ c.p.d. en } [0, T]. \quad (5.4)$$

Finalmente, supongamos que

$$t \mapsto a(t; u, v) \text{ es medible } \forall u, v \in V. \quad (5.5)$$

Entonces existe una única solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H) \text{ tal que} \\ \frac{d}{dt}(u, v)_H + a(t; u, v) = (F(t), v)_H \quad \forall v \in V, \text{ c.p.d. en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

En el problema precedente, la derivada respecto de t debe ser interpretada en el sentido de las distribuciones sobre $(0, T)$.

Una idea de la demostración es la siguiente:

1. En primer lugar, consideramos una base ortogonal $\{w^1, w^2, \dots, w^m, \dots\}$ de V . Las combinaciones lineales de las w^j son densas en V y en H .

Para cada $m \geq 1$, se considera el m -ésimo problema aproximado (llamado 'aproximación de Galerkin'):

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_m \in L^2(0, T; V_m) \text{ con } u_m' \in L^2(0, T; V_m) \text{ tal que} \\ (u_m', v)_H + a(t; u_m, v) = (F(t), v)_H \quad \forall v \in V_m, \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Aquí, $V_m = [w^1, \dots, w^m]$ (el espacio finito-dimensional generado por los w^j con $1 \leq j \leq m$) y u_{0m} es la proyección ortogonal de u_0 sobre V_m .

No es difícil probar que, para cada $m \geq 1$, existe una única solución de (5.7) que verifica además

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_H^2 + a(t; u_m, u_m) = (F(t), u_m)_H \text{ c.p.d en } (0, T). \quad (5.8)$$

2. Usando (5.8), es fácil deducir que u_m está uniformemente acotada en $L^2(0, T; V)$ y en $L^\infty(0, T; V)$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_H^2 + \alpha \|u_m\|_V^2 \leq \varepsilon \|u_m\|_H^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|F(t)\|_H^2 \text{ c.p.d en } (0, T),$$

de donde, integrando en $(0, t)$, conseguimos

$$\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u_m\|_V^2 ds \leq C \left(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right) \text{ c.p.d en } [0, T].$$

3. Como $L^2(0, T; V)$ es un espacio de Hilbert y $L^\infty(0, T; H)$ se puede identificar con el dual de $L^1(0, T; H)$ (un espacio de Banach separable), podemos extraer una subsucesión que verifica

$$u_\mu \rightarrow u \text{ en } L^2(0, T; V) - \text{débil}$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ en } L^\infty(0, T; V) - \text{débil}^*$$

Cuando $\mu \rightarrow +\infty$. Es posible pasar al límite en (5.7) escrito para $m = \mu$ cuando $v \in \bigcup_{m \geq 1} V_m$. En efecto, si $\psi \in \mathcal{D}([0, +\infty))$ y $v \in V_m$, tenemos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^{+\infty} (u_\mu, \psi(t)v)_H dt + \int_0^{+\infty} a(t; u_\mu, \psi(t)v) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (F(t), \psi(t)v)_H dt + (u_0, \psi(0)v)_H \quad \forall \mu > m. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & - \int_0^{+\infty} (u, \psi(t)v)_H dt + \int_0^{+\infty} a(t; u, \psi(t)v) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (F(t), \psi(t)v)_H dt + (u_0, \psi(0)v)_H. \end{aligned}$$

Eligiendo adecuadamente ψ y teniendo en cuenta que $\bigcup_{m \geq 1} V_m$ es denso en V , deducimos que $u \in C^0([0, T]; H)$ y verifica (5.6).

4. Si u y \tilde{u} son dos soluciones de (5.6) e introducimos $w := u - \tilde{u}$, tenemos que $w \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H)$ y

$$\frac{d}{dt} (w, v)_H + a(t; w, w) = 0 \quad \forall v \in V \text{ c.p.d en } (0, T).$$

Se deduce entonces que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_H^2 + \alpha \|w\|_V^2 \leq 0 \quad \text{c.p.d. en } (0, T),$$

de donde $w(t) \equiv 0$. Por tanto, la solución de (5.6) es única.

La demostración completa puede encontrarse en [37].

Observación 5.1. En lo que se refiere a la existencia de solución, la hipótesis (5.3) no es óptima y puede ser sustituida por la siguiente:

$$\begin{cases} \exists M \in L^2(0, T) \text{ con } M \geq 0 \text{ c.p.d. tal que} \\ a(t; u, v) \leq M(t) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{cases} \quad (5.9)$$

Sin embargo, en este caso, la unicidad de solución débil es una cuestión abierta. \square

Observación 5.2. Por otra parte, la hipótesis (5.4) puede ser relajada como sigue:

$$\begin{cases} \exists \alpha, \beta > 0 \text{ tales que} \\ a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_H^2 \quad \text{for all } v \in V, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{cases}$$

El resultado continúa siendo el mismo. \square

A continuación aplicamos el Teorema 5.1 al problema (5.1). Para ello, necesitamos definir el concepto de solución débil:

Definición 5.1. Sea $u \in L^2(\omega \times (0, T))$. Se dice que y es solución débil de (5.1) si

$$\begin{cases} y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \\ \frac{d}{dt}(y, z) + (\nabla y, \nabla z) = \int_{\omega} v(x, t) z \, dx \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Lema 5.1. Dado el problema de Cauchy-Dirichlet (5.1), para todo $v \in L^2(\omega \times (0, T))$, existe una única solución débil, $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Además, la aplicación

$$\begin{aligned} S : L^2(\omega \times (0, T)) &\mapsto L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \\ v &\mapsto y \end{aligned} \quad (5.11)$$

es lineal y continua.

Demostración 5.1.1. Podemos aplicar el Teorema 5.1 con $H = L^2(\Omega)$ y $V = H_0^1(\Omega)$, las formas bilineales (trivialmente continuas y coercivas en $H_0^1(\Omega)$)

$$a(t; u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in [0, T]$$

y

$$F(t) = v(\cdot, t)1_{\omega} \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Esto muestra la existencia y unicidad de solución débil de (5.1) para cada $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ y que, por tanto, la aplicación S está bien definida.

La linealidad de S se deduce de manera inmediata del principio de superposición, puesto que la EDP de estado es lineal.

Por otra parte, si en (5.1) escogemos $z = y(\cdot, t)$ para casi todo $t \in (0, T)$, razonando como en la demostración del Teorema 5.1, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, t)|^2 \, dx + \iint_Q |\nabla y|^2 \, dx \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \iint_Q |u|^2 \, dx \, dt \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por tanto, tenemos que

$$\|y\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \max_{[0, T]} \|y(\cdot, t)\|^2 \leq C \left(\|y_0\|^2 + \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 \right)$$

y esto muestra que S es lineal y continua. \square

Lema 5.2. El funcional $J : L^2(\omega \times (0, T)) \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) := \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y(x, T) - y_d(x)|^2 \, dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |u|^2 \, dx \, dt,$$

donde y es la solución débil de (5.1), está bien definido y es estrictamente convexo y continuamente diferenciable.

Demostración 5.1.2. Se puede probar la convexidad estricta directamente, comprobándose que, si $u \neq v$ y $\alpha \in (0, 1)$, tenemos

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v).$$

En efecto, J es la suma de la función convexa

$$v \mapsto \frac{a}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx$$

y la función estrictamente convexa

$$v \mapsto \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |v|^2 dx dt$$

Por otra parte, la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de la derivada se pueden demostrar por un argumento completamente análogo al usado en el Capítulo 4 a partir del Lema 5.1. \square

Proposición 5.1. *El problema (5,1) posee solución única, denominada control óptimo.*

La demostración de este resultado es completamente análoga a la de la Proposición 1.1 del Capítulo 4.

5.2. Sistema de optimalidad

Teorema 5.2. *Sea \hat{u} la solución del problema (5,1) y sea \hat{y} el estado asociado. Entonces existe \hat{p} tal que la terna $(\hat{u}, \hat{y}, \hat{p})$ satisface el siguiente sistema de optimalidad:*

$$\begin{cases} \hat{y}_t - \Delta \hat{y} = \hat{u} 1_{\omega} & \text{en } Q, \\ \hat{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{y}(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} -\hat{p}_t - \Delta \hat{p} = 0 & \text{en } Q, \\ \hat{p} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{p}(x, T) = \hat{y}(x, T) - y_d & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\iint_{\omega \times (0, T)} (a\hat{p} + b\hat{u})(u - \hat{u}) \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (5.15)$$

Las desigualdades (5.15) equivalen a la identidad

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(-\frac{a}{b} \hat{p}|_{\omega \times (0, T)} \right), \quad (5.16)$$

donde $\mathcal{P}_{ad} : L^2(\omega \times (0, T)) \mapsto \mathcal{U}_{ad}$ es el operador de proyección ortogonal habitual.

Demostración 5.2.1. Como \hat{u} es la solución del problema (5,1) y $J : L^2(\omega \times (0, T)) \mapsto \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, se tiene necesariamente que

$$\left(J'(\hat{u}), u - \hat{u} \right)_{L^2(\omega \times (0, T))} \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

En primer lugar, calculemos $J'(\hat{u})$. Para ello, pongamos que

$$\left(J'(u), v \right)_{L^2(\omega \times (0, T))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J(u + \varepsilon v) - J(u)) \quad \forall u, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Si llamamos z_ε al estado asociado a $u + \varepsilon v$, tenemos que

$$J(u + \varepsilon v) = \frac{a}{2} \int_{\Omega} |z_\varepsilon - y_d|^2 \, dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |u + \varepsilon v|^2 \, dx \, dt.$$

Como la EDP de estado es lineal, es inmediato que $z_\varepsilon = y + \varepsilon z$, donde y (resp. z) es el estado asociado a u (resp. v). Es decir, z es la única solución débil del problema siguiente:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = 1_w v & \text{en} & \Omega \times (0, T), \\ z = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \times (0, T), \\ z(x, 0) = 0 & \text{en} & \Omega. \end{cases}$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (J(u + \varepsilon v) - J(u)) &= \varepsilon \left(\frac{a}{2} \int_{\Omega} |z(x, T)|^2 dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |v|^2 dx dt \right) \\ &+ a \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d(x)) z(x, T) dx + b \iint_{\omega \times (0, T)} uv dx dt \end{aligned}$$

y, tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos que

$$(J'(u), v)_{L^2(\omega \times (0, T))} = a \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d) z(x, T) dx + b \iint_{\omega \times (0, T)} uv dx dt. \quad (5.17)$$

Para tener una expresión explícita de la derivada de J , introducimos una nueva función p , denominada estado adjunto a u . Por definición, p es la única solución débil del problema

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p = 0 & \text{en } Q, \\ p = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ p(x, T) = y(x, T) - y_d & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Nótese que (5.18) posee exactamente la misma estructura que (5.1) tras el cambio de variables $t \mapsto T - t$. Por tanto, posee una única solución débil y p está definida sin ambigüedad.

Se tiene así que

$$\int_{\Omega} (y(x, T) - y_d) z(x, T) dx = \int_{\Omega} p(x, T) z(x, T) dx.$$

Por otra parte, si ponemos $h(t) := (p(\cdot, t), z(\cdot, t))$ para cada $t \in [0, T]$, resulta que

$$h(T) = h(0) + \int_0^T h'(t) dt = \iint_Q (p_t z + p z_t) dx dt.$$

Sustituyendo p_t y z_t por lo que valen, integrando por partes y aplicando las condiciones homogéneas de tipo Dirichlet para z y p se tiene que

$$\int_{\Omega} (y(x, T) - y_d) z(x, T) dx = \iint_{\omega \times (0, T)} pv dx dt.$$

Sustituimos en (5.17) y tenemos la expresión explícita de la derivada:

$$J'(\hat{u}) = a\hat{p}|_{\omega \times (0,T)} + b\hat{u}$$

y, en el óptimo,

$$\iint_{\omega \times (0,T)} (a\hat{p} + b\hat{u})(u - \hat{u}) \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (5.19)$$

Aplicando el Teorema de la Proyección, sabemos que la solución de (5.19) existe, es única y está caracterizada por verificar

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_{ad}} \left(-\frac{a}{b} p|_{\omega \times (0,T)} \right).$$

Esto termina la demostración.

□

5.3. Obtención numérica del control óptimo

Se utilizará el **Software** de resolución numérica de EDPs **FreeFem++** para calcular una solución aproximada del problema (5.1) a partir del sistema de optimalidad del Teorema 5.2.

Tenemos que resolver ecuaciones de evolución, por lo que, antes de aplicar el método de los elementos finitos, será necesaria una primera etapa de aproximación en tiempo. Por simplicidad, aplicaremos el esquema de Euler. De este modo, la tarea queda reducida a resolver un número finito de problemas estacionarios que pueden ser fácilmente aproximados con técnicas de elementos finitos.

ETAPA 1: APROXIMACIÓN TEMPORAL.

Fijemos un entero $N_T \geq 1$, el paso del tiempo $\tau = \frac{T}{N_T}$ y la partición de $[0, T]$ dada por $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_T}\}$, donde $t_m := m\tau$ para $m = 0, 1, \dots, N_T$. En esta primera etapa, el objetivo consiste en hallar aproximaciones y^0, y^1, \dots y p^0, p^1, \dots respectivamente de las $y(\cdot, t^0), y(\cdot, t^1), \dots$ $p(\cdot, t^0), p(\cdot, t^1), \dots$ con la finalidad de proyectar y obtener así el control óptimo.

En primer lugar, tomamos simplemente $y^0 = y_0$, evaluamos $y(\cdot, t)$ en los distintos t_i y aproximamos las derivadas temporales por cocientes incrementales.

Se obtienen así los siguientes problemas estacionarios:

$$\begin{cases} \frac{y^{m+1} - y^m}{\tau} - \Delta y^{m+1} = u^{m+1} 1_\omega, & x \in \Omega \\ y^{m+1}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ y^0 = y_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.20)$$

para $m = 0, 1, \dots, N-1$ y

$$\begin{cases} -\frac{p^{m+1} - p^m}{\tau} - \Delta p^m = 0 & x \in \Omega, \\ p^m(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ p^N = y^N(x) - y_d(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.21)$$

para $m = N-1, N-2, \dots, 0$. Aquí, u^{m+1} es, para cada m , una aproximación de u en el tiempo t^{m+1} . Por ejemplo, podemos tomar

$$u^{m+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t^m}^{t^{m+1}} u(\cdot, t) dt.$$

ETAPA 2: APROXIMACIÓN ESPACIAL.

Pongamos $\alpha = \frac{1}{\tau}$. Podemos rescribir (5.20) y (5.21) de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \alpha y^{m+1} - \Delta y^{m+1} = \alpha y^m + u^{m+1} 1_\omega, & x \in \Omega \\ y^{m+1}(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ y^0(x) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\begin{cases} \alpha p^m - \Delta p^m = \alpha p^{m+1}, & x \in \Omega \\ p^{m+1}(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ p^N = y^N(x) - y_d(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.23)$$

Si τ es suficientemente pequeño, tenemos que cada uno de estos problemas tiene solución débil única, gracias al Teorema de Lax-Milgram. Las formulaciones débiles de (5.20) y (5.21) vienen dadas por

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \alpha y^{m+1} v dx + \int_{\Omega} \nabla y^{m+1} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \alpha y^m(x) v dx + \int_{\omega} u^{m+1}(x) v dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), y^{m+1} \in H_0^1(\Omega) \\ y^0(x) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \alpha p^m v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p^m \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \alpha p^{m-1}(x) v \, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), p^m \in H_0^1(\Omega), \\ p^N = y^N(x) - y_d(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.25)$$

El cálculo exacto de las soluciones de (5.24) y (5.25) es inabordable. Por tanto, es necesario resolver problemas aproximados.

La aproximación más natural se consigue considerando problemas análogos a (5.24) y (5.25) donde el espacio $H_0^1(\Omega)$ es sustituido por un subespacio $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita:

$$\begin{cases} \text{Hallar } y_h^{m+1} \in V_h \text{ tal que} \\ a_y(y_h^{m+1}, v_h) = L_y^m(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} \text{Hallar } p_h^m \in V_h \text{ tal que} \\ a_p(p_h^m, v_h) = L_p^m(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (5.27)$$

donde

$$\begin{aligned} a_y(y, v) &:= \int_{\Omega} \alpha y v \, dx + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx \quad \forall y, v \in H_0^1(\Omega), \\ L_y^m(v) &:= \int_{\Omega} \alpha y^m v \, dx + \int_{\omega} u^{m+1} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a_p(p, v) &:= \int_{\Omega} \alpha p v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, dx \quad \forall p, v \in H_0^1(\Omega), \\ L_p^m(v) &:= \int_{\Omega} \alpha p^{m+1} v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

La existencia y unicidad de solución de (5.26) y (5.27), son de nuevo consecuencias del Teorema de Lax-Milgram aplicado al nuevo espacio V_h y las restricciones a este espacio de las formas bilineales $a_y(\cdot, \cdot)$ y $a_p(\cdot, \cdot)$ y las formas lineales L_y^m y L_p^m . La continuidad y coercividad de $a_y(\cdot, \cdot)$ y $a_p(\cdot, \cdot)$ y la continuidad de L_y^m y L_p^m son inmediatas.

Por tanto, a cada $u \in L^2(\omega \times (0, T))$ se puede asociar un estado aproximado $y_{h,\tau}$ y un estado adjunto aproximado de $p_{h,\tau}$. Las funciones $y_{h,\tau}$ y $p_{h,\tau}$ se definen a partir de las soluciones de los problemas (5.26) y (5.27) como sigue:

- $y_{h,\tau}, p_{h,\tau} : [0, T] \mapsto V_h$ son continuas y afines en cada $[t^m, t^{m+1}]$.

- $y_{h,\tau}(t^m) = y_h^m$ y $p_{h,\tau}(t^m) = p_h^m$ para $m = 0, 1, \dots, N$.

Para definir los espacios V_h utilizamos triangulaciones. Es decir, familias \mathcal{T}_h de triángulos cerrados (si $N = 2$) o tetraedros cerrados (si $N = 3$) que cumplen lo siguiente:

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$.
- Dados $T, T' \in \mathcal{T}_h$ tales que $T \neq T'$ entonces $T \cap T'$ es una cara, lado o vértice común o el conjunto vacío.

Pongamos

$$W_h = \{z_h \in C^0(\bar{\Omega}) : z_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Entonces W_h es un espacio vectorial que verifica:

1. $\dim W_h = n_{\hat{A}}^\circ$ de vértices de \mathcal{T}_h .
2. $W_h \subset H^1(\Omega)$.

Por tanto, podemos definir $V_h = W_h \cap H_0^1(\Omega)$. Así, V_h es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita igual al número de vértices de \mathcal{T}_h que pertenecen a Ω . Llamamos elemento finito de tipo P_1 -Lagrange a la terna $\{T, \mathbb{P}(T), \Sigma_T\}$. Donde $T \in \mathcal{T}_h$, $\mathbb{P}_1(T)$ es el espacio vectorial de dimensión $N + 1$ formado por las funciones polinómicas $p : T \mapsto \mathbb{R}$ de grado menor o igual que 1 y $\Sigma_T = \{a_T^1, \dots, a_T^N\}$ es el conjunto de los vértices de T .

Fijado el control $u \in L^2(\omega \times (0, T))$, tenemos el resultado de convergencia siguiente para los estados y estados adjuntos asociados, que enunciaremos sin demostración (véase por ejemplo [4] para los detalles).

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones, es decir, tal que si $\delta(T)$ y $\rho(T)$ denotan respectivamente el diámetro y el grosor del triángulo o tetraedro T , se tiene:

1. $\max_{T \in \mathcal{T}_h} \delta(T) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
2. $\exists C > 0$ tal que $\frac{\delta(T)}{\rho(T)} \leq C \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall h$.

Entonces los estados aproximados asociados a u , τ y V_h convergen hacia el estado asociado a u en el sentido siguiente:

$$y_{h,\tau} \rightarrow y \text{ en } L^2(\omega \times (0, T))\text{-fuerte cuando } h, \tau \rightarrow 0.$$

Lo mismo puede decirse sobre la convergencia de los estados adjuntos aproximados $p_{h,\tau}$ hacia el estado adjunto p .

En la práctica, consideramos controles $u_{h,\tau}$ del mismo tipo que los $y_{h,\tau}$ y $p_{h,\tau}$. El problema aproximado de control óptimo consistirá en minimizar

$$\frac{a}{2} \int_{\Omega} |y_{h,\tau}(x, T) - y_d(x)|^2 dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0, T)} |u_{h,\tau}|^2 dx dt$$

Sujeto a que $u_{h,\tau} : [0, T] \mapsto V_h$ es continua y afín en cada $[t^m, t^{m+1}]$, $u_{h,\tau} = 0$ fuera de $\omega \times (0, T)$ e $y_{h,\tau}$ es el estado aproximado asociado a $u_{h,\tau}$, τ y V_h .

En la sección siguiente, presentamos algunas experiencias numéricas.

5.4. Resultados numéricos

Los valores usados para las constantes son : $\underline{u} = 0$, $\bar{u} = 100$ (cotas de los controles admisibles); $T = 10$; a y $b = 1 - a$, que se escogerán entre 0 y 1 de la manera más adecuada en cada algoritmo, atendiendo a la convergencia. Además, definimos:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}, \\ \omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 3 \leq y \leq 6\}, \\ y_d(x, y) &= x^2 - y^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Se comienza con el algoritmo de punto fijo. Inicializamos con un valor de u igual a 0 y se resuelven de manera sucesiva los sistemas de estado y adjunto en su formulación débil, triangularizando Ω y escogiendo un espacio de elementos finitos de Lagrange del tipo P_1 , es decir, de funciones continuas en $\bar{\Omega}$ y lineales a trozos en cada elemento del mallado. Conocidos el estado y el adjunto, se actualizan los valores del control. Realizamos este proceso de manera iterativa hasta alcanzar convergencia con un nivel de tolerancia prefijado de $\|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\omega)} < 10^{-5}$. Realizamos este algoritmo para cada instante t

usando el método de Euler.

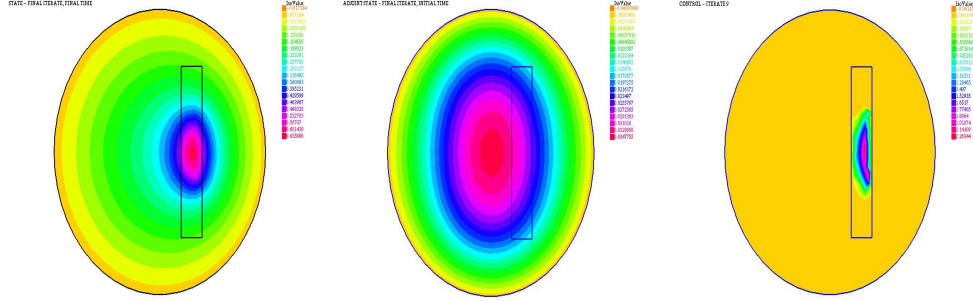


Figura 5.1: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo mediante algoritmo de punto fijo ($a=0,5$).

5.5. Otras experiencias numéricas

El mismo problema puede resolverse para encontrar el control óptimo de una fuente de calor en una habitación en la que deseamos que la temperatura se aproxime a una deseada con el menor coste energético posible. En el Capítulo 4 vimos el caso estacionario. En este, se considera la evolución temporal de la temperatura del sistema y de la fuente.

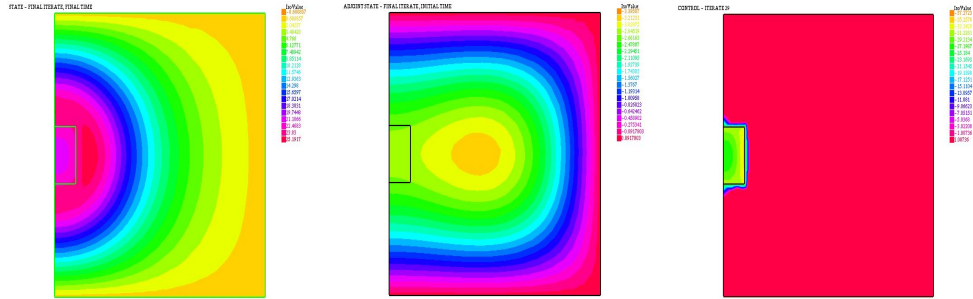


Figura 5.2: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo mediante algoritmo del gradiente con paso óptimo ($a=0,2$).

En el instante final, el control toma valores negativos. Esto quiere decir que inicialmente se suministró calor hasta superar la temperatura objetivo, por lo que se tuvo que extraer calor en los instantes finales.

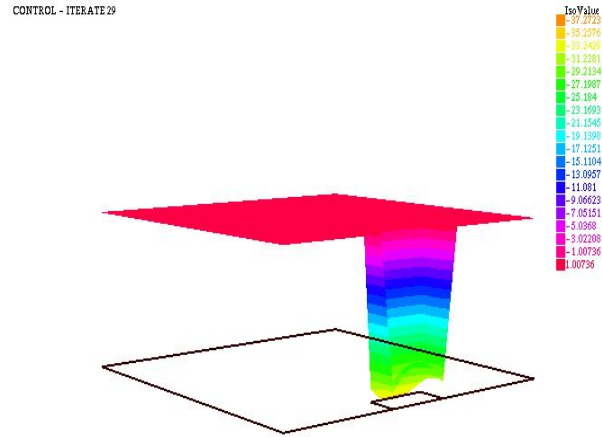


Figura 5.3: Distribución óptima del control en la habitación.

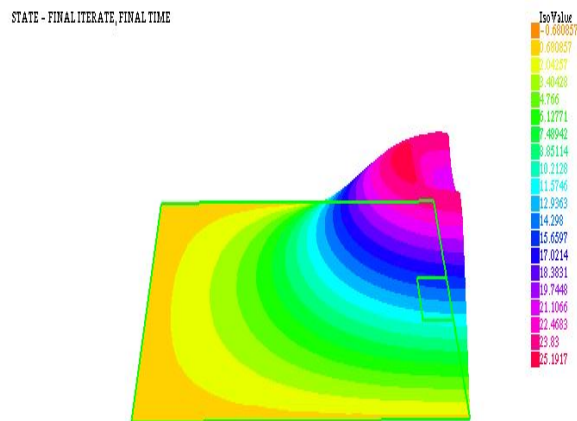


Figura 5.4: Distribución óptima de la temperatura en la habitación.

Capítulo 6

Un problema de control bi-objetivo

6.1. Introducción

Un problema recurrente en todos los campos de trabajo es la toma de decisiones y la búsqueda de compromisos que, en la medida de lo posible, permitan la consecución de un objetivo de manera óptima. La dificultad reside en la existencia de conflicto entre los objetivos o metas. El abanico de problemas que podemos resolver va desde el diseño de transbordadores espaciales, puentes, robots o lentes para cámaras fotográficas hasta la planificación de sistemas de producción o la gestión de la polución en control medioambiental.

La resolución de problemas con objetivos al menos parcialmente enfrentados, habitualmente requiere el empleo de una regla de toma de decisión o de selección entre las soluciones alternativas.

Debido a la independencia que tienen las funciones objetivo entre sí, no es posible encontrar una única solución que sea óptima para todas ellas simultáneamente. Los problemas de optimización multiobjetivo están, en este sentido, mal definidos. No hay un orden natural en el espacio de los objetivos (imagen de la región factible mediante la función objetivo) porque está parcialmente ordenado. No obstante, hay un tipo de vectores del espacio de los objetivos que tienen un interés significativo. Dichos vectores son aquellos para los cuales ninguna

de sus componentes puede ser mejorada sin perjudicar alguna de las restantes. Edgeworth presentó esta definición en 1881. Sin embargo, este concepto es más conocido en la literatura como equilibrio u optimalidad de Pareto debido a que fue el economista y sociólogo Vilfredo Pareto, quien lo desarrolló posteriormente en 1896. Véase [41] para saber más.

Existen otro tipo de estrategias que no abordaremos aquí. Un ejemplo es lo que se denomina equilibrio de Nash. Fue definido por John Forbes Nash en su tesis doctoral (1951). Gracias a la utilidad en gran cantidad de aplicaciones de su trabajo, recibió el premio Abel y el premio Nobel de economía.

Este concepto tiene origen en la teoría de juegos y se trata de una estrategia no cooperativa. Un equilibrio de Nash es una situación en la cual todos los jugadores han puesto en práctica, y saben que lo han hecho, una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Consecuentemente, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar individualmente su estrategia.

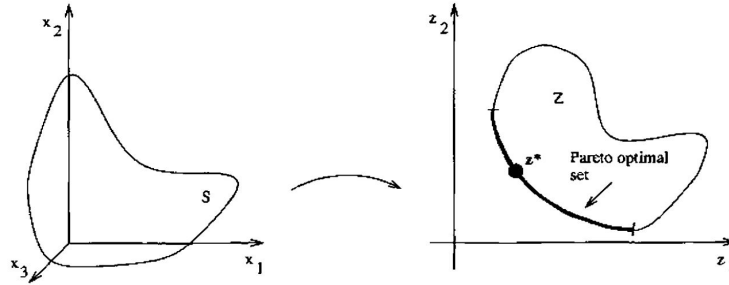


Figura 6.1: Región factible (S) y frontera de Pareto en el espacio de los objetivos (Z).

6.2. Problema de control biobjetivo

Sea Ω una región no vacía de \mathbb{R}^m . Consideremos los funcionales de coste siguientes:

$$J_i(u) := \frac{a_i}{2} \int_{\mathcal{O}_i} |y - y_{id}|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\omega} |u|^2 dx, \quad \forall u \in L^2(\omega), i = 1, 2. \quad (6.1)$$

Aquí, suponemos que $a_1, a_2, \mu > 0$, $y_{id} \in L^2(\mathcal{O}_i)$ y $\omega, \mathcal{O}_i \subset \Omega$ son abiertos

no vacíos.

$$\begin{cases} -\Delta y = 1_\omega u & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

PROBLEMA 6.1.

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \{J_1(u), J_2(u)\} \\ \text{Sujeto a: } u \in L^2(\omega), \quad (u, y) \text{ cumpliendo (6.2)}. \end{cases}$$

Definición 6.1. Una función $u^* \in L^2(\omega)$ es un óptimo de Pareto del problema 6,1 si no existe ningún otro $u \in L^2(\omega)$ tal que

$$J_1(u) \leq J_1(u^*) \text{ y } J_2(u) < J_2(u^*) \quad (6.3)$$

o viceversa.

Se pueden encontrar problemas similares en [6].

6.3. Existencia de óptimos de Pareto

Teorema 6.1. *El Problema 6,1 posee una familia uniparamétrica de equilibrios de Pareto.*

Demostración 6.3.1. Definimos el funcional

$$J^\alpha(u) := \alpha J_1(u) + (1 - \alpha) J_2(u) \quad \forall u \in L^2(\omega), \forall \alpha \in (0, 1). \quad (6.4)$$

Fijado $\alpha \in (0, 1)$, el problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J^\alpha(u) \\ \text{Sujeto a: } u \in L^2(\omega), \quad (u, y) \text{ cumpliendo (6.2)}, \end{cases} \quad (6.5)$$

tiene un único control óptimo que llamamos $u_\alpha \in L^2(\omega)$. En el Capítulo 4 mostramos que cada J_i es continua y estrictamente convexa. La combinación convexa de funciones estrictamente convexas y continuas preserva estas propiedades. Además, $L^2(\omega)$ es convexo y cerrado y toda sucesión $\{u_\alpha^n\}$ está acotada en $L^2(\omega)$. De aquí se deduce la existencia y unicidad del mismo.

Además, para cada $\alpha \in (0, 1)$, u_α es un equilibrio de Pareto. En efecto, razonando por reducción al absurdo, supóngase que existe $\bar{u} \in L^2(\omega)$ satisfaciendo que

$$J_1(\bar{u}) \leq J_1(u_\alpha) \text{ y } J_2(\bar{u}) < J_2(u_\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (6.6)$$

Entonces,

$$\alpha J_1(\bar{u}) + (1 - \alpha) J_2(\bar{u}) < J^\alpha(u_\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad (6.7)$$

lo cual es absurdo.

Observación 6.1. Si u es equilibrio de Pareto, existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $u = u_\alpha$ (el único mínimo de 6.5). Esto es consecuencia de lo que sigue.

□

6.4. Sistema de optimalidad

En primer lugar, se enuncia sin demostrar un resultado clásico de optimización no lineal convexa. La prueba de este resultado puede encontrarse, por ejemplo, en [13].

Teorema 6.2 (Condición suficiente de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker). *Una condición suficiente para que un punto $\hat{u} \in L^2(\omega)$ sea solución del problema*

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J_1(u) \\ \text{Sujeto a } u \in L^2(\omega), J_2(u) \leq \beta \end{cases} \quad (6.8)$$

es que existe un multiplicador $\mu \geq 0$ tal que

$$1. \quad J'_1(\hat{u}) + \mu J'_2(\hat{u}) = 0$$

$$2. \quad \mu(J'_2(\hat{u}) - \beta) = 0$$

Teorema 6.3. *Sea \hat{u} un óptimo de Pareto del problema 6.1 y sea \hat{y} el estado asociado. Entonces existen $\alpha \in [0, 1]$ y \hat{p} tales que la terna $(\hat{u}, \hat{y}, \hat{p})$ satisface el siguiente sistema de optimalidad:*

$$\begin{cases} -\Delta \hat{y} = \hat{u} 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ \hat{y} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} -\Delta \hat{p} = \alpha a_1(y - y_{1d})1_{\mathcal{O}_1} + (1 - \alpha)a_2(y - y_{2d})1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } \Omega, \\ \hat{p} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\hat{u} = -\frac{1}{\mu}\hat{p}|_{\omega}. \quad (6.11)$$

Demostración 6.4.1. Gracias al Teorema 6.2, sabemos que

- $\exists \mu \geq 0$ tal que $J'_1(\hat{u}) + \mu J'_2(\hat{u}) = 0$ (porque \hat{u} es solución de (6.8) con $\beta = J_2(\hat{u})$).
- $\exists \xi \geq 0$ tal que $J'_1(\hat{u}) + \xi J'_2(\hat{u}) = 0$ (por el mismo motivo, intercambiando J_1 con J_2).

Si $\mu = 0$, entonces $J'_1(\hat{u}) = 0$ y $J'_2(\hat{u}) = 0$. Luego

$$\alpha J'_1(\hat{u}) + (1 - \alpha)J'_2(\hat{u}) = 0 \quad (6.12)$$

para todo α . En caso contrario, tenemos de nuevo (6.12) para $\alpha = \frac{1}{1 + \mu}$. Obsérvese que (6.12) equivale a decir que \hat{u} minimiza J_α .

En el Capítulo 4 se calcularon estas derivadas. En efecto,

$$\left(J'_i(u), w \right)_{L^2(\omega)} = a_i \int_{\mathcal{O}_i} (y - y_{id})z \, dx + \mu \int_{\omega} uw \, dx, \quad i = 1, 2, \quad (6.13)$$

donde z es la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta z = w1_{\omega} & \text{en } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.14)$$

Para tener una expresión explícita de la derivada de J_i , introducimos una nueva función p_i . Por definición, p_i es la única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta p_i = a_i(y - y_{id})1_{\mathcal{O}_i} & \text{en } \Omega, \\ p_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.15)$$

Se tiene así que

$$J'_i(u) = p_i|_{\omega} + \mu u.$$

Sustituyendo en (6.12),

$$\begin{cases} \left(\alpha J'_1(\hat{u}) + (1 - \alpha) J'_2(\hat{u}), w \right)_{L^2(\omega)} = \mu \int_{\omega} (\hat{p} + \mu \hat{u}) w \, dx = 0, \\ \forall w \in L^2(\omega), \hat{u} \in L^2(\omega). \end{cases} \quad (6.16)$$

Como consecuencia,

$$\hat{u} = -\frac{1}{\mu} \hat{p}|_{\omega}. \quad (6.17)$$

En (6.16), $\hat{p} = \alpha \hat{p}_1 + (1 - \alpha) \hat{p}_2$ que, como consecuencia de la linealidad de (6.15), es la única solución débil de (6.10) y se denomina estado adjunto asociado a \hat{u} .

6.5. Obtención numérica del equilibrio de Pareto

Utilizando **FreeFem++**, se calculará, de manera aproximada, un óptimo de Pareto del problema 6.1 a partir del sistema de optimalidad del Teorema 6.3 mediante el método de los elementos finitos. Se emplearán tres algoritmos diferentes para ello: Punto Fijo, Gradiente con Paso Óptimo y Gradiente Conjugado con Paso Óptimo.

6.5.1. Algoritmo de Punto Fijo

Utilizamos el método de punto fijo para la resolución del problema. El algoritmo es el siguiente:

ALG 1:

- Elegir $u^0 \in L^2(\omega)$, $\alpha \in (0, 1)$.
- Después, para $n \geq 0$ y $u^n \in L^2(\omega)$ dados, calcular sucesivamente y^n , p^n y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_{\omega} & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.18)$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = a_1 \alpha (y^n - y_{1d}) 1_{\mathcal{O}_1} + a_2 (1 - \alpha) (y^n - y_{2d}) 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.19)$$

$$u^{n+1} = -\frac{1}{\mu} p^n|_{\omega}. \quad (6.20)$$

Teorema 6.4. *Sea $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Existe $\epsilon_0(\Omega) > 0$ tal que, si $0 < \frac{\alpha a_1 + (1 - \alpha) a_2}{\mu} \leq \epsilon_0(\Omega)$, la sucesión $\{u^n\}$ generada por el algoritmo de punto fijo converge cuando $n \rightarrow +\infty$ hacia \hat{u}_α .*

Una demostración análoga a la de este resultado puede encontrarse en el Capítulo 4.

6.5.2. Algoritmos de tipo gradiente

Comenzamos con el *algoritmo del gradiente con paso óptimo*. Aplicado al problema es

ALG 2:

- Elegir $u^0 \in L^2(\omega)$ y $\alpha \in (0, 1)$.
- Después, para $n \geq 0$ y $u^n \in L^2(\omega)$ dados, calcular sucesivamente y^n , p^n , d^n (el gradiente de J en u^n), ρ^n (el paso óptimo) y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_{\omega} & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = a_1 \alpha (y^n - y_{1d}) 1_{\mathcal{O}_1} + a_2 (1 - \alpha) (y^n - y_{2d}) 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.22)$$

$$d^n = p^n|_{\omega} + \mu u^n,$$

$$\rho^n \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J^\alpha(u^n - \rho d^n) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases} \quad (6.23)$$

$$u^{n+1} = u^n - \rho^n d^n. \quad (6.24)$$

Vemos entonces que en cada etapa la tarea se reduce a resolver dos problemas elípticos (6.21) y (6.22) y un problema extremal unidimensional (6.23).

Nótese que, para $d^n \neq 0$, (6.23) posee solución única. En efecto, la función $\rho \mapsto J(u^n - \rho d^n)$ es cuadrática y estrictamente convexa. Además, se puede calcular de manera exacta. Se tiene así que:

$$\rho^n = \frac{\|d^n\|_{L^2(\omega)}^2}{a_1 \alpha \|w^n\|_{L^2(\mathcal{O}_1)}^2 + a_2 (1 - \alpha) \|w^n\|_{L^2(\mathcal{O}_2)}^2 + \|d^n\|_{L^2(\omega)}^2}, \quad (6.25)$$

donde w es el estado asociado a la dirección d .

Teorema 6.5. *Supongamos que $\mu > 0$ y $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\omega)$. Sea \hat{u}_α una solución del problema 6.1 y sea $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Entonces la sucesión $\{u^n\}$ generada por **ALG2** converge en $L^2(\omega)$ hacia \hat{u} cuando $n \rightarrow +\infty$.*

La demostración se encuentra en el Capítulo 4.

Por último, se hace uso del *método del gradiente conjugado*. El algoritmo resultante es el siguiente:

ALG 3:

- Elegir $u^0 \in L^2(\omega)$ y $\alpha \in (0, 1)$.
- Para $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$, $\alpha \in (0, 1)$ dados, calcular sucesivamente y^0 , p^0 , g^0 (el gradiente de J en u^0), $d^0 = g^0$, ρ^0 (el paso óptimo) y u^1 como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^0 = u^0 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta p^0 = a_1 \alpha (y^0 - y_{1d}) 1_{\mathcal{O}_1} + a_2 (1 - \alpha) (y^0 - y_{2d}) 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } \Omega, \\ p^0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.26)$$

$$g^0 = p^0|_\omega + \mu u^0, \quad d^0 = g^0,$$

$$\rho^0 \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J^\alpha(u^0 - \rho d^0) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases}$$

$$u^1 = u^0 - \rho^0 d^0.$$

- Después, para $n \geq 1$ y $u^n \in \mathcal{U}_{ad}$ y $g^{n-1}, d^{n-1} \in L^2(\omega)$ dados, calcular

sucesivamente y^n , p^n y g^n (el gradiente de J en u^n), γ^n , d^n , ρ^n (el paso óptimo) y u^{n+1} como sigue:

$$\begin{cases} -\Delta y^n = u^n 1_\omega & \text{en } \Omega, \\ y^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.27)$$

$$\begin{cases} -\Delta p^n = a_1 \alpha (y^n - y_{1d}) 1_{\mathcal{O}_1} + a_2 (1 - \alpha) (y^n - y_{2d}) 1_{\mathcal{O}_2} & \text{en } \Omega, \\ p^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.28)$$

$$g^n = p^n|_\omega + \mu u^n,$$

$$\gamma^n = \frac{\|g^n\|_{L^2(\omega)}^2}{\|g^{n-1}\|_{L^2(\omega)}^2}, \quad d^n = g^n + \gamma^n d^{n-1},$$

$$\rho^n \text{ solución de } \begin{cases} \text{Minimizar } J(u^n - \rho d^n) \\ \text{Sujeto a: } \rho \geq 0, \end{cases} \quad (6.29)$$

$$u^{n+1} = u^n - \rho^n d^n. \quad (6.30)$$

Enunciaremos a continuación sin demostración un resultado de convergencia para **ALG 3**. Para la prueba véase por ejemplo [Polak].

Teorema 6.6. *Supongamos que $\mu > 0$ y $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\omega)$. Sea \hat{u}_α una solución del problema 6.1 y sea $u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ un control admisible arbitrario. Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que*

$$(J'_\alpha(u^n), d^n)_{L^2(\omega)} \geq \beta \|J'_\alpha(u^n)\|_{L^2(\omega)} \|d^n\|_{L^2(\omega)} \quad \forall n \geq 0. \quad (6.31)$$

*Entonces la sucesión $\{u^n\}$ generada por **ALG 3** converge en $L^2(\omega)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ hacia \hat{u}_α .*

En realidad la condición (6.31), llamada **condición de Polak**, puede ser debilitada considerablemente: bastaría tener

$$(J'_\alpha(u^n), d^n)_{L^2(\omega)} \geq \beta_n \|J'_\alpha(u^n)\|_{L^2(\omega)} \|d^n\|_{L^2(\omega)}$$

para algunos $\beta_n > 0$ que verifiquen $\sum_{n \geq 0} \beta_n^2 = +\infty$ (condición de Zoutendijk).

6.6. Resultados numéricos

Volvemos al problema de la climatización de una sala tras el paso de un largo tiempo (suficiente para considerar el problema como estacionario). En esta ocasión, el objetivo es obtener una distribución de temperaturas distintas y constantes en cada mitad de la habitación. La temperatura objetivo ahora es

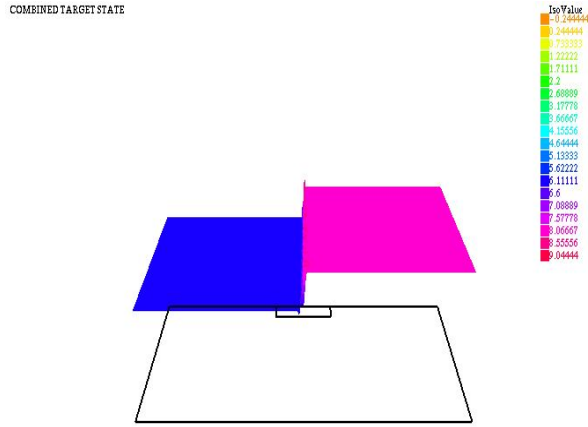


Figura 6.2: Distribución de temperaturas deseada.

Se trata, por lo tanto, de un problema de control óptimo biobjetivo para el cual queremos calcular un óptimo de Pareto. Para ello, escogemos por ejemplo $\alpha = 0,2$, $a_1 = 0,99$ y $a_2 = 0,99$. Se tienen así los siguientes resultados:

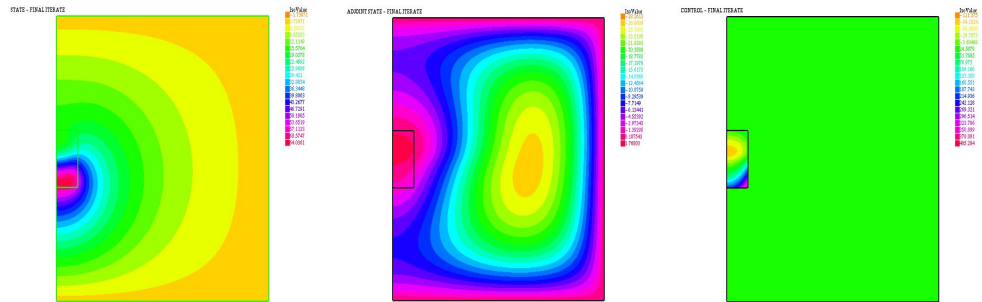


Figura 6.3: Valores calculados del estado, estado adjunto y control en el óptimo de Pareto mediante algoritmo del gradiente conjugado con paso óptimo.

Se puede observar que el calor se suministra de manera asimétrica, como cabe esperar dado que la distribución de temperaturas deseada lo es. Observamos que, dependiendo del valor que le demos a α estaremos incidiendo más en la

consecución de un objetivo o de otro.

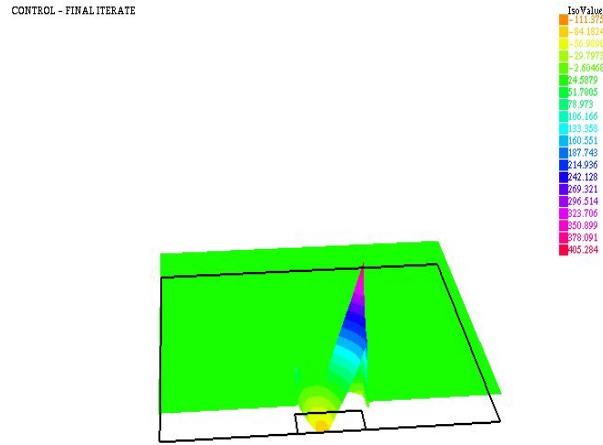


Figura 6.4: Distribución óptima del control en la habitación.

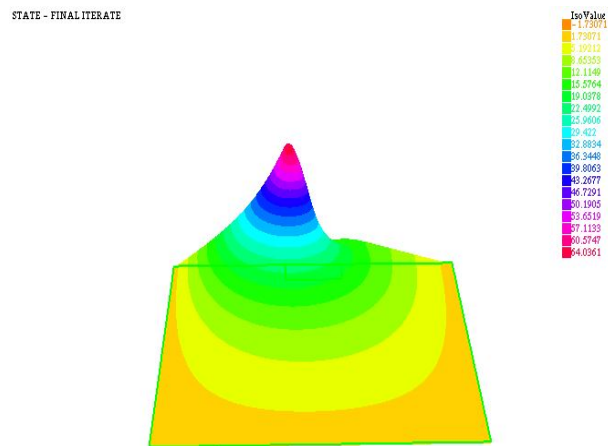


Figura 6.5: Distribución óptima de la temperatura en la habitación.

Bibliografía

- [1] G. Allaire, A. Craig, *Numerical Analysis and Optimization. An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*, Oxford, Londres, 2007.
- [2] Aref, H., Balachandar, S., *A first course in computational fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018. Sacks, Paul(1-IASU) Techniques of functional analysis for differential and integral equations. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier/Academic Press, London, 2017.
- [3] Auzinger, W., Kneisl, G., Kooch, O., Weinmuller, E., *A Collocation Code for Singular Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Institute for Applied Mathematics and Numerical Annalysis. 2002 Kluwer Academic Publishers.
- [4] Babuska, I.; Whiteman, J.R.; Strouboulis, T., *Finite elements. An introduction to the method and error estimation*. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [5] Bahaa, G., *Optimal control for cooperative parabolic systems governed by Schrodinger operator with control constraints*. IMA Journal of Mathematical Control and Information (2007).
- [6] Bahaa, G.M., *Quadratic Pareto optimal control of parabolic equation with state-control constraints and an infinite number of variables*. IMA Journal of Mathematical Control and Information (2003).
- [7] S. Barnett, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford University Press, London, 1975.

- [8] Bauschke, H. H. ; Borwein, J. M., *Dykstra's alternating projection algorithm for two sets*. J. Approx. Theory 79 (1994), no. 3.
- [9] Benalia, Karim ; David, Claire ; Oukacha, Brahim, *An optimal time control problem for the one-dimensional linear heat equation, in the presence of a scaling parameter*. RAIRO Oper. Res. 51 (2017), no. 4.
- [10] Brezis, Haim, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [11] Brogan, William L., *Optimal control theory applied to systems described by partial differential equations*. Advances in Control Systems. Academic Press, New York, 1968.
- [12] Chau, K. T., *Theory of differential equations in engineering and mechanics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
- [13] Ciarlet, Philippe G., *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.
- [14] Ciarlet, Philippe G., *The finite element method for elliptic problems*. Classics in Applied Mathematics, 40. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [15] Coron, Jean-Michel, *Control and nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [16] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of mathematical physics, Vol. II: Partial differential equations*. Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.
- [17] Davideanu, Catalina *Maximum principle for control problems governed by bilinear finite-dimensional inequalities*. An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. 34 (1988), no. 1
- [18] Denise E., Kirschner, G.F., Webb, *Immunotherapy of HIV-1 infection*. Journal of Biological Systems, Vol. 6, No1 (1998).

- [19] Destuynder, Philippe, *Analyse et contrôle des équations différentielles*. Hermes Sciences Lavoisier, Paris, 2010.
- [20] Duvaut, G., Lions, J.-L., *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin- New York, 1976.
- [21] Dykstra, Richard L. ; Boyle, James P., *An algorithm for least squares projections onto the intersection of translated, convex cones*. J. Statist. Plann. Inference 15 (1987).
- [22] Engelhart, M.; Lebiedz, D.; Sager, S., *Optimal control for selected cancer chemotherapy ODE models: A view on the potential of optimal schedules and choice of objective function*, Mathematical Biosciences 229 (2011), 123-134.
- [23] C. Evans, Lawrence, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*. University of California, Berkeley Notes.
- [24] Evans, Lawrence C., *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [25] Fattorini, H.O., *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 62, Cambridge University Press, 1999.
- [26] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Vol 1, 2, John Wiley and Sons, Chichester, 1980.
- [27] J. Griffiths, David *Introduction to Electrodynamics*. Pearson; 3rd edition, 1998.
- [28] Gunzburger, M.D., *Perspectives in flow control and optimization*, Advances in design and control, 5. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [29] Haslinger, J., Neittaanmäki, P., *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design*, John Wiley and Sons, Chichester, 1988.
- [30] Hecht, F., *FreeFem++*. Third Edition, Version 3.57-1. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

- [31] J. Higham, Desmond, J. Higham, Nicholas, *MATLAB Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, U.S.; 2002 edition.
- [32] Joshi, Hem Raj, *Optimal Control Problems in PDE and ODE Systems*. PhD diss., University of Tennessee, 2002.
- [33] Kalbaugh, David V., *Differential equations for engineers. The essentials*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
- [34] Lenhart, S., Workman, J.T., *Optimal control applied to biological models*, Chapman and Hall/ CRC, 2007.
- [35] Li, Zhilin, Qiao, Zhonghua, Tang, Tao, *Numerical solution of differential equations. Introduction to finite difference and finite element methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [36] Li, X., Yong, J., *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [37] Lions, J.-L., *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 170 Springer-Verlag, New York-Berlin 1971.
- [38] Lions, J.L., Magenes, E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Tomo 1, Dunod, Paris, 1968.
- [39] Liu, Shufang ; Liu, Dandan ; Wang, Guoqi. *Some optimal control problems of heat equations with weighted controls*. Bound. Value Probl. 2017, Paper No. 148
- [40] G. Luenberger, D. *Introduction to Linear and Non-linear Programming*, Addison-Wesley, 1973.
- [41] Miettinen, Kaisa, *Nonlinear multiobjective optimization*. International Series in Operations Research and Management Science, 12. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1999.
- [42] Polak, E., *Computational Methods in Optimization. An Unified Approach*. Academic Press, San Diego, 1971.

- [43] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *Numerical Mathematics*, 2nd edition. Texts in Applied Mathematics, 37. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [44] Rigatos, Gerasimos G., *State-space approaches for modelling and control in financial engineering. Systems theory and machine learning methods*. Intelligent Systems Reference Library, 125. Springer, Cham, 2017.
- [45] Treves, F., *Basic linear partial differential equations*. Reprint of the 1975 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.
- [46] Tröltzsch, Fredi, *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*. Graduate Studies in Mathematics, 112. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.