FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.

Dirigido por: Francisco Félix Lara Martín.

Lógica minimal, intuicionista y clásica.

Patricia Sierra Rodríguez
Sevilla, Junio de 2018

Abstract.

The classical systems traditionally accepted within formal mathematical reasoning coexists with other branches of logic that are based on constructive aspects of deduction processes. Minimal logic and intuitionistic logic stand out from among these branches. The present study offers an analysis of these two logics, based on a series of deduction systems and varied semantics. Thus, some of their most characteristic features can be successfully proved, such as the Soundness Theorem and the Completeness Theorem. Moreover, the relationship between classic logic and these two branches of constructive logic will also be considered in order to assess whether a verifiable result in the former can also be verified by any of the two latter ones. For this purpose, Gödel-Gentzen's negative translation will be presented together with Glivenko's Theorem, among others.

Resumen

Además de los sistemas clásicos habitualmente aceptados para el razonamiento matemático formal, existen otras ramas de la lógica que se basan en los aspectos constructivos de los procesos de deducción. Entre éstos destacan la lógica minimal y la lógica intuicionista. A lo largo de este trabajo se realiza un estudio de estas lógicas, presentando diversos cálculos deductivos y distintas semánticas que nos permiten demostrar algunas de sus propiedades más importantes, como son el Teorema de Corrección y el Teorema de Completitud. Así mismo, se estudia la relación existente entre estas dos lógicas constructivas y la lógica clásica con el fin de determinar cuándo una fórmula válida en lógica clásica lo es también en lógica intuicionista o minimal. Para ello, presentamos la traducción negativa de Gödel-Gentzen y el Teorema de Glivenko, entre otros.

"Las proposiciones nos *dicen* que las cosas
son de una determinada manera y al mismo tiempo
muestran su forma lógica con la del hecho que
representan." – A. Deaño (1972)

Agradecimientos.

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a todas las personas que a lo largo de estos años me han mostrado su apoyo incondicional, me han animado y me han dado el empujoncito que necesitaba para seguir adelante. Sin ellas nunca habría llegado hasta donde estoy ahora.

A Lola, mi profesora de matemáticas del instituto. Si antes de conocerla ya me gustaban las matemáticas, cuando la conocí comprendí que quería dedicar mi vida a estudiarlas. A enamorarme cada día un poco más de ellas y a enseñarle a los demás la belleza escondida que hay en ellas.

A mis compañeros de carrera, aquellos que estuvieron ahí en las buenas y en las malas. Aquellos que me animaron en cada tropiezo, que me ayudaron a seguir adelante y me dijeron que yo podía conseguirlo. Sin ellos todo este camino habría sido mucho más duro y solitario. Gracias a ellos las alegrías durante estos años fueron más y las penas duraron menos.

A todos los profesores que han sabido guiarme y apoyarme en estos años. Que han sabido ver el potencial que tenía y me han ayudado a explotarlo. Tenerlos como guía desde el primer momento y hasta el último ha sido un apoyo impresionante.

Pero sobretodo, gracias a mi familia. A mis hermanas, por creer siempre en mí. Por agobiarse cuando yo lo hacía como si el problema fuese de ellas. Por celebrar mis alegrías como si fuesen suyas. Por confiar en mí y tener fe ciega en mi futuro. Porque sé que siempre las tendré a mi lado. A mis primos José Miguel y Marcos, por llevarme la contraria cuando intento enseñarles las restas con llevadas. Por dudar de lo que intento enseñarles. Por recordarme que hasta lo que ahora me parece trivial en algún momento fue lo más complicado que podía imaginarme, y que aún así pude con ello. A mis padres, porque sin ellos simplemente no habría llegado hasta donde estoy ahora. Por sentarse a mi lado un mes después de comenzar esta aventura y decirme que estaban orgullosos de mí. Por decirme que sabían todo lo que me estaba esforzando y que tarde o temprano tendría mi recompensa. Por aguantar mis llantos y mis nervios. Por su paciencia infinita conmigo. Gracias de corazón.

Y a ti, abuela. Porque estés donde estés sé que estarás orgullosa de todo lo que he conseguido. Y sólo pensar eso me ayuda a seguir luchando por todo lo que me queda por conseguir.

Índice general

Introducción. **III**

1. Lógica intuicionista proposicional. **1**
1.1. Contexto histórico. ¿Cómo surge la lógica intuicionista? 1
1.2. Lenguaje de la lógica intuicionista proposicional. 2
1.3. Cálculos en la lógica intuicionista proposicional. 5
1.4. Semántica algebraica. Álgebras de Heyting. 12
1.5. Semántica de Kripke. 17

2. Lógica intuicionista de primer orden. **27**
2.1. Lenguaje de la lógica intuicionista de primer orden. 27
2.2. Cálculos en la lógica intuicionista de primer orden. 29
2.3. Semántica de Kripke. 31

3. Lógica minimal. **37**
3.1. Lenguaje de la lógica minimal. 37
3.2. Cálculos en la lógica minimal. 37
3.3. Semántica de la lógica minimal. Estructuras de Beth. 38

4. Comparación entre las lógicas. **45**
4.1. Lógica clásica y minimal. 45
4.2. Lógica clásica e intuicionista. 48
4.3. Disyunción y decidibilidad en lógica intuicionista. 50

Bibliografía. **53**

Introducción.

La lógica matemática es una de las ramas de las matemáticas más interesantes debido a su utilidad a la hora de representar resultados matemáticos. Precisamente es este deseo de escribir formalmente un resultado matemático la base que impulsa la aparición de una rama dentro de la lógica formal. Esta rama se centra en traducir los razonamientos matemáticos a un nuevo lenguaje con el que se pueda trabajar.

A lo largo de este trabajo estudiaremos algunos tipos de lógica que van surgiendo según la línea de razonamiento seguida para resolver los problemas que se nos plantean. Presentaremos por tanto las bases de la lógica intuicionista y la lógica minimal, que son dos tipos de lógica que siguen una línea de razonamiento constructivista. Esta línea de pensamiento está enfrentada a la que se sigue para la lógica clásica. Una vez presentadas las bases de estas lógicas, presentaremos distintos cálculos y semánticas para cada una de ellas que nos servirán como herramienta para probar ciertos resultados de interés. Entre estos resultados de interés se encuentran la prueba de los teoremas de Corrección y de Completitud para cada una de las lógicas, así como la traducción de Gödel-Gentzen o el teorema de Glivenko, que nos permiten ver las diferencias existentes entre cada una de ellas y las características que comparten.

Será necesario para el total entendimiento de lo expuesto a continuación que el lector tenga un conocimiento básico de la lógica clásica, tanto proposicional como de primer orden, pues habrá resultados de lógica intuicionista y minimal que compartan características con ésta, pero siempre manteniéndose en contraposición con la idea seguida en lógica clásica por la cual todo enunciado debe ser obligatoriamente cierto o falso. Esta idea traducida a un lenguaje lógico es conocida como *principio del tercio excluído*, es decir, $p \vee \neg p$. Por tanto, esta regla no será incluida a la hora de presentar la lógica minimal y la lógica intuicionista.

A lo largo de los dos primeros capítulos se realizará un estudio en detalle de la lógica intuicionista. Durante el primer capítulo trabajaremos en el caso proposicional. Se comenzará presentado la motivación que incitó la aparición de esta lógica, para luego presentar en detalle su lenguaje, así como el cálculo utilizado, que será la deducción natural, con el cual trabajaremos a lo largo del capítulo. Se hará también una breve introducción a otro tipo de cálculo mediante sistemas de Hilbert. Continuaremos presentado la semántica algebraica mediante álgebras de Heyting y la semántica de Kripke, que son dos de las semánticas más importantes de esta lógica. Junto a éstas se probarán una serie de resultados que nos llevarán a la prueba de los teoremas de Corrección y Completitud para cada una de las semánticas. Así mismo, se presentarán algunos resultados que nos permitirán establecer una relación de equivalencia entre las dos semánticas estudiadas. Estos mismos resultados nos ayudan a relacionar las álgebras de Heyting con espacios topológicos, lo que nos permite comprobar que existe otra línea de estudio que podría haber sido seguida en el trabajo para estudiar en profundidad estos resultados y que nos permitiría ampliar conocimientos sobre lo aquí ya expuesto.

En el segundo capítulo pasaremos a trabajar en lógica de primer orden, presentando el lenguaje, el cálculo y los resultados necesarios para complementar los ya estudiados en el primer capítulo. Será en la semántica donde nos centraremos únicamente en la de Kripke, de modo que

se presentarán los resultados necesarios para realizar la prueba de los teoremas de Corrección y Completitud en este caso.

Una vez estudiada la lógica intuicionista, pasaremos al capítulo tres, en el cual presentaremos una nueva lógica: la lógica minimal. Ésta será presentada a partir de la lógica intuicionista, descartando una de las reglas que sí se consideraba válida en lógica intuicionista. Esta regla es la conocida como regla de *ex falso quodlibet*, y nos aportaba información sobre la constante $\bot$, que en lógica minimal no tendremos. Partiendo de esta idea, estableceremos el lenguaje y el cálculo eliminando dicha regla. Se presentará entonces una nueva semántica para esta lógica basada en las estructuras de Beth, que guarda cierta similitud con la semántica de Kripke vista anteriormente. Para finalizar el capítulo, probaremos los resultados necesarios hasta llegar a probar los teoremas de Corrección y Completitud en este caso.

Tras realizar esta introducción de ambas lógicas, pasaremos a finalizar el documento con un cuarto capítulo dedicado a comparar estas dos lógicas con la ya conocida lógica clásica. Estudiaremos entonces bajo qué condiciones una fórmula válida en una de éstas lógicas es también válida en otra. Así mismo, se presentarán una serie de resultados de interés sobre lógica intuicionista que ponen de manifiesto la diferencia clara entre ésta y la lógica clásica, y que nos ayudarán a decidir cuándo una fórmula es válida en el caso intuicionista.

Por otro lado, la lógica matemática se ha presentado precisamente como un método para traducir un pensamiento matemático, pero a lo largo del documento no se ha trabajado en ningún momento con resultados matemáticos que debiésemos traducir a nuestro lenguaje lógico. Por eso mismo, no se llega a poner de manifiesto el gran interés que tiene la lógica intuicionista sobre la clásica. Si se hubiese seguido un estudio enfocado en formalizar pruebas matemáticas mediante lógica, habríamos podido comprobar que la lógica intuicionista nos permite obtener un algoritmo que construye un objeto explícito que prueba lo que deseamos. De este modo, si conseguimos obtener una prueba de un enunciado en lógica intuicionista, podemos obtener directamente de ella un objeto que prueba que en efecto dicho enunciado se verifica. Habría resultado interesante por tanto investigar sobre este algoritmo.

Este documento es una introducción básica a la nueva línea seguida por estas lógicas, siendo por tanto el primer paso a dar para realizar un proyecto de investigación mayor, en el cual sería posible adentrarnos en profundidad en nuevas líneas de estudios, entre las que se encuentran las comentadas anteriormente.

Capítulo 1

Lógica intuicionista proposicional.

1.1. Contexto histórico. ¿Cómo surge la lógica intuicionista?

La lógica formal se considera un método muy eficaz para formalizar un razonamiento matemático. Cualquier razonamiento que se haga puede ser traducido en un lenguaje lógico. Por este motivo, la lógica se ve muy afectada por los cambios de pensamiento que van surgiendo con el paso del tiempo. Es esto mismo lo que genera un gran cambio en la lógica a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, debido a la aparición de una nueva rama del pensamiento matemático, el conocido como pensamiento constructivista.

Vamos a ponernos en situación para intentar comprender un poco mejor el motivo de la aparición de esta nueva rama del pensamiento. En la segunda mitad del siglo XIX las matemáticas sufren un gran cambio. A medida que se iban desarrollando nuevas áreas de las matemáticas, la búsqueda de resultados iba convirtiéndose en un trabajo cada vez más abstracto. En lugar de obtenerse resultados *concretos*, comenzaron a crearse nuevos objetos *abstractos* con los que trabajar. Este nuevo método de trabajo provocó ciertas dudas con respecto a la consistencia de las matemáticas. Es entonces cuando, debido al descubrimiento de las llamadas paradojas en la teoría de conjuntos, algunos expertos de la época expresan la necesidad que sienten de resolver esta duda y probar la solidez de los resultados matemáticos. Nos encontramos entonces frente a una crisis en el ámbito del pensamiento matemático. *¿Qué es real? ¿Qué no lo es? ¿Puedo creer en todo lo que he supuesto cierto hasta ahora?*

A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX existe un intenso movimiento en el ámbito de las matemáticas con el fin de lograr establecer las bases de la matemática moderna. Una de las ramas de pensamiento que surge en un intento por encontrar esas bases es la conocida como rama intuicionista o constructivista. Las raíces de las matemáticas constructivistas se localizan en realidad al comienzo del siglo XIX o incluso antes, siendo la figura de Immanuel Kant (1724-1804) una de las que inspiró la idea del constructivismo. Aún así, es a principios del siglo XX cuando comienza a tomar mayor importancia este movimiento, que concierne sobretodo a la rama de la lógica.

La lógica que se utilizaba hasta el momento, la que denominaremos a partir de ahora como lógica clásica, tiene como base la idea de que todo enunciado debe ser estrictamente verdadero o falso. Por tanto, si demuestro que un suceso es imposible, entonces su contrario es directamente cierto. Mediante esta manera de pensar, muchos resultados matemáticos se demuestran probando que su contrario es falso, pero nunca llegando a probar explícitamente que el resultado en sí mismo se verifica. Este método es el conocido como reducción al absurdo.

Veamos a continuación un ejemplo clásico de este tipo de razonamiento:

Nos planteamos la siguiente cuestión: *¿Existen dos números irracionales, a y b, tales que a^b sea un número racional?*

Razonamos del siguiente modo:

Suponemos primero que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional. Así pues, tomando $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$ tendríamos la solución al problema.

Supongamos ahora que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional. Entonces $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ es racional. Si ahora tomamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$ tendríamos la solución.

Este ejemplo sigue el típico razonamiento de reducción al absurdo, por el cual obtenemos una respuesta a la pregunta planteada, pero no obtenemos una solución explícita del problema que se nos plantea. En ningún momento hemos fijado que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sea racional o irracional.

Con la aparición de esta nueva lógica, la conocida como lógica contructivista (que engloba en ella tanto la lógica intuicionista como la minimal, de las cuales hablaremos a lo largo del trabajo), restringimos algunos de los métodos utilizados en la lógica clásica e intentamos realizar nuestras pruebas sin estos métodos. Los enunciados ya no son estrictamente verdaderos o falsos, como en el caso clásico. Ya no podemos dar por hecho que si el contrario a un enunciado es falso, entonces este enunciado es directamente cierto. Ahora exijimos una prueba directa, una construcción que nos demuestre que efectivamente se verifica aquello que queremos probar.

La primera vez que se formularon los principios que sigue el intuicionismo fue en la tésis de Luitzen Egbertus Brouwer (1881-1966) escrita en 1907. Así mismo, la creación del término *intuicionismo* también se le asigna a Brouwer, que buscaba un término opuesto al *formalismo* presentado por Hilbert. Brouwer se oponía a la idea de reducir las matemáticas a puros cálculos formales, donde se trabaja de manera muy abstracta con conceptos muy complicados. El postulado principal de Brouwer era el siguiente: Una verdad matemática solo puede lograrse mediante una prueba o construcción explícita. Por todo esto, es a Brouwer junto con L. Kronecker a los que se les considera los padres fundadores de las matemáticas constructivistas.

Aún así, Brouwer no pretendía en ningún momento que la lógica intuicionista formase parte de la lógica matemática. Brouwer no quiso formalizar las ideas que había expuesto sobre la lógica intuicionista. Fueron los estudios de Kolmogorov, Glivenko y Heyting en los años 1925-1930 los que permitieron formalizar todas las ideas filosóficas que había planteado éste sobre la lógica intuicionista y así convertirla en una nueva rama de la lógica matemática.

La aparición de esta lógica constructivista nos permite obtener construcciones que nos ofrecen una solución explícita del problema planteado. Nuestro deseo a lo largo de este trabajo es estudiar qué serie de cambios y ajustes debemos aplicar a las pruebas de lógica clásica para transformarlas en pruebas válidas en lógica constructivista.

1.2. Lenguaje de la lógica intuicionista proposicional.

El siguiente paso es encontrar un método para poder trabajar con estas lógicas de forma eficaz. Nuestro fin es obtener demostraciones, y para ello debemos trabajar con un lenguaje formal, a partir del cuál realizaremos una serie de cálculos.

El lenguaje de la lógica intuicionista proposicional es el mismo que el lenguaje de la lógica clásica proposicional, que suponemos ya conocido por el lector. Aún así, lo explicaremos brevemente, basándonos en la presentación del lenguaje de la lógica clásica presentada en [1]:

- Alfabeto proposicional: En primer lugar tendremos nuestro alfabeto proposicional, que estará formado por:
  - Variables proposicionales (VP): p_0, p_1, p_2,... . A lo largo de las demostraciones serán comúnmente nombradas como p, q y r.
  - Conectivas lógicas: Estas conectivas pueden ser de tres tipos:
    - Constantes: Se trata de la constante $\bot$ (*falsum*).
    - Binarias: Este tipo de conectiva afecta a dos elementos. Los dos elementos afectados son los que se encuentran a cada uno de los lados de la conectiva. Son las siguientes:

      $$\text{Conjunción: } \wedge \quad \text{Disyunción: } \vee \quad \text{Condicional: } \rightarrow .$$

  - Símbolos auxiliares: Que nos sirven para englobar distintas variables proposicionales e indicarnos el alcance de las conectivas lógicas. Son los paréntesis: '(' y ')'.
- Fórmulas proposicionales: Dado un conjunto infinito de variables proposicionales, definimos el conjunto de fórmulas proposicionales *Prop* como el menor conjunto de expresiones[1] Φ que verifique:
  - Cada una de las variables proposicionales y la constante $\bot$ están en Φ. (Las variables proposicionales y $\bot$ se denominan fórmulas *atómicas*).
  - Si φ y $\psi \in \Phi$, entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi) \in \Phi$.

En resumen, nuestras conectivas básicas son la implicación, la disyunción, la conjunción y la constante *falsum*. La negación ($\neg$) y la bicondicional ($\leftrightarrow$) pueden ser vistas como abreviaturas de fórmulas con las conectivas anteriores, al igual que la constante $\top$(que significa 'verdadero'). Veamos como sería la forma no abreviada:

- $\neg\varphi$ es la abreviatura de $(\varphi \rightarrow \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es la abreviatura de $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- $\top$ es la abreviatura de $(\bot \rightarrow \bot)$.

Recordemos también que una subfórmula ψ de una fórmula φ es una subexpresión de φ tal que ψ en sí misma también es fórmula.

Para trabajar con mayor facilidad con las fórmulas, vamos a establecer el siguiente convenio:

1. La implicación asocia de derecha a izquierda, es decir, se escribirá $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \vartheta$ en lugar de $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta)$.
2. La negación es la conectiva con mayor prioridad, seguido de la conjunción, la disyunción y, por último, la implicación. Por tanto, si escribimos $p \vee q \rightarrow \neg r \wedge t \rightarrow s$ nos referimos a $(p \vee q) \rightarrow ((\neg r \wedge t) \rightarrow s)$.
3. Los paréntesis exteriores nunca los escribiremos.

[1] Se considera una expresión a una sucesión de símbolos del alfabeto proposicional.

Se presenta ahora una interpretación conocida como interpretación BHK, cuyo nombre proviene de las iniciales de los tres matemáticos que la introdujeron: Brouwer, Heyting y Kolmogorov. Es una interpretación con una semántica *semiinformal*. El punto de partida es saber que una afirmación φ se considera verdadera sólo si poseemos una prueba que la ratifique, es decir, sólo consideraremos φ verdadera cuando exista una construcción o prueba matemática a que dé como resultado nuestra afirmación φ. Diremos entonces que *a prueba φ*. Esta idea puede ser contrastada con la de la lógica clásica, cuyo punto de partida es que toda afirmación φ debe ser verdadera o falsa.

A partir de este primer punto, vamos a estudiar las siguientes expresiones para ver cómo sería su correcta interpretación.

($\rightarrow$) Si existe una construcción a tal que cualquier prueba p de φ proporciona una prueba $a(p)$ de ψ, se verifica $\varphi \rightarrow \psi$.

($\wedge$) Si existe un par de construcciones $a = \langle b, c\rangle$ tales que b prueba φ y c prueba ψ, entonces se verifica $\varphi \wedge \psi$.

($\vee$) Si existe un par de construcciones $a = \langle b, c\rangle$ de modo que b es un número natural y tal que si $b = 0$, entonces c prueba φ mientras que si $b \neq 0$, entonces c prueba ψ, se verfica $\varphi \vee \psi$.

($\perp$) No existe ninguna construcción a de $\perp$.

Se observa que en ninguno de los casos se especifica cuál es la construcción exacta. Esto se debe a que para conocer la construcción exacta debemos conocer cuál es la afirmación que se está dando en cada caso. Por tanto, la construcción dependerá de la afirmación dada. Por el contrario, sí que sabemos que la constante $\perp$ representa una afirmación que no posee ninguna construcción posible.

Sabemos también que $\neg\varphi$ es una abreviatura de $\varphi \rightarrow \perp$. Por tanto, una construcción de $\neg\varphi$ debe ser un método que convierta cualquier construcción a de φ en un objeto inexistente.

A partir de estas construcciones básicas podemos ver algunos ejemplos que muestran de un modo informal cómo trabajaríamos en lógica intuicionista:

Ejemplo 1.1

1. Veamos que $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ es cierto. Sea el par $\langle a, b\rangle$ tal que $\langle a, b\rangle$ prueba $\varphi \wedge \psi$. Entonces la construcción c tal que $c(a, b) = a$ convierte una prueba de $\varphi \wedge \psi$ en una prueba de φ. Por tanto, c prueba $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$.

2. Veamos que $(\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma))$ es cierto. Sea a tal que a prueba $\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma$. Es decir, a convierte cada prueba $\langle b, c\rangle$ de $\varphi \wedge \psi$ en una prueba $a(b, c)$ de σ. La prueba p que buscamos de $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$ es una construcción que convierta cada prueba b de φ en una prueba $p(b)$ de $\psi \rightarrow \sigma$. Por tanto, $p(b)$ es una construcción que convierte cualquier prueba c de ψ en una prueba $(p(b))(c)$ de σ. Pero nosotros ya tenemos una prueba de σ, $a(b, c)$, por lo tanto $(p(b))(c) = a(b, c)$. Consideremos q tal que $q(c) = a(b, c)$. Entonces, p está definida como $p(b) = q$. La construcción anterior es una descripción de cómo obtener una construcción que convierta a en una prueba p de $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$.

1.3. Cálculos en la lógica intuicionista proposicional.

Todo lo que hemos visto en el ejemplo 1.1 es algo puramente informal, pero tal y como se explicó al comienzo del capítulo, nuestro deseo es realizar una presentación más completa. Para poder formalizar completamente la lógica intuicionista proposicional y proceder a trabajar de manera explícita con ella vamos a fijar un cálculo. El cálculo fijado será la deducción natural. Existen también otros cálculos, como es el caso de los sistemas de Hilbert, del que daremos una breve descripción.

Deducción Natural.

Las reglas de la deducción natural expresan de un modo muy preciso las ideas que hemos expresado en el apartado 1.2 de un modo más informal.

Definición 1.2 En deducción natural se denomina *argumento* a un par $\Gamma \vdash \varphi$, que se lee como Γ *prueba* φ, constituido por un conjunto finito de fórmulas (denotadas por Γ) y una única fórmula (denotada por φ).

Nota 1.3 Cuando trabajemos con varios argumentos, se realizarán algunas simplificaciones en la notación. Por ejemplo, escribiremos $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ en lugar de $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$. Del mismo modo, se escribirá Γ, Δ en lugar de $\Gamma \cup \Delta$, o Γ, φ en lugar de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. En particular, cuando escribimos $\vdash \varphi$ estaremos refiriéndonos a $\emptyset \vdash \varphi$.

Para construir las pruebas utilizaremos una serie de axiomas y reglas. Para cada conectiva lógica (a excepción de la constante $\bot$) se tendrán una o dos reglas de introducción y una o dos reglas de eliminación. Las reglas de introducción para una conectiva binaria $\circ$ nos indica cómo podemos llegar a una conclusión de la forma $\varphi \circ \psi$. Las reglas de eliminación describen cómo podemos obtener otras fórmulas derivadas de la expresión $\varphi \circ \psi$.

A continuación vamos a ver cómo funcionan las reglas de introducción y eliminación con las distintas conectivas lógicas, así como su representación[2]:

Llamaremos axioma a cualquier argumento de la forma: $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.

Regla de introducción de la implicación:

$$(\to \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Regla de eliminación de la implicación:

$$(\to \mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Regla de introducción de la conjunción:

$$(\wedge \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$$

[2]Este cálculo ha sido extraído de [6].

Reglas de eliminación de la conjunción:

$$(\wedge \text{ E}_1) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\wedge \text{ E}_2) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Reglas de introducción de la disyunción:

$$(\vee \text{ I}_1) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad (\vee \text{ I}_2) \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

Regla de eliminación de la disyunción:

$$(\vee \text{ E}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \vartheta \quad \Gamma, \psi \vdash \vartheta \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \vartheta}$$

Eliminación del *falsum* (*Ex falso quodlibet*): Se le conoce también como "principio de explosión".

$$(\bot \text{ E}) \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Nota 1.4 El cálculo de la lógica clásica, tanto en el caso proposicional como en primer orden, se obtiene añadiendo a las reglas anteriores la regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

Definición 1.5 Una prueba formal o derivación de $\Gamma \vdash \varphi$ es un árbol finito cuyos nodos están etiquetados por argumentos que cumplen las siguientes condiciones:

- La etiqueta de la raíz del árbol es $\Gamma \vdash \varphi$.
- Las hojas son *axiomas*, es decir, argumentos de la forma $\Delta, \vartheta \vdash \vartheta$ para ciertos Δ y ϑ.
- La etiqueta de cada uno de los nodos *padre* se obtiene a partir de las etiquetas de sus nodos *hijos*, usando alguna de las reglas presentadas.

Si tenemos $\vdash \varphi$, entonces decimos que φ es un *teorema* de la lógica intuicionista.

Nota 1.6 Si la prueba de la que hablamos existe, entonces decimos que el argumento $\Gamma \vdash \varphi$ es demostrable o derivable, y escribimos $\Gamma \vdash_N \varphi$. Cuando Γ es infinito, escribimos $\Gamma \vdash_N \varphi$ para referirnos a que existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ, tal que $\Gamma_0 \vdash_N \varphi$.

Nota 1.7 A partir de este momento, se omitirá en muchas ocasiones el subíndice N en la expresión $\vdash_N$. A pesar de que la expresión $\Gamma \vdash \varphi$ tendría dos posibles signficados, el significado adecuado quedará claro por el contexto en el que lo estemos usando.

A continuación ilustraremos el uso de estas reglas con algunos ejemplos:

Lema 1.8 Las siguientes fórmulas son teoremas de la lógica intuicionista.

(1) $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$.

(2) $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$.

(3) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$.

(4) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$.

(5) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

(6) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma)$.

(7) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(8) $\neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

(9) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Demostración:
Vamos a probar los apartados (1), (2), (5), (6) y (9):

(1) Veremos únicamente la implicación hacia la derecha (la otra es análoga). Por tanto, debemos probar $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$. Sea $\Gamma = \{\varphi \wedge \psi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge \mathrm{E}_2) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\wedge \mathrm{E}_1)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\,(\wedge \mathrm{I})}{\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

(2) Veremos únicamente la implicación hacia la derecha (la otra es análoga). Debemos probar $\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$. Sea $\Gamma = \{\varphi \vee \psi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee \mathrm{I}_2) \quad \dfrac{\Gamma, \psi \vdash \psi}{\Gamma, \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee \mathrm{I}_1) \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee \mathrm{E})}{\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

(5) Debemos probar $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$. Esto es equivalente a decir $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$. Sea $\Gamma = \{\varphi, \varphi \rightarrow \bot\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \bot}{\varphi, \varphi \rightarrow \bot \vdash \bot}\,(\rightarrow \mathrm{I})}{\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot}\,(\rightarrow \mathrm{I})}{\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

(6) Debemos probar que $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma)$.

En primer lugar veremos la implicación hacia la derecha. Por tanto, debemos probar que $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma)$. Sea $\Gamma = \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \varphi \wedge \psi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\wedge \mathrm{E}_1)}{\Gamma \vdash \psi \rightarrow \sigma}\,(\rightarrow \mathrm{E}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge \mathrm{E}_2)}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \varphi \wedge \psi \vdash \sigma}\,(\rightarrow \mathrm{E})}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma}\,(\rightarrow \mathrm{I})}{\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma)}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

Vamos a ver la otra implicación.

$\vdash (\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$. Sea $\Gamma = \{\varphi \wedge \psi \to \sigma, \varphi, \psi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\,(\wedge \mathrm{I}) \quad \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \to \sigma}{\varphi \wedge \psi \to \sigma, \varphi, \psi \vdash \sigma}\,(\to \mathrm{E})}{\varphi \wedge \psi \to \sigma, \varphi \vdash \psi \to \sigma}\,(\to \mathrm{I})}{\varphi \wedge \psi \to \sigma \vdash \varphi \to (\psi \to \sigma)}\,(\to \mathrm{I})}{\vdash (\varphi \wedge \psi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))}\,(\to \mathrm{I})$$

(9) Queremos probar que $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$. Sabemos que esto es equivalente a probar $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \bot) \to (\varphi \to \bot))$. Sea $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \bot, \varphi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to \mathrm{E}) \quad \Gamma \vdash \psi \to \bot}{\Gamma \vdash \bot}\,(\to \mathrm{E})}{\varphi \to \psi, \psi \to \bot, \varphi \vdash \bot}\,(\to \mathrm{I})}{\varphi \to \psi, \psi \to \bot \vdash \varphi \to \bot}\,(\to \mathrm{I})}{\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \bot) \to (\varphi \to \bot)}\,(\to \mathrm{I})}{\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \bot) \to (\varphi \to \bot))}\,(\to \mathrm{I})$$

□

Lema 1.9 La lógica intuicionista proposicional es cerrada bajo debilitamiento y sustitutición, es decir,

Debilitamiento: Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma, \psi \vdash \varphi$.

Sustitución: $\Gamma[p := \psi] \vdash \varphi[p := \psi]$, donde la expresión $[p := \psi]$ denota la sustitución en cada una de las ocurrencias de la variable proposicional p por la fórmula ψ.

Estas dos reglas son conocidas como reglas derivadas o admisibles, pues podrían añadirse a las reglas presentadas anteriormente sin añadir nuevos teoremas.

Demostración:

Vamos a centrarnos en demostrar la regla de debilitamiento, aunque el método que se emplea para probar sustitución será el mismo. Dicho método consiste en una prueba por inducción sobre la altura de la demostración. Para ello, supongamos que tenemos una prueba de altura $m + 1$. Supondremos que el resultado que queremos probar se verifica para todos los argumentos con demostración de altura $\leq m$. Por tanto, queremos probar que a altura $m+1$ también se verifica, teniendo en cuenta la regla utilizada a dicha altura.

Vamos a probar por tanto que dado $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ siguiendo este método.

($\Gamma, \varphi \vdash \varphi$) El caso base es el caso en el que tenemos un axioma. Por tanto, $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. Es inmediato entonces que $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \varphi$.

($\to$ I) Tenemos entonces lo siguiente:

$$\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2}$$

Queremos ver que se verifica que $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$. Hemos obtenido $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2$ a altura $\leq m$, luego por hipótesis de inducción $\Gamma, \psi, \varphi_1 \vdash \varphi_2$. Basta aplicar entonces la regla de introducción de la implicación ($\to$ I) a lo anterior para obtener $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ como deseábamos.

($\to$ E) Cuando a altura $m+1$ aplicamos esta regla tenemos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2}$$

Queremos ver entonces $\Gamma, \psi \vdash \varphi_2$. A altura $\leq m$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ y $\Gamma \vdash \varphi_1$, luego por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ y $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1$. Aplicándole a esto la regla de eliminación de la implicación ($\to$ E) tenemos el resultado deseado.

($\wedge$ I) Cuando la última regla utilizada es ésta, tenemos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}$$

Queremos ver entonces que si $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Por hipótesis de inducción, como a altura $\leq m$ hemos obtenido $\Gamma \vdash \varphi_1$ y $\Gamma \vdash \varphi_2$, la regla de debilitamiento se verifica, luego tendríamos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1$ y $\Gamma, \psi \vdash \varphi_2$. Si aplicamos a esto último la regla de introducción de la conjunción tendríamos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

($\wedge$ E) Si la regla utilizada a altura $m+1$ es la siguiente tenemos:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1}$$

Vamos a verlo para $\Gamma \vdash \varphi_1$, siendo análogo para el caso $\Gamma \vdash \varphi_2$. Queremos ver entonces que se verifica $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1$. Como a altura $\leq m$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, y aplicando la regla de eliminación de la conjunción llegamos a $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1$.

($\vee$ I) A altura $m+1$ nos encontraríamos entonces lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}$$

Lo vemos para el caso ($\vee \mathrm{I}_1$), siendo análogo para el caso ($\vee \mathrm{I}_2$). Queremos ver entonces que se verifica $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Como a altura $\leq m$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1$, por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1$, luego si le aplicamos la regla ($\vee \mathrm{I}_1$) tenemos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.

($\vee$ E) Tendríamos en el último paso de nuestra demostración lo siguiente:

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_3}$$

Queremos ver entonces que si $\Gamma \vdash \varphi_3$, se cumple $\Gamma, \psi \vdash \varphi_3$. A altura $\leq m$ tenemos $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_3$, $\Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi_3$ y $\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, luego por hipótesis de inducción tenemos $\Gamma, \psi, \varphi_1 \vdash \varphi_3$, $\Gamma, \psi, \varphi_2 \vdash \varphi_3$ y $\Gamma, \psi \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Por tanto, si a esto le aplicamos la regla de eliminación de la disyunción tenemos $\Gamma, \psi \vdash \varphi_3$.

($\bot$ E) Si a altura $m+1$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Queremos ver que se verifica $\Gamma, \psi \vdash \varphi$. Por hipótesis de inducción, como a altura $\leq m$ tenemos $\Gamma \vdash \bot$, entonces se verifica $\Gamma, \psi \vdash \bot$, y aplicando la regla de eliminación del *falsum* ($\bot$ E) tendríamos $\Gamma, \psi \vdash \varphi$.

Habríamos realizado entonces una prueba mediante inducción sobre la altura de la demostración. Este tipo de prueba será muy utilizada a lo largo del trabajo.

□

El resultado anterior también puede ser expresado del siguiente modo:

$$\text{Las reglas} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \text{ y } \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma[p := \psi] \vdash \varphi[p := \psi]} \quad \text{son admisibles.}$$

Lema 1.10 A partir de los resultados del Lema 1.8 obtenemos que las siguientes fórmulas son teoremas:

(1) $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$.

(2) $(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

(3) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$.

(4) $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$.

(5) $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$.

Demostración:
Vamos a probar los apartados (1), (2) y (3):

(1) Queremos probar $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$.

En primer lugar veremos la implicación hacia la derecha, es decir, queremos probar que $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$.

Este resultado es inmediato aplicando la regla de sustitución al apartado (5) del lema 1.8.

Veamos entonces la implicación hacia la izquierda. Queremos probar $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$. Esto es equivalente a $\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow\bot) \rightarrow (\varphi \rightarrow\bot)$. Sea $\Gamma = \{\neg\neg\varphi \rightarrow\bot, \varphi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi}\,(\text{Debilitamiento}) \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\,(\rightarrow \text{E}) \quad \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow\bot}{\Gamma \vdash\bot}\,(\rightarrow \text{E})}{\neg\neg\varphi \rightarrow\bot, \varphi \vdash\bot}\,(\rightarrow \text{I})}{\neg\neg\varphi \rightarrow\bot \vdash \varphi \rightarrow\bot}\,(\rightarrow \text{I})}{\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow\bot) \rightarrow (\varphi \rightarrow\bot)}\,(\rightarrow \text{I})$$

(2) Queremos probar $\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Tenemos que esto es equivalente a probar que $\vdash (\varphi \wedge (\psi \rightarrow\bot)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow\bot)$. Sea $\Gamma = \{\varphi \wedge (\psi \rightarrow\bot), \varphi \rightarrow \psi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge (\psi \to \bot)}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\wedge \mathrm{E}_1) \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to \mathrm{E}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi \wedge (\psi \to \bot)}{\Gamma \vdash \psi \to \bot}\,(\wedge \mathrm{E}_2)}{\varphi \wedge (\psi \to \bot), \varphi \to \psi \vdash \bot}\,(\to \mathrm{E})}{\varphi \wedge (\psi \to \bot) \vdash (\varphi \to \psi) \to \bot}\,(\to \mathrm{I})}{\vdash (\varphi \wedge (\psi \to \bot)) \to ((\varphi \to \psi) \to \bot)}\,(\to \mathrm{I})$$

(3) Queremos probar $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$. Se observa que esto es equivalente a probar que $\vdash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \bot) \to \bot) \to ((\psi \to \bot) \to \bot))$. Consideramos el conjunto $\Gamma = \{\varphi \to \psi, (\varphi \to \bot) \to \bot, \psi \to \bot\}$:

Vamos a ver la prueba en dos partes debido a la gran extensión que tiene. En primer lugar vamos a probar lo deseado partiendo de que $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$ y $\Gamma \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot$, y luego veremos cómo hemos llegado a $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \bot \quad \Gamma \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot}{\varphi \to \psi, (\varphi \to \bot) \to \bot, \psi \to \bot \vdash \bot}\,(\to \mathrm{E})}{\varphi \to \psi, (\varphi \to \bot) \to \bot \vdash (\psi \to \bot) \to \bot}\,(\to \mathrm{I})}{\varphi \to \psi \vdash ((\varphi \to \bot) \to \bot) \to ((\psi \to \bot) \to \bot)}\,(\to \mathrm{I})}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \bot) \to \bot) \to ((\psi \to \bot) \to \bot))}\,(\to \mathrm{I})$$

Veamos ahora cómo hemos llegado a $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi}\,(\text{Debilitamiento}) \quad \Gamma, \varphi \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\,(\to \mathrm{E}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi \to \bot}{\Gamma, \varphi \vdash \psi \to \bot}\,(\text{Debilitamiento})}{\Gamma, \varphi \vdash \bot}\,(\to \mathrm{E})}{\Gamma \vdash \varphi \to \bot}\,(\to \mathrm{I})$$

□

Sistemas de Hilbert.

Vamos a presentar brevemente los sistemas de tipo Hilbert, aunque no será el cálculo que luego utilizaremos. La gran diferencia entre sistemas de Hilbert y deducción natural es que en deducción natural partimos de pocos axiomas, y aplicamos las reglas anteriormente presentadas haciendo explícitos una serie de supuestos que debemos descargar a medida que vamos realizando nuestra prueba, mientras que en sistemas de Hilbert partimos de una gran cantidad de axiomas, y sólo con la necesidad de añadir una regla seremos capaces de desarrollar nuestras pruebas.

Los axiomas de nuestro sistema de Hilbert vienen dados por los siguientes esquemas:

$$\to - \text{ Ax} : \begin{cases} \varphi \to (\psi \to \varphi), \\ (\varphi \to (\psi \to \vartheta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta)); \end{cases}$$

$$\wedge - \text{ Ax} : \begin{cases} \varphi \wedge \psi \to \varphi, \\ \varphi \wedge \psi \to \psi, \\ \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)); \end{cases}$$

$$\vee - \text{ Ax} : \begin{cases} \varphi \to \varphi \vee \psi, \\ \psi \to \varphi \vee \psi, \\ (\varphi \to \vartheta) \to ((\psi \to \vartheta) \to (\varphi \vee \psi \to \vartheta)); \end{cases}$$

$\perp -$ Ax : $\perp \to \varphi$.

Siendo φ, ψ y ϑ fórmulas proposicionales cualesquiera.

Una vez presentados estos axiomas, la única regla necesaria sería la de *modus ponens*, que funciona del siguiente modo para cualesquiera fórmulas φ, ψ.

$$\frac{\varphi\,,\, \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Definición 1.11 Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ a partir de Γ es una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que φ_n es φ y para cada $i \leq n$ se verifican uno de los tres casos:

- $\varphi_i \in \Gamma$, o bien
- φ_i es una instancia de un esquema de Hilbert, o bien
- Existen $j, k < i$ tales que φ_i se obtiene a partir de φ_j y φ_k usando modus ponens.

1.4. Semántica algebraica. Álgebras de Heyting.

Vamos a introducir a continuación dos semánticas distintas para la lógica intuicionista proposicional: la semántica algebraica, donde utilizaremos álgebras de Heyting, y, más tarde, la semántica de Kripke.

Tras la introducción de las distintas semánticas, estudiaremos dos de los resultados más interesantes de esta lógica en cada una de dichas semánticas. Estos resultados son los conocidos como Teorema de Correción y Teorema de Completitud.

Vamos a desarrollar la semántica algebraica para la lógica intuicionista proposicional. Para ello, vamos a analizar las propiedades algebraicas que tienen las fórmulas que empleamos con respecto a su demostrabilidad.

En primer lugar, se observa que una implicación que es demostrable se comporta de un modo parecido a una relación de orden entre las fórmulas, es decir, es reflexiva y transitiva. En concreto, se tiene que para cada Γ se verifica:

- $\Gamma \vdash_N \varphi \to \varphi$. (Propiedad reflexiva)
- Si $\Gamma \vdash_N \varphi \to \psi$ y $\Gamma \vdash_N \psi \to \vartheta$, entonces $\Gamma \vdash_N \varphi \to \theta$. (Propiedad transitiva)

Esta relación no es antisimétrica, pero podemos convertirla en un orden parcial si identificamos fórmulas equivalentes. Para precisar estas ideas vamos a introducir la siguiente definición:

Definición 1.12 Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales (este conjunto puede ser el conjunto vacío). Se define la relación $\sim_\Gamma$ entre fórmulas proposicionales como:

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \Gamma \vdash_N \varphi \to \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash_N \psi \to \varphi.$$

Nota 1.13 A partir de ahora, omitiremos el subíndice Γ de la expresión $\sim_\Gamma$.

Se observa que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de fórmulas *Prop*. Dado φ, se denota por $[\varphi]_\sim$ a la clase de equivalencia bajo esta relación. Se observa entonces:

$$[\bot]_\sim = \{\varphi \mid \Gamma \vdash_N \neg\varphi\} \quad \text{y} \quad [\top]_\sim = \{\varphi \mid \Gamma \vdash_N \varphi\}.$$

Definición 1.14 Sea $\mathcal{L}_\Gamma$ el conjunto cociente $Prop/\sim = \{[\varphi]_\sim \mid \varphi \in Prop\}$. Se define la relación $\leq_\Gamma$ como:

$$[\varphi]_\sim \leq_\Gamma [\psi]_\sim \quad \text{si y sólo si} \quad \Gamma \vdash_N \varphi \to \psi.$$

La construcción $\mathcal{L}_\Gamma$ es conocida como álgebra de Lindenbaum.

$\leq_\Gamma$ está bien definido pues no depende del representante y es un orden parcial sobre $\mathcal{L}_\Gamma$. Además, tenemos la siguiente equivalencia trivial:

$$[\varphi]_\sim = [\psi]_\sim \quad \text{si y sólo si} \quad [\varphi]_\sim \leq_\Gamma [\psi]_\sim \quad \text{y} \quad [\psi]_\sim \leq_\Gamma [\varphi]_\sim.$$

El siguiente paso es comprobar que el orden parcial $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq \rangle$ es un retículo. Para ello, veamos en primer lugar la definición de retículo.

Definición 1.15 Un retículo es un orden parcial $\langle A, \leq \rangle$ tal que cada subconjunto de dos elementos $\{a, b\}$ de A poseen un supremo y un ínfimo en A. Se usa la expresión $a \sqcap b$ para hablar del supremo de $\{a, b\}$ en A (también denotado $sup_A\{a, b\}$) y $a \sqcup b$ para hablar del ínfimo de $\{a, b\}$ en A (que denotamos $inf_A\{a, b\}$). Si existe el supremo del retículo, éste será denotado con un 1. Del mismo modo, si existe el ínfimo del retículo, éste será denotado con un 0.

Por lo tanto, conociendo la definición de retículo, nos queda ver que efectivamente el orden parcial $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq \rangle$ verifica las condiciones para serlo.

Definición 1.16 Se definen las siguientes operaciones:

$$[\varphi]_\sim \sqcup [\psi]_\sim = [\varphi \vee \psi]_\sim$$
$$[\varphi]_\sim \sqcap [\psi]_\sim = [\varphi \wedge \psi]_\sim$$

Estas operaciones están bien definidas, pues son demostrables:

$$\vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \to ((\psi \leftrightarrow \psi') \to ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi')))$$
$$\vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi') \to ((\psi \leftrightarrow \psi') \to ((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi' \wedge \psi')))$$

Se comprueba fácilmente que $[\varphi]_\sim \sqcup [\psi]_\sim$ es el supremo del conjunto $\{[\varphi]_\sim, [\psi]_\sim\}$ y del mismo modo $[\varphi]_\sim \sqcap [\psi]_\sim$ es el ínfimo de dicho conjunto. Análogamente, podemos comprobar que no sólo $\langle \mathcal{L}_\Gamma, \leq \rangle$ es un retículo, sino que $[\top]_\sim$ es el supremo y $[\bot]_\sim$ es el ínfimo.

Además, $\mathcal{L}_\Gamma$ es un retículo *distributivo*, es decir, satisface que para todo $a, b, c \in \mathcal{L}_\Gamma$:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \quad \text{y} \quad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c).$$

Nos acercamos al concepto que queremos definir, que es el concepto de Álgebra de Heyting. Para ello, vamos a introducir un concepto previo que nos será necesario:

Definición 1.17 Dado un elemento c de un retículo, se dice que c es un *pseudo-complemento relativo de a con respecto a b* si y sólo si c es el mayor elemento tal que $a \sqcap c \leq b$. El pseudo-complemento relativo, siempre que exista, es único y se denota como $a \Rightarrow b$. Existe un caso especial denotado como $-a$ que es el caso $-a = a \Rightarrow 0$.

En el caso del retículo con el que estamos trabajando, es decir $\mathcal{L}_\Gamma$, siempre existe el pseudo-complemento relativo, concretamente,

$$[\varphi]_\sim \Rightarrow [\psi]_\sim = [\varphi \to \psi]_\sim.$$

Es este hecho el que nos define el concepto de álgebra de Heyting.

Definición 1.18 Un álgebra de Heyting es un retículo distributivo H, el cual posee supremo e ínfimo, y tal que para todo $a, b \in H$ existe el pseudo-complemento relativo $a \Rightarrow b$.

Veremos a continuación algunos resultados interesantes de las álgebras de Heyting.

Lema 1.19 Dado un álgebra de Heyting, se verifica:

(1) $a \leq b \Rightarrow c$ es equivalente a $a \sqcap b \leq c$.

(2) $a \leq b$ es equivalente a $a \Rightarrow b = 1$.

Demostración:
Veamos en primer lugar (1). Sea d el pseudo-complemento relativo de b con respecto a c, es decir, $d = b \Rightarrow c$. Por definición, d es el mayor elemento tal que $b \sqcap d \leq c$. Por tanto, si $a \leq d$, entonces $a \sqcap b \leq d \sqcap b \leq c$, tal como queríamos probar.

Para el caso (2) basta ver que si $a \leq b$, entonces todo elemento c del retículo verifica $a \sqcap c \leq b$, luego $a \Rightarrow b$ es en efecto el supremo del conjunto. □

Definición 1.20 Sea $\mathcal{H} = \langle H, \leq \rangle$ un álgebra de Heyting. Una evaluación en $\mathcal{H}$ es una función $v : VP \to H$. Dada una evaluación v en $\mathcal{H}$, se define el valor $[\![\varphi]\!]_v$ de una fórmula φ con respecto a v del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
[\![p]\!]_v &= v(p) \quad \text{para } p \in VP\,; \\
[\![\bot]\!]_v &= 0\,; \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_v &= [\![\varphi]\!]_v \sqcup [\![\psi]\!]_v\,; \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v &= [\![\varphi]\!]_v \sqcap [\![\psi]\!]_v\,; \\
[\![\varphi \to \psi]\!]_v &= [\![\varphi]\!]_v \Rightarrow [\![\psi]\!]_v\,.
\end{aligned}$$

Nota 1.21 Sea $\mathcal{H}$ un álgebra de Heyting. Utilizaremos la siguiente notación:

- Si v es una evaluación en $\mathcal{H}$ y $[\![\varphi]\!]_v = 1$ se escribirá $\mathcal{H}, v \models \varphi$.
- Cuando $\mathcal{H}, v \models \varphi$ para todo evaluación v en $\mathcal{H}$, se escribirá $\mathcal{H} \models \varphi$.
- Cuando $\mathcal{H}, v \models \varphi$ para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$, se escribirá $\mathcal{H}, v \models \Gamma$.
- Cuando $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ para toda evaluación v en $\mathcal{H}$, se escribirá $\mathcal{H} \models \Gamma$.

- Cuando $\mathcal{H}, v \models \varphi$ para toda álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ y toda evaluación v en $\mathcal{H}$, se escribirá $\models \varphi$.
- Cuando $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ implique $\mathcal{H}, v \models \varphi$ para toda álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ y toda evaluación v en $\mathcal{H}$, se escribirá $\Gamma \models \varphi$.

Si se verifica $\models \varphi$, se dice que φ es una *tautología intuicionista.*

Tras esta presentación de las álgebras de Heyting y de la semántica algebraica, estamos preparados para probar los siguientes resultados:

Teorema 1.22 (Teorema de Corrección) Sean $\Gamma \subset Prop$ finito y $\varphi \in Prop$. Si $\Gamma \vdash_N \varphi$, entonces se verifica que $\Gamma \models \varphi$.

Demostración:

Fijemos un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$, y sea v una evaluación en $\mathcal{H}$. Tomemos $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$. Sea $[\![\Gamma]\!]_v = [\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. Bastaría probar que para todo v evaluación en $\mathcal{H}$, se verifica:

$$\text{Si } \Gamma \vdash \varphi, \text{ entonces } [\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v.$$

En particular, el caso que nos interesa es el caso $[\![\Gamma]\!]_v = 1$, pues en tal caso $[\![\Gamma]\!]_v = 1$ nos dará $[\![\varphi]\!]_v = 1$. Vamos a realizar una prueba por inducción sobre la altura de la demostración.

$(\Gamma, \varphi \vdash \varphi)$ Se considera el caso base, en el cual tenemos un axioma de la forma $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. Consideremos el conjunto $\Gamma' = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \varphi\}$. Queremos probar que entonces se verifica $[\![\Gamma']\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, pero $[\![\Gamma']\!]_v = [\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v \sqcap [\![\varphi]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, probando así lo que deseábamos.

$(\to \text{I})$ Por definición, se verifica $[\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v$. Recordemos que $[\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v$ es el pseudo-complemento relativo, por lo tanto es el mayor elemento del retículo tal que $[\![\varphi_1]\!]_v \sqcap ([\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v) \leq [\![\varphi_2]\!]_v$. Por hipótesis de inducción, si tenemos $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2$ entonces $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$. Por ser $[\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v$ el pseudo-complemento relativo, se verifica entonces que $[\![\Gamma]\!]_v \leq ([\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v) = [\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]_v$.

$(\to \text{E})$ Si la regla utilizada a altura $m+1$ es la regla de eliminación de la implicación tenemos:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2}$$

Se observa que para aplicar la regla de eliminación de la implicación hemos demostrado a lo largo de la prueba $\Gamma \vdash (\varphi_1 \to \varphi_2)$ y $\Gamma \vdash \varphi_1$, para llegar como resultado a $\Gamma \vdash \varphi_2$. Por hipótesis de inducción, si tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ entonces se verifica $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]_v$. Del mismo modo, cuando tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1$ se verifica $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$. Lo que deseamos probar es $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$. Puesto que $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\varphi_2]\!]_v$, se tiene entonces $[\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$. Además, tenemos $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$. Por tanto, se verifica $[\![\Gamma]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$.

$(\wedge \text{I})$ Queremos probar $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_v$.

Por definición, sabemos que se verifica $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v$, luego lo que queremos probar es $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v$.

Recordemos el funcionamiento de la regla de introducción de la conjunción:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}$$

Por tanto, por hipótesis de inducción se verifica $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$ y $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$.

Tendríamos entonces $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v$ y $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v$, luego $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \sqcap [\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v = [\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v$, tal como queríamos demostrar.

($\wedge$ E) Al aplicar por último la regla de eliminación de la conjunción, tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, y vamos a llegar a $\Gamma \vdash \varphi_1$ y $\Gamma \vdash \varphi_2$. Por tanto, queremos probar que se verifica $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$ y $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$.

Por hipótesis de inducción, $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v$, y $[\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$, $[\![\varphi_1]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$. Por tanto, $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$ y $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_2]\!]_v$.

($\vee$ I) Queremos probar $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]_v$. Por definición sabemos que se verifica lo siguiente: $[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v$.

Recordemos el funcionamiento de la regla de introducción de la disyunción:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}$$

Vamos a realizar la prueba suponiendo que tenemos probado $\Gamma \vdash \varphi_1$ (el caso $\Gamma \vdash \varphi_2$ es análogo). Tenemos entonces que se verifica $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v$. Es trivial ver que se verifica $[\![\varphi_1]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v$, por tanto $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v = [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]_v$.

($\vee$ E) Cuando la última regla que utilizamos es la eliminación de la disyunción, llegamos a $\Gamma \vdash \varphi_3$ a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_3}$$

Queremos probar por tanto que $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_3]\!]_v$.

Tenemos $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_3$, luego $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v \leq [\![\varphi_3]\!]_v$.

Del mismo modo, tenemos $\Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi_3$, luego $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v \leq [\![\varphi_3]\!]_v$.

Por último, tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, luego $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]_v \leq [\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v$.

De esto último obtendríamos $[\![\Gamma]\!]_v \sqcap ([\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v) = [\![\Gamma]\!]_v$, luego finalmente tendríamos $[\![\Gamma]\!]_v = [\![\Gamma]\!]_v \sqcap ([\![\varphi_1]\!]_v \sqcup [\![\varphi_2]\!]_v) = ([\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_1]\!]_v) \sqcup ([\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![\varphi_2]\!]_v) \leq [\![\varphi_3]\!]_v \sqcup [\![\varphi_3]\!]_v = [\![\varphi_3]\!]_v$.

Quedaría probado entonces $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi_3]\!]$.

($\bot$ E) Si esta es la última regla utilizada, entonces tenemos que $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\bot]\!]_v$ y queremos probar que $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$. Por definición, $[\![\bot]\!]_v = 0$, luego el resultado es inmediato.

Todos estos casos los hemos demostrado para un v arbitrario, de modo que queda probado para todo v, y por tanto si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$. □

Corolario 1.23 El resultado del teorema 1.22 se verifica en caso de Γ infinito. Basta con tomar un subconjunto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito para realizar la prueba.

Teorema 1.24 (Teorema de Completitud) Sean $\Gamma \subset Prop$ y $\varphi \in Prop$. Si $\Gamma \models \varphi$ entonces se verifica $\Gamma \vdash_N \varphi$.

Demostración:
Para probar esta implicación, basta recordar la construcción que hemos hecho de nuestra álgebra de Lindenbaum y aplicar reducción al absurdo.

Supongamos que, en efecto, $\Gamma \models \varphi$ pero $\Gamma \nvdash \varphi$. Entonces, $\varphi \not\sim_\Gamma \top$, es decir, $[\varphi]_\sim \neq 1$ en $\mathcal{L}_\Gamma$. Definimos una evaluación v en $\mathcal{L}_\Gamma$ como $v(p) = [p]_\sim$. Mediante inducción sobre fórmulas, se prueba que $[\![\psi]\!]_v = [\psi]_\sim$ para todo ψ, luego para todo $\vartheta \in \Gamma$ se tiene $[\![\vartheta]\!]_v = 1$. Sin embargo, se sigue que $[\![\varphi]\!]_v = [\varphi]_\sim \neq 1$, luego $\Gamma \not\models \varphi$, llevándonos esto a contradicción. Por tanto, si $\Gamma \models \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$. □

Corolario 1.25 Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\Gamma \vdash \varphi$.

(2) $\Gamma \models \varphi$.

1.5. Semántica de Kripke.

Definición 1.26 Un modelo de Kripke es una tripleta de la forma:

$$\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle,$$

donde K es un conjunto no vacío, cuyos elementos llamaremos *estados* o *mundos posibles*, $\leq$ es un orden parcial en K y $\Vdash$ es una relación binaria entre elementos de K y variables proposicionales. La relación $\Vdash$ (que leeremos como"fuerza") debe verificar la siguiente condición de monotonía:

$$\text{Si } k \leq k' \text{ y } k \Vdash p, \text{ entonces } k' \Vdash p.$$

En esta nueva semántica partimos únicamente de las proposiciones que ya sabemos ciertas, y vamos añadiendo la información que vamos obteniendo a lo largo de la prueba como nuevas proposiciones que podrán ser utilizadas a partir de ese momento. La idea es que los elementos del modelo representan distintos estados de conocimiento. La relación $\leq$ indica cómo vamos extendiendo a distintos estados a medida que vamos ganando conocimiento, y la relación $\Vdash$ determina que variables proposicionales pueden asumirse dado un estado en concreto. Extendemos esta relación para proporcionar un significado a todas las fórmulas proposicionales del siguiente modo:

Definición 1.27 Dado un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, entonces para cada $k \in K$,

- $k \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $k \Vdash \varphi$ o $k \Vdash \psi$;
- $k \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $k \Vdash \varphi$ y $k \Vdash \psi$;
- $k \Vdash \varphi \to \psi$ si y sólo si $k' \Vdash \psi$ para todo $k' \geq k$ con $k' \Vdash \varphi$;
- $k \Vdash \bot$ no ocurre nunca.

Nota 1.28 La definición anterior implica la siguiente regla para la negación:

- $k \Vdash \neg\varphi$ si y sólo si $k' \nVdash \varphi$ para todo $k' \geq k$.

Nota 1.29 Dado un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, la notación $\Vdash$ puede ser usada de distintas maneras. Introducimos la siguiente notación:

- Escribimos $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$ para dejar claro el modelo que estamos usando.
- Escribimos $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ cuando $k \Vdash \varphi$ para todo $k \in \mathcal{M}$.
- Cuando aparece escrito $k \Vdash \Gamma$, queremos decir que $k \Vdash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.
- Cuando escribimos $\mathcal{M} \Vdash \Gamma$ queremos decir que se verifica $k \Vdash \varphi$ para todo $k \in \mathcal{M}$, $\varphi \in \Gamma$.
- La expresión $\Gamma \Vdash \varphi$ quiere decir que para todo modelo de Kripke $\mathcal{M}$ y todo estado k de $\mathcal{M}$, la condición $\mathcal{M}, k \Vdash \Gamma$ implica $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$.

La condición de monotonía impuesta a la relación $\Vdash$ se puede generalizar del siguiente modo aplicando inducción sobre fórmulas:

Lema 1.30 Si $k \leq k'$ y $k \Vdash \varphi$, entonces $k' \Vdash \varphi$.

Demostración:
La demostración de este lema es una clara demostración mediante inducción sobre fórmulas. El caso base en este caso sería el caso en el que $k \Vdash p$, siendo p una variable proposicional. En este caso, por definición ya tendríamos $k' \Vdash p$ para todo $k' \geq k$.

Vamos a ver cómo se iría realizando la demostración mediante inducción sobre fórmulas. Veremos algunos casos, dejando el resto al lector.

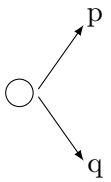
($\vee$) Si φ es $\varphi_1 \vee \varphi_2$. Entonces $k \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Por definición, entonces $k \Vdash \varphi_1$ o $k \Vdash \varphi_2$. Si $k \Vdash \varphi_1$, entonces por hipótesis de inducción para todo $k' \geq k$, $k' \Vdash \varphi_1$, luego $k' \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Análogamente ocurriría para φ_2.

($\wedge$) Si φ es $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, y $k \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, por definición $k \Vdash \varphi_1$ y $k \Vdash \varphi_2$. Por tanto, como $k \Vdash \varphi_1$, entonces por hipótesis de inducción para $k' \geq k$ se verifica $k' \Vdash \varphi_1$, y del mismo modo como $k \Vdash \varphi_2$, entonces por hipótesis de inducción $k' \Vdash \varphi_2$ para $k' \geq k$. Por tanto, $k' \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Los casos restantes se dejan al lector. □

Vamos a ver a continuación un ejemplo de un modelo de Kripke.

Ejemplo 1.31 Sea $K = \{k, k', k''\}$, tal que $k \leq k', k''$ pero k', k'' no pueden ser comparados. Tomemos ahora el modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, de modo que $k' \Vdash p$, $k'' \Vdash q$ y $k \nVdash p, q$. Este modelo puede representarse del siguiente modo:



Se observa que, por ejemplo, tenemos $k \Vdash \neg\neg(p \vee q)$ y $k \Vdash (p \to q) \to q$, pero $k \nVdash p \vee \neg p$.

Teorema 1.32 (Teorema de Corrección) Sean $\Gamma \subset Prop$ finito y $\varphi \in Prop$. Si $\Gamma \vdash_N \varphi$, entonces se verifica que $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración:

Vamos a probarlo por inducción sobre la altura de la demostración, viendo cuál ha sido la última regla utilizada.

($\Gamma, \varphi \vdash \varphi$) Es el caso base. Queremos ver que dado $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$, entonces se verifica $\Gamma, \varphi \Vdash \varphi$. Por tanto, quiero ver que dado $k \Vdash \Gamma, \varphi$, entonces $k \Vdash \varphi$, pero esto se tiene directamente por definición.

($\to$ I) En este caso, querríamos probar que $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ implica $\Gamma \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$. Por tanto, quiero ver que dado $k \Vdash \Gamma$, entonces $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$.

Supongamos que hemos obtenido $\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ de la expresión $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2$. Sea $k \Vdash \Gamma$, tomo $k' \geq k$ tal que $k' \Vdash \varphi_1$. Por monotonía, tenemos que $k' \Vdash \Gamma, \varphi_1$. Por lo tanto, basta verificar que en este caso $k' \Vdash \varphi_2$ para obtener el resultado deseado.

Puesto que $k' \Vdash \Gamma, \varphi_1$ y $\Gamma, \varphi_1 \Vdash \varphi_2$, por hipótesis de inducción $k' \Vdash \varphi_2$ y por tanto $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$.

($\to$ E) En este caso queremos probar que $\Gamma \Vdash \varphi_2$ teniendo como último paso de nuestra prueba lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_2}$$

Tomamos $k \Vdash \Gamma$. Entonces por hipótesis de inducción tenemos que $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ y que $k \Vdash \varphi_1$. Tomamos $k' \geq k$. Por monotonía sabemos que $k' \Vdash \varphi_1$, y como $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$, obtenemos que $k' \Vdash \varphi_2$ para todo $k' \geq k$, luego $k \Vdash \varphi_2$.

($\wedge$ I) En el último paso de la prueba tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}$$

Queremos probar que $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ implica $\Gamma \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Por tanto, queremos ver que dado $k \Vdash \Gamma$, entonces $k \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Para ver que se cumple $k \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ basta ver que se cumple $k \Vdash \varphi_1$ y $k \Vdash \varphi_2$, pero tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1$ y $\Gamma \vdash \varphi_2$, luego por hipótesis de inducción para $k \Vdash \Gamma$ tenemos $k \Vdash \varphi_1$ y $k \Vdash \varphi_2$.

($\wedge$ E) Tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} \text{ y } \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2}$$

Queremos ver que en este caso $\Gamma \vdash \varphi_1$ implica $\Gamma \Vdash \varphi_1$ y $\Gamma \vdash \varphi_2$ implica $\Gamma \Vdash \varphi_2$. Basta probar entonces que dado $k \Vdash \Gamma$, se verifica $k \Vdash \varphi_1$ y $k \Vdash \varphi_2$. Por hipótesis de inducción, dado $k \Vdash \Gamma$ se verifica $k \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, y por definición tenemos $k \Vdash \varphi_1$ y $k \Vdash \varphi_2$.

($\vee$ I) En el último paso de la prueba tendríamos:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}$$

Vamos a verlo para ($\vee$ I_1), siendo análogo para ($\vee$ I_2). Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ implica $\Gamma \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, es decir, que dado $k \Vdash \Gamma$ se verifica $k \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Por hipótesis de inducción tenemos que para $k \Vdash \Gamma$ entonces $k \Vdash \varphi_1$, y por definición de $\Vdash$ tenemos $k \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.

($\vee$ E) Supongamos que nuestro último paso en la prueba es este:

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi_3 \quad \Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_3} \quad (\vee \text{ E})$$

Por tanto, habiendo obtenido $\Gamma \vdash \varphi_3$ de la expresión anterior, queremos probar que esto implica $\Gamma \Vdash \varphi_3$. Es decir, queremos probar que dado $k \Vdash \Gamma$ entonces $k \Vdash \varphi_3$.

En primer lugar tenemos que dado $k \Vdash \Gamma, \varphi_1$ entonces $k \Vdash \varphi_3$. Del mismo modo, si tenemos $k \Vdash \Gamma, \varphi_2$, entonces $k \Vdash \varphi_3$. Por tanto, basta probar que para $k \Vdash \Gamma$ también se verifica $k \Vdash \varphi_1$ o $k \Vdash \varphi_2$.

Pero por otro lado, tenemos $\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, luego dado $k \Vdash \Gamma$, o bien $k \Vdash \varphi_1$ o bien $k \Vdash \varphi_2$, llegando así a lo que necesitábamos para probar que, efectivamente, $\Gamma \Vdash \varphi_3$.

($\bot$ E) Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \Vdash \varphi$ teniendo ya probado $\Gamma \vdash \bot$. Por tanto, ya tenemos $\Gamma \Vdash \bot$, y esto sólo quiere decir que es imposible que ocurra $k \Vdash \Gamma$, luego podemos decir que $\Gamma \Vdash \varphi$ sin problema.

□

Corolario 1.33 El resultado del teorema 1.32 se verifica en caso de Γ infinito. Basta con tomar un subconjunto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito para realizar la prueba.

Una vez presentada la semántica de Kripke y el teorema de Corrección, vamos a presentar unos resultados que prueban que toda álgebra de Heyting puede ser transformada en un modelo de Kripke, y del mismo modo todo modelo de Kripke puede ser transformado en un álgebra de Heyting.

Vamos a ver en primer lugar que dado un modelo de Kripke, podemos transformarlo en un álgebra de Heyting.

Teorema 1.34 Dado un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, existe un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ y una evaluación v en $\mathcal{H}$ tal que las condiciones $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ y $\mathcal{H}, v \models \varphi$ son equivalentes para todo φ.

Demostración:
A lo largo de la demostración, utilizaremos la expresión $\leq$ para referirnos a dos relaciones de orden parcial distintas. Por tanto, la expresión $\leq_H$ se referirá al orden parcial en el conjunto H, mientras que $\leq_K$ se referirá al orden parcial del conjunto K.

Consideremos el modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq_K, \Vdash \rangle$. Queremos probar que puede ser transformado en un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$. Para ello, vamos a considerar el siguiente modelo algebraico:

$$\langle H, \leq_H, v \rangle.$$

Nuestro deseo es construir $H, \leq_H$ y v de modo que el modelo algebraico sea, en efecto, un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$.

Para ello, la función v de nuestro conjunto debe verificar:

$$v(\varphi) = [\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ si y sólo si para todo } k \in K,\ k \Vdash \varphi.$$

Además, la estructura $\langle H, \leq_H \rangle$ debe ser un retículo distributivo que posea supremo, ínfimo y con pseudo-complemento relativo para todo elemento a, b del conjunto.

El primer paso es ver cómo construir H y $\leq_H$.

Dado $K' \subset K$, se dice que K' es cerrado con respecto a $\leq_K$ para todo $k \in K'$ si dado $k' \geq_K k$ entonces $k' \in K'$. Vamos a considerar ahora el conjunto H como el conjunto de todos los K' cerrados con respecto a $\leq_K$. Del mismo modo, consideramos que el orden parcial $\leq_H$ es la inclusión.

Definimos ahora la función v como $v(\varphi) = [\![\varphi]\!]_v = \{k \in K \mid k \Vdash \varphi\}$.

En primer lugar, debemos ver que $\langle H, \leq_H \rangle$ verifica las condiciones para ser un álgebra de Heyting. Es fácil comprobar que efectivamente existen el supremo y el ínfimo, pues en este caso $\sqcup$ y $\sqcap$ se refieren a la unión y la intersección de cerrados, y como se verifica que tanto la unión como la interesección de cerrados es cerrada, nuestro supremo correspondería a la unión y nuestro ínfimo a la intersección. Del mismo modo, es muy sencillo comprobar que el menor elemento es $\emptyset \in H$.

Sí que vamos a probar que para todo elemento $a, b \in H$ existe el pseudo-complemento relativo $a \Rightarrow b$, es decir, existe $c \in H$ tal que c es el mayor elemento que verifica $a \sqcap c \leq_H b$. Para ello, consideramos el conjunto P como el mayor subconjunto de $(K \backslash a) \sqcup b$ cerrado bajo $\leq_K$. Basta ver entonces que para todo $c \in H$, se verifica:

$$c \leq_H P \text{ si y sólo si } a \sqcap c \leq_H b.$$

($\Rightarrow$) Supongamos $c \leq_H P$. En este caso, tendríamos que $\leq_H$ es en realidad $\subseteq$, $\sqcap$ es $\cap$ y $\sqcup$ es $\cup$. Por tanto $c \subseteq P$, luego $c \subseteq (K \backslash a) \sqcup b$, o lo que es lo mismo, $c \leq_H (K \backslash a) \sqcup b$. Si intersecamos ahora con a, tenemos $a \sqcap c \leq_H a \sqcap [(K \backslash a) \sqcup b]$, que por teoría de conjuntos sería igual a $a \sqcap c \leq_H a \sqcap b$. Tenemos que $a \sqcap b \leq_H b$, luego $a \sqcap c \leq_H b$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora $a \sqcap c \leq_H b$. Por teoría de conjuntos, si unimos con $(c \backslash a)$ tenemos $(a \sqcap c) \sqcup (c \backslash a) \leq_H b \sqcup (c \backslash a)$, que sería $(a \sqcup (c \backslash a)) \sqcap (c \sqcup (c \backslash a)) \leq_H b \sqcup (c \backslash a)$, o lo que es lo mismo, $c \leq_H b \sqcup (c \backslash a)$. Por tanto, $c \leq_H b \sqcup (K \backslash a)$.

Además, sabemos que $c \in H$, luego c es cerrado bajo $\leq_K$. Por tanto,

$$c \leq_H P.$$

Una vez visto que efectivamente $\langle H, \leq_H \rangle$ verifica las condiciones anteriores, nos queda ver que v verifica la condición necesaria. Para ello, basta comprobar que v verifica las siguientes condiciones:

1. $[\![\bot]\!]_v = 0$;
2. $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \sqcup [\![\psi]\!]_v$;
3. $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \sqcap [\![\psi]\!]_v$;
4. $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \Rightarrow [\![\psi]\!]_v$.

Las tres primeras condiciones son triviales, siguiendo a continuación la prueba de la cuarta condición.

Debemos probar por tanto que $[\![\varphi \to \psi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_v \Rightarrow [\![\psi]\!]_v$, es decir, que $[\![\varphi \to \psi]\!]_v$ es efectivamente el mayor $c \in H$ que verifica:

$$[\![\varphi]\!]_v \sqcap c \leq_H [\![\psi]\!]_v.$$

Veamos en primer lugar que se verifica $[\![\varphi]\!]_v \sqcap [\![\varphi \to \psi]\!]_v \leq_H [\![\psi]\!]_v$. Por la definición, esto sería equivalente a:

$$\{k \mid k \Vdash \varphi\} \cap \{k \mid k \Vdash \varphi \to \psi\} \subseteq \{k \mid k \Vdash \psi\}.$$

Y ver que se verifica es trivial, pues por definición si $k \Vdash \varphi$ y $k \Vdash \varphi \to \psi$, entonces $k \Vdash \psi$.

Lo único que queda ver es que es el mayor elemento que lo verifica. Vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que existe un elemento $d \in H$ tal que $[\![\varphi]\!]_v \sqcap d \leq_H [\![\psi]\!]_v$, de modo que $[\![\varphi \to \psi]\!]_v \leq_H d$. Debe existir entonces algún estado $k \in K$ tal que $k \in d$ pero $k \notin [\![\varphi \to \psi]\!]_v$. Esto es lo mismo que decir $k \nVdash \varphi \to \psi$. Sabemos entonces que existe $k' \geq_K k$, tal que $k' \Vdash \varphi$ y $k' \nVdash \psi$. Como d es cerrado bajo $\leq_K$, entonces $k' \in d$. Por otra parte, tenemos que $k' \in [\![\varphi]\!]_v$, luego $k' \in [\![\varphi]\!]_v \cap d$. Por tanto, tendríamos $k' \in [\![\psi]\!]_v$, luego $k' \Vdash \psi$, llegando así a contradicción.

Hemos probado entonces que v verifica todas las condiciones necesarias, luego $\langle H, \leq_H, v\rangle$ sería un álgebra de Heyting que verificaría:

$$v(\varphi) = [\![\varphi]\!]_v = 1 \text{ si y sólo si para todo } k \in K, k \Vdash \varphi,$$

probando así la equivalencia deseada. □

Nota 1.35 El álgebra de Heyting construida en el resultado anterior es el álgebra de los abiertos de un cierto espacio topológico.

De hecho, si $\langle H, \leq\rangle$ es un orden parcial entonces $\mathcal{O} = \{K \subseteq H \mid K \text{ es cerrado bajo } \leq\}$ es una topología sobre H que denominamos la topología de Alexandroff.

Teorema 1.36 Sea $T = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ una topología sobre el conjunto X. $\mathcal{H} = \langle \mathcal{O}, \subseteq\rangle$ es un álgebra de Heyting en el cual se verifica:

- Las operaciones $\sqcup, \sqcap$ son la unión y la intersección de conjuntos habituales;
- $A \Rightarrow B = Int(-A \cup B)$ siendo A, B conjuntos abiertos arbitrarios;
- $\sim A = Int(-A)$, siendo $-$ el complementario del conjunto A.

Particularmente se tiene:

Teorema 1.37 Sea $\mathcal{H}$ el álgebra de todos los subconjuntos abiertos de:

- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o
- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, o
- Cualquier producto cartesiano de los anteriores, como por ejemplo $\mathbb{R}^2$.

Entonces $\mathcal{H} \models \varphi$ si y sólo si φ es una fórmula válida.

Ahora veremos la construcción en dirección contraria, es decir, veremos cómo obtener un modelo de Kripke a partir de un álgebra de Heyting dada. Para ello, presentaremos una serie de resultados que serán necesarios. Estos resultados nos serán útiles en la prueba del teorema de Completitud.

Definición 1.38 Un *filtro* en un álgebra de Heyting $\mathcal{H} = \langle H, \leq\rangle$ es un subcojunto no vacío F de H, tal que verifica:

- $a, b \in F$ implica $a \sqcap b \in F$;
- $a \in F$ y $a \leq b$ implica $b \in F$.

Diremos que un filtro F es *propio* si y sólo si $F \neq H$. Diremos que F es *primo* si y sólo si $a \sqcup b \in F$ implica que o bien $a \in F$ o bien $b \in F$.

Lema 1.39 Se considera un subconjunto A de un álgebra de Heyting $\mathcal{H} = \langle H, \leq \rangle$ y definimos el conjunto F como $F = \{a \in H \mid \text{Existen } a_1, \ldots, a_k \in A, a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k\}$. Este conjunto es el menor filtro que contiene a A. Si además se verifica $a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k \neq 0$ para todos los conjuntos finitos $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$, el filtro F es propio.

Demostración:
Vamos a ver que el conjunto $F = \{a \in \mathcal{H} \mid a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k \text{ para algunos } a_1, \ldots, a_k \in A\}$ es un filtro. Para ello, debe cumplir las dos condiciones de la definición.

- Tomemos $a, b \in F$. Para que F sea un filtro debe verificarse que $a \sqcap b \in F$. Dado $a \in F$, entonces $a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k$ para $a_1, \ldots, a_k \in A$. Del mismo modo, dado $b \in F$, entonces $b \geq a'_1 \sqcap \cdots \sqcap a'_k$ para $a'_1, \ldots, a'_k \in A$. Si ahora calculamos $a \sqcap b$, a partir de lo anterior nos queda $a \sqcap b \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k \sqcap a'_1 \sqcap \cdots \sqcap a'_k$, luego $a \sqcap b \in F$ tal como queríamos probar.
- Queremos probar que dado $a \in F$ y tomando $b \geq a$, entonces $b \in F$. Dado $a \in F$, se verifica $a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k$ para $a_1, \ldots, a_k \in A$. Tenemos que $b \geq a$, luego $b \geq a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k$ para $a_1, \ldots, a_k \in A$, obteniéndose entonces $b \in F$.

Ver que F es en efecto el menor filtro que contiene a A es muy sencillo. Consideremos cualquier filtro F' que contenga a A. Por definición de filtro, $a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k \in F'$ para $a_1, \ldots, a_k \in A$, y del mismo modo, para todo elemento a tal que $a \geq a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_k$ con $a_1, \ldots, a_k \in A$, se verifica $a \in F'$. Por tanto, $F \subset F'$. □

Lema 1.40 Sea F un filtro propio en $\mathcal{H}$ y tomemos a tal que $a \notin F$. Entonces existe un filtro primo G tal que $F \subseteq G$ y $a \notin G$.

Demostración:
Sea $\mathcal{F} = \{E \subseteq H \mid E \text{ es filtro y } F \subseteq E, a \notin E\}$. Es fácil ver que la unión de una cadena arbitraria de $\mathcal{F}$ es en sí mismo un elemento de $\mathcal{F}$. Por tanto, cualquier cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior en $\mathcal{F}$. El lema de Kuratowski-Zorn dice que dado un conjunto parcialmente ordenado P tal que verifique que toda cadena del mismo posee una cota superior, entonces existe al menos un elemento maximal del conjunto. Aplicándolo ahora a nuestro conjunto $\mathcal{F}$, se concluye que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal con respecto a la inclusión, G. Veremos que G es, en efecto, un filtro primo.

Tomemos $y \in \mathcal{H}$, y consideremos G_y como $G_y = \{x \mid x \geq g \sqcap y, \text{ para algún } g \in G\}$. Por el lema 1.39, sabemos que cada G_y es un filtro y $G \subseteq G_y$. Además, $y \in G_y$. Lo que nosotros queremos que se verifique es que si $b \sqcup c \in G$, entonces o bien G_b o bien G_c pertenece a $\mathcal{F}$. $G \subseteq Gy \in F$ implica $G = G_y$, por tanto, o bien $b \in G$ o bien $c \in G$, ya que hemos dicho que G es maximal. Vamos a verlo por reducción al absurdo.

Supongamos que, por el contrario, ni G_b ni G_c pertenecen a $\mathcal{F}$. Nuestro a verificaría entonces que $a \in G_b \cap G_c$. Sabemos que existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 \sqcap b \leq a$ y $g_2 \sqcap c \leq a$ y como $a \sqcup c \in G$, se tiene $(g_1 \sqcap g_2) \sqcap (b \sqcup c) \in G$.

Por otro lado, se verifica $a = a \sqcup a \geq (g_1 \sqcap g_2 \sqcap b) \sqcup (g_1 \sqcap g_2 \sqcap c) = (g_1 \sqcap g_2) \sqcap (b \sqcup c)$, y $(g_1 \sqcap g_2) \sqcap (b \sqcup c) \in G$, lo que implicaría que $a \in G$, llegando así a una contradicción. □

Lema 1.41 Sea v una evaluación en un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ tal que $0 \neq 1$. Entonces existe un modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ tal que las condiciones $\mathcal{H}, v \models \varphi$ y $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ son equivalentes para todo φ.

Demostración:

Tomemos como K el conjunto de todos los filtros primos de $\mathcal{H}$. La relación $\leq$ es realmente la inclusión, y diremos $F \Vdash p$ si y sólo si $v(p) \in F$. Vamos a probar que para toda fórmula ψ se verifica:

$$F \Vdash \psi \text{ si y sólo si } [\![\psi]\!]_v \in F. \tag{1.1}$$

Lo veremos por inducción sobre ψ. El único caso no trivial es el caso en el que ψ es $\psi_1 \to \psi_2$. Los otros casos se dejan al lector, haciendo notar que el caso de la disyunción es el caso que nos exige que el filtro sea primo, pues si no lo fuese no tendría por qué verificarse.

($\Rightarrow$) Vamos a ver en primer lugar la implicación hacia la derecha. Vamos a probarla por reducción al absurdo.

Supongamos que $F \Vdash \psi_1 \to \psi_2$, pero $[\![\psi_1 \to \psi_2]\!]_v = [\![\psi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\psi_2]\!]_v \notin F$.

Tomemos el menor filtro G' que contenga $F \cup \{[\![\psi_1]\!]_v\}$. Por el lema 1.39, G' verifica que $G' = \{b \mid b \geq f \sqcap [\![\psi_1]\!]_v \text{ para algún } f \in F\}$. Además, $[\![\psi_2]\!]_v \notin G'$ ya que de otro modo tendríamos $f \in F$ tal que $[\![\psi_2]\!]_v \geq f \sqcap [\![\psi_1]\!]_v$ y por tanto $f \leq [\![\psi_1 \Rightarrow [\![\psi_2]\!]_v \in F$, lo cual es absurdo. En particular, G' es propio.

Aplicando el lema 1.40, vamos a extender nuestro filtro G' a un filtro primo G, de manera que G no contenga a $[\![\psi_2]\!]_v$. Por hipótesis de inducción, $G \Vdash \psi_1$, pues $[\![\psi_1]\!]_v \in G$, pero como $F \Vdash \psi_1 \to \psi_2$, se tendría que $G \Vdash \psi_2$, luego por hipótesis de inducción $[\![\psi_2]\!]_v \in G$, llegando así a una contradicción.

($\Leftarrow$) Vamos a ver ahora la implicación hacia la izquierda.

Vamos a asumir que $[\![\psi_1 \to \psi_2]\!]_v \in F$ y $F \subseteq G \Vdash \psi_1$. Mediante hipótesis de inducción obtenemos que $[\![\psi_1]\!]_v \in G$, y como sabemos que se verifica $F \subseteq G$, entonces tenemos $[\![\psi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\psi_2]\!]_v \in G$. Por tanto, $[\![\psi_2]\!]_v \geq [\![\psi_1]\!]_v \sqcap ([\![\psi_1]\!]_v \Rightarrow [\![\psi_2]\!]_v) \in G$, luego $[\![\psi_2]\!]_v \in G$. De nuevo por hipótesis de inducción tenemos $G \Vdash \psi_2$.

Habiendo probado (1.1), supongamos que $\mathcal{H}, v \not\models \varphi$, es decir, $[\![\varphi]\!]_v \neq 1$. Entonces el filtro $\{1\}$ puede ser extendido a un filtro primo G de modo que $[\![\varphi]\!]_v \notin G$, luego $\mathcal{M}, G \not\Vdash \varphi$. Del mismo modo, si tenemos $\mathcal{H}, v \models \varphi$, entonces $[\![\varphi]\!]_v = 1$, y 1 está en todos los filtros de $\mathcal{H}$. □

Corolario 1.42 Dada una fórmula φ, entonces φ es válida en algún modelo de Kripke si y sólo si φ es válida en algún álgebra de Heyting.

Corolario 1.43 Una fórmula φ es válida en todo modelo de Kripke si y sólo si φ es válida en todo álgebra de Heyting.

Teorema 1.44 (Teorema de Completitud) Sean $\Gamma \subset Prop$ y $\varphi \in Prop$. Si $\Gamma \Vdash \varphi$, entonces se verifica que $\Gamma \vdash_N \varphi$.

Demostración:
Queremos ver que si $\Gamma \Vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$. Hemos establecido una relación entre las álgebras de Heyting y los modelos de Kripke, de modo que una fórmula φ es válida en uno si y sólo si lo es en el otro. Es decir, $\Gamma \Vdash \varphi$ si y sólo si $\Gamma \models \varphi$.

Supongamos que $\Gamma \nvdash \varphi$. Tenemos por el teorema de Completitud 1.24 que entonces existe $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ y $\mathcal{H}, v \not\models \varphi$. Por tanto, existe un modelo de Kripke $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \Vdash \Gamma$ y $\mathcal{M} \not\Vdash \varphi$. □

Nota 1.45 El teorema de Corrección 1.32 podría haberse demostrado directamente utilizando los resultados que nos relacionan un modelo de Kripke con un álgebra de Heyting, pudiendo probarse entonces aplicando el teorema de Corrección 1.22, que ya ha sido demostrado.

Corolario 1.46 Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\Gamma \vdash \varphi$.

(2) $\Gamma \Vdash \varphi$.

Corolario 1.47 Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\Gamma \vdash \varphi$.

(2) $\Gamma \models \varphi$.

(3) $\Gamma \Vdash \varphi$.

(4) Para todo álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ de un espacio topológico y toda evaluación v en $\mathcal{H}$, si $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ entonces $\mathcal{H}, v \models \varphi$.

Demostración:
Vamos a ver (4) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que se verifica (4). Si $\Gamma \nvdash \varphi$ entonces $\Gamma \not\Vdash \varphi$. Por la prueba del teorema 1.34 existe un álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ que proviene de un espacio topológico tal que $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ pero $\mathcal{H}, v \not\models \varphi$. □

Capítulo 2

Lógica intuicionista de primer orden.

2.1. Lenguaje de la lógica intuicionista de primer orden.

En el capítulo anterior hemos trabajado con la lógica intuiconista proposicional. El siguiente paso es extender estos resultados a la lógica de primer orden. Para ello, vamos a trabajar sobre la base que hemos planteado en la lógica proposicional, introduciendo al lenguaje ya presentado nuevos símbolos lógicos conocidos como cuantificadores que nos permitirán ampliar las expresiones que podremos traducir a un lenguaje matemático y que, a su vez, harán que aparezcan nuevos resultados interesantes. Vamos a recurrir a mucho de lo ya presentado anteriormente, y simplemente iremos indicando los nuevos resultados que proporcionan estas nuevas conectivas, siendo todo lo probado en lógica proposicional cierto también en lógica de primer orden. Esto nos muesta la idea de que esta primera lógica está contenida dentro de la segunda.

Un lenguaje L de primer orden consta de los siguientes símbolos:

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$.
  - Conectivas lógicas: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$ (Trabajaremos con las mismas conectivas que en la lógica intuicionista proposicional).
  - Cuantificadores:

    Para todo: $\forall$ Existe: $\exists$.

  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$.
- Símbolos auxiliares: Al igual que en el caso de la lógica proposicional, nuestros símbolos auxiliares serán los paréntesis '(' y ')'.
- Términos:
  - Las variables.
  - Las constantes.
  - $f(t_1, \ldots, t_n)$, siendo $t_1, \ldots, t_n$ términos del lenguaje y f una función n-aria del lenguaje.

- Fórmulas atómicas:
  - Dados t_1 y t_2 términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica.
  - Si P es un símbolo de predicado n-aria, y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.
- Fórmulas: Consideramos el conjunto de fórmulas de un lenguaje $Form(L)$ como el menor conjunto de expresiones Φ que verifique:
  - Todas las fórmulas atómicas y la constante $\bot$ dadas anteriormente pertenecen a Φ.
  - Si φ y $\psi \in \Phi$, entonces $(\varphi \to \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi) \in \Phi$ (Al igual que en el caso proposicional, la expresión $\neg\varphi$ sería la abreviatura de $\varphi \to \bot$, que está en Φ).
  - Si $\varphi \in \Phi$, entonces $\forall x\, \varphi, \exists x\, \varphi \in \Phi$.

Nota 2.1 Vamos a seguir la siguiente notación:

- $L, L_1, L_2, \ldots$ representa lenguajes de primer orden.
- $Var(L)$ representa el conjunto de variables de un lenguaje L.
- $Term(L)$ representa el conjunto de términos de un lenguaje L.
- $At(L)$ representa el conjunto de fórmulas atómicas de un lenguaje L.

Además, los símbolos de predicado cuya aridad sea mayor que 1 se denominarán también relaciones.

Definición 2.2 Una aparición de la variable x en una fórmula φ se considera *ligada* si aparece en una subfórmula ψ de φ de la forma $\forall x\, \psi$ ó $\exists x\, \psi$. Es decir, una aparición de la variable x se considera ligada cuando está en una subfórmula en la que aparece cuantificada. Una aparición de la variable x se considera libre si no es ligada.

Definición 2.3 La variable x se considera libre en φ si tiene una aparición libre en φ. Del mismo modo, se considera ligada si tiene una aparición ligada. Una fórmula cerrada es una fórmula sin variables libres.

Definición 2.4 Dado un lenguaje L, sean $\varphi \in Form(L)$ y $t \in Term(L)$. Se dice que la variable x es *sustituible* por t en φ si:

(1) t es un término cerrado, es decir, t no tiene variables o

(2) t tiene variables, pero ninguna de ellas es ligada en $\varphi[x/t]$.

Nota 2.5 La expresión $\varphi[x/t]$ denota la sustitución de la variable x por el término t en cada una de sus apariciones en la fórmula φ, siendo x sustituible por t. Para simplificar notación se representará como $\varphi(t)$.

Nota 2.6 Al conjunto de fórmulas cerradas de un lenguaje dado L se le denotará como $Sent(L)$.

2.2. Cálculos en la lógica intuicionista de primer orden.

Tal y como hicimos anteriormente con la lógica intuicionista proposicional, vamos a proceder a fijar un cálculo para la lógica intuicionista de primer orden. El cálculo fijado será, al igual que en la lógica intuicionista proposicional, la deducción natural. Podemos hacernos una idea de que el modo de trabajar con este cálculo será muy similar al empleado en proposicional, como ya ocurrió con el lenguaje, y sólo presentará ciertos cambios debido a la aparición de las reglas de introducción y eliminación de los cuantificadores. También se hará una breve introducción a los sistemas de Hilbert en primer orden.

Deducción Natural.

La deducción natural en lógica intuicionista de primer orden no es más que una ampliación de aquello que ya se estudió sobre deducción natural en lógica intuicionista proposicional. Por eso mismo, las reglas de deducción natural que presentaremos a continuación serán aquellas que presenten algo nuevo con respecto a lo ya estudiado anteriormente, sabiendo que todas las presentadas anteriormente seguirán siendo válidas.

Tenemos axiomas como en el caso proposicional, es decir, $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.

Regla de introducción del cuantificador universal:

$$(\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi[x/u]}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)} \text{ tal que } u \text{ no aparece libre en } \Gamma.$$

Regla de eliminación del cuantificador universal:

$$(\forall \mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma \vdash \varphi[x/t]} \text{ para } t \in Term(L) \text{ tal que } x \text{ es sustituible por } t \text{ en } \varphi.$$

Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$(\exists \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)} \text{ para } t \in Term(L) \text{ tal que } x \text{ es sustituible por } t \text{ en } \varphi.$$

Regla de eliminación del cuantificador existencial:

$$(\exists \mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x) \quad \Gamma, \varphi[x/u] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ tal que } u \text{ no aparece libre en } \Gamma, \varphi(x) \text{ y } \psi.$$

Todos los resultados presentados anteriormente en deducción natural son igualmente válidos ahora. Lo único que vamos a hacer es añadir a los ya presentados anteriormente algunos nuevos resultados:

Lema 2.7 Podemos completar el lema 1.8 con los siguientes resultados:

(1) $\vdash \neg\exists x\, \varphi(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg\varphi(x)$.

(2) $\vdash \exists x\, \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x)$.

(3) $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\, \varphi(x) \vee \exists x\, \psi(x)$.

Demostración:

Vamos a probar el apartado (3).

Queremos probar $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)$. En primer lugar veremos la implicación hacia la derecha, es decir, $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)$.

Sea $\Gamma = \{\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)), \varphi(u) \vee \psi(u)\}$, vamos a ver la prueba en dos partes debido a su extensión. En primer lugar, veremos que si $\Gamma \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)$ entonces se prueba el resultado deseado.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)), \varphi(u) \vee \psi(u) \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}{\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

Ahora veremos cómo hemos llegado a $\Gamma \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi(u) \vee \psi(u) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi(u) \vdash \varphi(u)}{\Gamma, \varphi(u) \vdash \exists x\,\varphi(x)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\Gamma, \varphi(u) \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,(\vee\,\mathrm{I}_1) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \psi(u) \vdash \psi(u)}{\Gamma, \psi(u) \vdash \exists x\,\psi(x)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\Gamma, \psi(u) \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,(\vee\,\mathrm{I}_2)}{\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)), \varphi(u) \vee \psi(u) \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

Veamos ahora la implicación hacia la izquierda. Por tanto, lo que deseamos probar ahora es $\vdash (\exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$. Sea $\Gamma = \{\exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)\}$, en primer lugar vamos a probar que si $\Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ y $\Gamma, \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ entonces tenemos el resultado deseado.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x) \quad \Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad \Gamma, \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}{\exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\vee\,\mathrm{E})}{\vdash (\exists x\,\varphi(x) \vee \exists x\,\psi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\rightarrow \mathrm{I})$$

A continuación, vamos a ver que efectivamente se verifica $\Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$:

$$\dfrac{\Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \exists x\,\varphi(x) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi(u) \vdash \varphi(u)}{\Gamma, \varphi(u) \vdash \varphi(u) \vee \psi(u)}\,(\vee\,\mathrm{I}_1)}{\Gamma, \varphi(u) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\Gamma, \exists x\,\varphi(x), \varphi(u) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\text{Debilitamiento})}{\Gamma, \exists x\,\varphi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\exists\,\mathrm{E})$$

De forma análoga, veremos $\Gamma, \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$:

$$\dfrac{\Gamma, \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x\,\psi(x) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \psi(u) \vdash \psi(u)}{\Gamma, \psi(u) \vdash \varphi(u) \vee \psi(u)}\,(\vee\,\mathrm{I}_2)}{\Gamma, \psi(u) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\Gamma, \exists x\,\psi(x), \psi(u) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\text{Debilitamiento})}{\Gamma, \exists x\,\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))}\,(\exists\,\mathrm{E})$$

□

Lema 2.8 Del mismo modo, podríamos completar el lema 1.10 con el siguiente resultado: $\vdash \neg\neg\forall x\,\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi(x)$.

Demostración:

Este resultado se obtiene directamente aplicando resultados vistos anteriormente:

Partimos del resultado obtenido en el lema 2.7 (2), es decir, $\vdash \exists x \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$. Aplicando el resultado del lema 1.8 (9) tenemos $\vdash \neg\neg\forall x\varphi(x) \to \neg\exists x\neg\varphi(x) \overset{2,7(1)}{\longleftrightarrow} \forall x\neg\neg\varphi(x)$. Por tanto, tenemos $\vdash \neg\neg\forall x\varphi(x) \to \forall x\neg\neg\varphi(x)$.

□

Sistemas de Hilbert.

Del mismo modo, vamos a comentar como deberíamos completar lo presentado anteriormente para sistemas de Hilbert de modo que se pueda aplicar este cálculo a la lógica intuicionista de primer orden. Para ello, será necesario introducir los axiomas correspondientes a los cuantificadores, así como una nueva regla. Dado un lenguaje L añadimos los siguientes axiomas:

$$\forall\text{−Ax} : \begin{cases} \forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t) \text{ con } t \in Term(L) \text{ tal que } x \text{ es sustituible por } t. \\ \forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall y\, \varphi(y)) \\ \text{tal que } x \text{ no aparece libre en } \psi,\ y \text{ es } x \text{ o } y \text{ no aparece libre en } \varphi. \end{cases}$$

$$\exists\text{−Ax} : \begin{cases} \varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x) \text{ con } t \in Term(L) \text{ tal que } x \text{ es sustituible por } t. \\ \exists x(\varphi \to \psi) \to (\exists y\, \varphi(y) \to \psi) \\ \text{tal que } x \text{ no aparece libre en } \psi,\ y \text{ es } x \text{ o } y \text{ no aparece libre en } \varphi. \end{cases}$$

Bastaría entonces añadir a la regla anterior la regla de generalización, que funciona del siguiente modo:

$$\frac{\varphi[x/u]}{\forall x\, \varphi(x)},$$

siguiendo ciertas restricciones que se verán en la definición siguiente.

Definición 2.9 Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ a partir de Γ es una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que φ_n es φ y para cada $i \leq n$ se verifica uno de los cuatro casos:

- $\varphi_i \in \Gamma$, o bien
- φ_i es una instancia de un esquema de Hilbert, o bien
- Existen $j, k \leq i$ tales que φ_i es obtenido a partir de φ_j y φ_k usando modus ponens, o bien
- Existe $j < i$ tal que φ_j es $\vartheta(u)$ con u no libre en φ_k para todo $k < i$, y tal que φ_i es $\forall x\, \vartheta(x)$.

2.3. Semántica de Kripke.

Ahora vamos a presentar la semántica de la lógica intuicionista de primer orden. Al igual que en lógica intuicionista proposicional, veremos la semántica de Kripke y presentaremos los resultados obtenidos anteriormente ampliándolos ahora al caso de primer orden.

En el caso concreto de la semántica de Kripke, veremos que la estructura que presentaremos cambia con respecto a la presentada en lógica proposicional. Aún así, el modo de trabajar con esta semántica será muy similar al anterior.

En este caso, presentaremos los resultados considerando que siempre trabajamos con un lenguaje L que sólo posee predicados puros, por lo que no tendremos ni símbolos de función ni el símbolo de igualdad.

Definición 2.10 Un modelo de Kripke para la lógica intuicionista de primer orden es una cuádrupla de la forma:

$$\mathcal{M} = \langle K, \leq, D, \Vdash \rangle,$$

de modo que K, $\leq$ y $\Vdash$ verifican las mismas condiciones que en el caso proposicional, es decir, K es un conjunto no vacío, $\leq$ es un orden parcial en K y $\Vdash$ es una relación binaria ya presentada anteriormente, que relaciona los elementos de K con fórmulas atómicas. El único elemento nuevo en este caso es D. D es una función que denominaremos función dominio, y que asignará a cada elemento $k \in K$ un conjunto $D(k)$ no vacío. D debe cumplir la condición de monotonía, es decir:

$$\text{Para todo } k \text{ y } k', \text{ si } k \leq k', \text{ entonces } D(k) \subset D(k').$$

Debido a la introducción de la función dominio, el significado de la relación $\Vdash$ variará un poco con respecto al visto en lógica proposicional.

Sea $\mathbb{D} = \bigcup_{k \in K} D(k)$. Se define $L(\mathbb{D}) = L + \{\underline{d} \mid d \in \mathbb{D}\}$ siendo $\underline{d}$ una nueva constante para cada $d \in \mathbb{D}$. Entonces $\Vdash \subseteq K \times \mathcal{P}(At(L(\mathbb{D})))$ y tal que verifica:

$$\text{Si } k \Vdash P(\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_n), \text{ entonces } d_i \in D(k) \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

$$\text{Si } k \Vdash P(\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_n) \text{ y } k \leq k', \text{ entonces } k' \Vdash P(\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_n).$$

La segunda condición impuesta es la conocida como *condición de monotonía*.

Nota 2.11 Para simplificar la notación, utilizaremos d para referirnos tanto a $d \in D(k)$ como a $\underline{d} \in L(\mathbb{D})$.

Definición 2.12 Dado un modelo de Kriple $\mathcal{M} = \langle K, \leq, D, \Vdash \rangle$, las condiciones de la definición 1.27 se verifican para cada $\varphi \in Sent(L(\mathbb{D}))$, y se le deben añadir los siguientes resultados para los cuantificadores:

- $k \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ si y sólo si para todo $k' \geq k$ y para todo $d \in D(k')$ se verifica $k' \Vdash \varphi(d)$.
- $k \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ si y sólo si existe $d \in D(k)$ tal que $k \Vdash \varphi(d)$.

Definición 2.13 Sea $\Gamma \subset Form(L)$ finito y $\varphi \in Form(L)$. La expresión $\Gamma \Vdash \varphi$ nos indica que para todo modelo de Kripke $\mathcal{M}$ y todo estado k, si $\mathcal{M}, k \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$. Si Γ y φ no son fórmulas cerradas y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de variables entre las que se encuentran todas las variables libres de Γ y φ, entonces $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ si para todo $\vec{d} \in D(k)$ si $\mathcal{M}, k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ entonces $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi(\vec{d})$. Cuando Γ es infinito, $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ expresa que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son las variables libres de φ, para todo $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}$ y todo estado k, si $\mathcal{M}, k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ entonces $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi(\vec{d})$ independientemente de cómo se sustituyan las demás variables libres de Γ por constantes de $\mathbb{D}$.

Nota 2.14 Se puede generalizar la condición de monotonía, de modo que para toda fórmula $\varphi \in Sent(L(\mathbb{D}))$ se verifica:

$$\text{Si } k' \geq k \text{ y } k \Vdash \varphi, \text{ entonces } k' \Vdash \varphi.$$

Una vez vista la semántica de Kripke y sus propiedades en la lógica intuicionista de primer orden, estamos preparados para ver los teoremas de Corrección y Completitud en primer orden.

Teorema 2.15 (Teorema de Corrección) Sean $\Gamma \subset Form(L)$ finito y $\varphi \in Form(L)$. Si $\Gamma \vdash_N \varphi$ entonces se verifica $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración:

Esta prueba se va a basar en la prueba del teorema 1.32. Por tanto, seguiremos una prueba por inducción sobre la altura de la demostración. Existen ciertos casos cuya demostración es análoga a la del teorema 1.32. Dichos casos son $(\to \text{I}), (\to \text{E}), (\wedge \text{I}), (\wedge \text{E}), (\vee \text{I}), (\vee \text{E}), (\bot \text{ E})$, luego dejaremos su prueba al lector.

Veamos los casos que nos faltan, es decir, los casos en los que finalizamos la prueba con una regla de cuantificadores. Haremos explícitas las variables de Γ y φ:

($\forall$ I) Sea ésta la última regla utilizada:

$$\frac{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)}$$

Por hipótesis de inducción dado k y $\vec{d} \in D(k)$ con $k \Vdash \Gamma(\vec{d})$, para cada $k' \geq k$ y cada $e \in D(k')$, $k' \Vdash \varphi(e, \vec{d})$, luego $k \Vdash \forall x\, \varphi(x, \vec{d})$.

($\forall$ E) Si la última regla de la prueba es ésta, tenemos:

$$\frac{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)}$$

Por hipótesis de inducción dado k y $\vec{d} \in D(k)$ con $k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ se tiene $k \Vdash \forall x\, \varphi(x, \vec{d})$, luego por definición para cada $k' \geq k$ y para $e \in D(k')$ se verifica $k' \Vdash \varphi(e, \vec{d})$.

($\exists$ I) Si la última regla utilizada es ésta, queremos probar que dado k y $\vec{d}$ con $k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ entonces $k \Vdash \exists x\, \varphi(x, \vec{d})$. Por hipótesis de inducción tenemos que dado $k \Vdash \Gamma(\vec{d})$, entonces $k \Vdash \varphi(u, \vec{d})$. Esto quiere decir que existe $e \in D(k)$ tal que $k \Vdash \varphi(e, \vec{d})$, luego por definición $k \Vdash \exists x\, \varphi(x, \vec{d})$.

($\exists$ E) Cuando en el último paso de nuestra prueba tenemos lo siguiente:

$$\frac{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \exists x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \quad \Gamma(x_1, \ldots, x_n), \varphi(u, x_1, \ldots, x_n) \vdash \psi(x_1, \ldots, x_n)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \vdash \psi(x_1, \ldots, x_n)}$$

Por hipótesis de inducción dado k y $\vec{d} \in D(k)$ con $k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ se tiene $k \Vdash \exists x \varphi(x, \vec{d})$. Por definición, existe $e \in D(k)$ tal que $k \Vdash \varphi(e, \vec{d})$. Por monotonía $k \Vdash \Gamma(\vec{d}), \varphi(e, \vec{d})$ y por hipótesis de inducción se tiene $k \Vdash \psi(\vec{d})$.

Con esto hemos probado los casos que nos faltaban para probar este teorema. □

Corolario 2.16 El resultado del teorema 2.15 se verifica en caso de Γ infinito. Basta con tomar un subconjuto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito para realizar la prueba.

Recordemos que en el caso proposicional fue necesario introducir una serie de resultados previos que serían necesarios para probar el teorema de Completitud. Del mismo modo, será necesario ahora introducir una serie de resultados para realizar la prueba en primer orden, que se basará en la prueba de Henkin de la lógica cláisca.

Definición 2.17 Sean Γ, Δ conjuntos de fórmulas de un lenguaje dado. El par (Γ, Δ) es consistente si y sólo si no existen subconjuntos finitos $\Gamma_0 \subset \Gamma$ y $\Delta_0 \subset \Delta$ tal que $\vdash \bigwedge \Gamma_0 \to \bigvee \Delta_0$, siendo $\bigwedge \emptyset = \top$ y $\bigvee \emptyset = \bot$. Así mismo, se dice que Γ es consistente si y sólo si el par $(\Gamma, \emptyset)$ es consistente, es decir, no existe ningún subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tal que $\vdash \bigwedge \Gamma_0 \to \bot$.

Definición 2.18 Dado un conjunto de constantes C, decimos que Γ es C-saturado si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

(1) Γ es consistente.

(2) Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma$.

(3) Si $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, entonces o bien $\Gamma \vdash \varphi$ o bien $\Gamma \vdash \psi$.

(4) Si $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$, entonces para algún $c \in C$, $\varphi(c) \in \Gamma$.

El lema que veremos a constinuación nos presentará la construcción que se realizará para obtener extensiones $L(C)$-saturadas para cualquier conjunto $\Gamma \subset Form(L)$, siendo C un conjunto infinito numerable de nuevas constantes.

Lema 2.19 (Lema de Saturación) Supongamos $\Gamma \nvdash \vartheta$ con $\Gamma \subset Form(L)$ y $\vartheta \in Form(L)$. Consideremos un conjunto $C = \{c_0, c_1, \dots\}$ de constantes, de modo que $c_i \notin L$ para todo i. Denotamos por $L(C)$ al lenguaje L extendido con las constantes C. Entonces existe Γ^ω tal que:

(1) $\Gamma \subset \Gamma^\omega$.

(2) Γ^ω es C-saturado.

(3) $\Gamma^\omega \nvdash \vartheta$.

Demostración:
Γ^ω se obtiene como $\bigcup(\Gamma^k \mid k \in \mathbb{N})$, siendo $\Gamma^0 = \Gamma$. Se tiene que Γ^k extiende a Γ^0 ($\Gamma^0 \subseteq \Gamma^k$) y $\Gamma^k \backslash \Gamma^0$ es finito. Vamos a obtener una definición de Γ_k por recursión.

Sea $g(n)$ el primer i tal que la constante c_i no ocurre en $\Gamma^n \backslash \Gamma$. Sean $\langle \psi_{i,1} \vee \psi_{i,2} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ y $\langle \exists x\, \varphi_i(x) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ una enumeración con infinitas repeticiones de todas las fórmulas pertenecientes a $L(C)$ tales que poseen en ellas la disyunción y/o el cuantificador existencial. Tenemos que definir Γ^k por casos, según si k es par o impar:

(1) Supongamos k par, es decir, $k = 2n$. $\Gamma^k \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$. Decimos que

$$\Gamma^{2n+1} = \Gamma^{2n} \cup \{\varphi_n(c_{g(k)})\};$$

(2) Supongamos k impar, es decir, $k = 2n + 1$. $\Gamma \vdash \psi_{n,1} \vee \psi_{n,2}$. Entonces decimos que

$$\Gamma^{2n+2} = \Gamma^{2n+1} \cup \{\psi_{n,i}\},$$
siendo i el menor del conjunto $\{1, 2\}$ de manera que $\Gamma^{2n+1} \cup \{\psi_{n,i}\} \nvdash \vartheta$.

(3) Si ninguno de los dos casos anteriores se verifica, decimos que $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k$.

Debido a que esto se repite infinitas veces, es fácil ver que Γ^ω es efectivamente C-saturado, y que $\Gamma^\omega \nvdash \vartheta$. □

Definición 2.20 Sean $C_0, C_1, \ldots$ una sucesión de conjuntos numerables de constantes disjuntos entre sí y con L. Consideremos $C_n^* = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Dado $\Gamma \subseteq Form(L(C))$, se define $L(\Gamma)$ como:

$$L(\Gamma) = L(C_n^*) \text{ siendo } n \text{ el menor entero } m \text{ tal que } \Gamma \subseteq Form(L(C_n^*)).$$

Definición 2.21 (Construcción del Modelo Canónico) Consideremos $\Gamma_0 \subset Form(L)$ un conjunto arbitrario. Definimos:

$$\mathcal{M} = \langle K, C, \Vdash, D \rangle,$$

del siguiente modo:

(1) K está formado por todos los conjuntos de fórmulas Γ tales que $\Gamma_0 \subset \Gamma$, siendo Γ saturado con respecto a C_n^* para algún n.

(2) Si Γ es C_n^*-saturado, entonces $D(\Gamma) = C_n^*$.

(3) Para una fórmula atómica p en $L(D(\Gamma))$, tenemos $\Gamma \Vdash p$ si y sólo si $p \in \Gamma$.

Lema 2.22 Para todo $\Gamma \in K$ y cada fórmula cerrada de $L(D(\Gamma))$,

$$\Gamma \Vdash \varphi \text{ si y sólo si } \varphi \in \Gamma.$$

Demostración:
Vamos a realizar la prueba por inducción sobre la fórmula φ.

($P(\vec{t})$) Si φ es una fórmula atómica, entonces la prueba es directa por la definición.

($\psi \vee \vartheta$) Si φ es $\psi \vee \vartheta$ entonces $\Gamma \Vdash \psi \vee \vartheta$, y esto ocurre si y sólo si o bien $\Gamma \Vdash \psi$ o bien $\Gamma \Vdash \vartheta$. Por tanto, o bien $\psi \in \Gamma$ o bien $\vartheta \in \Gamma$. Así pues, llegamos a $\psi \vee \vartheta \in \Gamma$ (esto se debe a que Γ es saturado).

($\psi \wedge \vartheta$) Si φ es $\psi \wedge \vartheta$ la prueba en este caso es inmediata.

($\psi \to \vartheta$) Si φ es $\psi \to \vartheta$, y supongamos $\Gamma \Vdash \psi \to \vartheta$. Entonces, para todos los Γ' saturados tales que $\Gamma \subset \Gamma'$ tenemos si $\Gamma' \Vdash \psi$ entonces $\Gamma' \Vdash \vartheta$. Supongamos $\Gamma \nVdash \psi \to \theta$, entonces $\Gamma \cup \{\psi\} \nVdash \vartheta$. Sea ahora Γ' una extensión saturada de $\Gamma \cup \{\psi\}$ tal que $\Gamma' \nVdash \vartheta$, entonces $\Gamma' \Vdash \psi$ pero $\Gamma' \nVdash \vartheta$. Pero $\Gamma \Vdash \psi \to \vartheta$, llegando así a contradicción. Por tanto, $\Gamma \vdash \psi \to \vartheta$.

($\forall x\, \psi(x)$) Si φ es $\forall x\, \psi(x)$, y supongamos $\Gamma \Vdash \forall x\, \psi(x)$, pero $\Gamma \nVdash \forall x\, \psi(x)$, siendo Γ C_n^*-saturado. Entonces para algún $c \in C_{n+1}^*$ se tiene $\Gamma \nVdash \psi(c)$. Sabemos entonces que es posible encontrar Γ' C_{n+1}^*-saturado con $\Gamma \subset \Gamma'$ de modo que $\Gamma' \nVdash \psi(c)$. Por tanto, $\Gamma' \nVdash \psi(c)$, llegando así a una contradicción, luego $\Gamma \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

($\exists x\, \psi(x)$) Si φ es $\exists x\, \psi(x)$, si $\Gamma \Vdash \exists x\, \psi(x)$ entonces $\Gamma \Vdash \psi(c)$ para algún $c \in D(\Gamma)$. Por inducción, entonces $\psi(c) \in \Gamma$ para algún $c \in D(\Gamma)$, y por las propiedades que debe cumplir Γ al ser saturado esto es equivalente a decir $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma$.

Hemos visto todos los casos posibles, luego queda probado $\Gamma \Vdash \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma$. □

Teorema 2.23 (Teorema de Completitud) Sean $\Gamma \subset Form(L)$ y $\varphi \in Form(L)$. Si $\Gamma \Vdash \varphi$ entonces se verifica $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración:
Supongamos $\Gamma \nvdash \varphi$, y sea Γ_0 una extensión saturada de Γ. Sabemos por el lema 2.19 que $\varphi \notin \Gamma_0$. Debido a la construcción realizada anteriormente, se verifica entonces $\Gamma_0 \Vdash \varphi$. □

Corolario 2.24 Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $\Gamma \vdash \varphi$.

(2) $\Gamma \Vdash \varphi$.

Nota 2.25 Si se trabajase en lógica intuicionista de primer orden donde el lenguaje además de símbolos de relación $\{P_i \mid i \in I\}$ posee también el símbolo de igualdad y símbolos de constantes y de función $\{f_j \mid j \in J\}$, teniendo P_i $n(i)$ argumentos y f_j $m(j)$ argumentos, definiríamos la siguiente estructura:

$$\mathcal{T} = (D, \sim, \{P_i \mid i \in I\}, \{f_j \mid j \in J\}),$$

siendo D un conjunto no vacío, $\sim$ una relación de equivalencia en D que se interpreta como la igualdad, $P_i \subset D^{n(i)}$ tal que si $\vec{d} \sim \vec{d'}$ y $\vec{d} \in P_i$ entonces $\vec{d'} \in P_i$ y $f_j \in D^{m(j)} \to D$ tal que si $\vec{d} \sim \vec{d'}$ entonces $f_j(\vec{d}) \to f_j(\vec{d'})$.

Entonces, un modelo de Kripke es una estructura del siguiente modo:

$$\mathcal{M} = \langle K, \leq, \{(\{D(k), \sim_k, \{P_{i,k} \mid i \in I\}, \{f_{j,k} \mid j \in J\}) \mid k \in K\}\rangle,$$

de modo que satisface las siguientes condiciones de monotonía dados $k \leq k'$:

- $D(k) \subset D(k')$;
- $d \sim_k d' \Rightarrow d \sim_{k'} d'$;
- $P_{i,k} \subset P_{i,k'}$;
- $graph(f_{j,k}) \subset graph(f_{j,k'})$, siendo $graph$ la gráfica de la función.

Capítulo 3

Lógica minimal.

La lógica minimal pertenece, al igual que la lógica intuicionista, a la rama de la lógica constructivista. Esto quiere decir que la base ideológica que fomentó la aparición de ésta lógica es la misma que la de la lógica intuicionista.

Vamos a considerar la lógica minimal como el fragmento positivo de la lógica intuicionista, es decir, la lógica minimal se obtiene a partir de la intuicionista eliminando toda la infomación que se posee sobre la constante $\bot$. Esto quiere decir que los símbolos lógicos $\neg, \bot$ tienen entonces un signficado más débil. Ya no conocemos nada acerca de la contradicción, simplemente tenemos la expresión $\varphi \to \bot$, sin saber realmente qué representa esa constante $\bot$.

A continuación, presentaremos la lógica minimal de un modo más formal, trabajando directamente con primer orden, pues ya vimos anteriormente que el caso proposicional está contenido en este.

3.1. Lenguaje de la lógica minimal.

Un lenguaje L en lógica minimal vendrá expresado del mismo modo que en lógica intuicionista de primer orden pero sin símbolos de igualdad.

Nota 3.1 El conjunto de términos sin variables de un lenguaje L se denotará $Term_0(L)$.

La expresión $\neg\varphi$ será la abreviatura de la expresión $\varphi \to \bot$. Por tanto, el símbolo $\neg$ será nuestra negación en lógica minimal, entendiéndose ésta de un modo más débil que en el caso intuicionista.

Se sigue la misma notación que en lógica intuicionista de primer orden para referirnos a los lenguajes, al conjunto de variables de dicho lenguaje y al conjunto de términos, fórmulas atómicas y fórmulas cerradas de un lenguaje.

3.2. Cálculos en la lógica minimal.

Tal como ya ocurrió con la lógica intuicionista, el cálculo fijado para trabajar con lógica minimal será la deducción natural, aunque haremos una breve introducción a los sistemas de Hilbert.

Deducción Natural.

El hecho de no tener ninguna información sobre la constante $\perp$ se traduce en que una de las reglas de deducción natural presentadas en lógica intuicionista no será válida. En concreto, la regla *ex falso quodlibet* o eliminación del *falsum* ya no será considerada válida, quedándonos con el resto de reglas vistas anteriormente.

Utilizaremos la notación $\Gamma \vdash_M \varphi$ para expresar que el argumento $\Gamma \vdash \varphi$ es demostrable en lógica minimal. Cuando esté claro por el contexto, omitiremos el subíndice M y escribiremos $\Gamma \vdash \varphi$.

Sistemas de Hilbert.

Del mismo modo que hemos hecho con deducción natural, vamos a ver cómo se traduce en el cálculo de los sistemas de Hilbert el hecho de que la lógica minimal sea el fragmento positivo de la lógica intuicionista. Ya que ahora no poseemos información sobre la constante $\perp$, los sistemas de Hilbert para la lógica minimal no podrán poseer el axioma $\perp \rightarrow \varphi$. Nos quedaremos entonces con el resto de axiomas vistos anteriormente.

Las reglas utilizadas serían las mismas que las presentadas en lógica intuicionista, es decir, *modus ponens* y regla de generalización. Así mismo, la definición dada para una deducción formal de φ mediante sistemas de Hilbert tampoco sufrirá ningún cambio.

3.3. Semántica de la lógica minimal. Estructuras de Beth.

La semántica que vamos a introducir para la lógica minimal está basada en las llamadas estructuras de Beth.

Una vez introducidas estas estructuras, explicaremos cómo se trabaja con ellas y presentaremos los resultados de los teoremas de Corrección y Completitud para la lógica minimal.

En todo momento vamos a trabajar en un lenguaje de primer orden donde consideraremos símbolos de relación y símbolos de función pero no símbolos de igualdad, a diferencia del caso que trabajamos en lógica intuicionista, donde era un lenguaje de predicados puro.

Vamos a considerar un conjunto parcialmente ordenado de *mundos posibles*. Estos mundos serán representados mediante nodos, que formarán parte de un árbol de ramificación finita. Realmente estos mundos serán considerados posibles estados de conocimiento de un investigador matemático idealizado, de modo que dado un nodo k todos los nodos siguientes a k se consideran las distintas posibilidades en las que se puede desarrollar k en un futuro. Además, dado un estado k tal que una fórmula atómica p se verifica en k, entonces p debe verificarse en todos los mundos o estados que siguen a k.

De un modo más formal, cada estructura de Beth está basada sobre un árbol de ramificación finita T. Veamos los detalles:

Definición 3.2 Sea S un conjunto. Un *nodo* k sobre S es una sucesión $k = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ de elementos de S.

Definición 3.3 Dado un nodo k sobre S, consideraremos $ln(k)$ la *longitud* del estado k.

Definición 3.4 Dados k, k' nodos sobre S, escribiremos $k \preceq k'$ si k es un *segmento inicial* de k', es decir, si dados $k = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ y $k' = \langle b_0, \ldots, b_{m-1} \rangle$ con $n \leq m$, se verifica $a_i = b_i$ para todo $i < n$.

Definición 3.5 Un *árbol* T sobre S será un conjunto de nodos de S cerrado bajo segmentos iniciales.

Definición 3.6 Sea T un árbol sobre un conjunto S:

- Diremos que T es de *ramificación finita* si cada nodo $k \in T$ tiene un número finito de sucesores inmediatos, es decir, para cada $k \in T$ existe un conjunto finito de nodos $k' \in T$ tales que $k \preceq k'$ con $ln(k') = ln(k) + 1$.
- Diremos que T es *no acotado* cuando para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un nodo $k \in T$ tal que $ln(k) = n$.
- Una *hoja* del árbol T es un nodo que no posee ningún sucesor en T.

A partir de ahora, y para el desarrollo de las pruebas de los teoremas de Corrección y Completitud, nos bastará con trabajar con estructuras de Beth basadas en árboles binarios ($\{0,1\}$). Los nodos serán entonces todas las posibles sucesiones finitas de ceros y unos. La raíz del árbol será considerada la sucesión vacía, y consideraremos la sucesión $k0$ como la sucesión k' con $ln(k') = ln(k) + 1$, $k \preceq k'$ cuyo último elemento es 0. Ocurrirá de forma análoga con la sucesión $k1$.

Definición 3.7 Sea $(T, \preceq)$ un árbol de ramificación finita, una estructura de Beth $\mathcal{B} = (D, I_0, I_1)$ sobre T consta de un conjunto no vacío D, una función I_0 que para cada símbolo de función n-ario del leguaje L define una función $I_0(f) : D^n \to D$, y una función I_1 que para cada símbolo de relación n-ario del lenguaje L y para cada nodo $k \in T$ define un conjunto $I_1(P, k) \subseteq D^n$. Esta función I_1 asigna valores de D de modo que se conserve la monotonía, es decir, debe verificarse:

$$\text{Si } k \preceq k', \text{ entonces } I_1(P, k) \subseteq I_1(P, k').$$

Nota 3.8 En el caso especial en el que nuestro símbolo de relación P sea 0-ario, es decir, $n = 0$, $I_1(P, k)$ es o bien 1 *"verdadero"* o bien 0 *"falso"*, y por tanto se sigue por la condición de monotonía que si $k \preceq k'$ y $I_1(P, k) = 1$, entonces $I_1(P, k') = 1$.

Nota 3.9 Dada $\mathcal{B} = (D, I_0, I_1)$, se denotará por $|\mathcal{B}|$ al dominio D de $\mathcal{B}$.

Definición 3.10 Dada una estructura de Beth $\mathcal{B} = (D, I_0, I_1)$, se define el conjunto de constantes $\mathbb{D}$ como $\mathbb{D} = \{\underline{d} \mid d \in D\}$.

Si $t \in Term_0(L(\mathbb{D}))$, se define $t^{\mathcal{B}}$ por recursión del siguiente modo:

- Si t es $\underline{d}$, $t^{\mathcal{B}} = d$;
- Si t es una constante de L, C, $C^{\mathcal{B}} = I_0(C)$;
- Si t es $f(t_1, \ldots, f_n)$, $t^{\mathcal{B}} = I_0(f)(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots, t_n^{\mathcal{B}})$.

Nota 3.11 Al igual que en el caso de la semántica de Kripke en lógica intuicionista de primer orden, utilizaremos d para referirnos tanto a $d \in D$ como a $\underline{d} \in \mathbb{D}$.

Definición 3.12 Se define $L(\mathbb{D}) = L + \{\underline{d} \mid d \in \mathbb{D}\}$.

Definición 3.13 Sean $\varphi, \psi \in Sent(L(\mathbb{D}))$. La expresión $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi$ se lee como $\mathcal{B}$ *fuerza* φ *en el nodo* k, y se define de manera inductiva tal y como veremos a continuación. Diremos que una propiedad se verifica para todo $k' \succeq_n k$ cuando dicha propiedad se verifique para todo $k' \succeq k$ tal que $ln(k') = ln(k) + n$. Vamos a ver como quedaría definida la expresión dada:

- Si P no es 0-aria, $\mathcal{B}, k \Vdash P(t_1, \ldots, t_p)$ si y sólo si existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$, se verifica que $(t_1^{\mathcal{B}} \ldots, t_p^{\mathcal{B}}) \in I_1(P, k')$.
- Si P es 0-aria, $\mathcal{B}, k \Vdash P$ si y sólo si existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$, $I_1(P, k') = 1$.
- $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$ o bien $k' \Vdash \varphi$ o bien $k' \Vdash \psi$.
- $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $k \Vdash \varphi$ y $k \Vdash \psi$.
- $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi \to \psi$ si y sólo si para todo $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \varphi$, se tiene $k' \Vdash \psi$.
- $\mathcal{B}, k \Vdash \forall x \varphi(x)$ si y sólo si para todo $\underline{d} \in \mathbb{D}$, $k \Vdash \varphi(\underline{d})$.
- $\mathcal{B}, k \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ si y sólo si existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$, existe $\underline{d} \in \mathbb{D}$ tal que $k' \Vdash \varphi(\underline{d})$.

Nota 3.14 Al igual que ya hicimos en los sistemas de Kripke para la lógica intuicionista, escribiremos $k \Vdash \varphi$ cuando quede claro por el contexto cuál es la estructura $\mathcal{B}$ utilizada.

Definición 3.15 Dado un lenguaje L, sea $\Gamma \subset Form(L)$ finito y $\varphi \in Form(L)$. La expresión $\Gamma \Vdash \varphi$ quiere decir que para toda estructura de Beth $\mathcal{B}$ sobre un árbol T y todo nodo $k \in T$, la condición $\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma$ implica $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi$. Si $\Gamma \not\subset Sent(L)$, $\varphi \notin Sent(L)$, y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de variables entre las que se encuentran todas las variables libres de Γ y φ, entonces $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ si para todo $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}$ si $\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ entonces se verifica $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi(\vec{d})$. Cuando Γ es infinito, $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ expresa que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son las variables libres de φ, para todo $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}$ y $k \in T$, si $\mathcal{B}, k \Vdash \Gamma(\vec{d})$ entonces $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi(\vec{d})$ independientemente de cómo se sustituyan las demás variables libres de Γ por constantes de $\mathbb{D}$.

Lema 3.16 (Lema de recubrimiento) Sea $\mathcal{B}$ una estructura de Beth sobre un árbol T y $\varphi \in Sent(L(\mathbb{D}))$. Entonces para cada nodo k de T se verifica:

(1) Dado $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi$ y $k \preceq k'$, entonces $\mathcal{B}, k' \Vdash \varphi$.

(2) Si para todo $k' \succeq_n k$ se tiene $\mathcal{B}, k' \Vdash \varphi$, entonces $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi$.

Demostración:

(1) Se prueba por inducción sobre la fórmula φ. Para el caso atómico es trivial debido a cómo hemos definido $\mathcal{B}$ y a la propiedad de monotonía que debe cumplir. El resto de casos se deja al lector, siendo esta prueba muy similar a la prueba del lema 1.30.

(2) Vamos a verlo por inducción sobre la fórmula φ.

($P(\vec{t})$) Supongamos que existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$ se verifica $k' \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$. Por definición, existe m tal que para todo $k'' \succeq_m k'$ entonces $(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots, t_r^{\mathcal{B}}) \in I_1(P, k'')$. Por ser T un árbol de ramificación finita, existe l tal que para todo $k' \succeq_l k$ se verifica $(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots, t_n^{\mathcal{B}}) \in I_1(P, k')$, luego $k \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.
De modo similar se realizarán las pruebas para $\varphi \vee \psi$ y para $\exists x\, \varphi(x)$.

($\varphi \to \psi$) Supongamos $k' \Vdash \varphi \to \psi$ para todo $k' \succeq k$ tal que $ln(k') = ln(k) + n$. Veamos que para todo $l \succeq k$ tal que $l \Vdash \varphi$ tenemos $l \Vdash \psi$. Sea $l \succeq k$ y $l \Vdash \varphi$. Entonces queremos ver $l \Vdash \psi$. Para ello, aplicamos hipótesis de inducción sobre ψ. Sea $m = max\,(ln(k) + n, ln(l))$, consideremos $l' \succeq l$ tal que $ln(l') = m$. Basta entonces con ver $l' \Vdash \psi$. Si $ln(l') = ln(l)$, entonces $l' = l$ y por tanto ya tendríamos el resultado deseado. Si $ln(l') = ln(k) + n > ln(l)$ entonces l' es una extensión tanto de l como de k. Además, $ln(l') = ln(k) + n$, luego $l' \Vdash \varphi \to \psi$. Además, como $l' \succeq l$ y $l \Vdash \varphi$ entonces $l' \Vdash \varphi$. Por tanto, se sigue que $l' \Vdash \psi$.

Los casos $\varphi \wedge \psi$ y $\forall x\, \varphi(x)$ son inmediatos. □

El resultado técnico presentado a continuación nos será de utilidad para la demostración de los teoremas de Corrección y Completitud. Su prueba se realiza mediante inducción sobre la fórmula dada:

Lema 3.17 Sea $\mathcal{B}$ una estructura de Beth sobre un árbol de ramificación finita T, $\varphi \in Sent(L(\mathbb{D}))$,$\underline{d} \in \mathbb{D}$ y $t \in Term_0(L(\mathbb{D}))$, de modo que $t^{\mathcal{B}} = d$. Entonces dado $k \in T$:

$$\mathcal{B}, k \Vdash \varphi(\underline{d}) \text{ si y sólo si } \mathcal{B}, k \Vdash \varphi(t).$$

Teorema 3.18 (Teorema de Corrección) Sean $\Gamma \subset Form(L)$ finito y $\varphi \in Form(L)$. Si $\Gamma \vdash_M \varphi$ entonces se verifica que $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración:
Vamos a demostrarlo por inducción sobre la altura de la demostración. Debido a la gran similitud con la prueba del teorema 2.15, algunos de los casos se dejarán al lector. Del mismo modo que en el caso de la lógica intuicionista, haremos explícitas las variables libres de Γ y φ.

($\to$ I) Sea ésta la última regla utilizada, queremos ver que dado $k \Vdash \Gamma$, entonces $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$. Por hipótesis de inducción si $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}$ y $k* \Vdash \Gamma(d_1, \ldots, d_n), \varphi_1(d_1, \ldots, d_n)$ entonces $k* \Vdash \varphi_2(d_1, \ldots, d_n)$. Dado $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \varphi_1(\vec{d})$, por monotonía $k' \Vdash \Gamma(\vec{d})$, luego $k' \Vdash \Gamma(\vec{d}), \varphi_1(\vec{d})$. Por tanto, $k' \Vdash \varphi_2$. Entonces para todo $k' \succeq k$ si $k' \Vdash \varphi_1(\vec{d})$ entonces $k' \Vdash \varphi_2(\vec{d})$, luego $k' \Vdash \varphi_1(\vec{d}) \to \varphi_2(\vec{d})$.

($\to$ E) Supongamos $k \Vdash \Gamma$. Por hipótesis de inducción, dado $k \Vdash \Gamma$ ya tendríamos probado $k \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ y $k \Vdash \varphi_1$. Por tanto, para todo $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \varphi_1$ entonces $k' \Vdash \varphi_2$. Por monotonía, como $k \Vdash \varphi_1$, todo $k' \succeq k$ verifica $k' \Vdash \varphi_1$, luego todo $k' \succeq k$ verifica $k' \Vdash \varphi_2$. Por tanto, directamente tendríamos $k \Vdash \varphi_2$.

($\forall$ I) Dado $k \Vdash \Gamma$, queremos ver que se verifica $k \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ con x no libre en Γ. Es decir, queremos ver que $k \Vdash \varphi(d)$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Por hipótesis de inducción tenemos $k \Vdash \varphi(d)$ para $d \in \mathbb{D}$, por tanto $k \Vdash \forall x\, \varphi(x)$.

($\forall$ E) Queremos probar que $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \Vdash \varphi(t(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$ para cierto $t \in Term(L)$ supuesto $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Sea k tal que $k \Vdash \Gamma(d_1, \ldots, d_n)$ para ciertos $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{D}$. Por hipótesis de inducción $k \Vdash \forall x\, \varphi(x, \vec{d})$. En particular, si $e = t(\vec{d})^{\mathcal{B}}$, $k \Vdash \varphi(e, \vec{d})$. Por el lema 3.17, $k \Vdash \varphi(t(\vec{d}), \vec{d})$ como queríamos.

□

Corolario 3.19 El resultado del teorema 3.18 se verifica en caso de Γ infinito. Basta con tomar un subconjuto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito para realizar la prueba.

Teorema 3.20 (Teorema de Completitud) Sean $\Gamma \subset Form(L)$ y $\varphi \in Form(L)$. Si $\Gamma \Vdash \varphi$ entonces se verifica que $\Gamma \vdash_M \varphi$.

Demostración:

Para realizar la prueba vamos a aplicar un técnica desarrollada por Harvey Friedman. Se construye una estructura de Beth $\mathcal{B}$ sobre el árbol $(T, \preceq)$ de las sucesiones finitas de ceros y unos, con la propiedad de que $\Gamma \vdash_M \psi$ es equivalente a $\mathcal{B}, \langle\rangle \Vdash \psi$.

Para definir $\mathcal{B}$ necesitaremos una enumeración $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ de las fórmulas del lenguaje de Γ, de modo que cada fórmula ocurre un número numerable de veces. Además tendremos una enumeración $x_0, x_1, \ldots$ de las variables. Consideremos ahora $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ como una unión de conjuntos Γ_n finitos de modo que se verifica $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. A cada nodo $k \in T$ le asociaremos un conjunto finito de fórmulas Δ_k mediante inducción en la longitud de k.

En primer lugar consideramos $\Delta_{\langle\rangle} = \emptyset$. Tomemos un nodo k tal que $ln(k) = n$, y supongamos que Δ_k ya está definido. Escribiremos $\Delta \vdash_n \psi$ para indicar que $\Delta \vdash \psi$ es demostrable con una prueba que tiene a lo sumo altura n. Definimos Δ_{k0} y Δ_{k1} del siguiente modo:

(1) Si $\Gamma_n, \Delta_k \nvdash_n \varphi_n$. Entonces:

$$\Delta_{k0} = \Delta_k \text{ y } \Delta_{k1} = \Delta_k \cup \{\varphi_n\}.$$

(2) Si $\Gamma_n, \Delta_n \vdash_n \varphi_n$ y φ_n es $\varphi'_n \vee \varphi''_n$. Entonces:

$$\Delta_{k0} = \Delta_k \cup \{\varphi_n, \varphi'_n\} \text{ y } \Delta_{k1} = \Delta_k \cup \{\varphi_n, \varphi''_n\}.$$

(3) Si $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n \varphi_n$ y φ_n es $\exists x\, \varphi'_n$. Entonces:

$$\Delta_{k0} = \Delta_{k1} = \Delta_k \cup \{\varphi_n, \varphi'_n[x := x_i]\},$$

siendo x_i la primera variable tal que no pertenece al conjunto de variables libres de $(\Gamma_n, \varphi_n, \Delta_k)$.

(4) Si $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n \varphi_n$ y φ_n no es ni la disyunción ni una fórmula cuantificada existencialmente entonces $\Delta_{k0} = \Delta_{k1} = \Delta_k \cup \{\varphi_n\}$.

Obviamente, tenemos que $k \preceq k'$ implica $\Delta_k \subseteq \Delta_{k'}$. Se observa entonces lo siguiente:

$$\text{Si para todo } k' \succeq_n k \text{ se tiene } \Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi \text{ entonces } \Gamma, \Delta_k \vdash \psi. \tag{3.1}$$

Para probar esto, es suficiente con probar que si $\Gamma, \Delta_{k0} \vdash \psi$ y $\Gamma, \Delta_{k1} \vdash \psi$ entonces $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi$. En los casos (1) y (4) esto es trivial. En los casos (2) y (3) se obtiene inmediatamente aplicando las reglas de eliminación de la disyunción y de eliminación del cuantificador existencial.

Lo siguiente que tenemos que ver es:

$$\text{Si } \Gamma, \Delta_k \vdash \psi \text{ entonces existe } n \text{ tal que para todo } k' \succeq_n k, \psi \in \Delta_{k'}. \tag{3.2}$$

Para ello escogemos n tal que $n \geq ln(k)$, de modo que $\psi = \varphi_n$ y $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n \varphi_n$. Para todo $k' \succeq k$, si $ln(k') = n + 1$, entonces $\varphi_n \in \Delta_{k'}$.

Usando el conjunto Δ_k podemos definir una estructura de Beth $\mathcal{B}$ como el conjunto (D, I_0, I_1), considerando ahora como D el conjunto de términos del lenguaje utilizado L, $I_0(f)(\vec{t}) = f(\vec{t})$ y $I_1(P,k) = \{(t_1,\ldots,t_r) \in (Term(L))^r \mid P(t_1,\ldots,t_r) \in \Delta_k\}$.

Dado que $D = Term(L)$, $\mathbb{D} = \{\underline{t} \mid t \in Term(L)\}$.

Por tanto realmente queremos probar lo siguiente, si $x_1,\ldots,x_n$ son las variables libres de ψ,

$$\Gamma, \Delta_k \vdash \psi(x_1,\ldots,x_r) \text{ si y sólo si } \mathcal{B}, k \Vdash \psi(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r). \tag{3.3}$$

Lo haremos por inducción en la complejidad de ψ.

- Si φ_n es $P(\vec{t})$ y $\Gamma, \Delta_k \vdash P(\vec{t})$ entonces por (3.2) y (3.1) existe n tal que para todo $k' \succeq_n k, P(\vec{t}) \in \Delta_{k'}$. Por tanto, existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$, $\vec{t} \in I_1(P,k')$ (por definición de $\mathcal{B}$). Entonces tenemos $k \Vdash P(\vec{t})$.

- Si φ_n es $(\psi \vee \vartheta)$: En este caso y en los siguientes, como $t(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r)^{\mathcal{B}} = t(x_1,\ldots,x_n) = \underline{t}^{\mathcal{B}}$, no haremos distinción durante la demostración entre $t(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ y $\underline{t}$.

  $\Rightarrow$ Supongamos $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi \vee \vartheta$. Se elige $n \geq ln(k)$ tal que $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n \varphi_n$ y φ_n es $\psi \vee \vartheta$. Entonces para todo $k' \succeq k$ tal que $ln(k') = n$ se sigue que $\Delta_{k'0} = \Delta_{k'} \cup \{\psi \vee \vartheta, \psi\}$ y $\Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \{\psi \vee \vartheta, \vartheta\}$. Por hipótesis de inducción, identificando $\psi(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ con $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ (y de forma similar para ϑ), tenemos $k'0 \Vdash \psi$ y $k'1 \Vdash \vartheta$. Por definición, tenemos que $k \Vdash \psi \vee \vartheta$.

  $\Leftarrow$ Si $k \Vdash \psi \vee \vartheta$, entonces existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$, o bien $k' \Vdash \psi$ o bien $k' \Vdash \vartheta$. Por hipótesis de inducción esto se traduce en que existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$ o bien $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi$ o bien $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \vartheta$. Por tanto, existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$ $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi \vee \vartheta$, luego $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi \vee \vartheta$.

- Si φ_n es $\psi \wedge \vartheta$ es trivial, pues si lo tenemos para ψ y para ϑ se tiene para la conjunción.

- Si φ_n es $\psi \to \vartheta$:

  $\Rightarrow$ Sea $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi \to \vartheta$. Queremos ver $k \Vdash \psi \to \vartheta$, es decir, deseamos probar que para todo $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \psi$, entonces $k' \Vdash \vartheta$.
  Sea $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \psi$. Por hipótesis de inducción se sigue que $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi$, y por tanto $\Gamma, \Delta'_k \vdash \vartheta$. Por tanto se sigue $k' \Vdash \vartheta$.

  $\Leftarrow$ Sea $k \Vdash \psi \to \vartheta$, es decir, para todo $k' \succeq k$ tal que $k' \Vdash \psi$, entonces $k' \Vdash \vartheta$. Queremos ver que $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi \to \vartheta$. Para ello, vamos a aplicar (3.1). Tomamos un $n \geq ln(k)$ de modo que $\psi = \varphi_n$. Sea ahora $k' \succeq_m k$ de modo que $m = n - ln(k)$. Queremos probar que $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi \to \vartheta$. Si $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash_n \varphi_n$, entonces $k' \Vdash \psi$ por hipótesis de inducción. Entonces tenemos $k' \Vdash \vartheta$, luego $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \vartheta$ y por tanto $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi \to \vartheta$.
  Si $\Gamma, \Delta_k \nvdash_n \varphi_n$, por definición $\Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \{\psi\}$, luego tenemos $\Gamma, \Delta_{k'1} \vdash \psi$, y por hipótesis de inducción $k'1 \Vdash \psi$. Por tanto, tenemos $k'1 \Vdash \vartheta$, luego obtenemos de nuevo por hipótesis de inducción $\Gamma, \Delta_{k'1} \vdash \vartheta$. Como $\Delta_{k'1} = \Delta_{k'} \cup \psi$, se sigue que $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi \to \vartheta$.

En los siguientes casos, sí que haremos explícito cuándo estamos trabajando con elementos de $\mathbb{D}$ y cuándo estamos trabajando con elementos de $Term(L)$.

- Si φ_n es $\forall x\, \psi(x)$, si $\Gamma, \Delta_k \vdash \forall x\, \psi(x)$ para todo $t(x_1,\ldots,x_r) \in Term(L)$ se tiene entonces $\Gamma, \Delta_k \vdash \psi(t(x_1,\ldots,x_r))$. Por hipótesis de inducción $k \Vdash \psi(t(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r))$. Por el lema 3.17, como $(t(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r))^{\mathcal{B}} = t(x_1,\ldots,x_r)$, $k \Vdash \psi(t(x_1,\ldots,x_r))$, luego para todo $d \in \mathbb{D} = Term(L)$ tenemos $k \Vdash \psi(d)$. Por definición de $\Vdash$ tenemos que $k \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

- Si φ_n es $\exists x\,\psi(x)$ (este caso es similar al caso de la disyunción $\vee$).

  $\Rightarrow$ Sea $\Gamma, \Delta_k \vdash \exists x\,\psi(x)$. Sea $n \geq ln(k)$ tal que $\Gamma_n, \Delta_k \vdash_n \varphi_n$ y φ_n es $\exists x\,\psi(x)$. Entonces para todo $k' \succeq k$ tal que $ln(k') = n$ se tiene:

  $$\Delta_{k'0} = \Delta_{k'1} = \Delta_k \cup \{\exists x\,\psi(x), \psi(x_i)\},$$

  siendo x_i variable no libre en $\Delta_k \cup \{\exists x\,\psi(x)\}$. Por hipótesis de inducción entonces tenemos $k'0 \Vdash \psi(\underline{x}_i)$ y $k'1 \Vdash \psi(\underline{x}_i)$, luego por definición se tiene $k \Vdash \exists x\,\varphi(x)$.

  $\Leftarrow$ Sea $k \Vdash \exists x\,\psi(x)$. Sabemos entonces que existe n tal que para todo $k' \succeq_n k$ existe $t(x_1, \ldots, x_n) \in Term(L)$ tal que $k' \Vdash \psi(\underline{t})$, que por el lema 3.17 es equivalente a $k' \Vdash \psi(t(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n))$. Por hipótesis de inducción $\Gamma, \Delta_{k'} \vdash \psi(t(x_1, \ldots, x_n))$ y aplicando (3.1) se tiene $\Gamma, \Delta_k \vdash \exists x\,\psi(x)$.

□

Nota 3.21 Se observa que la construcción utilizada para demostrar el teorema anterior es muy similar a la construcción ya utilizada en lógica intuicionista.

Definición 3.22 Una estructura de Beth intuicionista es aquella en la que se verifica que para todo nodo $k \in T$ se tiene $I_1(\bot, k) = 0$.

Teorema 3.23 Sean $\Gamma \subset Form(L)$ y $\varphi \in Form(L)$. Los teoremas de Corrección y Completitud para lógica intuicionista pueden reformularse del siguiente modo:

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \Vdash \varphi$$
(definiendo $\Gamma \Vdash \varphi$ respecto de estructuras de Beth intuicionistas).

Demostración:
Dado $\Gamma \subset Form(L)$ y $\varphi \in Form(L)$, observemos que:

(1) $\Gamma \vdash_N \varphi$ si y sólo si $\Gamma, \mathbf{Efq}(L) \vdash_M \varphi$, siendo $\mathbf{Efq}(L) = \{\bot \to \vartheta \mid \vartheta \in At(L)\}$.

(2) Si $\mathcal{B}$ es una estructura de Beth tal que para todo k, $\mathcal{B}, k \Vdash \mathbf{Efq}(L)$, definamos $\mathcal{B}'$ como la estructura de Beth intuicionista obtenida a partir de $\mathcal{B}$ eliminando de T todos los nodos k donde $I_1(\bot, k) = 1$. Entonces para toda fórmula φ, se tiene:

Si para todo nodo k' de $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}', k' \Vdash \varphi$, entonces para todo nodo k de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}, k \Vdash \varphi$.

□

Lógica minimal como fragmento positivo de la lógica intuicionista.

Sea $\mathcal{B}$ una estructura de Beth para la lógica minimal y $\Gamma \subset Form(L)$. Consideremos una estructura de Beth $\mathcal{B}^{\bot}$ como la estructura $\mathcal{B}$ en la cual obligamos a que $I_1(\bot, k) = 0$ para todo k. Esta estructura será una estructura de Beth para la lógica intuicionista. Consideremos una fórmula φ que no contenga la constante $\bot$. Dicha fórmula será válida en $\mathcal{B}^{\bot}$ si y sólo si es válida en $\mathcal{B}$.

Por tanto, dada φ positiva tal que $\Gamma \vdash_N \varphi$, entonces tenemos que $\mathcal{B}^{\bot} \Vdash \varphi$. Por ser φ positiva, $\mathcal{B} \Vdash \varphi$ para toda estructura de Beth $\mathcal{B}$, luego por completitud se tiene $\Gamma \vdash_M \varphi$.

Corolario 3.24 Toda fórmula φ positiva (que no posee la constante $\bot$) válida en lógica intuicionista es válida en lógica minimal.

Capítulo 4

Comparación entre las lógicas.

Hemos observado que la lógica minimal se construye eliminando las reglas presentadas en lógica intuicionista sobre la constante $\bot$. La construcción de la lógica minimal de este modo nos muestra que está contenida dentro de la lógica intuicionista, pues la construimos tomando el fragmento de la lógica intuicionista que no contiene ninguna información sobre $\bot$. Esto nos permite presentar la lógica minimal como el fragmento positivo de la lógica intuicionista.

Del mismo modo, se observa que la lógica clásica no es más que una extensión de la lógica intuicionista, añadiendo a ésta el principio del tercio excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Se observa entonces cierta relación de inclusión entre las distintas lógicas. A lo largo de este capítulo presentaremos ciertos resultados y traducciones que nos mostrarán la relación existente entre la demostrabilidad de una fórmula en las distintas lógicas.

Nota 4.1 A lo largo del capítulo, vamos a trabajar conjuntamente con lógica clásica, intuicionista y minimal, por tanto debemos introducir un subíndice a $\vdash$ para saber con respecto a qué lógica estamos indicando su demostrabilidad. $\vdash_C$ nos indicará la demostrabilidad en lógica clásica, $\vdash_N$ en lógica intuicionista y $\vdash_M$ en lógica minimal.

4.1. Lógica clásica y minimal.

Dada una fórmula φ demostrable en lógica clásica, queremos ver qué condiciones debe cumplir para que también sea demostrable en lógica intuicionista y lógica minimal.

Definición 4.2 Sea φ una fórmula sin las conectivas $\vee, \exists$. Se dice que φ es *negativa* si cada fórmula atómica de φ distinta a $\bot$ aparece negada.

Lema 4.3 Sea φ negativa, entonces $\vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$, y por tanto, $\vdash_N \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Demostración:
La prueba se realiza mediante inducción sobre la fórmula φ. Durante toda la prueba haremos uso de los resultados presentados en los lemas 1.8 y 1.10. A pesar de que estos resultados están probados para lógica intuicionista, como no se hace uso de la regla de eliminación del *falsum* también se verifican para lógica minimal.

- Si φ es $\neg P(\vec{t})$ siendo $P(\vec{t})$ una fórmula atómica, aplicando a $P(\vec{t})$ el lema 1.10 (1), tenemos $\vdash_M \neg\neg\neg P(\vec{t}) \to \neg P(\vec{t})$. Por tanto, se verifica $\vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$.

- Si φ es $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, por el lema 1.10 (5) tenemos $\vdash_M \neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\varphi_2$. Por hipótesis de inducción $\vdash_M \neg\neg\varphi_1 \to \varphi_1$ y $\vdash_M \neg\neg\varphi_2 \to \varphi_2$, luego $\vdash_M \neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\varphi_2 \to \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
- Si φ es $\varphi_1 \to \varphi_2$, por el lema 1.10 (4) $\vdash_M \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\neg\varphi_1 \to \neg\neg\varphi_2)$. Por hipótesis de inducción $\vdash_M \neg\neg\varphi_2 \to \varphi_2$ y por el lema 1.8 (5) $\vdash_M \varphi_1 \to \neg\neg\varphi_1$. Por tanto $\vdash_M \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_2)$.

($\bot$) Si φ es $\bot$, entonces el resultado es directo porque $\neg\neg \bot$ es $(\bot\to\bot) \to\bot$, y eso es $\top \to\bot$, luego $\bot$, luego $\vdash_M \neg\neg \bot\to\bot$.

□

El lema anterior funciona restringido a fórmulas que no posean $\vee, \exists$. Por tanto, a partir de ahora se considerará el lenguaje cuyas únicas conectivas lógicas son $\wedge, \to, \bot, \forall$.

Definición 4.4 (Traducción negativa de Gödel-Gentzen) Dado un lenguaje L, se define $g : Form(L) \to Form(L)$ del siguiente modo:

(1) $g(P(\vec{t})) = \neg\neg P(\vec{t})$;

(2) $g(\bot) = \bot$;

(3) $g(\varphi \wedge \psi) = g(\varphi) \wedge g(\psi)$;

(4) $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$;

(5) $g(\forall\, \varphi(x)) = \forall x\, g(\varphi(x))$.

Definición 4.5 Sea Γ un conjunto de fórmulas, se define $g(\Gamma)$ como:

$$g(\Gamma) = \{g(\varphi) \mid \varphi \in \Gamma\}.$$

Una vez presentada la traducción de Gödel-Gentzen, vamos a ver los resultados que relacionan la demostrabilidad en lógica clásica con la demostrabilidad en minimal y con la demostrabilidad en intuicionista.

Teorema 4.6 Dado un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula φ, se verifica:

(1) $\vdash_C \varphi \leftrightarrow g(\varphi)$.

(2) $\Gamma \vdash_C \varphi$ si y sólo si $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi)$.

Demostración:

(1) En lógica clásica se verifica $\vdash_C \neg\neg\varphi \to \varphi$ para toda fórmula φ. Así mismo, en el lema 1.8 hemos probado $\vdash_N \varphi \to \neg\neg\varphi$ para lógica intuicionsita, y por ser la lógica clásica una extensión de la lógica intuicionista, tendríamos $\vdash_C \varphi \to \neg\neg\varphi$, luego $\vdash_C \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. La expresión $g(\varphi)$ esencialmente transforma una fórmula φ en $\neg\neg\varphi$, luego $\vdash_C \varphi \leftrightarrow g(\varphi)$. Se probaría fácilmente por inducción en la fórmula φ.

(2) ($\Leftarrow$) Directo de (1) usando que si $\vdash_M \psi$ entonces $\vdash_C \psi$.

($\Rightarrow$) Vamos a realizar una prueba por inducción sobre la altura de la demostración de $\Gamma \vdash_C \varphi$.

($\Gamma, \varphi \vdash \varphi$) Consideremos el caso base en el que tenemos un axioma $\Gamma, \varphi \vdash_C \varphi$. Aplicando ahora la traducción de Gödel-Gentzen se obtiene $g(\Gamma), g(\varphi) \vdash_C g(\varphi)$, que es también un axioma, y por tanto $g(\Gamma), g(\varphi) \vdash_M g(\varphi)$.

($\to$ I) Supongamos que a la altura $m+1$ de la prueba hemos obtenido $\Gamma \vdash_C \varphi_1 \to \varphi_2$ aplicando ($\to$ I). Queremos ver entonces que se cumple $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \to \varphi_2)$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma, \varphi_1 \vdash_C \varphi_2$ se tiene $g(\Gamma, \varphi_1) \vdash_M g(\varphi_1)$. Por tanto, tendríamos $g(\Gamma), g(\varphi_1) \vdash_M g(\varphi_2)$, y aplicando ahora la regla de introducción de la implicación para la lógica minimal se tendría $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1) \to g(\varphi_2)$. Por definición de g tendríamos entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \to \varphi_2)$.

($\to$ E) La última regla aplicada es la siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash_C \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \Gamma \vdash_C \varphi_1}{\Gamma \vdash_C \varphi_2}$$

Queremos probar entonces que se verifica $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_2)$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_C \varphi_1 \to \varphi_2$ entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \to \varphi_2)$ y dado $\Gamma \vdash_C \varphi_1$ entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1)$. De $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \to \varphi_2)$ se obtiene por definición de g, $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1) \to g(\varphi_2)$, y aplicando ahora la regla de eliminación de la implicación para lógica minimal, tendríamos $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_2)$ como deseábamos.

($\wedge$ I) Supongamos que tengo una prueba $\Gamma \vdash_C \varphi_1 \wedge \varphi_2$ obtenida mediante ($\wedge$ I). Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_C \varphi_1$ entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1)$, y dado $\Gamma \vdash_C \varphi_2$ entonces $\Gamma \vdash_M g(\varphi_2)$. Aplicando ahora la regla de introducción de la conjunción tendríamos $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2)$, que por definición de g es equivalente a $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

($\wedge$ E) Supongamos que el último paso de la prueba es el siguiente:

$$\frac{\Gamma \vdash_C \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash_C \varphi_1}$$

Queremos probar entonces que se verifica $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1)$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_C \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, que por definición de g es equivalente a $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2)$. Aplicando ahora la regla de eliminación de la conjunción se obtiene $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi_1)$. Para $\Gamma \vdash_C \varphi_2$ obtenida mediante ($\wedge$ E) la prueba sería análoga.

($\forall$ I) Dada una prueba $\Gamma \vdash_C \forall x\, \varphi(x)$ obtenida aplicando ($\forall$ I), queremos probar que se verifica $g(\Gamma) \vdash_M g(\forall x\, \varphi(x))$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_M \varphi(u)$ tendremos $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi(u))$ tal que u no aparece libre en $\Gamma, g(\Gamma)$. Aplicando la regla de introducción del cuantificador universal para la lógica minimal se tendría $g(\Gamma) \vdash_M \forall x\, g(\varphi(x))$, que es equivalente a $g(\Gamma) \vdash_M g(\forall x\, \varphi(x))$.

($\forall$ E) Queremos ver que dada una prueba $\Gamma \vdash_C \varphi(t)$ siendo t un término, obtenida aplicando ($\forall$ E), entonces se verifica $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi(t))$. Por hipótesis de inducción dado $\Gamma \vdash_M \forall x\, \varphi(x)$ se tiene $g(\Gamma) \vdash_M g(\forall x\, \varphi(x))$, que es equivalente a $g(\Gamma) \vdash_M \forall x\, g(\varphi(x))$. Aplicando la regla de eliminación del cuantificador universal tendrímos entonces $g(\Gamma) \vdash_M g(\varphi(t))$ siendo t un término, tal como queríamos probar.

□

Teorema 4.7 (Teorema de Sustitución) Sea $\Gamma \subseteq Form(L)$ finito, $\varphi_1, \varphi_2, \psi \in Form(L)$ y ϑ una subfórmula atómica de ψ tales que las variables libres de φ_1 y φ_2 no aparecen ligadas en Γ, ψ y las variables ligadas de ψ no aparecen libres en Γ. Entonces:

$$\text{Si } \Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \text{ entonces } \Gamma \vdash \psi[\vartheta/\varphi_1] \leftrightarrow \psi[\vartheta/\varphi_2],$$

siendo $\psi[\vartheta/\varphi_i]$ la fórmula obtenida sustituyendo cada aparición de ϑ en ψ por φ_i.

Corolario 4.8 Para φ negativa,

$$\vdash_C \varphi \text{ si y sólo si } \vdash_M \varphi.$$

Demostración:

Para probar este resultado bastaría probar que si φ es negativa entonces $\vdash_M g(\varphi) \leftrightarrow \varphi$, pues por el teorema 4.6 tenemos $\vdash_C \varphi$ si y sólo si $\vdash_M g(\varphi)$.

Vamos a verlo por inducción sobre la fórmula φ:

- Si φ es $\neg P(\vec{t})$, entonces $\vdash_M g(\varphi)$ es por definición $\vdash_M \neg\neg\neg P(\vec{t})$. Por el lema 1.10 (1) $\vdash_M \neg\neg\neg P(\vec{t}) \leftrightarrow \neg P(\vec{t})$, luego $\vdash_M g(\varphi) \leftrightarrow \varphi$.
- Si φ es $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\vdash_M g(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, es decir, $\vdash_M g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2)$. Por hipótesis de inducción $\vdash_M g(\varphi_1) \leftrightarrow \varphi_1$ y $\vdash_M g(\varphi_2) \leftrightarrow \varphi_2$. Aplicando ahora el teorema 4.7 se tiene $\vdash_M g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2) \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Los casos restantes se tratan igual. □

Un resultado importante que se puede observar es que toda fórmula φ es equivalente en lógica clásica a una fórmula negativa, de modo que es posible la inmersión de la lógica clásica en la minimal.

4.2. Lógica clásica e intuicionista.

Todos estos resultados probados en lógica minimal se han considerado teniendo en cuenta que en lógica minimal no se conocía nada sobre $\bot$, y por tanto $\neg$ se usa de un modo formal. Sin embargo, en lógica intuicionista sí que conocemos información sobre $\bot$, y por tanto la negación sí que posee un signficado. Por eso mismo, para el caso intuicionista vamos a añadir a la traducción de Gödel-Gentzen los casos en los que la fórmula sí posee $\vee, \exists$, considerando éstas en un sentido más débil.

Definición 4.9 La definición 4.4 se completará en el caso intuicionista del siguiente modo:

(6) $g(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg g(\varphi) \wedge \neg g(\psi))$;

(7) $g(\exists x\, \varphi(x)) = \neg\forall x \neg g(\varphi(x))$.

Teorema 4.10 Para todo φ se verifica:

$$\Gamma \vdash_C \varphi \text{ si y sólo si } g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi).$$

Demostración:

($\Leftarrow$) Puesto que $g(\varphi)$ es una fórmula negativa en la que no aparece $\exists$ ni $\vee$, el resultado es directo por el corolario 4.8.

($\Rightarrow$) Vamos a realizar una prueba por inducción sobre la fórmula φ. Sólo veremos los casos correspondientes a $\vee$ y $\exists$, pues el resto es análogo a la prueba del teorema 4.6.

($\vee$ I) Supongamos que la última regla utilizada es esta:

$$\frac{\Gamma \vdash_C \varphi_1}{\Gamma \vdash_C \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{ (Análogo para } \Gamma \vdash_C \varphi_2)$$

Queremos probar que se verifica $g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_C \varphi_1$ entonces $g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi_1)$, luego $g(\Gamma) \vdash_N \neg\neg g(\varphi_1)$. Aplicando la regla de introducción de la disyunción, esto es equivalente a $g(\Gamma) \vdash_N \neg\neg g(\varphi_1) \vee \neg\neg g(\varphi_2)$. Aplicando ahora el lema 1.8 (8), $g(\Gamma) \vdash_N \neg(\neg g(\varphi_1) \wedge \neg g(\varphi_2))$, que por defínción es $g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

($\vee$ E) Supongamos que la última regla aplicada es esta:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_C \vartheta \quad \Gamma, \psi \vdash_C \vartheta \quad \Gamma \vdash_C \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash_C \vartheta}$$

Queremos ver que se verifica $g(\Gamma) \vdash_N g(\vartheta)$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma, \varphi \vdash_C \vartheta$ tenemos $g(\Gamma), g(\varphi) \vdash_N g(\vartheta)$. Del mismo modo, por hipótesis de inducción, dado $\Gamma, \psi \vdash_C \vartheta$ entonces $g(\Gamma), g(\psi) \vdash_N g(\vartheta)$. Por último, dado $\Gamma \vdash_C \varphi \vee \psi$ entonces $g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi \vee \psi)$, que por definición de g sería $g(\Gamma) \vdash \neg(\neg g(\varphi) \wedge \neg g(\psi))$. Por el lema 4.3, como $g(\varphi)$ es negativa se tiene $\vdash_M g(\varphi) \leftrightarrow \neg\neg g(\varphi)$, y análogamente $\vdash_M g(\psi) \leftrightarrow \neg\neg g(\psi)$.
Se tiene entonces:

$$\dfrac{g(\Gamma), g(\varphi) \vdash_N g(\vartheta) \qquad \dfrac{\dfrac{g(\Gamma) \vdash_N \neg(\neg g(\varphi) \wedge \neg g(\psi))}{g(\Gamma) \vdash_N \neg\neg g(\varphi) \vee \neg\neg g(\psi)} \text{ (1.8 (7))}}{g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi) \vee g(\psi)} \text{ (Sustitución)}}{g(\Gamma) \vdash_N g(\vartheta)} \text{ ($\vee$ E)}$$

Y por tanto queda probado $g(\Gamma) \vdash_N g(\vartheta)$.

($\exists$ I) Supongamos que la última regla utilizada es:

$$\frac{\Gamma \vdash_C \varphi(t)}{\Gamma \vdash_C \exists x\, \varphi(x)}$$

Queremos ver que entonces se verifica $g(\Gamma) \vdash_N g(\exists x\, \varphi(x))$. Por definición, esto es equivalente a ver que $g(\Gamma) \vdash_N \neg\forall x \neg g(\varphi(x))$. Por hipótesis de inducción, dado $\Gamma \vdash_C \varphi(t)$ entonces $g(\Gamma) \vdash_N g(\varphi(t))$. Por el lema 1.8 (5), $g(\Gamma) \vdash_N \neg\neg g(\varphi(t))$ y aplicando ($\exists$ I), $g(\Gamma) \vdash_N \exists x \neg\neg g(\varphi(x))$. Por el lema 2.7 (2), $g(\Gamma) \vdash_N \neg\forall x\, \neg(g(\varphi(x)))$, es decir, $g(\Gamma) \vdash_N g(\exists x\, \varphi(x))$.

($\exists$ E) Sea la última regla utilizada:

$$\frac{\Gamma \vdash_C \exists x\, \varphi(x) \qquad \Gamma, \varphi(u) \vdash_C \vartheta}{\Gamma \vdash_C \vartheta} \quad u \text{ no libre en } \Gamma, \varphi(x) \text{ y } \vartheta.$$

Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_C \exists x\, \varphi(x)$ nos da $g(\Gamma) \vdash_N \neg\forall x\, \neg g(\varphi(x))$ y $\Gamma, \varphi(u) \vdash_C \vartheta$ nos da $g(\Gamma), g(\varphi(u)) \vdash_N g(\vartheta)$, luego $g(\Gamma), g(\varphi(u)), \neg g(\vartheta) \vdash_N \bot$. Por introducción de la implicación, $g(\Gamma), \neg g(\vartheta) \vdash_N g(\varphi(u))$ y por ($\forall$ I), $g(\Gamma), \neg g(\vartheta) \vdash_N \forall x \neg g(\varphi(x))$. Como $g(\Gamma) \vdash_N \neg\forall x \neg g(\varphi(x))$, tenemos $g(\Gamma), \neg g(\vartheta) \vdash_N \bot$, luego $g(\Gamma) \vdash_N \neg\neg g(\vartheta)$. Por sustitución tenemos $g(\Gamma) \vdash g(\vartheta)$ ya que $g(\vartheta)$ es negativa y podemos aplicar entonces el lema 4.3.

□

Corolario 4.11 Para φ negativa,

$$\vdash_C \varphi \text{ si y sólo si } \vdash_N \varphi.$$

Demostración:
La prueba es análoga a la prueba del corolario 4.8 sutituyendo $\vdash_M$ por $\vdash_N$. □

Teorema 4.12 (Teorema de Glivenko) Dada una fórmula φ proposicional, φ es tautología clásica si y sólo si $\neg\neg\varphi$ es tautología intuicionista, es decir,

$$\vdash_C \varphi \text{ si y sólo si } \vdash_N \neg\neg\varphi.$$

Demostración:
Para probar este teorema basta probar $\vdash_N g(\varphi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ mediante inducción sobre la fórmula φ.

- Si φ es atómica, $g(\varphi) = \neg\neg\varphi$ por definición.
- Si φ es $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $g(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\neg g(\varphi_1) \wedge \neg g(\varphi_2))$, que por hipótesis de inducción y aplicando el teorema 4.7 es equivalente a $\neg(\neg\neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\neg\varphi_2)$. Aplicando ahora el lema 1.10 (5) se tiene lque ésto es equivalente a $\neg\neg\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$. Por el lema 1.10 (1), tenemos $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$. Aplicando ahora el lema 1.8 (7) llegamos a $\neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
- Si φ es $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $g(\varphi_1 \wedge \varphi_2 = g(\varphi_1) \wedge g(\varphi_2)$, que por hipótesis de inducción y el teorema 4.7 es equivalente a $\neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\varphi_2$. Aplicando el lema 1.10 (5) tenemos $\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
- Si φ es $\varphi_1 \to \varphi_2$, $g(\varphi_1 \to \varphi_2) = g(\varphi_1) \to g(\varphi_2)$, que por definición es $\neg\neg\varphi_1 \to \neg\neg\varphi_2$. Aplicando el lema 1.10 (4) llegamos a $\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$.

Una vez visto esto, bastaría aplicar el teorema 4.10. □

Nota 4.13 El teorema 4.12 sólo es válido en el caso proposicional. Vamos a ver un ejemplo que corrobora lo dicho en la nota 4.13.

Sea $\neg\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$. Se observa que $\vdash_C \neg\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$. Sin embargo, dado $\neg\neg\neg\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$, que aplicando el lema 1.10 (1) es equivalente a $\neg\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$, se tiene $\nvdash_N \neg\neg\forall x(\varphi(x) \vee \ \neg\ \varphi(x))$.

4.3. Disyunción y decidibilidad en lógica intuicionista.

Teorema 4.14 (Propiedad de la disyunción) Para φ, ψ fórmulas cualesquiera, si $\vdash_N \varphi \vee \psi$ entonces o bien $\vdash_N \varphi$ o bien $\vdash_N \psi$.

Demostración:
Vamos a verlo por reducción al absurdo solo en el caso proposicional. Supongamos $\nvdash \varphi$ y $\nvdash \psi$. Entonces existen dos modelos de Kripke $\mathcal{M}_1 = \langle K_1, \leq_1, \Vdash_1\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle K_2, \leq_2, \Vdash_2\rangle$ y dos estados $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que $k_1 \nVdash_1 \varphi$ y $k_2 \nVdash_2 \psi$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que k_1, k_2 son los menores elementos de K_1, K_2 respectivamente, y que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Construimos ahora un nuevo modelo de Kripke $\mathcal{K} = \langle K_1 \cup K_2 \cup \{k_0\}, \leq, \Vdash\rangle$ de modo que $k_0 \notin K_1 \cup K_2$. El orden $\leq$ no es más que la unión de los ordenes $\leq_1$ y $\leq_2$, y la relación $\Vdash$ es la suma de $\Vdash_1$ y $\Vdash_2$. En particular, $k_0 \nVdash p$ para toda variable p. Es fácilmente comprobable que $\mathcal{K}$ es un modelo de Kripke. Además, se verifica que $\mathcal{K}, k_1 \Vdash \vartheta$ si y sólo si $\mathcal{K}_1, k_1 \Vdash \vartheta$ para una fórmula ϑ arbitraria, y del mismo modo $\mathcal{K}, k_2 \Vdash \vartheta$ si y sólo si $\mathcal{K}_2, k_2 \Vdash \vartheta$ para una fórmula ϑ arbitraria.

Supongamos entonces $\vdash \varphi \vee \psi$. Por el teorema de Corrección 1.32 tenemos $k_0 \Vdash \varphi \vee \psi$, y por tanto o bien $k_0 \Vdash \varphi$ o bien $k_0 \Vdash \psi$ por definición de $\Vdash$. Esto significa que o bien $k_1 \Vdash \varphi$ o bien $k_2 \Vdash \psi$ por monotonía, llegando así a contradicción. □

Tal como se comentó al introducir por primera vez la lógica intuicionista, la diferencia entre ésta y la lógica clásica es que en lógica clásica todos los resultados deben ser obligatoriamente verdaderos o falsos, algo que en lógica intuicionista no ocurre. En lógica clásica se podía comprobar fácilmente cuándo una fórmula era válida, pues podíamos trabajar en todo momento con un álgebra Booleana concreta e ir construyendo nuestras tablas de verdad con ceros y unos para obtener una respuesta. En cambio esto no es posible en lógica intuicionsita. Resulta de interés entonces encontrar un método que nos permita comprobar si una fórmula φ es válida en lógica intuicionista.

A continuación, veremos un de resultado que nos ayudará a comprobar cuándo φ es válida en lógica intuicionista.

Definición 4.15 Se define la *longitud* de una fórmula φ, $ln(\varphi)$, de forma recursiva como:

- Si φ es atómica, $ln(\varphi) = 1$;
- Sea ϑ una subfórmula de φ tal que $\varphi = *\vartheta$, siendo $*$ una conectiva lógica monaria. Entonces $ln(\varphi) = ln(\psi) + 1$;
- Sean dos subfórmulas ψ, ϑ de φ, tal que $\varphi = \psi \mathcal{R} \vartheta$ siendo $\mathcal{R}$ una conectiva lógica binaria. Entonces $ln(\varphi) = ln(\psi) + ln(\vartheta) + 1$.

Teorema 4.16 Una fórmula φ de longitud n es válida si y sólo si es válida en todo álgebra de Heyting cuyo cardinal sea a lo sumo 2^{2^n}.

Demostración:

Dada una fórmula φ, supongamos que φ no es válida. Existe entonces un álgebra de Heyting $\mathcal{H} = \langle H, \leq \rangle$ tal que $\mathcal{H}, v \not\models \varphi$. Vamos a reemplazar $\mathcal{H}$ por un álgebra finita. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ todas las subfórmulas de φ ($m \leq n$) y sea $a_i = [\![\varphi_i]\!]_v$ para $i = 1, \ldots, m$. Consideremos ahora una subálgebra L de $\langle H, \leq \rangle$ generada por $a_1, \ldots, a_m$. El cardinal de L será a lo sumo 2^{2^m} elementos, pues existen 2^m posibles intersecciones entre sus generadores. Se verifica que L es un álgebra de Heyting, pues todo retículo finito distributivo es un álgebra de Heyting [3]. Pero la definición del pseudo-complemento relativo de L no tiene por qué ser la misma que la de $\mathcal{H}$, luego L no tiene por qué ser una subálgebra de Heyting de $\mathcal{H}$. Como puede llevar a confusión utilizar $\Rightarrow$ para dos cosas distintas, a partir de ahora denotaremos $\Rightarrow_L$ para referirnos al que pertenece a L y del mismo modo utilizaremos $\Rightarrow_{\mathcal{H}}$ para el de $\mathcal{H}$.

No es entonces necesario que se verifique $[\![\psi]\!]_v^L = [\![\psi]\!]_v^L$ para un ψ arbitrario, pero esto sí que se verifica para todas las subfórmulas de φ incluyéndose a la misma φ. Esta afirmación se prueba por inducción, siguiendo la idea de que si $\psi_1 \to \psi_2$ es una subfórmula de φ, entonces $[\![\psi_1]\!]_v^{\mathcal{H}} \Rightarrow_{\mathcal{H}} [\![\psi_2]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\psi_1 \to \psi_2]\!]_v^{\mathcal{H}} \in L$. Esto implica entonces

$$[\![\psi_1]\!]_v^{\mathcal{H}} \Rightarrow_{\mathcal{H}} [\![\psi_2]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\psi_1]\!]_v^{\mathcal{H}} \Rightarrow_L [\![\psi_2]\!]_v^{\mathcal{H}}.$$

Por tanto, tendríamos $[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}} = [\![\varphi]\!]_v^L$, luego $[\![\varphi]\!]_v^L \neq 1$, y por tanto $L, v \not\models \varphi$. □

Corolario 4.17 La lógica intuicionista proposicional es decidible.

[3] Para el lector interesado en esta prueba, dirigirse a [8], lema 2.4.3(iii)

Bibliografía

[1] J.A. Alonso y M.J. Hidalgo, *Temas de "Lógica matemática y fundamentos"(2016-2017).*

Grupo de Lógica Computacional. Dpto. de Ciencias de la Computación. Universidad de Sevilla, 2016/2017.

`http://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/lmf-16/temas/temas-LMF-2016-17.pdf`

[2] N. Bexhanishvili y D. de Jongh, *Intuitionistic Logic.*

Institute for Logic, Language and Computation. Universiteit van Amsterdam. Preprint-PP-2006-25.

`http://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/PP-2006-25.text.pdf`

[3] D. de Jongh y Z. Zhao, *Positive Formulas in Intuitionistic and Minimal Logic.*

Logic, languaje and computation, 175-189. Lecture Notes in Computer Science, 8984. Springer, Heidelberg, 2015.

[4] M.C. Fitting, *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.*

Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1969.

[5] H. Schwichtenberg, *Mathematical Logic.*

Mathematisches Institut der Universität München. Apuntes para un curso. Wintersemester 2009/2010. Sommersemmester 2010.

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schwicht/lectures/logic/ss10/ml.pdf`

[6] M.H. Sorense y P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism.*

Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149. Elsevier, 2006.

[7] A.S. Troelstra y D.Van Dalen, *Constructivism in Mathematics. An introduction.* Vol. I.

Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1988.

[8] D. Van Dalen, *Logic and Structure.* (Cuarta edición)

Universitext. Springer-Verlag, Berlín, 2008.