



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Título

Una categoría de Lusternik-Schnirelman para
complejos simpliciales.

Realizado por:
Carmen Laura Macero Vázquez

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero

19 de Junio de 2018

Agradecimientos

Después de un intenso período de nueve meses, hoy es el día: escribo este apartado de agradecimientos para finalizar mi trabajo de fin de grado.

Ha sido un período de aprendizaje intenso, no solo en el campo científico, si no también a nivel personal. Escribir este trabajo ha tenido un gran impacto en mi y es por eso que me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado y apoyado durante este proceso.

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutora, Dña. Desamparado Fernández Ternero, que, sin su ayuda, no habría sido posible la realización de este trabajo. En concreto, agradecer todas las tutorías hechas, los e-mails enviados, que haya resuelto la cantidad de dudas que me han ido surgiendo a lo largo del trabajo, y por las miles de correcciones hechas. Con todo ello, ha hecho posible que la tarea de realizar este trabajo haya sido más fácil y llevadera, dentro de las dificultades y el tiempo que conlleva. Gracias de nuevo por su acompañamiento, su energía y su apoyo durante esta fase que nos ha unido.

También me gustaría agradecer a mis padres por sus sabios consejos y su comprensión. Siempre habéis estado ahí para mi. A mi hermano, mi niño, tu eres uno de los motores que me impulsan a ser mejor cada día para que siempre te sientas orgullosa de mí.

No me olvido de mi familia, abuelas, tías/o, primas/o,... vosotros me habéis hecho ser quien soy y hacia quienes sólo puedo expresar mi sincero agradecimiento por apoyarme durante la etapa académica que hoy culmina. Y a los que no están pero siempre han estado en mi mente y mi corazón, también es gracias a la fuerza que me dais desde ahí arriba.

A mis profesores y a este tribunal, en el que hoy están alguno de ellos, han sido cuatro años difíciles pero en los que he crecido como persona y he aprendido que quien la sigue la consigue. No hay que bajar los brazos en el primer intento. Gracias por ayudarme a ver las matemáticas de una forma

distinta y enseñarme tantas cosas que desconocía, y que desde hoy se convertirán en mi herramienta de trabajo. Por que es cierto, en las matemáticas todo es útil, y lo he acabado descubriendo.

Finalmente, mis amigos, compañeros. No solo habéis estado ahí para apoyarnos entre nosotros en los momentos difíciles, ya que somos los que mejor nos entendemos, sino que también hemos tenido charlas personales, momentos de risa y llantos, hemos vivido los mejores años de nuestra vida juntos. Me quedo con algo de cada uno de vosotros. Y por último a mi pareja, porque ha compartido a la vez que yo tanto mis logros como mis momentos de máxima desesperación durante estos 4 años.

¡Muchas gracias a todos!

“Las Matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo”

(W.S. ANGLIN)

“Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar”

Hipatia de Alejandría

Índice general

Resumen / Abstract	7
Introducción	9
1. Preliminares	11
1.1. Complejos simpliciales	11
1.2. Teoría Morse Discreta	21
1.3. Categoría geométrica continua	26
2. Categoría L-S discreta	27
2.1. Categoría geométrica discreta	27
2.2. Teorema L-S discreto	37
3. Estimación de la categoría	39
3.1. Cota inferior combinatorial	40
3.2. Algoritmo	41
3.3. Computación	50
Bibliografía	56

Resumen / Abstract

In this memory, we will work with a Lusternik-Schnirelmann category for simplicial complexes.

The discrete version of Morse theory due to Robin Forman is a powerful combinatorial tool in the study of topology, its use involves the overlap of these fields. Inspired by the success of discrete Morse theory, Aaronson and Scoville gave the first steps in defining a discrete version of the Lusternik-Schnirelmann category suitable for simplicial complexes. This invariant is based on collapsibility as opposed to contractibility, and is defined in the spirit of the geometric category of a topological space. We prove some basic results of this theory, showing where it agrees and differs from that of the smooth case. In addition we will give a discrete version of the Lusternik-Schnirelmann theorem relating the number of critical points of a discrete Morse function to the discrete category of the simplicial complex on which the function is defined.

At the end of this work, we give an algorithm which yields an upper bound for the discrete category. We show our algorithm is correct and give bounds for the discrete category of well-known simplicial complexes.

En esta memoria, trabajaremos con una de las nociones de categoría de Lusternik-Schnirelmann para complejos simpliciales.

La versión discreta de la Teoría Morse, de Robin Forman, es una poderosa herramienta combinatorial en el estudio de la topología, su uso implica la superposición en estos campos. Inspirándose en la Teoría Morse discreta, Aaronson y Scoville dieron una versión discreta de la categoría de Lusternik-Schnirelmann para complejos simpliciales. Este invariante está basado en

la colapsabilidad en lugar de la contractabilidad, y se define siguiendo las ideas de la categoría geométrica para un espacio topológico. Mostraremos algunos resultados básicos de esta teoría, viendo coincidencias y diferencias con el caso continuo. Además, daremos una versión discreta del Teorema de Lusternik-Schnirelmann, que relaciona el número de puntos críticos de una función Morse discreta con la categoría discreta del complejo simplicial sobre el que está definido.

Al final de este trabajo, mostramos un algoritmo para obtener una cota superior de la categoría discreta. Demostraremos que dicho algoritmo es correcto y daremos cotas para la categoría discreta de varios complejos simpliciales conocidos.

Introducción

En topología el concepto de categoría de Lusternik-Schnirelmann (conocida de forma abreviada como categoría LS) de un espacio topológico X es un invariante topológico definido como el mínimo número de conjuntos abiertos y contráctiles necesarios para cubrir a X . El concepto fue introducido por Lázar Lusternik y Lev Schnirelmann en el año 1934.

En este trabajo, presentamos las ideas esenciales y los resultados básicos de una noción de categoría de Lusternik-Schnirelmann para complejos simpliciales, así como, los resultados principales.

En el Capítulo 1, se presenta las nociones básicas de complejos simpliciales, así como las nociones de homotopía y homología adaptada a complejos simpliciales. Además, dedicaremos una sección a la Teoría de Morse Discreta, que será muy útil para la posterior comprensión de la versión discreta del Teorema de Lusternik-Schnirelmann. En la última sección recordamos la noción de categoría geométrica para espacios topológicos, lo que nos permitirá la posibilidad de poder compararla con la categoría geométrica discreta.

En el Capítulo 2, mostraremos una noción de categoría geométrica de Lusternik-Schnirelmann discreta, debida a Seth Aaronson y Nicholas A. Scoville para complejos simpliciales. Daremos algunos resultados para la noción de categoría LS discreta que no se verifican en el contexto continuo. Finalmente, probaremos una versión del Teorema de Lusternik-Schnirelmann en el contexto discreto.

En el Capítulo 3, el objetivo es introducir un procedimiento computacional para dar cotas de la categoría de Lusternik-Schnirelmann (LS) discreta de un complejo simplicial. Para ello mostramos un algoritmo que nos permitirá obtener una cota superior de la categoría discreta. Como aplicación, demostraremos que la categoría discreta del *sombrero bobo* es 2 y, en consecuencia, el *sombrero bobo* está más lejos de ser colapsable que *la casa de Bing*.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Complejos simpliciales

En la primera sección se abordarán propiedades y definiciones básicas sobre complejos simpliciales, que podemos estudiar de forma más amplia en [10] y [11]. Comenzaremos con la noción básica de homotopía entre espacios topológicos.

Definición 1.1.1. Sean f y $g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Se dice que f y g son **homotópicas** si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

A H se le llama **homotopía** entre f y g . Se tiene que la relación de ser homotópicas es una relación de equivalencias en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y , estable por composición de aplicaciones continuas; es decir, si dos aplicaciones son homotópicas, sus composiciones con una aplicación continua también lo son.

Definición 1.1.2. Dos espacios topológicos X e Y se dicen **homotópicamente equivalentes**, o **del mismo tipo de homotopía**, si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$, es decir, sus composiciones son homotópicas con la identidad en cada espacio. Si $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica, se dice que A es **retracto de deformación** de X si existe una aplicación continua $j : X \rightarrow A$ tal que $j \circ i = id_A$, e $i \circ j \simeq id_X$. Cuando A es un punto, se dice que X es **contráctil**.

Definición 1.1.3. Dado X espacio topológico y B un subespacio de X se dice que B es **contráctil** en el espacio ambiente X si la inclusión $i : B \rightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante, $(c_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\} \subset X)$.

Daremos ahora nociones básicas sobre complejos simpliciales.

Definición 1.1.4. Decimos que $p + 1$ puntos v_0, v_1, \dots, v_p de \mathbb{R}^m son **afínmente independientes** si los vectores $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_p}$ son linealmente independientes.

Definición 1.1.5. Un **simplex de dimensión p** o **p -simplex** σ generado por $p + 1$ puntos v_0, \dots, v_p afínmente independientes es el cierre convexo de dichos puntos, es decir, el conjunto convexo:

$$\sigma^p = \left\{ x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i \in \mathbb{R}^m; \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 0, \dots, p \right\}.$$

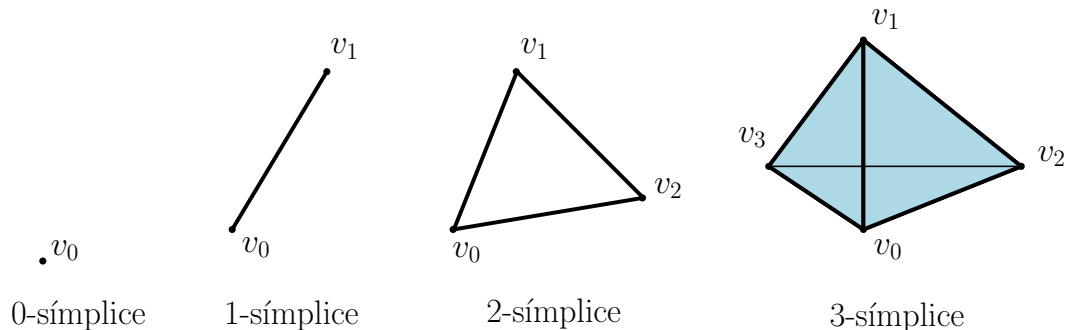
Los coeficientes λ_i se conocen como **coordenadas baricéntricas** y los puntos v_i son los **vértices** del simplex, con $i = 0, \dots, p$.

Definición 1.1.6. Un **complejo simplicial (geométrico)** es una colección K (no necesariamente finita) de simplices en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^m , verificando las siguientes condiciones:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2 .
2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$.

Si K es finito, su **dimensión** es el máximo de las dimensiones de sus simplices.

Ejemplo 1.1.1. Veamos la representación de los primeros n -simplices, con $n = 0, \dots, 3$.



Definición 1.1.7. Sea V un conjunto. Un **complejo simplicial abstracto** K es una colección no vacía de partes finitas de V verificando las siguientes condiciones:

- Si $\sigma \in K$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- $\{v\} \in K$, para todo $v \in V$.

Los elementos del conjunto V se llaman **vértices** de K y los elementos de K son los **símplices** de K .

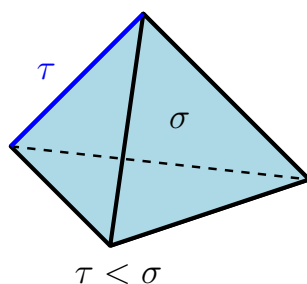
Ejemplo 1.1.2.

1. El complejo simplicial generado por un sólo vértice se denota por $*$.
2. Dado un conjunto finito A con $n+1$ elementos, se tiene que la colección de todos los subconjuntos no vacíos de A es un complejo simplicial de dimensión n .

Definición 1.1.8. La **dimensión de un símplex** $\sigma \in K$ es el cardinal de σ como conjunto menos una unidad. La **dimensión de un complejo** K se define como el supremo de las dimensiones de sus símplexes.

Definición 1.1.9. Un elemento $\sigma \in K$ con cardinal $i+1$ se llama **símplex i -dimensional** ó un **i -símplex** en K .

Sean σ y τ dos símplexes, $\sigma, \tau \in K$, con $\sigma \subseteq \tau$. Se dice que σ es una **cara** de τ , y lo denotamos por $\tau \leq \sigma$, si todos los vértices de τ son vértices de σ , también se dice que τ es una **cocara** de σ . Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$, diremos que τ es una **cara propia** de σ y escribiremos $\tau < \sigma$.



Un **subcomplejo** L de K , denotado $L \subseteq K$, es un subconjunto L de K tal que L es también un subcomplejo simplicial.

El **i -esqueleto** de K viene dado por: $K^i = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) \leq i\}$.

Definición 1.1.10. Sean K_1 y K_2 dos complejos simpliciales y sea $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicación definida entre sus conjuntos de vértices. Se dice que es una **aplicación simplicial** si dado un símplice $\{v_0, \dots, v_p\} \in K_1$ se verifica que los vértices $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)$ forman un símplice de K_2 .

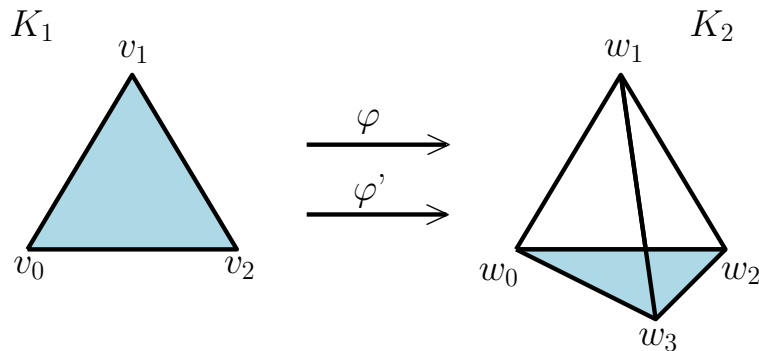
Definición 1.1.11. Dos complejos simpliciales K_1 y K_2 se dicen **isomorfos** si existe una biyección $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ entre los conjuntos de vértices de ambos complejos de forma que

$$\{v_0, \dots, v_p\} \in K_1 \text{ si y solo si } \{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)\} \in K_2.$$

Ejemplo 1.1.3.

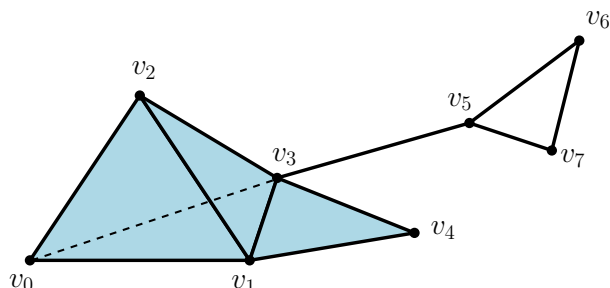
La aplicación φ definida por $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 0, 1, 2$ no es aplicación simplicial.

La aplicación φ' definida por $\varphi'(v_1) = w_3$ y $\varphi'(v_i) = w_i$, $i = 0, 2$ sí es aplicación simplicial.



En la definición de *complejo simplicial geométrico* vemos que los símplices intersecan en caras comunes, y en la de *complejo simplicial abstracto* esto se tiene por construcción, pues la intersección de dos símplices al estar contenido en cada uno de ellos es también un símplice. Así, la noción de complejo simplicial abstracto formaliza las propiedades que cumple el conjunto de símplices de un complejo simplicial geométrico.

Ejemplo 1.1.4. A partir del complejo simplicial K , mostrado en el dibujo, compararemos las nociones de complejo simplicial geométrico y abstracto.



- Consideramos K el complejo simplicial (geométrico). Estaría constituido por la colección de símlices en \mathbb{R}^3 siguiente:
 - 3-símlice generado por $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$,
 - 2-símlice generado por $\{v_1, v_3, v_4\}$,
 - 1-símlice generado por $\{v_3, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_7\}$ y $\{v_6, v_7\}$,
 - y todas sus caras
- Construyamos el complejo simplicial abstracto K' inducido, por K del siguiente modo:

Tomamos todos los símlices de K y consideramos sus vértices, el conjunto que se obtiene será $V = \{v_0, \dots, v_7\}$.

El conjunto de símlices de K' viene dado por los subconjuntos V' de V tales que el símlice generado por los elementos de V' es un símlice en K . Por ejemplo, $\{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in S(K')$ ya que el símlice generado por $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ es 3-símlice en K .

Observación 1.1.1. A todo complejo simplicial (geométrico) se le puede asociar un complejo simplicial abstracto, cuyo conjunto de vértices sería el constituido por todos los vértices de los símlices del complejo simplicial (geométrico).

Teorema 1.1.1. Todo complejo simplicial abstracto finito admite una realización geométrica como complejo simplicial finito en algún \mathbb{R}^m .

Esto es, dado K un complejo simplicial abstracto finito de dimensión n . Es posible elegir un conjunto de vértices V_K en \mathbb{R}^m , con $m \geq 2n + 1$ en posición general. Identificamos cada vértice con un punto y cada símlice con el cierre

convexo de los puntos asociados a los vértices. Construimos así un complejo simplicial geométrico asociado a K , que es único salvo isomorfismo simplicial.

Observación 1.1.2. *Tenemos de este modo una correspondencia entre complejos simpliciales finitos geométricos y abstractos. Así que a partir de este momento no haremos distinción entre complejo simplicial y complejo simplicial abstracto.*

Definición 1.1.12. *Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^m . El **poliedro subyacente** de K es el subconjunto de \mathbb{R}^m*

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

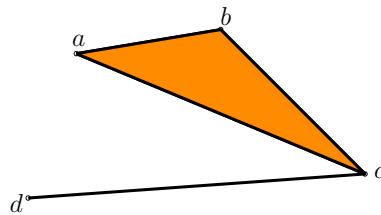
*Si dotamos a $|K|$ de la topología relativa de \mathbb{R}^m , lo llamamos **espacio subyacente** de K .*

Ejemplo 1.1.5.

1. *Sea K un complejo simplicial con vértices $\{a, b, c, d\}$ dado por el conjunto de símlices siguiente:*

$$S = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$$

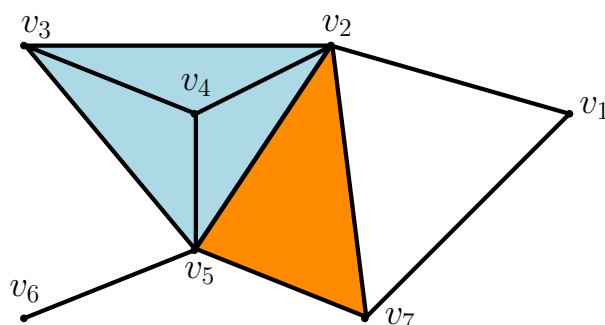
Podemos representarlo como sigue:



2. *El complejo simplicial \mathbb{Z} cuyo conjunto de vértices es $V = \mathbb{Z}$ y cuyos símlices son $S = \{\{n, n+1\} | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n\} | n \in \mathbb{Z}\}$ es un complejo simplicial de dimensión 1.*

Los vértices de K son los 0-símlices, y los pares $\{n, n+1\}$ son los 1-símlices.

3. Sea V el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_7\}$ y K el complejo simplicial dado por la siguiente figura:



Tomamos el subconjunto $\{v_2, v_5, v_7\}$ que es un 2-símplice, y tiene:

- 3 caras, que son a su vez 1-símplices: $\{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_5, v_7\}$
- 3 caras, que son 0-símplices: $\{v_2\}, \{v_5\}, \{v_7\}$
- la cara del subconjunto vacío: \emptyset

Definición 1.1.13. Se dice que un complejo simplicial K es **conexo** si, para cualesquiera dos vértices v y w de K , existe una sucesión v_0, v_1, \dots, v_q de vértices de K tal que $v_0 = v$, $v_q = w$ y $\{v_i, v_{i+1}\}$ es un 1-símplice de K para todo $i = 0, 1, \dots, q-1$, además el conjunto de estos 1-símplices se dice que es un **camino** que une v y w en K .

Dos construcciones fundamentales en topología algebraica, el cono y la suspensión, son casos especiales de la unión de dos complejos simpliciales.

Definición 1.1.14. Sean K y K' dos complejos simpliciales.

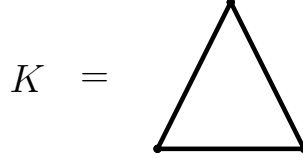
La **unión** de K y K' , que se denota por $K * K'$, viene dada por la familia de símplices:

$$\{\{x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_m\} / \{x_0, \dots, x_n\} \in K, \{y_0, \dots, y_m\} \in K'\}$$

Si $K' = \{v\}$ es un complejo simplicial generado por un único punto, escribimos $CK := K * K'$ para el **cono** sobre K . El vértice $v \in CK$ se llama **vértice del cono**.

Si $K' = \{v, u\}$ es un complejo simplicial dado por dos vértices aislados, entonces $\Sigma K := K * K'$ es la **suspensión** de K .

Ejemplo 1.1.6. Sea K la triangulación de la esfera de dimensión 1 ($|K| = \mathbb{S}^1$) dada por 3 aristas y 3 vértices de la forma:



Tenemos entonces que el cono de K será una triangulación de la bola de dimensión 2, $|CK| = \mathbb{B}^2$ y la suspensión $\sum K$ será una triangulación de la esfera de dimensión 2, $\mathbb{S}^2 = \sum K$.

Definición 1.1.15. Sea K un complejo simplicial y $\tau \in K$ un símlice. Una cara propia σ de τ es una **cara libre** si σ no es una cara de ningún otro símlice de K , se denotará por $\sigma \prec \tau$.

Además, un símlice con una cara libre es necesariamente maximal. Podemos deducir entonces que si $\sigma \prec \tau$ es una cara libre en K , entonces $K - \{\tau, \sigma\}$ es un subcomplejo de K . Para ver que $L = K - \{\tau, \sigma\}$ es un complejo simplicial comprobaremos las dos propiedades de la definición 1.1.7:

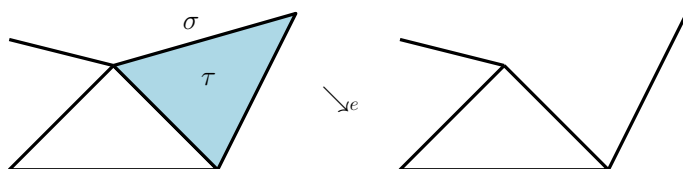
- $\forall \tilde{\tau} \in S(L), \forall \tilde{\sigma} \leq \tilde{\tau}$ veamos que $\tilde{\sigma} \in S(L)$.
Sea $\tilde{\tau} \in S(L)$ y $\tilde{\sigma} \leq \tilde{\tau}$. Sabemos que $\tilde{\tau} \in S(K)$ y $\tilde{\tau} \neq \sigma, \tau$. Como K es complejo simplicial, $\tilde{\sigma} \in S(K)$. Se tiene que:
 - $\tilde{\sigma} \neq \tau$ pues, al ser τ maximal en K , τ no es cara de ningún símlice de K y $\tilde{\sigma} \leq \tilde{\tau}$.
 - $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ pues si no, $\sigma \leq \tilde{\tau}$, pero, como $\tilde{\tau} \neq \tau$ y $\sigma \prec \tau$, no es posible que σ sea cara de otro símlice.

entonces se deduce que $\tilde{\sigma} \in S(L)$.

- Podemos tener que $V(L) = V(K)$ y entonces $\{v\} \in S(L), \forall v \in V(L)$ ó $V(L) = V(K) - \{v_0\}$ si $\sigma = v_0$, entonces $\forall v \in V(K) - \{v_0\}$, se tiene que $\{v\} \in S(K)$ y, por tanto, $\{v\} \in S(L)$ pues $\{v\} \neq \sigma, \tau$.

Definición 1.1.16. Sea $\sigma \prec \tau$ una cara libre en K y $L = K - \{\tau, \sigma\}$. La operación que transforma K en L se llama **colapso elemental (simplicial)** y se denota $K \searrow_e L$.

Ejemplo 1.1.7. La siguiente figura ilustra un colapso elemental de $K \searrow_e L$ con σ cara propia de τ .



En pocas palabras lo que estamos haciendo cuando realizamos un colapso simplicial elemental es eliminar un simplece maximal junto con una cara libre de este simplece en el complejo.

Es inmediato el hecho de que al realizar un colapso elemental no modificamos el tipo de homotopía del poliedro asociado.

Para profundizar en los posteriores resultados podemos consultar [10]

Proposición 1.1.1. Si $K \searrow_e L$, entonces $|L| \subset |K|$ es un retracto de deformación de $|K|$.

Definición 1.1.17. La **frontera** de τ , denotada $bd(\tau)$, es la colección de todas sus caras. Definimos $cbd(\tau) = \{\sigma \in bd(\tau) : \sigma \text{ tiene codimensión } 1 \text{ con respecto a } \tau\}$. Claramente si $dim(\tau) = n$, entonces $card(cbd(\tau)) = n + 1$.

Lema 1.1.1. Sea τ un simplece de dimensión n , con $\sigma \in cbd(\tau)$, y K un complejo simplicial con $K \cap \{\tau, \sigma\} = \emptyset$. Entonces, σ es cara propia de τ si y sólo si $cbd(\tau) - \sigma \subseteq K$.

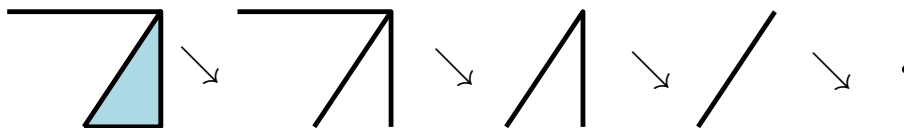
Definición 1.1.18. Denotamos por $\bar{\tau}$ al complejo simplicial más pequeño que contiene a τ .

Definición 1.1.19. Se dice que **K colapsa a L** si L puede ser obtenido a partir de K mediante una sucesión finita de colapsos elementales, y se denota por $K \searrow L$. Si L es un complejo simplicial generado por un único punto se dice que K **es colapsable**, y se denota por $K \searrow *$.

Si K colapsa a L , también decimos que **L se expande a K** , y se denota por $L \nearrow K$.

Más generalmente, sean $L, L' \subseteq K$ complejos simpliciales, una sucesión de colapsos y expansiones elementales $L = L_0 \searrow L_1 \dots \searrow L_n = L'$ tal que $L_i \subseteq K$ para todo $0 \leq i \leq n$ es una **equivalencia de homotopía simple entre L y L' en K** . Se dice entonces que L y L' tienen el mismo tipo de homotopía simplicial y se escribe como $L \sim_K L'$.

Ejemplo 1.1.8. A continuación, mostramos una sucesión de colapsos elementales desde un complejo simplicial 2-dimensional a un punto.



Como consecuencia de la Proposición 1.1.1 se tiene:

Proposición 1.1.2. Si K y L tienen el mismo tipo de homotopía simplicial, entonces $|K|$ y $|L|$ tienen el mismo tipo de homotopía. En particular, si K es colapsable, entonces $|K|$ es contráctil.

A continuación se introducirá la noción de homología para complejos simpliciales.

Definición 1.1.20. Sea K un complejo simplicial. Dado un símplece $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, se define la **relación de equivalencia** \sim sobre el conjunto de las posibles reordenaciones de los vértices de σ de la siguiente manera: $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (a_{\pi_0}, a_{\pi_1}, \dots, a_{\pi_n})$ si π es una permutación par de los índices, es decir, si se puede pasar de una ordenación a otra mediante un número par de transposiciones.

Esta relación es de equivalencia y da lugar a dos clases de equivalencia, cada una llamada una **orientación** de σ . Fijada una orientación, σ se llama **símplece orientado**, y se denotará por $[a_{\pi_0}, a_{\pi_1}, \dots, a_{\pi_n}]$ el símplece $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ con la orientación definida por la permutación π .

Definición 1.1.21. Sean $q > 0$, σ^q un q -símplece, y σ_1^q y σ_2^q las dos posibles orientaciones sobre σ^q . Dado un cuerpo \mathbb{F} , sea $C_q(K; \mathbb{F})$ el **\mathbb{F} -espacio vectorial generado por los q -símplexes orientados de K** , cociente por el subespacio generado por los elementos de la forma $\sigma_1^q + \sigma_2^q$.

Se prueba que $C_q(K; \mathbb{F})$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial para el cual una base se obtiene al escoger en cada q -símplece $\sigma \in K$ una orientación e identificar el elemento $-\sigma \in C_q(K; \mathbb{F})$ con σ con la orientación opuesta.

Si $q = 0$, $C_0(K; \mathbb{F})$ es el \mathbb{F} -espacio vectorial generado por los vértices de K , y si $q < 0$ se toma $C_q(K; \mathbb{F}) = 0$

Definición 1.1.22. Se define el **operador borde** como el homomorfismo de \mathbb{F} -espacios vectoriales $\partial_q : C_q(K; \mathbb{F}) \rightarrow C_{q-1}(K; \mathbb{F})$ dado por la extensión lineal de $\partial_q[a_0, a_1, \dots, a_q] = \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q]$, donde $(a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q)$ es el $(q-1)$ -símplice orientado obtenido al eliminar el vértice que ocupa el lugar i .

Se verifica que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ por lo que $\{C_q(K; \mathbb{F}), \partial_q\} = C_*(K; \mathbb{F})$ es un complejo de cadenas, llamado **complejo de cadenas simpliciales de K** .

Definición 1.1.23. Los \mathbb{F} -espacios vectoriales $Z_q(K; \mathbb{F}) = \text{Ker}(\partial_q)$ y $B_q(K; \mathbb{F}) = \text{Im}(\partial_{q+1})$ se llaman, respectivamente, **q -ciclos y q -bordes simpliciales** con coeficientes en \mathbb{F} , y $H_q(K; \mathbb{F}) = \frac{Z_q(K; \mathbb{F})}{B_q(K; \mathbb{F})}$ se llama el **q -ésimo \mathbb{F} -espacio vectorial de la homología simplicial de K** .

Se define el **i -ésimo número de Betti**, $b_i(K; \mathbb{F})$, de un complejo simplicial de K con coeficientes en \mathbb{F} como $b_i(K) = \dim H_i(K; \mathbb{F})$. La **característica de Euler-Poincaré** de K se define como $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(K; \mathbb{F})$.

Ejemplo 1.1.9.

1. Si K es colapsable, entonces $b_0(K; \mathbb{F}) = 1$ y $b_i(K; \mathbb{F}) = 0 \forall i \geq 1$.
2. Si K es un grafo conexo, entonces $b_0(K; \mathbb{F}) = 1$, y $b_1(K; \mathbb{F})$ es el número de ciclos del grafo.

1.2. Teoría Morse Discreta

A continuación, daremos una breve introducción a la Teoría de Morse Discreta para complejos simpliciales.

Para profundizar en las definiciones y resultados de la teoría Morse se puede consultar [5] y [6].

Definición 1.2.1. Una **función de Morse discreta** definida sobre un complejo simplicial K es una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo p -símplice $\sigma \in S(K)$ verifica:

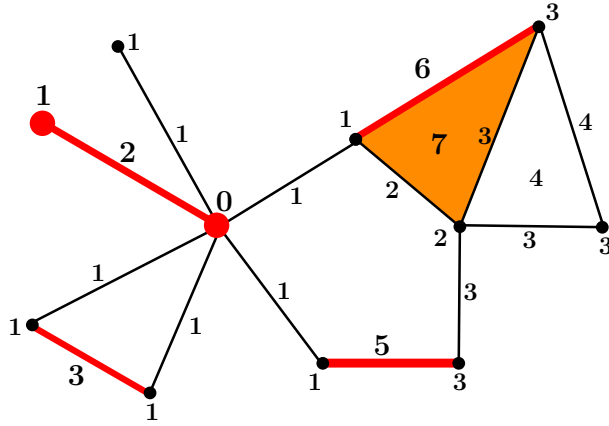
1. $\text{card}\{\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} : f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$
2. $\text{card}\{\zeta^{(p-1)} < \sigma^{(p)} : f(\zeta) \geq f(\sigma)\} \leq 1$

Definición 1.2.2. Se dice que un p -símplice $\sigma \in K$ es **crítico con respecto a f** si:

1. $\text{card}\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$
2. $\text{card}\{\zeta^{(p+1)} < \sigma : f(\zeta) \geq f(\sigma)\} = 0$

Si σ es un símplice crítico, se dice que $f(\sigma)$ es un **valor crítico**.

Ejemplo 1.2.1. Mostramos un 2-símplice crítico con respecto a f .



Definición 1.2.3. Un **campo vectorial discreto** V sobre un complejo simplicial K es un conjunto de pares de símplices de K , $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)})$, tales que:

- $|\dim(\alpha) - \dim(\beta)| = 1$
- $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$
- Todo símplice de K está, a lo más, es un único par.

Definición 1.2.4. Dado un campo vectorial discreto V sobre K , un **V -camino** es un sucesión de símplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_r^{(p)}$$

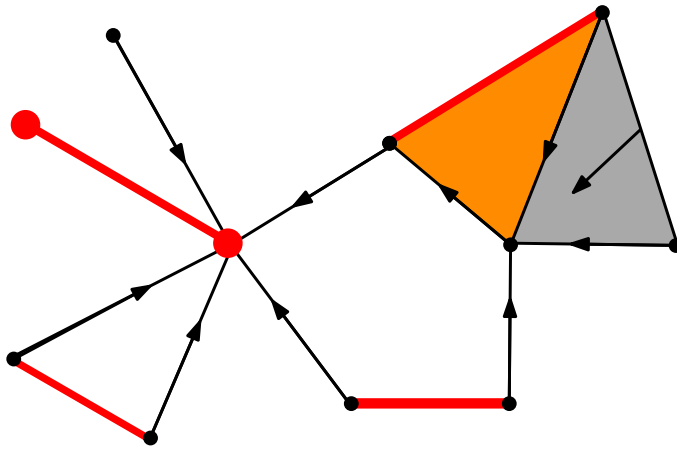
tales que para todo $i \geq 0$ se verifica que:

- $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$
- $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$

Se dirá que V -camino es **cerrado** si $\alpha_0^{(p)} = \alpha_{r+1}^{(p)}$

Definición 1.2.5. Dada una función de Morse discreta definida en K , se dice que un par de símlices $(\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)})$ está en el **campo vectorial gradiente inducido por f** si $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

Ejemplo 1.2.2. Indicamos con flechas el campo gradiente inducido por una función f dada en el Ejemplo 1.2.1 en la figura siguiente:

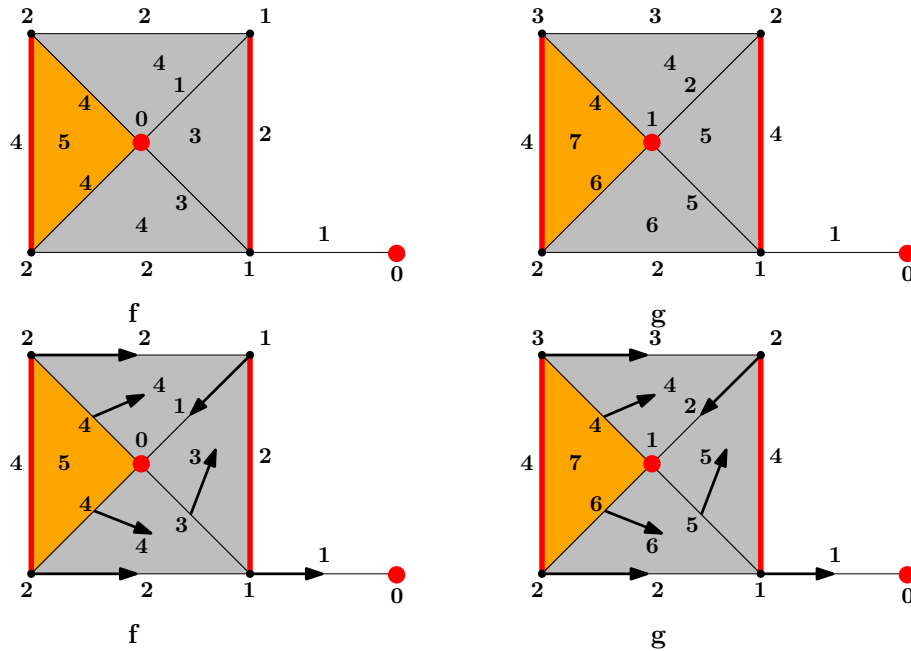


Teorema 1.2.1. Un campo vectorial discreto V es el campo gradiente inducido por una función de Morse discreta si y solo si no existen V -caminos cerrados.

Definición 1.2.6. Una función de Morse discreta se llama **excelente** si sus valores críticos son todos distintos.

Definición 1.2.7. Se dice que dos funciones f y g en K son **equivalentes** si para cada par de símlices $\sigma \subseteq \tau$ en K , tenemos que $f(\sigma) < f(\tau) \Leftrightarrow g(\sigma) < g(\tau)$.

Ejemplo 1.2.3. *Veamos dos funciones equivalentes f y g .*



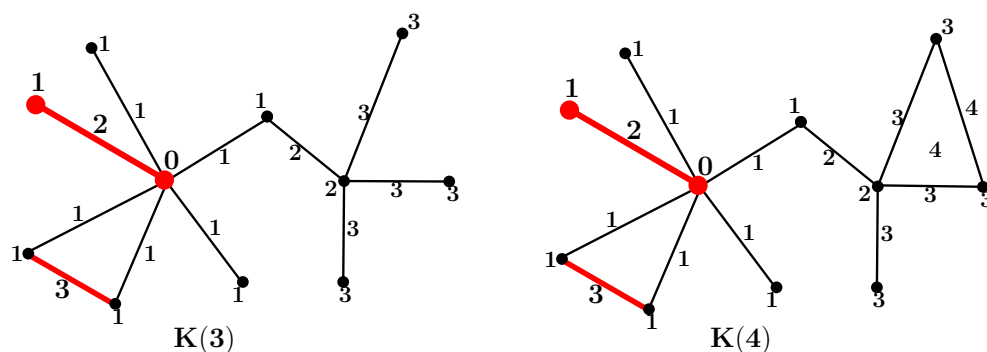
Las funciones f y g son equivalentes. Además poseen el mismo campo de gradiente sobre un complejo simplicial. En cambio, como podemos ver en la figura, la función f es excelente y la función g no lo es.

Definición 1.2.8. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo K , dado $c \in \mathbb{R}$ se define el **subcomplejo de nivel $K(c)$** como:*

$$K(c) = \bigcup_{f(\alpha) \leq c} \bigcup_{\beta \leq \alpha}$$

Teorema 1.2.2. *Si el intervalo $(a, b]$ no contiene valores críticos, se tiene que los subcomplejos de nivel $K(a)$ y $K(b)$ son del mismo tipo de homotopía simple.*

Ejemplo 1.2.4. Es fácil ver que los subcomplejos $K(3)$ y $K(4)$ tienen el mismo tipo de homotopía simple, como se muestra en las siguientes figuras.



Teorema 1.2.3. Si el intervalo $(a, b]$ contiene un único valor crítico $f(\alpha)$, se tiene que el subcomplejo de nivel $K(b)$ es **homotópicamente equivalente** a $K(a) \cup_F \mathbb{B}^p$ donde F es una aplicación continua de \mathbb{S}^{p-1} , esfera $(p-1)$ -dimensional, en $K(a)$ siendo p la dimensión de α .

Teorema 1.2.4. Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K . Se tiene que K es homotópicamente equivalente a un complejo celular con una célula de dimensión p por cada p -simplex crítico de f en K .

Teorema 1.2.5. (Desigualdades débiles de Morse) Dada una función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial X , denotamos por b_p al p -ésimo número de Betti de K con $p = 0, 1, \dots, n$. Se tiene que:

- $m_p(f) \geq b_p$
- $m_0(f) - m_1(f) + \dots + (-1)^n m_n(f) = b_0 - b_1 + \dots + (-1)^n b_n = \chi(X)$

donde $m_p(f)$ denota el número de simplices críticos de f de dimensión p .

Teorema 1.2.6. (Desigualdades fuertes de Morse) Bajo las hipótesis anteriores se tiene que para todo $p = 0, 1, \dots, n$:

- $m_p(f) - m_{p-1}(f) + \dots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + \dots \pm b_0$

1.3. Categoría geométrica continua

Recordemos las nociones y resultados básicos de la categoría de Lusternik-Schnirelmann para espacios topológicos.

Para profundizar se puede consultar [3] y [9].

Definición 1.3.1. *La categoría geométrica (abierta) de X , un espacio topológico, denotada $gcat^{abta}(X)$ o solo $gcat(X)$, es el mínimo entero $n \geq 0$ tal que existe un recubrimiento por abiertos $\{U_0, \dots, U_n\}$ de X con U_i contráctil. La categoría geométrica (cerrada) de X , denotada $gcat^{cerr}(X)$, es el mínimo entero $n \geq 0$ tal que existe un recubrimiento por cerrados $\{F_0, \dots, F_n\}$ de X con F_i contráctil.*

Definición 1.3.2. *La categoría de Lusternik-Schnirelmann sobre X , $cat X$, es el menor entero $n \geq 0$ tal que hay una cobertura de X por $n + 1$ subconjuntos abiertos. Puede contraerse a un punto dentro del espacio ambiente X . Escribimos $X = \infty$ si tal cobertura no existe.*

La noción de categoría discreta que estudiamos en esta memoria es más parecida a la noción continua de categoría geométrica, $gcat(X)$, que a la categoría de L-S, $cat(X)$, pues tienen en común que ambas no son invariantes por homotopía.

Se puede consultar en sección 3.3 de [3] una prueba de que la categoría geométrica continua no es invariante homotópico.

Dado un símlice σ de K , se tiene que $|\tilde{\sigma}|$ es un subespacio compacto de espacios métricos y, por tanto, cerrado, donde $\tilde{\sigma}$ es el menor subcomplejo de K que contiene a $\tilde{\sigma}$.

Obsérvese que, teniendo en cuenta que para cualquier cerrado contráctil se puede dar un subcomplejo contráctil abierto que lo contiene, y que también es contráctil, se verifica entonces que $gcat^{abta}(X) \leq gcat^{cerr}(X)$.

Capítulo 2

Categoría de Lusternik-Schnirelmann Discreta

En este capítulo daremos una noción discreta de categoría geométrica de Lusternik-Schnirelmann para complejos simpliciales y algunos resultados, la mayoría de los cuales se verifican en el contexto continuo pero otros no.

2.1. Categoría geométrica discreta

Comenzamos con la noción de categoría geométrica discreta y algunas propiedades básicas.

Definición 2.1.1. Sea $L \subseteq K$ un subcomplejo simplicial. Decimos que L tiene **pre-categoría discreta** menor o igual que m en K , y se denota por $\widetilde{dgc}at_K(L) \leq m$, si existe, $m + 1$ subcomplejos colapsables $\{U_0, U_1, \dots, U_m\}$, $U_i \subseteq K$ para $0 \leq i \leq m$, tales que $L \subseteq \bigcup_{i=0}^m U_i$.

Si $\widetilde{dgc}at_K(L) \not\leq m$, entonces diremos que $\widetilde{dgc}at_K(L) = m$.

La **categoría discreta (geométrica)** de L en K está definida por:

$$dgc}at_K(L) = \min\{\widetilde{dgc}at_K(L') : L \text{ colapsable a } L'\}.$$

Tomamos $\widetilde{dgc}at_K(K) = dgc}at_K(K)$, que se sigue inmediatamente de que si $L \searrow L'$, entonces $\widetilde{dgc}at_K(L) \geq \widetilde{dgc}at_K(L')$ y $dgc}at_K(L) \leq dgc}at_K(L')$.

Los primeros resultados los obtenemos al centrar nuestra atención en las conexiones entre la categoría discreta de un complejo simplicial 1-dimensional (un grafo) e invariantes conocidos del grafo. *Nash Williams* [12] definió la **arboricidad** de un grafo G como el menor número de árboles "spanning" con los que se puede cubrir G . Así, si G es un complejo simplicial 1-dimensional o grafo, entonces la categoría discreta coincide con la arboricidad de G .

Lema 2.1.1. *Sea G un complejo simplicial 1-dimensional. Se tiene que un subcomplejo $U \subseteq G$ es colapsable si y sólo si U es un árbol.*

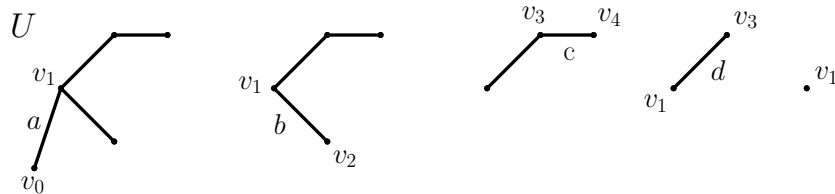
Demostración. Sea $U \subseteq G$ un árbol. Veamos que existe una sucesión de colapsos elementales $U = U_0 \searrow_e U_1 \searrow_e \dots \searrow_e U_p = \{*\}$.

Sea v_0 un vértice hoja en U , entonces existe una única arista (1-símplice) a tal que v_0 es adyacente a a . Se tiene entonces que v_0 es cara libre de a , $v_0 \prec a$, y, por tanto, $U \searrow_e U_1 = U - \{v_0, a\}$.

Si continuamos eligiendo vértices hojas, en cada U_i obtenemos colapsos elementales $U_i \searrow_e U_{i+1}$ hasta que llegamos a $U_p = \{*\}$, ya que el número de vértices de U es igual al número de aristas más una unidad y en cada colapso elemental hemos eliminado un vértice y una arista. Luego, $U \searrow_e *$.

Para probar el recíproco supongamos que $U \searrow_e *$, es decir, existe una sucesión finita de colapsos elementales $U = U_0 \searrow_e U_1 \searrow_e \dots \searrow_e U_p = \{*\}$. También podemos pensar que $\{*\} \nearrow_e U_{p-1} \nearrow_e \dots \nearrow_e U_1 \nearrow_e U = U_0$. En cada expansión elemental estamos añadiendo un vértice y una arista, por tanto, $U \subseteq G$ es un subgrafo que contiene p aristas y $p + 1$ vértices, luego, por el Teorema de Caracterización de árboles (véase Capítulo 4 de [8]), se tiene que U es un árbol. \square

Ejemplo 2.1.1. *Sea U un árbol de vértices $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y aristas $\{a, b, c, d\}$, en la figura se muestra una sucesión de colapsos con los que visualizamos que el árbol U es colapsable.*



1. En la primera figura, más a la izquierda vemos el árbol completo U y un vértice hoja v_0 con su arista adyacente a .

2. Vemos el árbol $U - \{v_0, a\} \equiv U_1$, tras realizar el primer colapso elemental. A continuación mostramos un nuevo vértice hoja v_2 y su arista adyacente b .

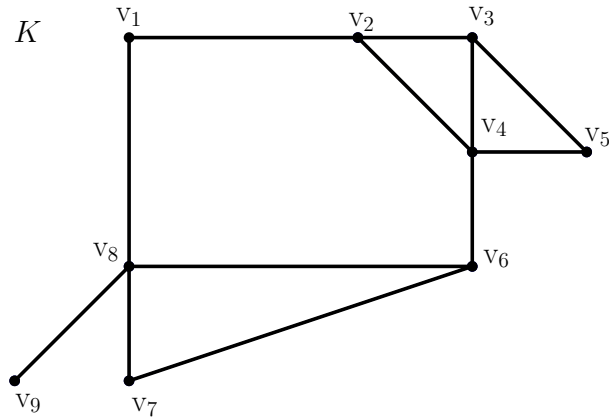
3. Realizado el segundo colapso elemental, tenemos el árbol $U - \{v_0, a\} - \{v_2, b\} \equiv U_2$.

4. Después del tercer colapso elemental, ya sólo nos queda un árbol correspondiente a una arista d y dos vértices hojas $U - \{v_0, a\} - \{v_2, b\} - \{v_4, c\} \equiv U_3$.

5. Con el último colapso elemental, queda demostrada la colapsabilidad de U , $U - \{v_0, a\} - \{v_2, b\} - \{v_4, c\} - \{v_3, d\} \equiv U_4 \equiv v_1$.

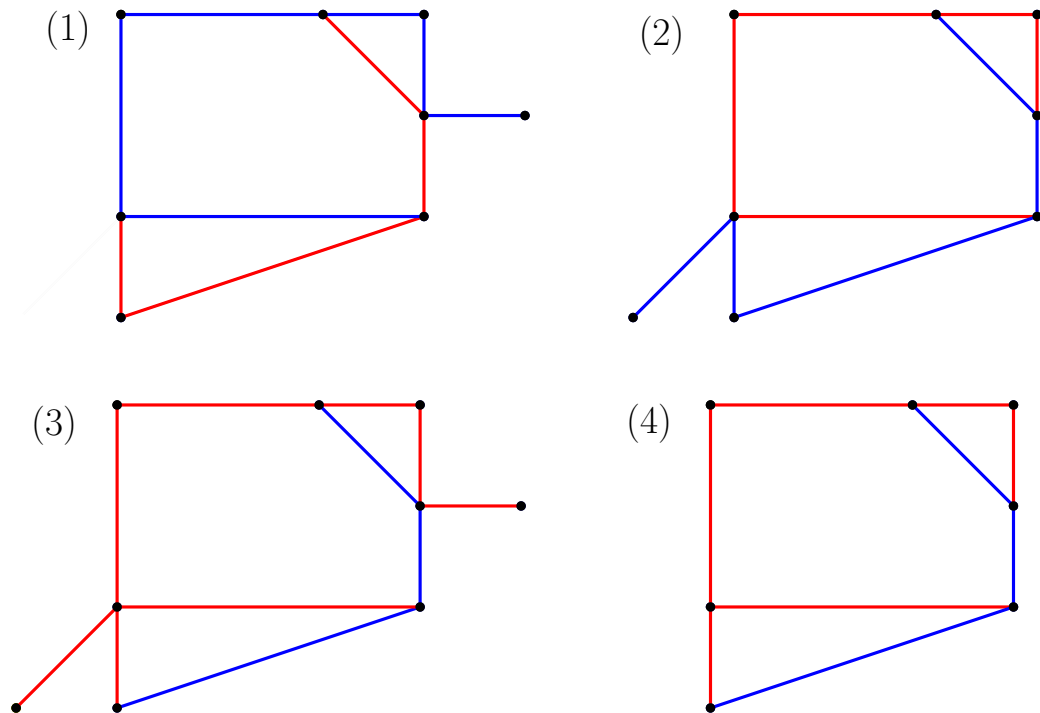
Nash Williams calculó la arboricidad de todos los grafos, y hay muchos más resultados sobre esto (véase Capítulo 9 de [8]). Sin embargo, vamos a dar nuestro propio argumento para estimar la arboricidad o $dgcat$ de algunas familias de grafos para comparar la categoría discreta con la categoría continua clásica. En el caso de un grafo, la categoría geométrica (clásica) está acotada superiormente por 1 y, por lo tanto, es de poco interés. Sin embargo, la categoría geométrica discreta puede alcanzar valores arbitrariamente grandes para un grafo.

Ejemplo 2.1.2. Consideramos el complejo simplicial unidimensional K de la siguiente figura:



y el subcomplejo de K , $L = K - \{\{v_3, v_5\}\}$, y calculamos su categoría geométrica.

Hay 4 subcomplejos L' a los que puede colapsar L , y calcularemos la pre-categoría de cada uno:



1. Consideramos el subcomplejo L' etiquetado con 1 en la anterior figura. Sea U_0 el árbol de vértices $\{v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_8, v_6\}$ y U_1 el árbol de vértices $\{v_2, v_4, v_6, v_7, v_8\}$, que constituyen un recubrimiento de L' por dos subcomplejos colapsables, entonces $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') \leq 1$ y, como $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') > 0$, de ello se deduce que $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') = 1$.
2. En el segundo caso, etiquetado con 2, tenemos U_0 el árbol de vértices $\{v_4, v_3, v_2, v_1, v_8, v_6\}$ y U_1 el árbol de vértices $\{v_2, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Al igual que en el caso anterior se tiene que $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') \leq 1$ y, como $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') > 0$, de ello deducimos $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') = 1$.
3. Sea U_0 el árbol de vértices $\{\{v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_8, v_6\}, \{v_9, v_8, v_7\}\}$ y U_1 el árbol de vértices $\{v_2, v_4, v_6, v_7\}$. Del mismo modo se tiene $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') \leq 1$ y $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') > 0$, por lo tanto, $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') = 1$.
4. Sea U_0 el árbol de vértices $\{\{v_4, v_3, v_2, v_1, v_8, v_6\}, \{v_8, v_7\}\}$ y U_1 el árbol de vértices $\{v_2, v_4, v_6, v_7\}$, tenemos $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') \leq 1$ y $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') > 0$, luego, $\widetilde{\text{dgc}}_K(L') = 1$.

De los 4 casos anteriores obtenemos que $\text{dgc}(L) = 1$.

La categoría geométrica discreta generaliza la noción de colapsabilidad para complejos simpliciales, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. Sean K un complejo simplicial y L un subcomplejo de K . Entonces $\text{dgc}_K(L) = 0$ si y sólo si L es colapsable.

Demostración. Suponemos $\text{dgc}_K(L) = 0$. Entonces existe un subcomplejo $L' \subseteq L$ tal que $L \searrow L'$ y $\text{dgc}_k(L) = 0$. Como $\text{dgc}_k(L') = 0$, $L' \searrow \{v\}$ para algún vértice $v \in L'$. Combinando los colapsos $L \searrow L'$ y $L' \searrow \{v\}$, obtenemos un colapso $L \searrow \{v\}$ y, entonces L es colapsable. Si $L = K$, directamente $\text{dgc}_K(K) = \text{dgc}(K) = 0$ y $K \searrow *$.

La otra implicación es inmediata. \square

Propiedades básicas. Es fácil ver la relación entre categoría discreta geométrica y categoría geométrica continua.

Corolario 2.1.1. $gcat(|K|) \leq dgcats(K)$

Demostración. La realización geométrica de un símlice de K es la unión de subcomplejos cerrados de $|K|$. De este hecho combinado con Proposición 1.1.2 se sigue que un recubrimiento de K por subcomplejos colapsables da lugar a un recubrimiento de $|K|$ por cerrados contráctiles. Entonces, se tiene $gcat^{abto}(|K|) \leq gcat^{cerr}(|K|) \leq dgcats(K)$. \square

Proposición 2.1.2. *Si K es un complejo simplicial con n vértices, entonces $dgcats(K) \leq n - 1$.*

Demostración. Sea $v \in K$ un 0-símlice, y se define $L_v = \overline{\{\sigma \in K : v \in \sigma\}}$, esto es, el subcomplejo generado por los símlices que contienen al vértice v . Veamos que $\{L_v\}_{v \in K}$ es un recubrimiento de K por subcomplejos colapsables. Para demostrar que L_v es colapsable, sea $\sigma \in L_v$ una cara de máxima dimensión en L_v . Entonces $\sigma - \{v\} \in L_v$ es una cara libre de σ , ya que desde cualquier otra cocara de $\sigma - \{v\}$ es de la forma $\sigma - \{v\} \cup \{x\} \notin L_v$. Así que, $L_v \searrow L_v - \{\sigma, \sigma - \{v\}\}$. Ahora tomamos $\tau \in L_v - \{\sigma, \sigma - \{v\}\}$ una cara de máxima dimensión en $L_v - \{\sigma, \sigma - \{v\}\}$ y repetimos hasta colapsar L_v a v . Como $\{L_v\}_{v \in K}$ cubre claramente a K , se tiene que $dgcats(K) \leq n - 1$. \square

Ejemplo 2.1.3. *Se conocen complejos simpliciales que tienen una realización geométrica contráctil pero no son colapsables, como, por ejemplo, la casa de Bing con dos habitaciones y el sombrero bobo D . Estos ejemplos muestran que la desigualdad del Corolario 2.1.1 puede ser estricta. Podríamos preguntarnos cómo de grande puede ser la diferencia. En el Ejemplo 2.1.8, mostraremos que la diferencia $dgcats(K) - gcat(|K|)$ puede hacerse arbitrariamente grande, incluso cuando K es un complejo simplicial 1-dimensional. Sin embargo, también está el caso del sombrero bobo $D \sim \{v\}$ pero $dgcats(D) = 1 > 0 = dgcats(\{v\})$. Por lo tanto, $dgcats$ no es un invariante de homotopía simple.*

Proposición 2.1.3. *Sea K un complejo simplicial y sean L_1 y L_2 subcomplejos de K . Entonces $dgcats_K(L_1 \cup L_2) \leq dgcats_K(L_1) + dgcats_K(L_2) + 1$*

Demostración. Sea $\{U_0, \dots, U_n\}$ un recubrimiento de L_1 por subcomplejos colapsables de K y $\{V_0, \dots, V_m\}$ un recubrimiento de L_2 por subcomplejos colapsables de K . Claramente $\{U_0, \dots, U_n, V_0, \dots, V_m\}$ cubre a $L_1 \cup L_2$, así que $dgcats(L_1 \cup L_2) \leq n + m + 1$. \square

Como en el caso continuo, la categoría discreta es 0 en un cono y al menos 1 para la suspensión.

Proposición 2.1.4. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $dgcat(CK) = 0$.*

Demostración. Vamos a demostrar que CK colapsa a un punto.

Sea $v \in CK$ el vértice y tomamos $\sigma_v = \sigma \cup \{v\}$ para algún $\sigma \in K$ y vemos $K \subseteq CK$ como la base del cono. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_{i_n}$ son todos los símlices de dimensión n en K , podemos dar la siguiente sucesión de colapsos elementales

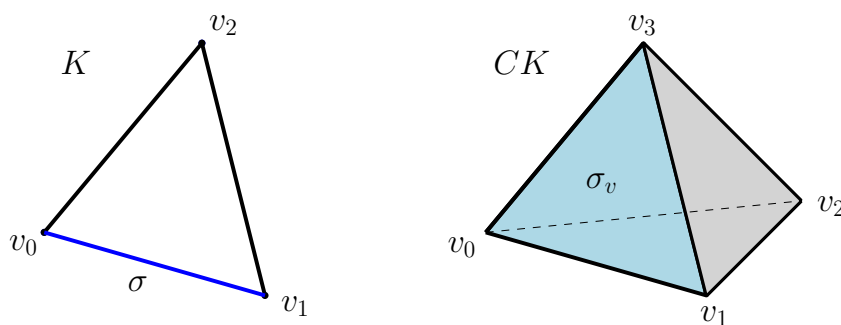
$$CK \searrow_e CK - \{\sigma_1, (\sigma_1)_v\} = K_1 \searrow_e K_2 = K_1 - \{\sigma_2, (\sigma_2)_v\} \searrow_e \dots \searrow_e K_{i_n}$$

donde K_{i_n} es el subcomplejo que se obtiene como el cono de $K - \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i_n}\}$, esto es, un subcomplejo de dimensión $n - 1$ que se obtiene al eliminar de K todos sus símlices de dimensión n . Podemos eliminar todas las caras n -dimensionales de K de este modo. Así, las caras $(n - 1)$ -dimensionales son ahora las caras de la base.

Podemos hacer el mismo proceso considerando ahora todos los símlices de K de dimensiones $n - 1$. Así llegaríamos mediante colapsos elementales al vértice v del cono. Por tanto, $CK \searrow_e \{v\}$ y $dgcat(CK) = 0$.

□

Ejemplo 2.1.4. *Veamos que $dgcat(CK) = 0$ para el complejo simplicial K de la figura:*



Sea $\sigma = \{v_0, v_1\}$ como vemos representado en la figura de la izquierda en color azul, obtendremos σ_v que será $\{v_0, v_1, v_3\}$. Teniendo en cuenta que $2 = \dim(K)$, entonces $\forall \sigma \in S(K)$ de dimensión 2 podemos considerar σ_v y, al ser $\sigma \prec \sigma_v$, podemos realizar el colapso elemental correspondiente. Por lo tanto, hemos obtenido un árbol que colapsa a un punto, el vértice v_3 . Así, que $dgcat(CK) = 0$.

La demostración del próximo corolario será Es inmediata teniendo en cuenta que $\sum K = CK \cup CK$.

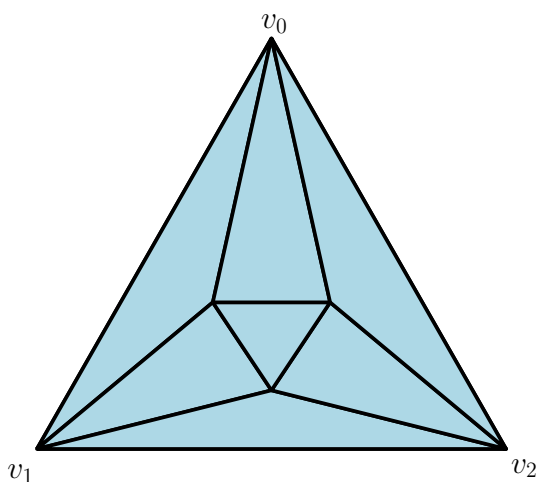
Corolario 2.1.2. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $d\text{gcat}(\sum K) \leq 1$.*

Ejemplo 2.1.5. *Mostremos que $d\text{gcat}(\mathbb{S}^n) = 1$. Sea $\mathcal{P}([n])$ el complejo simplicial generado por todos los subconjuntos de $[n]$. Observamos que $\mathbb{S}^n = C\mathbb{S}^{n-1} \cup \Delta^n$ donde Δ^n es el n -símplice estándar. Se sigue de la descomposición:*

$$\begin{aligned} C\mathbb{S}^{n-1} \cup \{1, 2, \dots, n+1\} &= \\ &= C(\mathcal{P}([n+1]) - \{1, 2, \dots, n+1\}) \cup \{1, 2, \dots, n+1\} = \\ &= \mathcal{P}([n+1]) - \{1, 2, \dots, n+2\} - \{1, 2, \dots, n+1\} \cup \{1, 2, \dots, n+1\} = \\ &= \mathbb{S}^{n+1} \end{aligned}$$

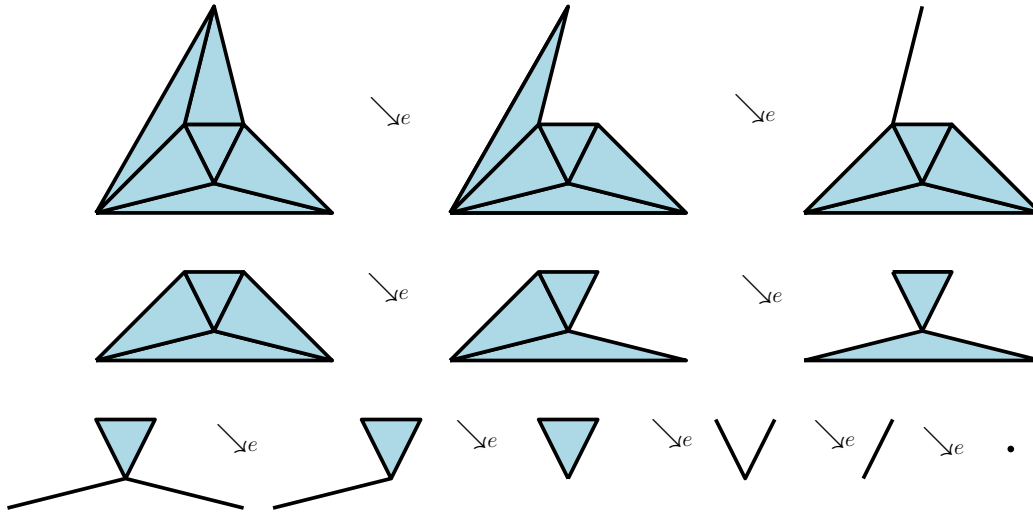
Ya que ambos, $C\mathbb{S}^{n-1}$ y Δ^n , son colapsables, se tiene que $d\text{gcat}(\mathbb{S}^n) \leq 1$. Como \mathbb{S}^n no contiene ninguna cara libre, \mathbb{S}^n es no colapsable y, por tanto, $d\text{gcat}(\mathbb{S}^n) = 1$.

Ejemplo 2.1.6. *Consideramos el complejo simplicial L , indicado por la siguiente figura.*



Si añadimos el 2-símplice de vértices v_0 , v_1 y v_2 , obtenemos un complejo simplicial K cuyo poliedro subyacente es la esfera 2-dimensional \mathbb{S}^2 .

Calculemos la categoría geométrica de L visto como subcomplejo de K .



Obsérvese que podemos realizar una sucesión de colapsos elementales hasta llegar a un punto, como se observa en la figura, comenzando en cualquiera de sus caras libres por simetría.

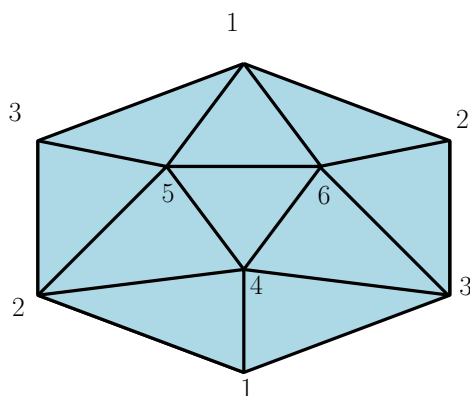
Por la Proposición 2.1.1, al ser L colapsable, tenemos que su categoría geométrica es cero ($d\text{gcat}(L) = 0$).

Ahora hacemos uso de la Proposición 2.1.3. Sabemos que $L' = \{v_0, v_1, v_2\}$ también es colapsable, entonces por la Proposición 2.1.1 tenemos de nuevo que $d\text{gcat}(L') = 0$. Luego como $K = L \cup L'$, tendremos

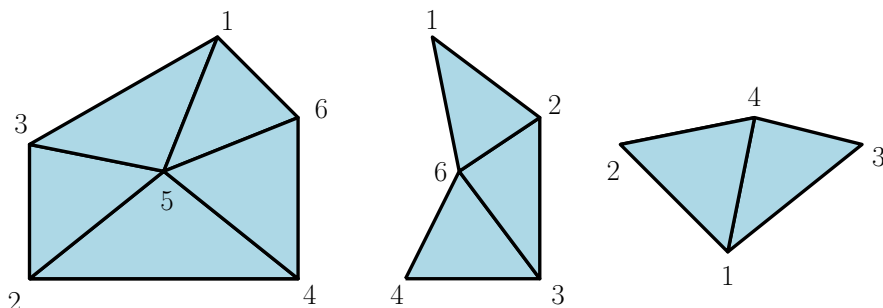
$$d\text{gcat}(K) \leq d\text{gcat}(L) + d\text{gcat}(L') + 1 = 0 + 0 + 1.$$

En consecuencia, $d\text{gcat}(K) = 1$.

Ejemplo 2.1.7. Consideremos la estructura simplicial en $\mathbb{R}P^2$ dada por la siguiente figura:



Es fácil ver que las siguientes figuras representan un recubrimiento por subcomplejos colapsables.



Por tanto, se tiene que $\text{dgc}(\mathbb{R}P^2) \leq 2$.

Ejemplo 2.1.8. Sea $K = K_n$, el grafo completo con n vértices. Demostraremos que $\text{dgc}(K) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Así que la categoría discreta de un complejo simplicial 1-dimensional puede ser arbitrariamente grande. Si U_i es colapsable, el número máximo de aristas que U_i puede tener es $n - 1$. Esto se sigue del Teorema de caracterización de árboles. Ya que K_n tiene un total de $n \frac{(n-1)}{2}$ aristas, K_n necesita al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ complejos colapsables en un recubrimiento. En consecuencia, $\text{dgc}(K_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ (que resulta ser el valor exacto de $\text{dgc}(K_n)$, cómo se puede ver en [8]). Se sabe que si X es un espacio conexo por caminos, $\text{gcat}(X)$ está acotado superiormente por $\dim(X)$. Por tanto, $\text{gcat}(|K_n|) \leq 1$. En consecuencia, la diferencia entre $\text{dgc}(K_n) - \text{gcat}(|K_n|)$ puede ser arbitrariamente grande.

2.2. Teorema de Lusternik-Schnirelmann discreto

El objetivo de esta sección es probar una versión en el contexto discreto del Teorema de Lusternik-Schnirelmann. Para ello vamos a ver un resultado previo.

Lema 2.2.1. *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Entonces existe una función de Morse discreta excelente $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ con todos los simplices críticos iguales a los de f , que es equivalente a f .*

Demostración. Sea $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ simplices críticos tal que $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$. Si no existen tales simplices, entonces hemos terminado. En caso contrario, definimos $f' : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $f'(\tau) = f(\tau)$, $\forall \tau \neq \sigma_1$ y $f'(\sigma_1) = f(\sigma_1) + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$ y $f(\sigma_1) + \epsilon$ es estrictamente menor que el valor más pequeño de f mayor que $f(\sigma_1)$. Luego, σ_1 es un simplex crítico de f' y f' es equivalente a f . Repetimos la construcción para cualesquiera par de simplices que compartan el mismo valor crítico para f' . Como f tiene un número finito de valores críticos, el proceso acabará con una función de Morse discreta excelente g que es equivalente a f . \square

Teorema 2.2.1. *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta con m valores críticos. Entonces $d\text{gcat}(K) + 1 \leq m$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.1 podemos suponer que la función de Morse discreta definida sobre K es excelente, ya que sólo nos preocupamos por el número de valores críticos. Primero veamos que

$$c_n := \min \{a \in \mathbb{R} : \exists K(a) \subseteq K \text{ tal que } d\text{gcat}_K(K(a)) \geq n - 1\}$$

es un valor crítico de f .

Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que c_n es un valor regular de f . Entonces, por el Teorema 3.3. de [5] hay un $\epsilon > 0$ tal que $K(c_n + \epsilon) \searrow K(c_n - \epsilon)$ en K . Sin embargo,

$$d\text{gcat}_K(K(c_n + \epsilon)) = d\text{gcat}_K(K(c_n - \epsilon)) \geq n - 1$$

así que:

$$c_n > c_n - \epsilon \in \{a \in \mathbb{R} : \exists K(a) \subseteq K \text{ s.t. } d_{\text{gcat}}(K(a)) \geq n - 1\},$$

lo que contradice el hecho de que c_n es el mínimo. Luego, cada c_n es un valor crítico de f .

Ahora probaremos por inducción en n que $K(c_n)$ debe contener al menos n simplices críticos. Por el principio del buen orden, el conjunto $\text{Im}(f)$ tiene un mínimo, podemos suponer que $f(v) = 0$ para algún 0-símplice $v \in K$.

Para $n = 1$, $c_1 = 0$, $K(c_1)$ contiene un símplice crítico. Por la hipótesis de inducción, suponemos que $K(c_n)$ contiene al menos n simplices críticos. Ya que f es excelente, $c_n < c_{n+1}$ así que hay al menos un símplice crítico en $f^{-1}(c_{n+1})$. En consecuencia, $K(c_{n+1})$ contiene al menos $n + 1$ simplices críticos. Por lo tanto, si $c_1 < c_2 < \dots < c_{d_{\text{gcat}}(K)+1}$ son los valores críticos, entonces $K(c_{d_{\text{gcat}}(K)+1}) \subseteq K$ contiene al menos $d_{\text{gcat}}(K) + 1$ simplices críticos. Así, $d_{\text{gcat}}(K) + 1 \leq m$. \square

Ejemplo 2.2.1. *Veamos un ejemplo donde se alcanza la igualdad. En efecto, sea K una triangulación de \mathbb{S}^n . Entonces hay una función de Morse discreta definida sobre K con 2 valores críticos [[5] Corolario 4.4(ii)]. Por el Ejemplo 2.1.5, $d_{\text{gcat}}(K) = 1$ y, por lo tanto, $d_{\text{gcat}}(K) + 1 = 2 \leq 2$. Por lo tanto, no se puede mejorar la desigualdad del Teorema 2.2.1.*

Capítulo 3

Estimación de la categoría de Lusternik-Schnirelmann discreta

En este capítulo, mostramos un algoritmo para obtener una cota superior de la categoría de Lusternik-Schnirelmann discreta de un complejo simplicial. Demostraremos que nuestro algoritmo es correcto y daremos cotas para la categoría discreta de varios complejos simpliciales. Demostraremos que la categoría discreta del *sombrero bobo* es 2, y en consecuencia, el *sombrero bobo* está más lejos de ser colapsable que *la casa de Bing*.

Hemos introducido la categoría LS discreta para complejos simpliciales de manera que cumpla propiedades análogas a la categoría geométrica LS clásica para espacios topológicos. Nuestra noción de categoría LS discreta está basada en la colapsabilidad, que está relacionada con la noción de tipo de homotopía simple. Dada $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta, en el sentido de *R. Forman*, hemos demostrado que la categoría discreta de K está acotada superiormente por el número de puntos críticos de f .

La categoría LS discreta de un complejo simplicial es una medida de la complejidad del mismo, de ahí el interés de construir procedimientos algorítmicos para determinarla.

Una vez probemos que el algoritmo que mostramos es correcto, veremos algunos ejemplos. Recordemos que un espacio topológico es contráctil si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto. Un complejo simplicial que es colapsable tiene siempre una realización geométrica contráctil (ver Proposición 1.1.2), pero el recíproco no tiene porque ser cierto. Se conoce que *la casa de Bing de dos habitaciones* y *el sombrero bobo* proporcionan ejemplos de complejos simpliciales con realización geométrica contráctil, pero que no son colapsables. En la *Proposición 3.3.1*, veremos que la categoría LS discreta del

sombrero bobo es 2, mientras que la categoría LS discreta de *la casa de Bing* es 1 y, en consecuencia, *el sombrero bobo* está en cierto sentido más lejos de ser colapsable que *la casa de Bing*.

Esta situación da lugar a que nos preguntemos sobre la existencia de complejos simpliciales colapsables con categoría discreta arbitrariamente grande.

3.1. Cota inferior combinatorial

Sea K un complejo simplicial. Si c_i^K denota el número de símlices de K de dimensión i , es fácil demostrar que $\chi(K) = \sum_i (-1)^i c_i^K$.

Definimos $E(c^K) = c_0^K + c_2^K + \cdots + c_n^K$ y $O(c^K) = c_1^K + c_3^K + \cdots + c_{n\pm 1}^K$, como el número de símlices de K de dimensiones pares e impares, respectivamente.

Proposición 3.1.1. *Sea K un complejo simplicial de dimensión n con c_i el número de símlices de K de dimensión i , $0 \leq i \leq n$. Se tiene que:*

- Si $E(c^K) - 1 \geq O(c^K)$, entonces $\left\lceil \frac{E(c^K) - 1}{O(c^K)} \right\rceil - 1 \leq \text{dgc}at(K)$.
- Si $E(c^K) - 1 \leq O(c^K)$, entonces $\left\lceil \frac{O(c^K)}{E(c^K) - 1} \right\rceil - 1 \leq \text{dgc}at(K)$.

Demostración. Sólo demostraremos la primera desigualdad, la otra se obtiene de forma análoga. Sea U un subcomplejo colapsable de K . Tenemos que $H_i(U) = 0$ para todo $i \geq 1$ al ser U colapsable, y, por tanto,

$$\chi(U) = 1 = \sum_i (-1)^i c_i^U.$$

Reorganizando esta ecuación tenemos $O(c^U) = E(c^U) - 1$. Ahora, como por hipótesis $E(c^K) - 1 \geq O(c^K)$, cualquier subcomplejo colapsable U puede verificar en el mejor de los casos $O(c^K) = E(c^U) - 1$, por lo que, para que se satisfaga esta ecuación, necesitamos al menos $\left\lceil \frac{E(c^K) - 1}{O(c^K)} \right\rceil$ subcomplejos colapsables. Entonces

$$\left\lceil \frac{E(c^K) - 1}{O(c^K)} \right\rceil - 1 \leq \widetilde{\text{dgc}at}(K).$$

Si $K \searrow_e K'$ es cualquier colapso elemental, entonces

$$\left\lceil \frac{E(c^K) - 1}{O(c^K)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{E(c^K) - 1 - 1}{O(c^K) - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{E(c^{K'}) - 1}{O(c^{K'})} \right\rceil \leq \widetilde{\text{dgc}at}(K')$$

Por lo tanto, $\left\lceil \frac{E(c^K) - 1}{O(c^K)} \right\rceil \leq \text{dgc}at(K)$. □

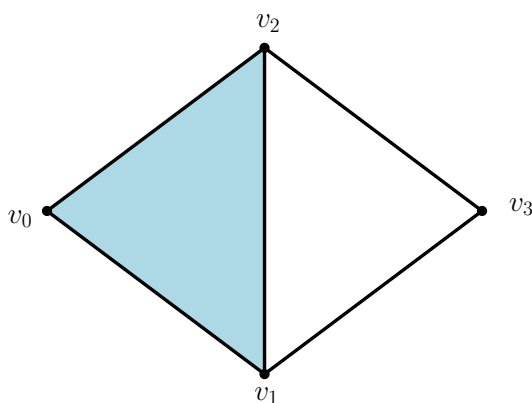
3.2. Algoritmo

Veamos a continuación la noción de *diagrama de Hasse*, de un complejo simplicial, que es un grafo que codifica las relaciones de incidencia de los simplices de K .

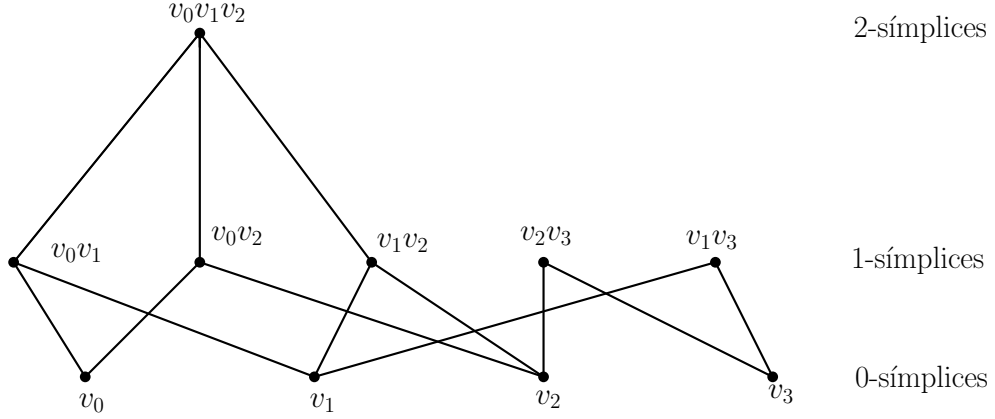
Definición 3.2.1. Sea K un complejo simplicial. Definimos el **diagrama de Hasse** de K , denotado por \mathcal{H} , como el grafo en el que cada uno de sus nodos es un simplex de K y hay una arista entre dos simplices σ, τ cuando τ sea una cara propia de σ . Sea $\mathcal{H}(i)$ el conjunto de los nodos de \mathcal{H} correspondiente a los i -simplices de K . Nos referiremos a $\mathcal{H}(i)$ como el nivel i .

Por abuso de lenguaje, no haremos distinción entre un simplex y un nodo de \mathcal{H} que represente el simplex.

Ejemplo 3.2.1. Sea K el complejo simplicial que mostramos a continuación:



El diagrama de Hasse de un complejo simplicial se representa dibujando en cada nivel $i \geq 0$ tantos nodos como simplices de dimensión i haya en K y se dibuja una arista de cada uno de ellos a los nodos del nivel inmediatamente superior que lo contengan como cara. Así, el diagrama de Hasse de K' puede representarse como:



Nos centramos ahora en las características adicionales del diagrama de Hasse de nuestro algoritmo.

Cada nodo v de \mathcal{H} tiene asociado 3 interruptores con on/off (encendido/apagado), cada interruptor corresponde a uno de los colores: rojo, verde y negro. Un nodo coloreado en rojo significa que no está en el recubrimiento \mathcal{U} , ni en el conjunto colapsable U ; un nodo coloreado en verde significa que está en el subcomplejo colapsable U y un nodo coloreado en negro significa que está en el recubrimiento \mathcal{U} . Por lo que si un nodo está coloreado en verde o negro, el interruptor rojo debe estar en off. Este hecho se usará pero no se indica a continuación. Por el contrario, un nodo puede ser a la vez negro y verde.

Definición 3.2.2. Denotaremos por \mathcal{H}_r al conjunto de los nodos de \mathcal{H} coloreados de rojo. Si $v \in \mathcal{H}(i+1)$, sea $N^i(v)$ el conjunto de todos los nodos verdes del nivel i conectados con v por una arista en \mathcal{H} (es decir, un vecino de v); entonces $N^i(v) = \{u \in \mathcal{H}(i) : u \text{ es verde, } u \text{ es cara propia de } v\}$.

Observación 1. Obsérvese que el cardinal de $N^i(v)$ puede ser a lo sumo $i+2$ ya que v es un símplex de dimensión $i+1$ y tiene, por tanto, $i+2$ caras de dimensión i .

Definición 3.2.3. Definimos el **conjunto de expansión** en la fila $i+1$ por $E(i+1) = \{v \in \mathcal{H}(i+1) / |N^i(v)| = i+1\}$. El **conjunto de expansión crítica** en la fila $i+1$ se define por $CE(i+1) = \{v \in E(i+1) / v \text{ es rojo}\}$.

Así, $E(i+1)$ agrupa todos los $(i+1)$ -símplices σ de modo que todas menos una de sus caras propias están coloreadas en verde.

Daremos nuestro algoritmo a continuación.

Algoritmo 1 Cota superior de la categoría LS discreta.

Entrada Un complejo simplicial conexo no vacío K .

Salida Un recubrimiento \mathcal{U} por subcomplejos colapsables de K .

PASO 1. Tomamos la familia $\mathcal{U} = \emptyset$ y construimos el diagrama de *Hasse* \mathcal{H} de K , coloreando todos los nodos en rojo.

PASO 2. Tomamos el conjunto $U = \emptyset$.

PASO 3 Elegimos una cara roja aleatoria σ tal que σ tenga máxima dimensión sobre todas las caras rojas. Para cada $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión, coloreamos τ de verde.

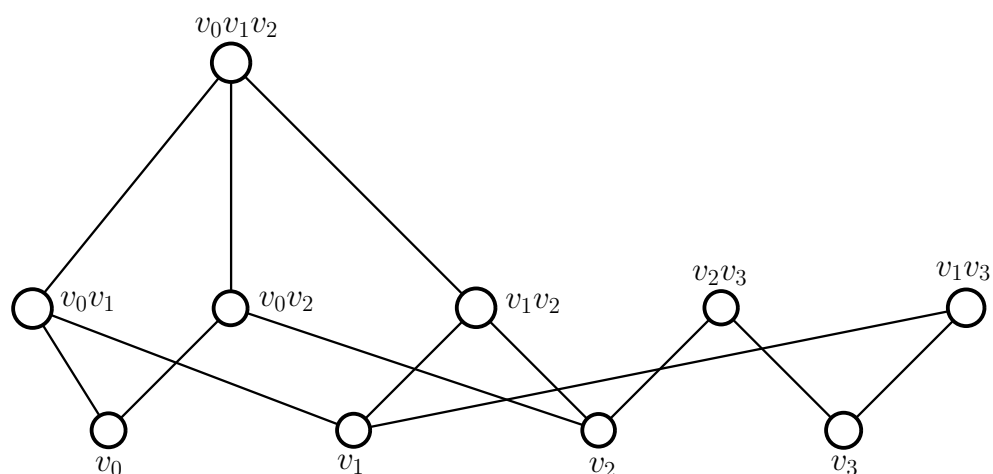
PASO 4. Iniciamos con $i = 0$.

PASO 5. Si $E(i + 1) = \emptyset$ vamos al paso 6. Si $CE(i + 1) = \emptyset$, elegimos un $v \in E(i + 1)$ aleatorio. Si no, elegimos un $v \in CE(i + 1)$. Coloreamos v (y todo $\tau \subseteq \sigma$) y su única cara propia no verde u en el nivel i (y todo $\tau \subseteq u$) de verde. Repetimos el paso 5.

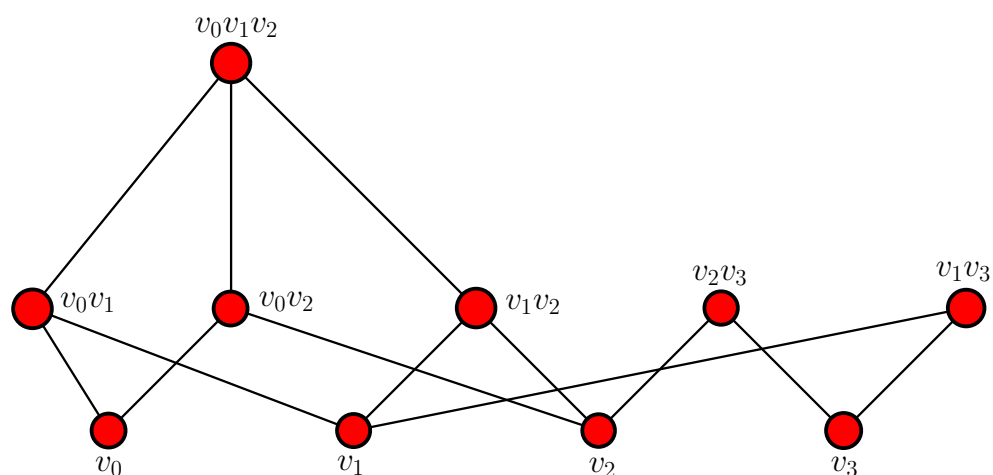
PASO 6. Incrementamos $i = i + 1$. Si $i = \dim(K)$, vamos al paso 7. Si no vamos al paso 5.

PASO 7. Añadimos todos los nodos verdes a U . Coloreamos cada nodo de U en negro y apagamos el verde. Añadimos U a \mathcal{U} . Si $\mathcal{H}_r = \emptyset$, entonces terminará el algoritmo. Si no, volvemos al paso 2.

Ejemplo 3.2.2. A continuación, aplicaremos el algoritmo al diagrama de Hasse del Ejemplo 3.2.1

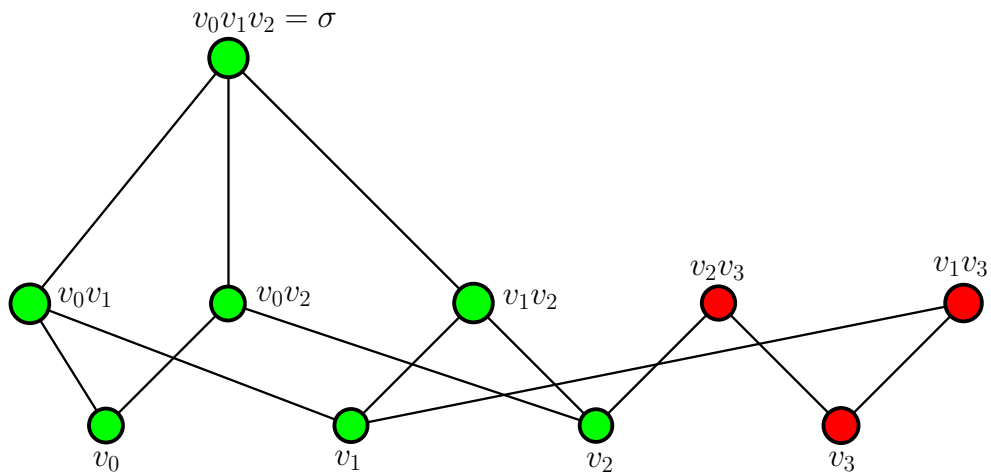


PASO 1. Coloreamos todos los nodos de rojo.



PASO 2. $U = \emptyset$.

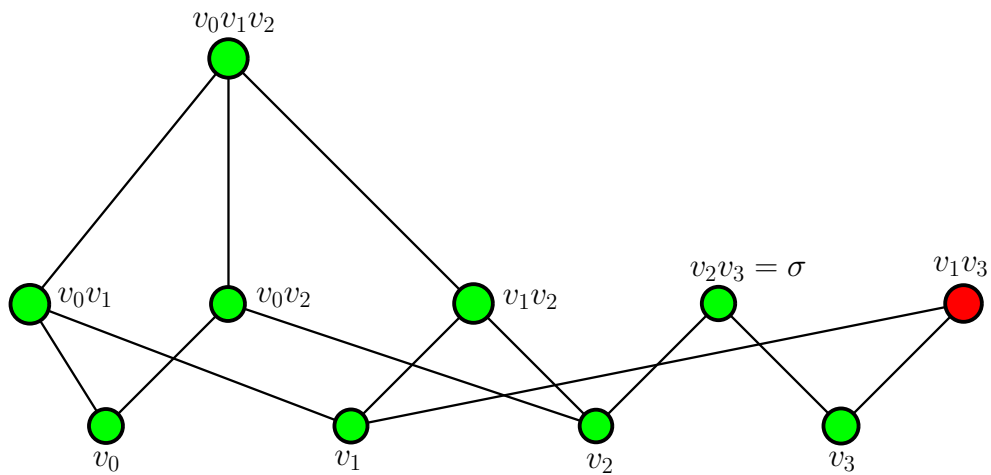
PASO 3. Elegimos una cara roja aleatoria σ tal que σ tenga máxima dimensión sobre todas las caras rojas, en este caso elegimos $v_0v_1v_2 = \sigma$ (la única posible). Después, cada $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión se colorea de verde.



PASO 4. $i = 0$.

PASO 5. Obtenemos que $E(i + 1) = E(1) = \{v_2v_3, v_1v_3\}$, pues todos sus vecinos de $\dim = 0$ son verdes excepto uno de ellos.

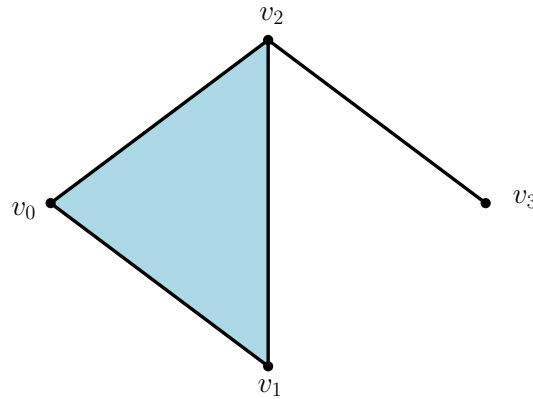
Seguimos en el **PASO 5** y miramos los elementos de $E(1)$ que están en rojo, en este caso los dos ($E(1) = CE(1)$). Escojo, por ejemplo, $\sigma = v_2v_3$ y coloreamos de verde los $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión.



Volvemos a obtener $E(i)$, que será $E(i) = \emptyset$. Por lo tanto, pasamos al **PASO 6**.

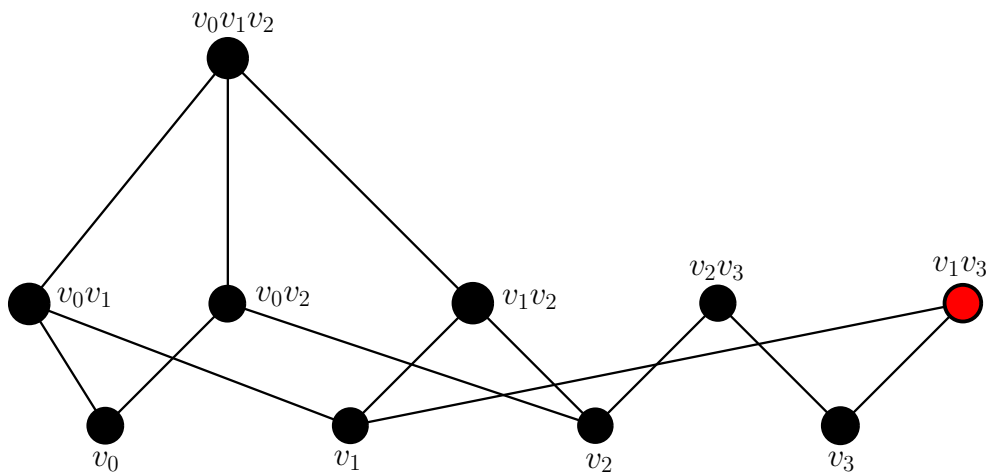
PASO 6. Incrementamos $i = i + 1$, tenemos entonces $i = 1 + 1 = 2$. Como $\dim(K) = i = 2$, pasamos al **PASO 7**.

PASO 7. Añadimos todos los nodos verdes a U_0 , luego $U_0 = K - \{v_1v_3\}$.



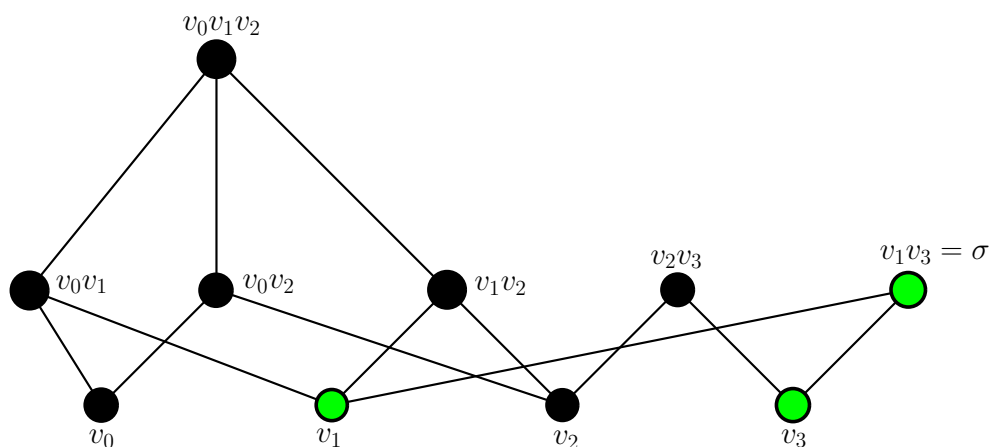
Obsérvese que U_0 es colapsable.

Coloreamos cada nodo de U_0 en negro y apagamos el verde. Añadimos U_0 a \mathcal{U} , esto es, el recubrimiento está formado únicamente por el subcomplejo U_0 . Como $\mathcal{H}_r \neq \emptyset$, no hemos terminado el algoritmo y volvemos al **PASO 2**.



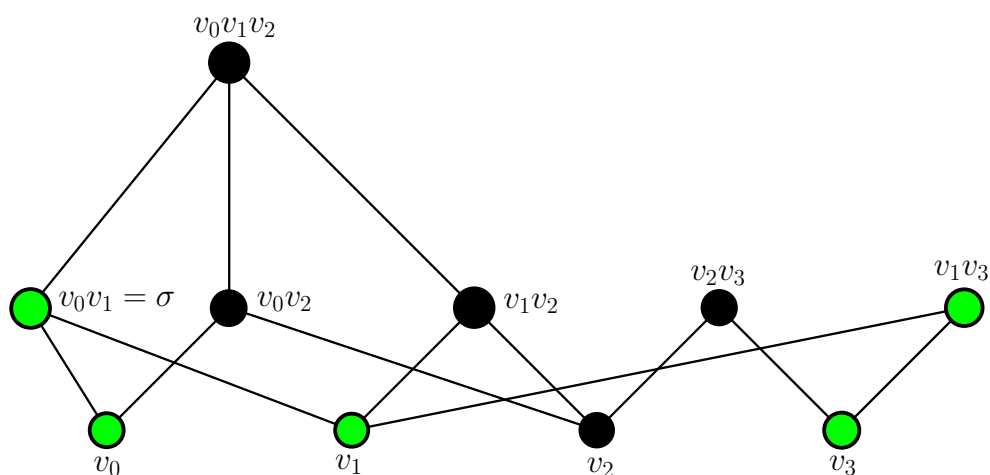
PASO 2. Empezamos de nuevo el algoritmo, $U = \emptyset$.

PASO 3. El único nodo rojo es v_1v_3 , en consecuencia, $\sigma = v_1v_3$. Coloreamos cada $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión de verde.



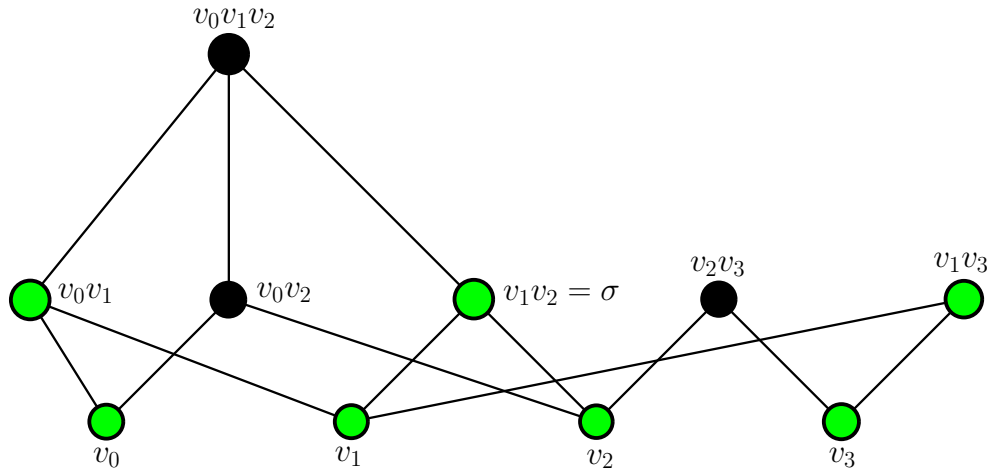
PASO 4. $i = 0$.

PASO 5. $E(1) = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3\}$ y como ninguno está coloreado de rojo, tenemos que $CE(1) = \emptyset$. Elegimos uno aleatorio, por ejemplo, $\sigma = v_0v_1$. Coloreamos cada $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión de verde.



Obtenemos de nuevo $E(1) = \{v_0v_2, v_1v_2, v_2v_3\}$, sin ningún nodo coloreado de rojo, así, de nuevo, $CE(1) = \emptyset$. En consecuencia, escogemos

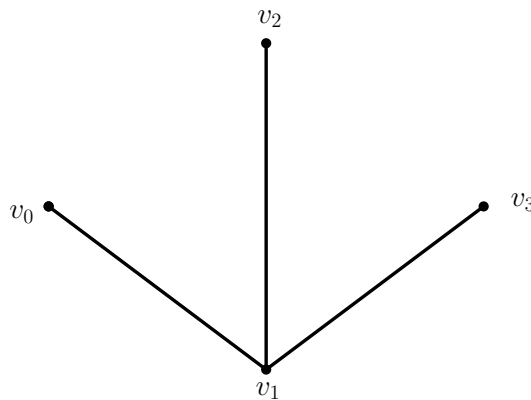
uno de los tres al azar, $\sigma = v_1v_2$. Coloreamos cada $\tau \subseteq \sigma$ de cualquier dimensión de verde.



Ahora obtenemos $E(1) = \emptyset$, luego pasamos al **PASO 6**.

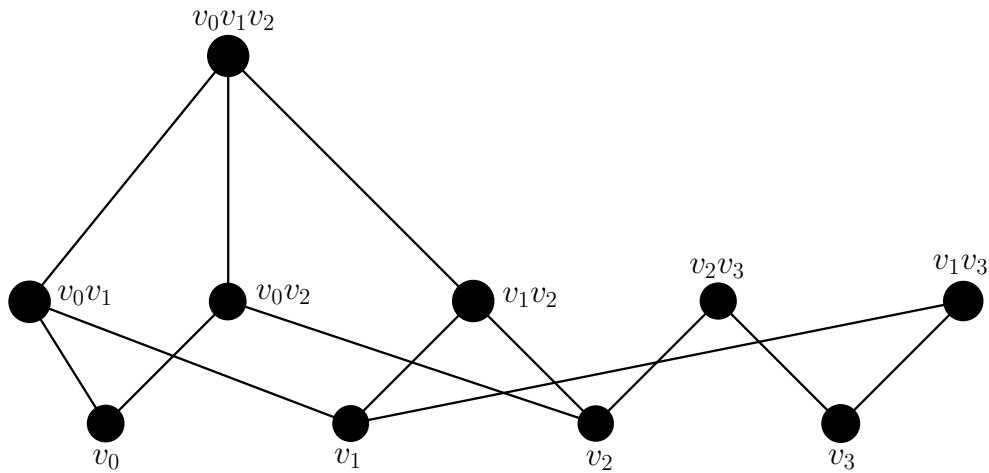
PASO 6. Incrementamos $i = i + 1 = 2$, como $\dim(K) = 2$ vamos al **PASO 7**.

PASO 7. Añadimos todos los nodos verdes a U_1 , obteniendo $U_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_0v_1, v_1v_2, v_1v_3\}$.



Obsérvese que U_1 es colapsable.

Coloreamos cada nodo de U_1 en negro y apagamos el verde. Añadimos U_1 a \mathcal{U} , esto es, el recubrimiento está formado por U_0 y U_1 .



Como podemos ver $\mathcal{H}_r = \emptyset$, luego hemos terminado.

El conjunto \mathcal{U} obtenido a partir del algoritmo es un recubrimiento de K por subcomplejos colapsables, así que $dgcat(K) \leq \text{card}(\mathcal{U}) - 1$. Como el complejo inducido por una cara maximal de U se incluye en el paso 3, se deduce que se tomarán como máximo el número de caras maximales de K en las iteraciones del algoritmo para encontrar un recubrimiento por subcomplejos colapsables de K , y en consecuencia, el algoritmo terminará.

La idea que está detrás del algoritmo es determinar si es posible o no una expansión a partir de la información proporcionada por el diagrama de *Hasse*. El algoritmo empieza por elegir al azar un subcomplejo de dimensión máxima, y continúa realizando expansiones elementales a partir de 0-símplices, si es posible, de 1-símplices, si es posible, etc. Si todos los vecinos de nivel i de un nodo en el nivel $i + 1$ están coloreados de verde excepto un vecino, esto significa que todos los símlices con los que limita de codimensión 1, excepto uno, están en el conjunto U y, por lo tanto, podemos realizar una expansión elemental. Un nodo de color rojo no se ha añadido al recubrimiento aún, así que se da preferencia a la expansión a lo largo de aquellos nodos del nivel $i + 1$ que son de color rojo. El número finito de expansiones elementales realizadas pueden deshacerse mediante la realización de los correspondientes colapsos elementales en orden contrario, por lo que, el subcomplejo que hemos obtenido al final de una iteración completa del algoritmo es colapsable. Formalmente, tenemos lo siguiente.

Proposición 3.2.1. *El algoritmo es correcto.*

Demostración. Debemos demostrar que cada U obtenido en el algoritmo es colapsable y que $\bigcup U = K$. Primero demostraremos que cualquier U es colapsable por inducción. De acuerdo con el paso 3, $U = \bar{\sigma}$ que es claramente colapsable. Supongamos que U es colapsable cuando llega al paso 5. Si $E(i+1) = \emptyset$ y terminamos en el paso 7, entonces está hecho. De otra forma, terminamos volviendo al paso 5 así que supondremos que $E(i+1) \neq \emptyset$ y elegimos al azar $u \in E(i+1)$ ó $CE(i+1)$. Por definición de estos conjuntos, $|N^i(u)| = i+1$ para que $i+1$ sea el límite de simplices de v de dimensión i que están en U y el u que encontramos en el paso 5 no está en U . En otras palabras, $cbd(v) - u \subseteq U$. Por el lema 1.1.1, $\{u, v\}$ es un par libre de U tal que $U \nearrow_e U \cup \{u, v\}$ es una expansión elemental. Por lo tanto, U es colapsable.

Ahora sea $\sigma \in K$, σ está en un subcomplejo colapsable U si y sólo si $\sigma \notin \mathcal{H}_r$ y el algoritmo termina sólo cuando $\mathcal{H}_r = \emptyset$, se tiene entonces que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\sigma \in U$. Por lo tanto, $\bigcup U = K$. \square

3.3. Computación

En esta sección presentamos los resultados obtenidos con el algoritmo en para [7] estimar la categoría LS discreta de varios complejos simpliciales conocidos, obtenidos de la web *La Biblioteca de Complejos Simpliciales*, [13].

Tabla 1: Resumen de la categoría discreta con cota superior e inferior

Complejo simplicial	Cota inferior	Cota superior	Categoría
Casa de Bing 2 hab	1	1	1
Sombrero bobo	1	2	2
Plano proyectivo ($\mathbb{R}P^2$)	1	2	2
4-Politopos de Lockeberg	1	1	1
3-esferas de Mani y Walkup	1	1	1
3-bolas de Rudin	0	0	0
K_5	2	2	2
K_{10}	4	4	4
K_{20}	9	9	9
K_{50}	24	25	24
K_{100}	49	50	49

En la tabla se ve claramente que, aunque el algoritmo tiende a ser preciso para ciertos complejos, todavía es posible mejorar esta estimación. La

casa de Bing con dos habitaciones y el *sombrero bobo* no tienen caras libres y, por lo tanto, no son colapsables, pero tienen una realización geométrica contráctil. Al no tener caras libres, sus categorías LS discretas están acotadas inferiormente por 1, aunque la Proposición 3.1.1 nos dice que está acotada inferiormente por 0.

Ahora demostramos que $2 \leq d\text{gcat}(D)$, donde D es la triangulación del sombrero bobo que damos a continuación.

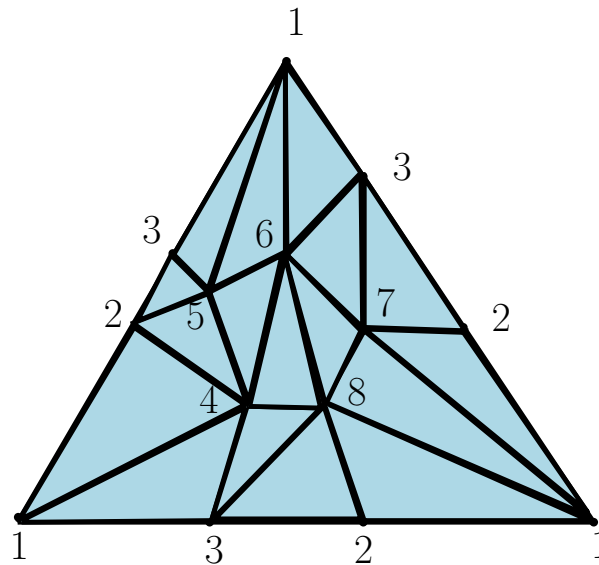


Figura 1: Triangulación del sombrero bobo.

Llamamos a cualquier cara 2-dimensional que contiene a las aristas 1 2, 1 3 ó 2 3 cara maximal **frontera**.

Proposición 3.3.1. *Sea D el sombrero bobo con la triangulación dada. Entonces $d\text{gcat}(D) = 2$.*

Demostración. En la tabla 3.3, $d\text{gcat}(D) \leq 2$. Usando las etiquetas anteriores, demostraremos por contradicción que $d\text{gcat}(D) > 1$, de lo que se deduce que $d\text{gcat}(D) = 2$. Supongamos que $D = U \cup V$, con U y V subcomplejos colapsables de D , y asumimos, sin pérdida de generalidad, que cada cara maximal de U y V es 2-dimensional y que U y V no comparten ninguna cara 2-dimensional. Utilizaremos una condición necesaria de colapsabilidad: que un complejo satisfaga la fórmula de Euler $v + f - 1 = e$. Por lo tanto, como

D está compuesto por 9 caras maximales frontera, uno de los dos subcomplejos colapsables, U ó V debe contener 5 de las caras maximales frontera, por ejemplo, U . Afirmamos que, si U contiene al menos 3 caras maximales frontera con las aristas 1 2, 1 3 y 2 3 en su borde, entonces U tiene homología no trivial ó $U = D$.

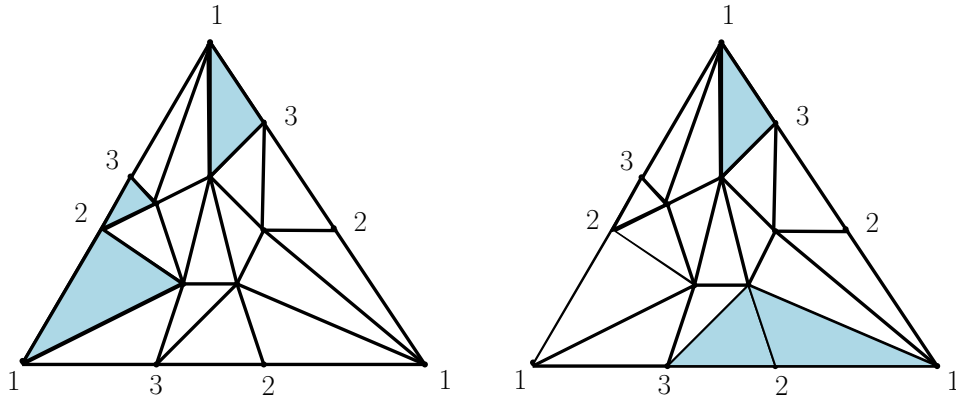


Figura 2: Si U contiene las caras maximales frontera que se muestran en una de estas dos figuras, entonces U no puede ser colapsable.

La configuración satisface $6 + 3 - 1 \leq 8$ ó $6 + 3 - 1 \leq 9$, lo que implica que la realización del complejo no es contráctil y, por lo tanto, no es colapsable. Cada vez que añadamos una cara maximal añadimos la cara junto con una arista, la cara y dos aristas, ó la cara, dos aristas, y un vértice común. En cualquier caso, al menos una arista se añade por cualquier símple de otro tipo, así que $v + f - 1 = e$ nunca se verificará a menos que $U = D$ (pues $\#V(D) = 8$, $\#F(D) = 17$ y $\#E(D) = 24$), que no es colapsable.

En consecuencia, asumimos que U no contiene 3 caras maximales frontera conteniendo las aristas 1 2, 1 3 y 2 3. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U contiene las aristas 1 3 y 1 2, ya que las otras dos posibilidades son similares. Como U no contiene la arista 2 3, V contendrá las caras maximales 2 3 8, 2 3 7 y 2 3 5.

Además, suponiendo que U contiene 1 3 6, un análisis similar haríamos si V contuviera la cara maximal 1 3 6, entonces U ó V no puede ser colapsable. Si U contiene también la cara maximal 1 2 8, entonces se puede comprobar que con U y V conteniendo al menos las caras mencionadas anteriormente, la cara maximal 6 7 8 creará siempre un ciclo en U y en V .

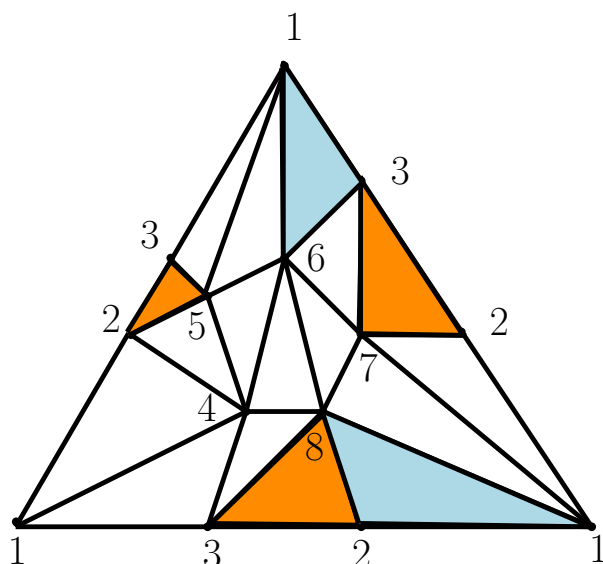
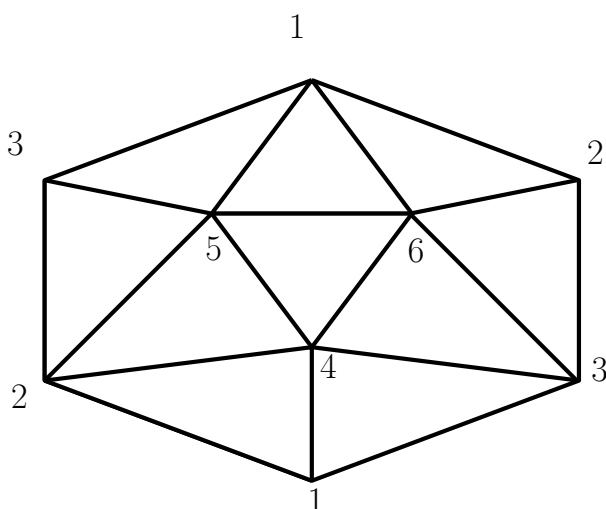


Figura 3: La colección mínima de caras maximales de U están coloreadas de azul y la colección mínima de caras maximales de V están coloreadas de naranja. La adición de cualquier cara maximal con la arista 6 8 a cualquier U ó a V conteniendo las caras maximales azules y naranjas anteriores, respectivamente, produce un ciclo.

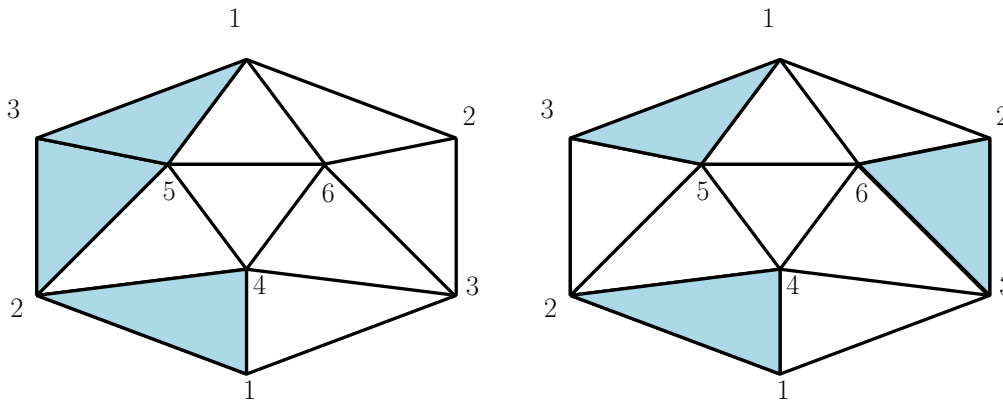
En otro caso, V debe contener la arista 2 8. Entonces U contiene la cara maximal 1 7 8, pues de lo contrario, al añadir la arista 7 8 se crearía un ciclo en V . Pero entonces, al igual que antes, la arista 6 8 crearía un ciclo en U ó en V . Así que D no puede ponerse como unión de dos subcomplejos colapsables y $1 < d_{\text{cat}}(D)$, que es lo que queríamos demostrar. \square

Ejemplo 3.3.1. *Basándonos en la triangulación del Ejemplo 2.1.7 del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ comprobaremos que $dgact(\mathbb{R}P^2)$.*



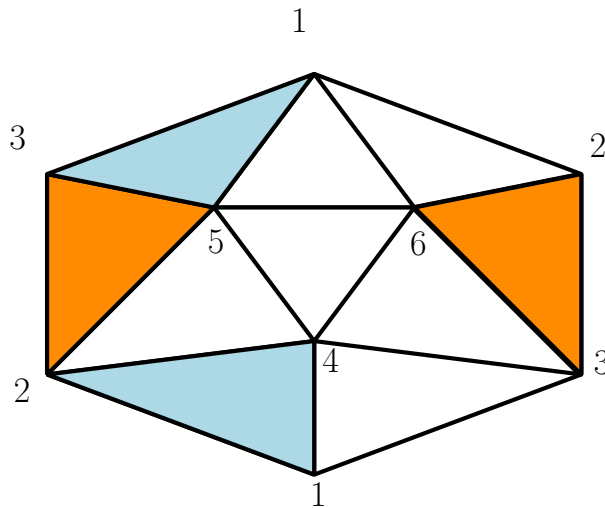
Sabemos que $dgact(\mathbb{R}P^2) \leq 2$. Veamos a continuación que $dgact(\mathbb{R}P^2) > 1$.

Supongamos que existen dos subcomplejos colapsables U y V tales que $\mathbb{R}P^2 = U \cup V$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las caras maximales de U y V son 2-dimensionales y que no tienen ninguna cara común. Como tenemos un total de 10 caras maximales, no es posible que los dos subcomplejos tengan 4 o menos caras maximales. Supongamos que U tiene 5 ó más. Veamos que no es posible que U contenga 3 caras maximales que contengan cada una a las tres aristas 1 2, 1 3 y 2 3. Si no fuera así, U contendría un subcomplejo U' con 3 caras maximales, 5 ó 6 aristas y 5 ó 6 vértices.



La configuración satisface $5 + 3 - 1 > 5$ ó $6 + 3 - 1 > 6$. Por lo que, $v + f - 1 = e$ no se verifica para U' . Para completar las caras maximales que están en U y no en U' tendremos que añadir por cada cara maximal una arista, dos aristas ó dos aristas y un vértice. Por lo que, U tampoco verificará la relación $v + f - 1 = e$.

Así que U no puede contener las tres aristas 12 , 13 y 23 . Supongamos que 23 no está en U , entonces las caras maximales 235 y 236 están en V .



Pero la cara maximal 456 no podría estar en U ni en V , pues si estuviera se crearía un ciclo lo que contradeciría el hecho de que U y V son colapsables.

Luego, $d\text{gcat}(\mathbb{R}P^2) > 1$ y, como teníamos $d\text{gcat}(\mathbb{R}P^2) \leq 2$, concluimos que $d\text{gcat}(\mathbb{R}P^2) = 2$.

Observación 2. *Una forma alternativa de demostrar que $\text{dgc}at(D) \leq 2$, sería usar el Teorema de Lusternik-Schirnirelmann discreto, que demostramos en el capítulo anterior y establece que si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse discreta con m valores críticos, entonces $\text{dgc}at(K) + 1 \leq m$. Se puede definir una función de Morse discreta $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente 3 valores críticos [2]. Así, que por el Teorema 2.2.1, $\text{dgc}at(D) + 1 \leq 3$. Como se tiene que $\text{dgc}at(D) = 2$, lo que nos proporciona un ejemplo de igualdad en el Teorema de Lusternik-Schirnirelmann discreto.*

Aunque la anterior evidencia no garantice una conjetura, la *Proposición 3.3.1* sugiere que la existencia de un complejo con realización contráctil y con categoría discreta igual a un entero positivo previamente dado no ha sido investigada en profundidad, es decir, dado un entero positivo n , ¿existe un complejo simplicial con realización contráctil $A(n)$ tal que $\text{dgc}at(A(n)) = n$? La *casa de Bing con dos habitaciones* y el *sombrero bobo* responden a la pregunta de forma afirmativa para $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente.

Bibliografía

- [1] S. Aaronson, N.A. Scoville, *Lusternik-Schnirelmann category for simplicial complexes*. Illinois J. Math., 57(3) (2013) 743-753.
- [2] R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J. A. Vilches, *Perfect discrete Morse functions on 2-complexes*. Pattern Recognition Lett. 33(11) (2012) 1495-1500.
- [3] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*. Mathematical Surveys and Monographs, vol.103, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003).
- [4] D. Fernández Ternero, E. Macías-Virgós, J.A. Vilches, *Lusternik-Schnirelmann Category of simplicial complexes and finite spaces*. Topology Appl. 194 (2015) 37-50.
- [5] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*. Adv. Math. 134(1) (1998) 90-145.
- [6] R. Forman, *A user's guide to discrete morse theory*. Sémin. Lothar. Combin. 48 (2002), Art. B48c, 35pp.
- [7] B. Green, N. A. Scoville, M. Tsuruga, *Estimating the discrete Lusternik-Schnirelmann*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 45(1) (2015) 103-116.
- [8] F. Harary, *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London, (1969).
- [9] I. M. James. *On category, in sense of Lusternik-Schnirelmann*. Topology 17(4) (1978) 331-348.
- [10] D. N. Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*. Algorithms and Computation in Mathematics, 21. Springer, Berlin, 2008.
- [11] W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, vol.127, Springer-Verlag, New Youk, (1991).

- [12] C. St. J. A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs.*
J. Lond. Math. Soc. 36 (1961) 445-450.
- [13] http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/index_eng.html