



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

# **Teorema de Poncelet**

**Jesús López Sánchez**





## **Teorema de Poncelet**

**Jesús López Sánchez**

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Prof. Tutor D. Manuel Jesús Gago Vargas

16 de junio de 2018



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1. Superficies de Riemann: Definiciones básicas</b>	<b>17</b>
1.1. Cartas complejas y estructuras complejas . . . . .	17
1.2. Orientación y género . . . . .	24
<b>2. Morfismos entre superficies de Riemann</b>	<b>25</b>
2.1. Morfismos . . . . .	25
2.2. Teoremas sobre morfismos . . . . .	29
2.3. Isomorfismos del toro complejo . . . . .	32
<b>3. Propiedades de los morfismos</b>	<b>37</b>
3.1. Propiedades locales de los morfismos . . . . .	37
3.2. Propiedades globales de los morfismos . . . . .	40
3.2.1. Aplicaciones recubridoras . . . . .	40
3.2.2. Teorema de caracterización . . . . .	42
3.2.3. Fórmula de Hurwitz . . . . .	45
3.3. Más ejemplos de superficies de Riemann . . . . .	45
3.3.1. Estructura heredada . . . . .	45
3.3.2. Suma conexa de superficies de Riemann . . . . .	46
<b>4. Introducción a funciones elípticas</b>	<b>53</b>
4.1. Funciones elípticas . . . . .	53
4.2. La función $\wp$ de Weierstrass . . . . .	57
4.2.1. Ecuación diferencial para $\wp$ . . . . .	60
4.3. Las funciones $\zeta$ y $\sigma$ . . . . .	61

<b>5. La función modular</b>	<b>67</b>
5.1. Las funciones $g_2, g_3$	67
5.2. La función modular $J$	68
5.3. Región fundamental para $\Gamma$	70
5.4. Expansión de Fourier de $J$	72
5.5. Valores de $J$	75
5.6. Solución al problema de inversión	79
<b>6. Curvas elípticas</b>	<b>81</b>
6.1. Curvas elípticas	81
6.2. Modelos algebraicos	83
<b>7. Teorema de Poncelet</b>	<b>87</b>
7.1. Correspondencia de Poncelet	87
7.2. Ecuación algebraica para $\mathcal{M}$	88
7.3. Estructura compleja en $\mathcal{M}$	90
7.4. $\mathcal{M}$ es una curva elíptica	93
7.5. Los automorfismos $\sigma, \tau$ y $\eta$	96
7.6. Automorfismos involutivos del toro complejo	97
7.7. Prueba del teorema de Poncelet	99
<b>A. La esfera de Riemann</b>	<b>101</b>
<b>B. Curvas algebraicas</b>	<b>105</b>
<b>C. Ecuaciones paramétricas de cónicas lisas</b>	<b>107</b>
<b>D. Isomorfismo entre curvas hiperelípticas</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>118</b>

# Abstract

Poncelet's theorem is a famous result in projective geometry, dating to the early part of the nineteenth century. It concerns closed polygons inscribed in one conic and circumscribed about another. There are several proofs of the theorem, none of which are elementary. The proof of Poncelet's theorem that we present in this work requires basic notions of Riemann surfaces, classic results of complex analysis and basic principles of projective geometry. It relates to the theory of elliptic curves and exploits the fact that such curves are endowed with an analytic group structure.





# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de números enteros
$\mathbb{R}$	conjunto de números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de números complejos
$\mathbb{C}^*$	conjunto de números complejos no nulos
$\widehat{\mathbb{C}}$	esfera de Riemann
$\mathbb{H}$	semiplano superior abierto del plano complejo
$\operatorname{Re} z$	parte real de un número complejo $z$
$\operatorname{Im} z$	parte imaginaria de un número complejo $z$
$ z $	valor absoluto de un número complejo $z$
$B(z, \varepsilon)$	$\{w \in \mathbb{C} \mid  w - z  < \varepsilon\}$
$\dot{B}(z, \varepsilon)$	$\{w \in \mathbb{C} \mid 0 <  w - z  < \varepsilon\}$
$\overline{B}(z, \varepsilon)$	$\{w \in \mathbb{C} \mid  w - z  \leq \varepsilon\}$
$\mathbb{P}^2$	plano proyectivo complejo
$C^*$	cónica dual de la cónica lisa $C$
$p_*$	haz de rectas a través del punto $p$
$\emptyset$	conjunto vacío
$\#A$	cardinal del conjunto $A$
$\operatorname{int}(A)$	interior topológico del conjunto $A$
$A'$	derivado topológico del conjunto $A$
$\overline{A}$	clausura topológica del conjunto $A$
$A \times B$	$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$



# Introducción

Sean  $C$  y  $D$  dos elipses en el plano real, con  $D$  dentro de  $C$ . Supongamos que existe un polígono cerrado de  $n$  lados, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ . Entonces, para cualquier punto  $p$  de  $C$ , existe un polígono cerrado de  $n$  lados, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ , tal que  $p$  es uno de sus vértices.

La Figura 1 ilustra el caso  $n = 8$ . El polígono cerrado de línea continua está inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ . El trazado de línea discontinua describe la existencia de un polígono cerrado de ocho lados, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ , tal que  $p$  es uno de sus vértices.

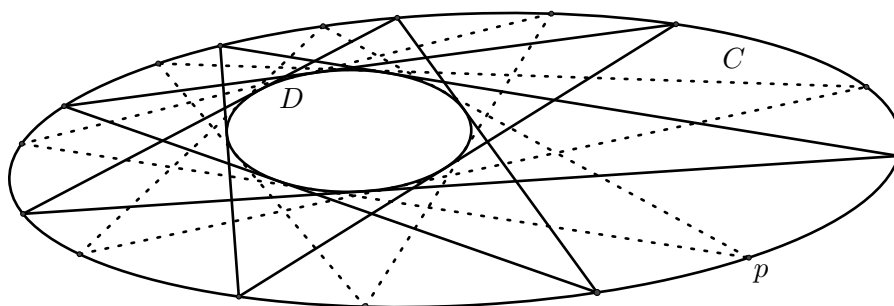


Figura 1: Teorema de Poncelet

La afirmación anterior se conoce como Teorema de Poncelet. El matemático francés Jean-Victor Poncelet descubrió el teorema en 1813, mientras se encontraba retenido en la ciudad rusa de Saratov, como prisionero de guerra. En 1822, después de volver a Francia, una prueba del resultado anterior aparece publicada en su libro [Pon22]. Poncelet prueba el teorema como corolario de un resultado más general, conocido como Teorema General de Poncelet, es cual puede ser enunciado como sigue: Sean  $C, D_1, \dots, D_n$  cónicas lisas en el plano proyectivo real de un misma haz. Si existe un polígono cerrado de  $n$  lados, inscrito en  $C$ , tal que cada lado es tangente a una de las cónicas  $D_1, \dots, D_n$ , entonces existen infinitos de tales polígonos.

Sus pruebas fueron duramente criticadas por algunos contemporáneos como Augustin Louis Cauchy, pues estaban basadas en un principio de continuidad no probado.

La siguiente prueba del Teorema de Poncelet que se conoce se debe a Carl Gustav Jacob Jacobi. En 1828, este ofreció una prueba usando el teorema de adición de funciones elípticas [Jac84]. Esencialmente, el teorema de Poncelet es equivalente al teorema de adición de curvas elípticas, y su prueba representa una manera sintética de deducir la estructura de grupo en una curva elíptica.

Desde su publicación, hasta la última década del siglo XIX, el teorema de Poncelet atrajo la atención de muchos matemáticos de la época. Una gran cantidad de literatura sobre variantes, pruebas alternativas y generalizaciones del teorema de Poncelet se produjo en estos años. Las principales obras de este período se deben a Nicola Trudi, Arthur Cayley, George Salmon, Adolf Hurwitz, Gaston Darboux y George H. Halphen. La principal razón de esta atracción parece provenir del hecho de que varias pruebas publicadas estaban basadas en análisis complejo y geometría proyectiva. Una buena descripción histórica del teorema de Poncelet, junto con novedosas pruebas y observaciones está dada en [BKOR87].

Un problema interesante que surgió tras la publicación de Jacobi, consistía en determinar bajo qué condiciones analíticas existirían polígonos cerrados de  $n$  lados, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ . En 1853, tales condiciones fueron obtenidas por Arthur Cayley [Cay54], usando teoría de integrales abelianas. Las publicaciones de Cayley sirvieron de gran inspiración a Henri Léon Lebesgue, el cual tradujo las condiciones de Cayley a lenguaje geométrico [Leb42].

Recientemente, ambos problemas han sido estudiados de nuevo por los matemáticos Phillip Griffiths y Joseph Daniel Harris (1977-1978), ofreciendo pruebas modernas. En los artículos [GH77, GH78] relacionan los dos teoremas a curvas elípticas sobre el cuerpo de los números complejos, y a funciones elípticas, las cuales constituyen el conjunto de funciones meromorfa de estas curvas.

En este trabajo, la prueba ofrecida del teorema de Poncelet ha sido extraída del libro de Leopold Flato [Fla09, cap.9] y sigue la aproximación de Griffiths y Harris [GH77]. Concretamente, ellos prueban la siguiente versión del teorema de Poncelet en el plano proyectivo complejo.

**Versión- $\mathbb{P}^2$  del Teorema de Poncelet.** Sean  $C$  y  $D$  dos cónicas lisas en  $\mathbb{P}^2$ , en posición general. Supongamos que existe un polígono cerrado, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ . Entonces, para cualquier punto  $p$  de  $C$ , existe un polígono cerrado, inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$ , tal que  $p$  es uno de sus vértices.

Recuerde que las cónicas  $C$  y  $D$  están en posición general si su intersección está constituida por cuatro puntos, el cual es el número máximo posible como consecuencia del teorema de Bezout. Un polígono cerrado de  $n$  lados en el plano proyectivo complejo, con vértices consecutivos  $p_1, \dots, p_n$ , está inscrito en  $C$  y circunscrito sobre  $D$  si los puntos  $p_1, \dots, p_n \in C$  y las rectas determinadas por los pares de puntos  $(p_1, p_2), \dots, (p_n, p_1)$  son tangentes a  $D$ .

Esta versión del teorema de Poncelet en el plano proyectivo complejo se mantiene si las cónicas  $C$  y  $D$  no están en posición general [Fla09, cap.11], aunque la prueba requiere algunas otras consideraciones.

La afirmación anterior de la versión proyectiva compleja del teorema de Poncelet puede ser reformulada si precisamos la correspondencia de Poncelet  $\mathcal{M}$  y la aplicación de Poncelet  $\eta$ , asociada a  $C$  y  $D$ .

Sea  $D^*$  la cónica dual de  $D$ , es decir, el conjunto de rectas tangentes a  $D$ . La correspondencia de Poncelet  $\mathcal{M}$  para  $C$  y  $D$  está definida como

$$\mathcal{M} = \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*, x \in \xi\}.$$

Fijado  $(x, \xi) \in \mathcal{M}$ , denotemos por  $x'$  al otro punto de intersección de la recta  $\xi$  con la cónica  $C$ , y por  $\xi'$  a la otra recta del haz  $x'_*$  que es tangente a  $D$ . Observe que si la recta  $\xi$  es tangente a  $C$ , entonces  $x' = x$ , y si  $x' \in D$ , entonces las rectas  $\xi, \xi'$  son iguales.

La aplicación de Poncelet  $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , asociada a  $\mathcal{M}$ , está definida como

$$\eta(x, \xi) = (x', \xi'), \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{M}.$$

Es rutinario comprobar que  $\eta$  es una aplicación biyectiva. Además, como las cónicas  $C$  y  $D$  están en posición general,  $\eta, \eta^2$  no presentan puntos fijos.

Enunciemos la reformulación citada anteriormente.

*Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ . Si la aplicación  $\eta^n$  presenta un punto fijo, entonces  $\eta^n$  es la aplicación identidad.*

Observe que la afirmación anterior es efectivamente una reformulación de la versión proyectiva compleja del teorema de Poncelet, pues  $x, x' \in C$  y  $\xi \in D^*$ , para todo  $(x, \xi) \in \mathcal{M}$ . Ahora bien, para probar tal afirmación necesitamos introducir nociones básicas de superficies de Riemann, resultados clásicos de análisis complejo y principios básicos de geometría proyectiva.

Los rudimentos de superficies de Riemann que necesitamos están cubiertos en los tres primeros capítulos. En el primer capítulo introducimos el concepto de superficie de Riemann y presentamos varios ejemplos notables de tales superficies. En el segundo capítulo precisamos los morfismos entre estas superficies, probamos varios teoremas heredados del análisis complejo relativos a estos morfismos y determinamos los isomorfismos entre toros complejos. En el tercer capítulo nos centramos en estudiar propiedades locales y globales

de morfismos entre superficies de Riemann. Además, en este capítulo introducimos las superficies de Riemann denominadas curvas hiperelípticas, las cuales juegan un papel determinante en la prueba que nos hemos propuesto.

Los siguientes tres capítulos tienen como objetivo probar que las curvas hiperelípticas asociadas a curvas planas afines determinadas por polinomios de la forma

$$w^2 - (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3),$$

con  $a_1, a_2, a_3$  números complejos distintos, son curvas elípticas, y recíprocamente, cualquier toro complejo es isomorfo a una curva hiperelíptica de este estilo. Más detalladamente, en el cuarto capítulo introducimos las funciones elípticas, presentamos la función  $\wp$  de Weierstrass y determinamos la ecuación diferencial que esta satisface. En el quinto capítulo resolvemos el problema de inversión, basándonos en propiedades de la función modular  $J$ , las cuales son probadas previamente. En el sexto capítulo trabajamos con curvas elípticas, es decir, con superficies de Riemann las cuales son isomorfas a un toro complejo. En este sexto capítulo demostramos que las curvas elípticas pueden ser dotadas con una estructura de grupo analítico, la cual está unívocamente determinada por la elección del elemento neutro, y cumplimos el objetivo mencionado anteriormente, el cual es consecuencia inmediata de la solución del problema de inversión y de la ecuación diferencial que satisface la función  $\wp$  de Weierstrass.

Por último, en el séptimo capítulo probaremos la reformulación de la versión proyectiva compleja del teorema de Poncelet. Para tal fin, identificaremos la correspondencia de Poncelet  $\mathcal{M}$  para  $C$  y  $D$  con una curva algebraica lisa  $\gamma$  en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ . Así  $\mathcal{M}$  heredará la topología y estructura de superficie de Riemann de  $\gamma$ . Seguidamente, probaremos que esta curva algebraica  $\gamma$  es una curva elíptica y, como consecuencia, obtendremos que  $\mathcal{M}$  también es una curva elíptica, pues  $\mathcal{M}$  es isomorfa a  $\gamma$  como superficies de Riemann. Por lo tanto, podremos dotar a  $\mathcal{M}$  con una estructura de grupo analítico, heredada a través del isomorfismo que existe entre esta superficie y un toro complejo. Finalmente, usando resultados de automorfismos involutivos con puntos fijos de toros complejos, probaremos que la aplicación de Poncelet  $\eta$  asociada a  $\mathcal{M}$  es una traslación con respecto a la estructura de grupo analítico que ha sido heredada en  $\mathcal{M}$ , es decir, existe  $b \in \mathcal{M}$ , tal que

$$\eta(p) = p + b, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Así, obtendremos

$$\eta^n(p) = p + nb, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Ahora, es fácil probar la reformulación, pues si existe  $p_0 \in \mathcal{M}$  tal que  $\eta^n(p_0) = p_0$ , entonces  $nb$  debe ser el elemento neutro en  $\mathcal{M}$ .

Observe que la aplicación  $\eta^n$  presenta un punto fijo si, y solo si,  $nb$  es el elemento neutro en  $\mathcal{M}$ . La versión proyectiva del teorema de Cayley obtenida por Griffiths y Harris [GH78], se obtiene al relacionar estos puntos

de orden finito en curvas elípticas con propiedades de funciones elípticas, las cuales como antes comentamos constituyen las funciones meromorfas de estas curvas.

Sean  $C$  y  $D$  dos cónicas lisas en  $\mathbb{P}^2$ , en posición general, determinadas respectivamente por matrices simétricas  $A_C, A_D \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ . Definamos la multifunción  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$  como

$$F(t) = \sqrt{\det(tA_C + A_D)}, \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Como  $D$  es una cónica lisa, el determinante de la matriz  $A_D$  es distinto de cero, luego existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\det(tA_C + A_D) \neq 0, \forall t \in B = B(0, \varepsilon)$ . Observe que  $F$  admite dos ramificaciones holomorfas en  $B$ . Sea  $f$  una de estas ramificaciones. Consideremos los coeficientes  $(A_n)_{n \geq 0}$  del desarrollo en serie de potencias de  $f$  centrado en 0,

$$f(t) = A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n + \cdots, \quad \forall t \in B.$$

**Versión- $\mathbb{P}^2$  del Teorema de Cayley.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ . La  $n$ -ésima composición  $\eta^n$  de la aplicación de Poncelet asociada a  $C$  y  $D$  presenta un punto fijo si, y solo si,*

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0, & \text{si } n = 2m + 1 \ (m \geq 1), \\ \begin{vmatrix} A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0, & \text{si } n = 2m \ (m \geq 2), \end{cases}$$

Observe que la afirmación del teorema es independiente de la ramificación elegida de  $F$  en  $B$ , pues la otra ramificación holomorfa es  $-f$ . Una prueba del resultado anterior puede ser consultada en [Fla09, cap.10].





# Capítulo 1

## Superficies de Riemann: Definiciones básicas

Como se mencionó en la introducción, la prueba del Teorema de Poncelet que presentamos en este documento usa nociones de superficies de Riemann. En este capítulo definiremos tales superficies, y también presentaremos varios ejemplos importantes de superficies de Riemann, las cuales serán usadas posteriormente. Además, justificaremos que toda superficie de Riemann es una variedad diferenciable de dimensión 2 orientable, y concluiremos comentando sus consecuencias.

### 1.1. Cartas complejas y estructuras complejas

Sea  $X$  un espacio topológico. Pretendemos que  $X$  sea, localmente, como un abierto del plano complejo, así nos permitirá definir unas coordenadas complejas en cada punto de  $X$ .

**Definición 1.1.** *Una carta compleja, o simplemente carta, en  $X$  es un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subseteq X$  es un abierto en  $X$ , y  $V \subseteq \mathbb{C}$  es un abierto en el plano complejo. Se denota por  $(U, \phi)$ .*

Si  $\phi : U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $X$ , al subconjunto abierto  $U$  se le denomina dominio de la carta  $\phi$ . Además, la carta  $\phi$  está centrada en  $p \in U$  si  $\phi(p) = 0$ .

*Ejemplos 1.2.*

1. En el plano real con la topología euclídea  $\mathcal{T}_e$ , para cualquier abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , la aplicación  $\phi_U : U \rightarrow U$ , definida como  $\phi_U(x, y) = x + iy$ , es una carta en  $\mathbb{R}^2$ . Es más, si  $(0, 0) \in U$ , entonces la carta  $\phi_U$  está centrada en  $(0, 0)$ .

2. En la esfera de Riemann, definida en el apéndice (A), consideremos los abiertos  $U_1 = \mathbb{C}$ ,  $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ . Las aplicaciones  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas como

$$\phi_1(z) = z, \quad \phi_2(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{donde } \frac{1}{\infty} := 0),$$

son cartas en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

### Observaciones 1.3.

- ▷ Si  $\phi : U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $X$ , entonces para todo abierto  $U_1 \subseteq U$ , se verifica que  $\phi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \phi(U_1)$  es una carta compleja en  $X$ , denominada subcarta de  $\phi$ .
- ▷ Si  $\phi : U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $X$ , y  $g : V \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$  es una biyección holomorfa, donde  $W$  es un abierto en el plano complejo, entonces la composición  $g \circ \phi : U \rightarrow W$  es una carta compleja en  $X$ .

**Definición 1.4.** *Dos cartas complejas  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $i = 1, 2$ , en  $X$  son compatibles si  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ó  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , y*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

*es holomorfa.*

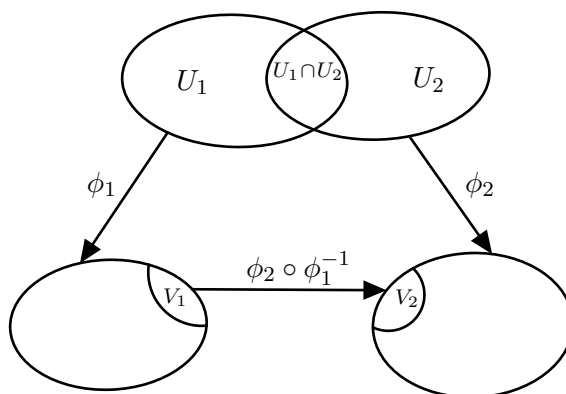


Figura 1.1: Compatibilidad de cartas complejas

### Observaciones 1.5.

- ▷ Observe que la definición es simétrica, es decir, si  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , y

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa, entonces

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa. Como consecuencia, se verifica que

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \phi_1(U_1 \cap U_2).$$

A la función  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  se le denomina función de transición entre las cartas complejas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

▷ Si  $\phi : U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $X$ , y  $g : V \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$  es una biyección holomorfa, donde  $W$  es un abierto en el plano complejo, entonces las cartas complejas  $\phi$ ,  $g \circ \phi$  son compatibles. Es más,  $g \circ \phi$  es compatible con cualquier carta compleja que sea compatible con  $\phi$ .

**Definición 1.6.** *Un atlas complejo, o simplemente atlas,  $\mathcal{A}$  en  $X$  es una colección  $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$  de cartas complejas en  $X$ , compatibles dos a dos, cuyos dominios recubren a  $X$ , es decir,  $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ .*

*Ejemplos 1.7.*

1. En  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ , la colección  $\mathcal{A} = \{\phi_U : U \rightarrow U \mid U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ abierto}\}$  de cartas es un atlas en  $\mathbb{R}^2$ .
2. En  $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{T}_c)$ , la colección  $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C} \mid i = 1, 2\}$  de cartas es un atlas en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . En efecto, pues  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$ ,  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ .

**Definición 1.8.** *Dos atlas complejos  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  en  $X$  son equivalentes si cada carta compleja de uno es compatible con cada carta compleja del otro.*

Evidentemente, dos atlas complejos en  $X$  son equivalentes si y solo si su unión es un atlas complejo en  $X$ . Además, puede probarse que todo atlas complejo en  $X$  está contenido en un único atlas complejo maximal.<sup>1</sup> Luego, dos atlas complejos en  $X$  son equivalentes si y solo si están contenidos en el mismo atlas complejo maximal.

**Definición 1.9.** *Una estructura compleja en  $X$  es un atlas complejo maximal en  $X$ , o equivalentemente, una clase de equivalencia de atlas complejos en  $X$ .*

Dado que cualquier atlas determina una única estructura compleja en  $X$ , está sera la manera habitual de definir una estructura compleja en  $X$ .

<sup>1</sup>Mediante una aplicación del Lema de Zorn, se puede probar el resultado.

**Definición 1.10.** *Una superficie de Riemann es un espacio topológico conexo, Hausdorff, no vacío, dotado de una estructura compleja.*

**Observaciones 1.11.**

- ▷ Sea  $X$  una superficie de Riemann, dotada de la estructura compleja determinada por un atlas  $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$  en  $X$ . Observe que para cualquier subconjunto abierto  $Y \subseteq X$  se verifica que la colección de subcartas  $\mathcal{A}_Y = \{\phi_\alpha|_{Y \cap U_\alpha} : Y \cap U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(Y \cap U_\alpha)\}$  es un atlas en  $Y$ . Como consecuencia, cualquier subconjunto abierto  $Y \subseteq X$ , conexo, no vacío, es una superficie de Riemann. Su estructura compleja está determinada por  $\mathcal{A}_Y$ . Observe que no depende del atlas representante  $\mathcal{A}$ .
- ▷ Si  $X$  es una superficie de Riemann, entonces para cada punto  $p \in X$  existe una carta compleja  $\phi : U \rightarrow V$  en  $X$ , con  $p \in U$ . Es más, podemos incluso garantizar la existencia de una carta centrada para cada punto  $p \in X$ . Como consecuencia, es fácil probar que  $X$  es localmente conexo por caminos. Por lo tanto,  $X$  es conexo por caminos.
- ▷ Si  $X$  es una superficie de Riemann, entonces  $X$  cumple el segundo axioma de numerabilidad (Teorema de Radó, [NR11, p.71]), es decir, existe una base numerable de abiertos en  $X$ .

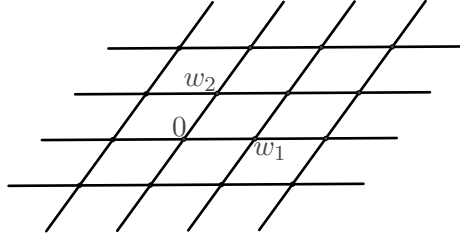
*Ejemplos 1.12.*

1. Observe que  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$  es un espacio topológico Hausdorff, conexo. Si dotamos a  $\mathbb{R}^2$  de la estructura compleja determinada por el atlas complejo constituido únicamente por la carta identidad  $(\mathbb{R}^2, \phi_{\mathbb{R}^2})$ , esta superficie de Riemann se denomina **plano complejo**. Se denota por  $\mathbb{C}$ .
2. Se verifica que  $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{T}_c)$  es un espacio topológico Hausdorff, conexo y compacto, pues  $\widehat{\mathbb{C}} \cong S^2$ . Si dotamos a  $\widehat{\mathbb{C}}$  de la estructura compleja determinada por el atlas complejo  $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C} \mid i = 1, 2\}$ , la superficie de Riemann resultante se denomina **esfera compleja**. Se denota por  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
3. Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . Consideremos el subconjunto de  $\mathbb{C}$ ,

$$\Lambda = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

A  $\Lambda$  se le denomina retículo generado por  $w_1, w_2$ . Observe que  $\Lambda$  es cerrado y discreto. Además, es subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$ .

Ahora, centrémonos en el conjunto cociente  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Dotemos a  $\mathbb{C}/\Lambda$  de la topología cociente inducida por la proyección  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ , esto es,  $G \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$  es abierto si y solo si  $\pi^{-1}(G)$  es abierto en  $\mathbb{C}$ . Con respecto

Figura 1.2: Retículo generado por  $w_1, w_2$ 

a esta topología,  $\pi$  es continua, luego  $\mathbb{C}/\Lambda$  es conexo. Observe que todo abierto en  $\mathbb{C}/\Lambda$  es imagen de un abierto en  $\mathbb{C}$ , pues

$$U = \pi(\pi^{-1}(U)), \quad \forall U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda,$$

ya que  $\pi$  es sobreyectiva. Es más,  $\pi$  es una aplicación abierta. En efecto, pues si  $V \subseteq \mathbb{C}$  es abierto, se verifica

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Lambda} w + V.$$

A continuación, probaremos que  $\mathbb{C}/\Lambda$  es Hausdorff. Sean  $z_1 + \Lambda, z_2 + \Lambda \in \mathbb{C}/\Lambda$ , tales que  $z_2 - z_1 \notin \Lambda$ . Se verifica que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B(w, \varepsilon) \cap \Lambda = \{w\}$ ,  $\forall w \in \Lambda$ . En efecto, pues dado que  $\Lambda$  es discreto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(0, \varepsilon) \cap \Lambda = \{0\}$ . Como consecuencia, para cualquier  $w \in \Lambda$ , se verifica  $B(w, \varepsilon) \cap \Lambda = \{w\}$ .<sup>2</sup> Para cada  $w \in \Lambda$ , consideremos la bola  $B(w, \frac{\varepsilon}{2})$ . Observe que existe a lo más un único  $w_0 \in \Lambda$ , tal que  $z_2 - z_1 \in B(w_0, \frac{\varepsilon}{2})$ . Por lo tanto,

$$\eta = \inf_{w \in \Lambda} |(z_2 - z_1) - w| > \varepsilon',$$

donde  $\varepsilon' = \frac{1}{2}|(z_2 - z_1) - w_0|$ . Concluimos que  $\pi(B(z_1, \frac{\eta}{2})), \pi(B(z_2, \frac{\eta}{2}))$  son abiertos disjuntos de  $z_1 + \Lambda, z_2 + \Lambda$ , respectivamente, en  $\mathbb{C}/\Lambda$ . En efecto, pues si existiese  $z \in B(z_1, \frac{\eta}{2}), w \in \Lambda$ , tales que  $z + w \in B(z_2, \frac{\eta}{2})$ , se obtendría

$$\begin{aligned} |(z_2 - z_1) - w| &\leq |z_2 - (z + w)| + |z - z_1| \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

que contradice la definición de  $\eta$ .

Por último, definamos un atlas complejo en  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Dado  $z \in \mathbb{C}$ , consideremos la bola  $B_z = B(z, \frac{\delta}{4})$ , donde

$$\delta = \min_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \{|w|\}.$$
<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Recuerde que  $\Lambda$  es subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$ .

<sup>3</sup>Sea  $r > 0$ , tal que  $w_1 \in B(0, r)$ . Dado que las bolas  $B(w, \frac{\varepsilon}{2}), w \in \Lambda$ , son disjuntas, existe un número finito de elementos de  $\Lambda \setminus \{0\}$  pertenecientes a la bola  $B(0, r)$ .

Observe que  $\pi|_{B_z} : B_z \rightarrow \pi(B_z)$  es un homeomorfismo. Denotemos por  $\phi_z$  a su homeomorfismo inverso. Probaremos que la colección de cartas

$$\mathcal{A} = \{\phi_z : \pi(B_z) \rightarrow B_z \mid z \in \mathbb{C}\}$$

es un atlas complejo en  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Evidentemente,  $\mathbb{C}/\Lambda = \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \pi(B_z)$ . Además, dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , tales que  $\pi(B_{z_1}) \cap \pi(B_{z_2}) \neq \emptyset$ , se verifica que existe  $a \in \mathbb{C}$  tal que

$$\phi_{z_2} \circ \phi_{z_1}^{-1}(z) = z + a, \quad \forall z \in S,$$

donde  $S = \phi_{z_1}(\pi(B_{z_1}) \cap \pi(B_{z_2}))$ . En efecto, pues

$$\varphi(z) := \phi_{z_2} \circ \phi_{z_1}^{-1}(z) - z \in \Lambda, \quad \forall z \in S,$$

y  $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| < \delta$ , para cualesquiera  $s_1, s_2 \in S$ . Por lo tanto, existe  $a \in \mathbb{C}$ , tal que  $\varphi(z) = a, \forall z \in S$ .

La superficie de Riemann resultante  $\mathbb{C}/\Lambda$  se denomina **toro complejo**. Se trata de una superficie de Riemann compacta, ya que

$$\pi(P) = \mathbb{C}/\Lambda,$$

donde  $P = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$ .

La presentación de los siguientes ejemplos de superficies de Riemann usan el teorema de la función implícita para polinomios. Enunciémoslo.

**Teorema 1.13.** *Sea  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ ,  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Si  $p(a, b) = 0$ ,  $p_w(a, b) \neq 0$ , entonces existen abiertos  $V_a, V_b \subseteq \mathbb{C}$ , con  $a \in V_a$ ,  $b \in V_b$ , y una función  $g : V_a \rightarrow V_b$ , holomorfa en  $V_a$ , tal que  $\forall (z, w) \in V_a \times V_b$ ,*

$$p(z, w) = 0 \quad \text{si, y solo si,} \quad w = g(z).$$

En el apéndice (B), precisamos la definiciones de curva algebraica lisa en  $\mathbb{C}^2$  y curva algebraica lisa en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ .

*Ejemplos 1.14.*

1. Sea  $\gamma$  una curva algebraica lisa en  $\mathbb{C}^2$ , definida por un polinomio  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ . Determinemos un atlas complejo en  $\gamma$ .

Sea  $(a, b) \in \gamma$ . Supongamos que  $p_w(a, b) \neq 0$ . En tal caso, por el teorema anterior, existen abiertos  $V_a, V_b \subseteq \mathbb{C}$ , con  $a \in V_a$ ,  $b \in V_b$ , y una función  $g : V_a \rightarrow V_b$ , holomorfa en  $V_a$ , tal que  $\forall (z, w) \in V_a \times V_b$ ,  $p(z, w) = 0$  si y solo si  $w = g(z)$ . Por lo tanto, la aplicación  $\pi_z : U \rightarrow V_a$ , definida como  $\pi_z(z, w) = z$ , donde  $U = \{(z, w) \in \gamma \mid z \in V_a, w \in V_b\}$ , es una carta compleja en  $\gamma$ . Además, observe que  $(a, b) \in U$ . La inversa de  $\pi_z$  es  $\pi_z^{-1} : V_a \rightarrow U$ ,  $\pi_z^{-1}(z) = (z, g(z))$ . Análogamente, si suponemos

$p_z(a, b) \neq 0$ , entonces, como consecuencia del teorema anterior, existen abiertos  $V'_a, V'_b \subseteq \mathbb{C}$ , con  $a \in V'_a$ ,  $b \in V'_b$ , y una función  $h : V'_b \rightarrow V'_a$ , holomorfa en  $V'_b$ , tal que  $\forall (z, w) \in V'_a \times V'_b$ ,  $p(z, w) = 0$  si y solo si  $z = h(w)$ . Luego, la aplicación  $\pi_w : U' \rightarrow V'_b$ , definida como  $\pi_w(z, w) = w$ , donde  $U' = \{(z, w) \in \gamma \mid z \in V'_a, w \in V'_b\}$ , es una carta compleja en  $\gamma$ . Observe que  $(a, b) \in U'$ . Además, la inversa de  $\pi_w$  es  $\pi_w^{-1} : V'_b \rightarrow U$ ,  $\pi_w^{-1}(w) = (h(w), w)$ . Por hipótesis, estas cartas complejas recubren a  $\gamma$ .<sup>4</sup> Veamos ahora la compatibilidad. Si ambas cartas provienen de proyectar sobre la misma variable, y sus dominios se cortan, entonces la función de transición es la identidad. En cambio, si las cartas provienen de proyectar sobre distintas variables, esto es,  $\pi_z : U \rightarrow V_{a_1}$ ,  $\pi_z(z, w) = z$ , y  $\pi_w : U' \rightarrow V'_{b_2}$ ,  $\pi_w(z, w) = w$ , y sus dominios se cortan, entonces

$$\pi_w \circ \pi_z^{-1} : \pi_z(U \cap U') \rightarrow \pi_w(U \cap U')$$

está definida como  $\pi_w \circ \pi_z^{-1}(z) = g(z)$ .

Dotemos a  $\gamma$  de la estructura compleja que determina el atlas obtenido. Supuesto que  $p$  es irreducible, se verifica que  $\gamma$  es un espacio topológico conexo por caminos. Además,  $\gamma$  es Hausdorff, pues  $\mathbb{C}^2$  lo es, luego bajo está última hipótesis, obtenemos una superficie de Riemann, denominada **curva plana afín**. Observe que no es compacta, pues  $\gamma$  no es un subconjunto acotado de  $\mathbb{C}^2$ .

2. Sea  $\gamma$  una curva algebraica lisa en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ , definida por un polinomio  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ . Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} q &= z^m p(1/z, w), \\ r &= w^n p(z, 1/w), \\ s &= z^m w^n p(1/z, 1/w), \end{aligned}$$

donde  $m = \deg_z p$ ,  $n = \deg_w p$ . Determinemos un atlas complejo en  $\gamma$ .

Las cartas del atlas con dominio en  $\mathbb{C}^2$  están definidas como en el ejemplo anterior. Ahora, necesitamos aumentar nuestra colección de cartas, para garantizar que recubran a  $\gamma$ . Supongamos que  $(\infty, b) \in \gamma$ , con  $b \neq \infty$ . El homeomorfismo involutivo  $Q : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}^2$ , definido como

$$Q(z, w) = (1/z, w), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2,$$

envía la curva algebraica lisa  $\gamma$  en la curva algebraica lisa  $\gamma_1$ , la cual viene determinada por el polinomio  $q$ . Observe que  $Q(\infty, b) = (0, b) \in \gamma_1$ . Además, se verifica que  $q_z(0, b) \neq 0$ , ó  $q_w(0, b) \neq 0$ . Actuando como en el ejemplo anterior, determinemos una carta  $\phi : U \rightarrow V$ , con  $(0, b) \in U$ . Observe que  $\phi \circ Q|_{Q^{-1}(U)}$  es una carta compleja en  $\gamma$ , con  $(\infty, b) \in Q^{-1}(U)$ .

<sup>4</sup>Es perfectamente posible que sobre un punto haya definidas dos cartas complejas.

Análogamente, se determinan cartas complejas en  $\gamma$  sobre los puntos  $(a, \infty)$ , con  $a \neq \infty$ ,  $(\infty, \infty)$ , usando respectivamente los homeomorfismos involutivos  $R, S : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}^2$ , definidos como

$$R(z, w) = (z, 1/w), \quad S(z, w) = (1/z, 1/w), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2.$$

La prueba de la compatibilidad de las cartas es omitida, y se deja como ejercicio para el lector.

Dotemos a  $\gamma$  de la estructura compleja que determina el atlas obtenido. De nuevo, supuesto que  $p$  es irreducible, se verifica que  $\gamma$  es un espacio topológico conexo por caminos. Además,  $\gamma$  es Hausdorff, luego bajo la hipótesis de irreducibilidad, obtenemos una superficie de Riemann, denominada **curva algebraica lisa** en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ . Observe que se trata de una superficie de Riemann compacta, pues  $\gamma$  es un subconjunto cerrado de  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ .

## 1.2. Orientación y género

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Consideremos las aplicaciones  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z), \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z), \quad \forall z = x + iy \in \Omega. \end{aligned}$$

Observe que ambas aplicaciones son de clase  $C^\infty$ . Además, como  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ , se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 > 0.$$

Como consecuencia de los razonamientos anteriores, si  $X$  es una superficie de Riemann dotada de la estructura compleja  $\mathcal{A}$ , entonces  $X$  es una variedad diferenciable de dimensión 2 orientable. En efecto, pues  $\mathcal{A}$  es un atlas diferenciable orientado. Por lo tanto, si además suponemos que  $X$  es una superficie de Riemann compacta, entonces podemos usar el teorema de clasificación de superficies: Toda superficie compacta, conexa y orientable es homeomorfa a una esfera con  $g$  asas. El número  $g$  es un invariante topológico y se denomina el género de la superficie. Si  $g = 0$ , la superficie es una esfera. Si  $g \geq 1$ , la superficie se obtiene pegando  $g$  asas a la esfera. Al número  $\chi = 2 - 2g$  se le denomina característica de Euler-Poincare.



## Capítulo 2

# Morfismos entre superficies de Riemann

Como es habitual en Matemáticas, una vez definido los objetos con lo que vamos a tratar, el siguiente paso natural es definir cuáles son las aplicaciones interesantes o morfismos entre tales objetos. En este capítulo, precisaremos cuales serán las aplicaciones interesantes entre superficies de Riemann. Además, presentamos varios resultados esenciales sobre tales aplicaciones. Finalizamos determinando los isomorfismos del toro complejo.

A lo largo de todo el capítulo, salvo que se mencione otra cosa,  $X, Y, Z$  denotarán superficies de Riemann.

### 2.1. Morfismos

Comencemos definiendo las aplicaciones de interés entre superficies de Riemann.

**Definición 2.1.** *Sea  $W \subseteq X$  abierto. Una aplicación  $F : W \rightarrow Y$  es un morfismo u holomorfa en  $p \in W$  si existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , que garantizan la existencia de un abierto  $G \subseteq W \cap U_1$ , con  $p \in G$ ,  $F(G) \subseteq U_2$ , tal que la composición*

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

*es holomorfa en  $\phi_1(G)$ .*<sup>1</sup>

*Una aplicación  $F : W \rightarrow Y$  es un morfismo u holomorfa en un abierto  $U \subseteq W$  si lo es cada punto de  $U$ .*

---

<sup>1</sup>Observe que si  $F$  es continua en  $p$ , entonces, para cualesquiera abiertos  $U_1 \subseteq X$ ,  $U_2 \subseteq Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , existe un abierto  $G \subseteq W \cap U_1$ , con  $p \in G$ , tal que  $F(G) \subseteq U_2$ .

*Ejemplos 2.2.*

1. Cualquier aplicación  $F : W \rightarrow Y$  constante es holomorfa en  $W$ .
2. La aplicación identidad  $I_d : X \rightarrow X$  es un morfismo.
3. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $p \in \Omega$ . Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $p$ , en el sentido usual, entonces  $f$  es holomorfa en  $p$  como superficies de Riemann. Además, el recíproco también es cierto, por lo tanto, la definición anterior es una generalización.

En las condiciones de la definición anterior, si  $F : W \rightarrow Y$  es holomorfa en  $p \in W$ , entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , y un abierto  $G \subseteq W \cap U_1$ , con  $p \in G$ ,  $F(G) \subseteq U_2$ , tal que la composición

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $\phi_1(G)$ . Por lo tanto, para cualquier abierto  $G' \subseteq G$ , no vacío, la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G') \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $\phi_1(G')$ . Además, observe que  $\phi_1(G) \subseteq \mathbb{C}$  es abierto, luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\phi_1(p), \varepsilon) \subseteq \phi_1(G)$ . Consideremos la subcarta  $\phi_{1|U} : U \rightarrow \phi_1(U)$  de  $\phi_1$ , donde  $U = \phi_1^{-1}(B(\phi_1(p), \varepsilon))$ . Como consecuencia de la anterior objeción, se verifica que

$$\phi_2 \circ F \circ (\phi_{1|U})^{-1} : \phi_1(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $\phi_1(U)$ .

De los razonamientos anteriores, deducimos que si  $F : W \rightarrow Y$  es holomorfa en  $p \in W$ , entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1$  es conexo,  $U_1 \subseteq W$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $V_1$ . Es más, como consecuencia de la siguiente proposición podremos incluso suponer que las cartas están centradas, es decir,  $\phi_1(p) = \phi_2(F(p)) = 0$ .

**Proposición 2.3.** *Sea  $W \subseteq X$  abierto,  $F : W \rightarrow Y$  una aplicación,  $p \in W$ . Se verifica:*

1. Si  $F$  es holomorfa en  $p$ , entonces  $F$  es continua en  $p$ .
2. Si  $F$  es holomorfa en  $p$ , entonces  $F$  es holomorfa en un abierto  $U \subseteq W$ , con  $p \in U$ .
3.  $F$  es holomorfa en  $p$  si, y solo si, para cualesquiera par de cartas  $(U_1, \phi_1)$  en  $X$ ,  $(U_2, \phi_2)$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , se garantiza la existencia de un abierto  $G \subseteq W \cap U_1$ , con  $p \in G$ ,  $F(G) \subseteq U_2$ , tal que la composición

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $\phi_1(G)$ .

4. Si  $U \subseteq W$  es abierto, y  $F$  es holomorfa en  $W$ , entonces  $F|_U$  es holomorfa en  $U$ .
5. Si  $U \subseteq W$  es abierto, y  $F|_U$  es holomorfa en  $U$ , entonces  $F$  es holomorfa en  $U$ .

PRUEBA:

1. Sea  $G_2 \subseteq Y$  abierto, tal que  $F(p) \in G_2$ . Como  $F$  es holomorfa en  $p$ , entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1 \subseteq W$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $V_1$ . Consideremos el abierto  $G = G_2 \cap U_2$ . Por continuidad, existe  $G_1 \subseteq V_1$  abierto, con  $\phi_1(p) \in G_1$  tal que  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(G_1) \subseteq G$ . Luego  $F(\phi_1^{-1}(G_1)) \subseteq G \subseteq G_2$ .
2. Si  $F$  es holomorfa en  $p$ , entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1 \subseteq W$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $V_1$ . Como consecuencia, observe que  $F$  es holomorfa en  $U_1$ .
3. Sean  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  cartas, respectivamente en  $X$  e  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ . Como  $F$  es holomorfa en  $p$ , existen cartas  $\varphi_1 : C_1 \rightarrow D_1$  en  $X$ ,  $\varphi_2 : C_2 \rightarrow D_2$  en  $Y$ , con  $p \in C_1$ ,  $F(p) \in C_2$ , tales que  $C_1 \subseteq W$ ,  $F(C_1) \subseteq C_2$ , y la composición  $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $D_1$ . Además, debido a la compatibilidad de las cartas, las funciones

$$\begin{aligned}\varphi_1 \circ \phi_1^{-1} &: \phi_1(U_1 \cap C_1) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap C_1), \\ \varphi_2 \circ \phi_2^{-1} &: \varphi_2(U_2 \cap C_2) \rightarrow \phi_2(U_2 \cap C_2)\end{aligned}$$

son holomorfas. Luego, la composición

$$(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \phi_1^{-1}) : \phi_1(U_1 \cap C_1) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa. Como consecuencia, existe un abierto  $G \subseteq U_1 \cap C_1$ , con  $\phi_1(p) \in \phi_1(G)$ , tal que  $(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \phi_1^{-1})(\phi_1(G)) \subseteq \varphi_2(U_2 \cap C_2)$ .<sup>2</sup> Obtenemos así que

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $\phi_1(G)$ .

4. Sea  $p \in U$ . Como  $F$  es holomorfa en  $p$ , existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1 \subseteq W$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $V_1$ . Consideremos el abierto  $G = U \cap U_1 \subseteq U_1$ . Observe que  $p \in G$ ,  $F|_U(G) \subseteq U_2$ , y la composición

$$\phi_2 \circ F|_U \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $\phi_1(G)$ .

---

<sup>2</sup>Recuerde, toda aplicación holomorfa es continua.

5. Es trivial. □

**Definición 2.4.** Sea  $W \subseteq X$  abierto. Se define

$$\mathcal{O}_X(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } W\}.$$

Estas aplicaciones se denominan funciones holomorfas en  $W$ .

El conjunto anterior  $\mathcal{O}_X(W)$  presenta estructura de  $\mathbb{C}$ -álgebra con las operaciones de suma y producto de aplicaciones.

**Proposición 2.5.** Sea  $W \subseteq Y$  abierto, y  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo. Si  $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ , entonces  $f \circ F \in \mathcal{O}_X(F^{-1}(W))$ . Como consecuencia  $F$  induce un morfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{O}_Y(W) &\rightarrow \mathcal{O}_X(F^{-1}(W)), \\ F^*(f) &= f \circ F. \end{aligned}$$

La siguiente proposición garantiza que la composición de morfismos es morfismo.

**Proposición 2.6.** Si  $F : X \rightarrow Y$ ,  $G : Y \rightarrow Z$  son morfismos, entonces  $G \circ F : X \rightarrow Z$  es morfismo.

PRUEBA: Sea  $p \in X$ . Como  $F$  es holomorfa en  $p$ , y  $G$  es holomorfa en  $F(p)$  existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ ,  $\phi_3 : U_3 \rightarrow V_3$  en  $Z$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ ,  $G(F(p)) \in U_3$ , tales que  $F(U_1) \subseteq U_2$ ,  $G(U_2) \subseteq U_3$ , y las composiciones

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} &: V_1 \rightarrow \mathbb{C}, \\ \phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1} &: V_2 \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

son holomorfas. Por lo tanto, la función

$$\phi_3 \circ (G \circ F) \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $V_1$ . □

Como consecuencia del resultado anterior, observe que si  $F : X \rightarrow Y$ ,  $G : Y \rightarrow Z$  son morfismos, entonces  $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ .

**Definición 2.7.** Un morfismo biyectivo  $F : X \rightarrow Y$  se denomina isomorfismo si  $F^{-1} : Y \rightarrow X$  es morfismo. Un isomorfismo  $\mathcal{G} : X \rightarrow X$  se denomina automorfismo.

Si existe un isomorfismo  $F : X \rightarrow Y$ , entonces decimos que la superficie de Riemann  $X$  es isomorfa a la superficie de Riemann  $Y$ , y lo denotaremos por  $X \cong Y$ . Es fácil, comprobar que si  $X \cong Y$ , entonces  $Y \cong X$ , y que si  $X \cong Y$  e  $Y \cong Z$ , entonces  $X \cong Z$ .

El conjunto constituido por todos los automorfismos de  $X$  presenta estructura de grupo bajo la operación de composición de aplicaciones. A tal grupo se le denota por  $\text{Aut}(X)$ .

**Teorema 2.8.** *Si  $F : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo, entonces la aplicación  $\widehat{F} : \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y)$ , definida como*

$$\widehat{F}(\mathcal{G}) = F \circ \mathcal{G} \circ F^{-1}, \quad \forall \mathcal{G} \in \text{Aut}(X),$$

*es un isomorfismo de grupos. Es más,*

$$F(p(\mathcal{G})) = p(\widehat{F}(\mathcal{G})), \quad \forall \mathcal{G} \in \text{Aut}(X),$$

*con  $p(\mathcal{G}) \subseteq X, p(\widehat{F}(\mathcal{G})) \subseteq Y$  los puntos fijos de  $\mathcal{G}, \widehat{F}(\mathcal{G})$ , respectivamente.*

## 2.2. Teoremas sobre morfismos

En esta sección, presentamos varios resultados importantes sobre morfismos entre superficies de Riemann, los cuales se heredan del Análisis Complejo. Por tal motivo, también enunciaremos, sin demostrar,<sup>3</sup> los respectivos resultados de Análisis Complejo de los cuales se hereden. Comencemos.

**Teorema 2.9.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  una región. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , no idénticamente nula, entonces  $f^{-1}(0)' \cap \Omega = \emptyset$ .*

Recuerde que un subconjunto abierto no vacío  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  es una región si es conexo. Utilizando el teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado, denominado Teorema de la Identidad.

**Teorema 2.10.** *Sean  $F, G : X \rightarrow Y$  morfismos. Si existe  $S \subseteq X$ , con  $S' \neq \emptyset$ , tal que  $F(x) = G(x), \forall x \in S$ , entonces  $F = G$ .*

PRUEBA: Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in X \mid F = G \text{ en un abierto } U \subseteq X, x \in U\}.$$

Observe que  $A$  es cerrado. Como  $X$  es conexo, bastará probar que  $A$  es abierto, no vacío. Si  $p \in A$ , entonces existe  $U \subseteq X$  abierto,  $p \in U$ , tal que  $F(x) = G(x) \forall x \in U$ . Luego  $p \in \text{int}(A)$ , pues  $p \in U \subseteq A$ . Veamos

<sup>3</sup>Consulte [BGLA10] si desea ver la prueba de los resultados.

ahora que  $A \neq \emptyset$ . Sea  $p \in S'$ . Observe que  $F(p) = G(p)$ , pues para todo abierto  $U \subseteq X$ ,  $p \in U$ , se verifica  $(U \setminus \{p\}) \cap S \neq \emptyset$ . Además, como  $F, G$  son holomorfas en  $p$ , existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $q = F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1$  es conexo,  $F(U_1), G(U_1) \subseteq U_2$ , y las composiciones  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}, \phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  son holomorfas. Como consecuencia del resultado anterior, deducimos

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} = \phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1},$$

pues  $\phi_1(p) \in \Sigma' \cap V_1$ , donde

$$\Sigma = \{z \in V_1 \mid \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1}(z)\}.$$

Luego  $F = G$  en  $U_1$ , por lo que  $p \in A$ .

□

**Teorema 2.11.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  una región. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , no constante, entonces  $f$  es una aplicación abierta.*

Del teorema anterior, conseguimos el siguiente resultado, denominado Teorema de la Aplicación Abierta.

**Teorema 2.12.** *Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo no constante, entonces  $F$  es una aplicación abierta.*

PRUEBA: Sea  $q \in F(U)$ , con  $U \subseteq X$  abierto. Observe que existe  $p \in U$ , tal que  $F(p) = q$ . Además, como  $F$  es holomorfa en  $p$ , existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $q \in U_2$ , tales que  $U_1$  es conexo,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $V_1$ . Consideremos ahora  $G = U_1 \cap U$ . Observe que  $G \subseteq U_1$  es abierto, luego  $\phi_1(G) \subseteq V_1$  es abierto. Como consecuencia del teorema anterior,<sup>4</sup> obtenemos que  $\phi_2(F(G)) = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(G)) \subseteq V_2$  es abierto, por lo que  $F(G) \subseteq U_2$  es abierto. Como  $F(G) \subseteq F(U)$ , obtenemos el resultado.

□

**Proposición 2.13.** *Sean  $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$  abiertos, y  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funciones, tales que  $f(\Omega) \subseteq G$ ,  $g(f(z)) = z$ ,  $\forall z \in \Omega$ . Si  $g$  es holomorfa e inyectiva en  $G$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .*

A continuación, probaremos un resultado que nos garantiza que todo morfismo biyectivo es isomorfismo. Por lo tanto, si existe un morfismo biyectivo  $F : X \rightarrow Y$ , entonces  $X \cong Y$ .

<sup>4</sup>Observe que la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  no es constante, pues  $U'_1 \neq \emptyset$ .

**Proposición 2.14.** *Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo inyectivo, entonces la restricción sobre la imagen,  $\tilde{F} : X \rightarrow F(X)$ , es un isomorfismo.*

PRUEBA: Observe que  $F(X)$  es un subconjunto abierto de  $Y$ , como consecuencia de (2.12). Además,  $X$  es conexo, luego  $F(X)$  es conexo. Ahora, si  $p \in X$ , como  $F$  es holomorfa en  $p$ , entonces existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1$  es conexo,  $U_2 \subseteq F(X)$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Por consiguiente, observe que  $\tilde{F}$  es morfismo. Además, note que  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  no es constante, luego es una aplicación abierta, como consecuencia de (2.11). Por lo tanto, su inversa  $\phi_1 \circ \tilde{F}^{-1} \circ \phi_2^{-1} : V \rightarrow V_1$ , con  $V \subseteq V_2$  abierto, es continua. Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos que la composición  $\phi_1 \circ \tilde{F}^{-1} \circ \phi_2^{-1}$  es holomorfa en  $V$ . Por ende,  $\tilde{F}^{-1}$  es morfismo. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de la Aplicación Abierta.

**Teorema 2.15.** *Si  $X$  es compacta, y  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo no constante, entonces  $F$  es sobreyectiva e  $Y$  es compacta.*

PRUEBA: Por (2.12),  $F(X) \subseteq Y$  es abierto. Además, como  $X$  es compacto,  $F(X)$  es compacto. Ahora bien,  $Y$  es Hausdorff, luego  $F(X)$  es cerrado. Obtenemos así que  $F(X) = Y$ , pues  $Y$  es conexo. □

**Corolario 2.16.** *Si  $X$  es compacta, entonces  $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$ .*

PRUEBA: Sea  $f \in \mathcal{O}_X(X)$ . Si  $f$  no fuese constante, como consecuencia del resultado anterior obtendríamos que  $\mathbb{C}$  es compacta. Luego, necesariamente  $f$  debe ser constante. □

Del siguiente teorema, obtenemos una generalización de (2.9).

**Teorema 2.17.** *Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo no constante, entonces para cada  $q \in Y$ ,  $F^{-1}(q)$  es un subconjunto discreto de  $X$ . En particular, si  $X$  es compacta,  $F^{-1}(q)$  es finito, no vacío,  $\forall q \in Y$ .*

PRUEBA: Sea  $q \in Y$ , tal que  $F^{-1}(q) \neq \emptyset$ . Consideremos  $p \in F^{-1}(q)$ . Como  $F$  es holomorfa en  $p$ , existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $q \in U_2$ , tales que  $U_1$  es conexo,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, y  $\phi_1(p) = \phi_2(q) = 0$ . Observe que

$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(0) = 0$ . Además,  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  no es idénticamente nula, pues existe  $p_0 \in U_1$ , tal que  $F(p_0) \neq q$ .<sup>5</sup> Como consecuencia de (2.9), obtenemos que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B(0, \varepsilon) \subseteq V_1$ , y

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) \neq 0, \quad \forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon).$$

Luego,  $\phi_1^{-1}(B(0, \varepsilon)) \cap F^{-1}(q) = \{p\}$ .

Si  $X$  es compacta, entonces  $F$  es sobreyectiva. Además, si  $q \in Y$  entonces  $F^{-1}(q)$  es compacto y discreto, por lo que  $F^{-1}(q)$  es finito. □

**Corolario 2.18.** *Sea  $q \in Y$ . Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo, tal que  $F^{-1}(q) \subsetneq X$ , entonces  $F^{-1}(q)$  es un subconjunto discreto de  $X$ .*

Por último, presentamos un teorema de gran utilidad que nos permitirá probar que ciertas aplicaciones son morfismos.

**Teorema 2.19.** *Sea  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, y  $A \subseteq X$  un conjunto finito. Si  $F$  es holomorfa en  $X \setminus A$ , entonces  $F$  es morfismo.*

PRUEBA: Sea  $p \in A$ . Observe que existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $U_1 \cap A = \{p\}$ , y  $F(U_1) \subseteq U_2$ . Consideremos la composición  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Por hipótesis, es continua en  $V_1$  y holomorfa en  $V_1 \setminus \{\phi_1(p)\}$ . Por lo tanto,  $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$  es holomorfa en  $V_1$ , como consecuencia del teorema de singularidad evitable de Riemann. □

### 2.3. Isomorfismos del toro complejo

En esta última sección, nos proponemos determinar los isomorfismos del toro complejo. Con tal fin, comencemos enunciando un resultado de Análisis Complejo que describe cuales son los automorfismos de  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$ , y  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 2.20.** *Los automorfismos de  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$ , y  $\widehat{\mathbb{C}}$  son, respectivamente:*

1.  $\mathcal{G}(z) = az$  ó  $\mathcal{G}(z) = \frac{a}{z}$ ,  $a \neq 0$ .
2.  $\mathcal{G}(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ .
3.  $\mathcal{G}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

PRUEBA: Probaremos solamente el primer caso, que es quizás menos conocido. Los dos últimos casos pueden ser consultados en [BGLA10, p.238].

---

<sup>5</sup>Note que  $U'_1 \neq \emptyset$ .



Fijado  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , es rutinario comprobar que tanto  $\mathcal{G}(z) = az$  como  $\mathcal{G}(z) = a/z$  son automorfismos de  $\mathbb{C}^*$ . Recíprocamente, sea  $\mathcal{G} \in \text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ . Observe que  $|\mathcal{G}(z)| \neq 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ , donde

$$\varepsilon = \inf_{|w|=1} |\mathcal{G}^{-1}(w)| > 0.$$

Por lo tanto,  $|\mathcal{G}(z)| < 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ , ó  $|\mathcal{G}(z)| > 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ , pues la bola punteada  $\dot{B}(0, \varepsilon)$  es conexa por caminos. Supongamos que  $|\mathcal{G}(z)| < 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ . En tal caso, por el teorema de singularidad evitable de Riemann, existe  $\mathcal{G}_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa, tal que  $\mathcal{G}_1(z) = \mathcal{G}(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ . Es más, se verifica que  $\mathcal{G}_1(0) = 0$ . En efecto, pues si  $(z_n)$  es una sucesión en  $\mathbb{C}^*$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , entonces  $(\mathcal{G}(z_n))$  es una sucesión en  $\mathbb{C}^*$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}(z_n) = \mathcal{G}_1(0).$$

Como consecuencia, obtenemos que  $\mathcal{G}_1(z) = az$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .

Ahora, supongamos que  $|\mathcal{G}(z)| > 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ . En tal caso,  $\mathcal{G}_* : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , definida como

$$\mathcal{G}_*(z) = \frac{1}{\mathcal{G}(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

es un automorfismo de  $\mathbb{C}^*$ . Además,  $|\mathcal{G}_*(z)| < 1$ ,  $\forall z \in \dot{B}(0, \varepsilon)$ . Por lo tanto, aplicando el razonamiento anterior, obtenemos  $\mathcal{G}_*(z) = az$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . □

Sean  $T_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , dos toros complejos, donde  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \mathbb{C}$  son retículos arbitrarios.

**Teorema 2.21.** *Sea  $F : T_1 \rightarrow T_2$  un isomorfismo, tal que  $F(p_1) = p_2$ , con  $p_i \in T_i$ . Si  $\pi_i(z_i) = p_i$ , con  $z_i \in \mathbb{C}$ , entonces existe un único automorfismo  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{C}$ , tal que  $\mathcal{G}(z_1) = z_2$ , y*

$$F \circ \pi_1(z) = \pi_2 \circ \mathcal{G}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ T_1 & \xrightarrow{F} & T_2 \end{array}$$

PRUEBA: [Fla09, p.226] □

El automorfismo  $\mathcal{G}$  está determinado por la condición  $\mathcal{G}(z_1) = z_2$ . Observe que si  $z \equiv z'$  (mód  $\Lambda_1$ ), entonces  $\mathcal{G}(z) \equiv \mathcal{G}(z')$  (mód  $\Lambda_2$ ). Como consecuencia de los resultados anteriores, obtenemos la siguiente caracterización.

**Teorema 2.22.** *Si  $T_1 \cong T_2$ , entonces existe  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tal que  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ . Recíprocamente, si existe  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tal que  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ , entonces  $T_1 \cong T_2$ . Además, los isomorfismos de  $T_1$  a  $T_2$  son*

$$F(z + \Lambda_1) = \alpha z + \beta + \Lambda_2,^6$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ .

PRUEBA: Si  $F : T_1 \rightarrow T_2$  es un isomorfismo, por (2.21), existe un automorfismo  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{C}$ , tal que

$$F \circ \pi_1(z) = \pi_2 \circ \mathcal{G}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Además, por (2.20), se verifica que  $\mathcal{G}(z) = \alpha z + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ . Luego

$$F(z + \Lambda_1) = \alpha z + \beta + \Lambda_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como consecuencia, si  $z \in \Lambda_1$ , entonces  $\alpha z \in \Lambda_2$ , pues

$$F(z + \Lambda_1) = F(\Lambda_1) = \beta + \Lambda_2.$$

Para la contención contraria, observe

$$F^{-1} \circ \pi_2(z) = \pi_1 \circ \mathcal{G}^{-1}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con  $\mathcal{G}^{-1}(z) = z/\alpha - \beta/\alpha$ . Actuando de manera análoga, es fácil deducir  $\alpha^{-1}\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1$ .

Ahora, supongamos que existe  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tal que  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ , y probemos que  $F : T_1 \rightarrow T_2$ , definida como  $F(z + \Lambda_1) = \alpha z + \beta + \Lambda_2, \forall z \in \mathbb{C}$ , con  $\beta \in \mathbb{C}$ , es un isomorfismo.

Observe que

$$F\left(\frac{w - \beta}{\alpha} + \Lambda_1\right) = w + \Lambda_2, \quad \forall w \in \mathbb{C},$$

luego  $F$  es sobreyectiva. Además, si  $F(z_1 + \Lambda_1) = F(z_2 + \Lambda_1)$ , con  $z_i \in \mathbb{C}$ , entonces  $\alpha(z_1 - z_2) \in \Lambda_2$ . Como  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ , deducimos  $z_1 - z_2 \in \Lambda_1$ . Por lo tanto,  $F$  es inyectiva. Por último, sea  $z_0 + \Lambda_1 \in T_1$ , y consideremos las cartas complejas  $\phi_{z_0} : \pi_1(B_{z_0}) \rightarrow B_{z_0}$  en  $T_1$ ,  $\phi_{w_0} : \pi_2(B_{w_0}) \rightarrow B_{w_0}$  en  $T_2$ , con  $w_0 = \alpha z_0 + \beta$ . Por continuidad, existe un abierto  $V_0 \subseteq B_{z_0}$ , con  $z_0 \in V_0$ , tal que  $\alpha z + \beta \in B_{w_0}, \forall z \in V_0$ , luego

$$\phi_{w_0} \circ F \circ (\phi_{z_0})^{-1}(z) = \alpha z + \beta, \quad \forall z \in V_0.$$

□

Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  un retículo arbitrario, y consideremos el toro complejo  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ .

<sup>6</sup>Observe que las aplicaciones están bien definidas, es decir, no depende del representante elegido.

**Corolario 2.23.** *Los automorfismos de  $T$  son*

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = \alpha z + \beta + \Lambda,$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha\Lambda = \Lambda$ . *Los automorfismos de  $T$  sin puntos fijos son*

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda,$$

con  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ .

PRUEBA: Por (2.22), con  $\Lambda_1, \Lambda_2 = \Lambda$ , deducimos que los automorfismos de  $T$  son

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = \alpha z + \beta + \Lambda,$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha\Lambda = \Lambda$ . Ahora, si exigimos que no existan punto fijos, entonces  $\alpha \neq 1$ , pues en caso contrario,  $F(z_0 + \Lambda) = z_0 + \Lambda$ , donde  $z_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ . Por último, observe que si  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ , entonces el automorfismo  $\mathcal{G}(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda$  no tiene puntos fijos.

□



## Capítulo 3

# Propiedades de los morfismos

En este tercer capítulo de superficies de Riemann estudiaremos propiedades de los morfismos, tanto locales como globales. Tales propiedades, nos permitirán introducir el concepto de punto de ramificación de un morfismo no constante, y de recubrimiento ramificado. Además, presentamos dos métodos para construir nuevas superficies de Riemann a partir de otras ya existentes, y concluiremos incluyendo nuevos ejemplos notables de superficies de Riemann.

### 3.1. Propiedades locales de los morfismos

En esta primera sección nos centramos en estudiar las propiedades locales de los morfismos. Comencemos enunciando dos resultados de análisis complejo, a saber, el teorema de la función inversa y el teorema de existencia de raíz  $m$ -ésima.

**Teorema 3.1.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $z_0 \in \Omega$ . Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , tal que  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces existen abiertos  $V \subseteq \Omega$ ,  $W \subseteq \mathbb{C}$ , con  $z_0 \in V$ ,  $w_0 = f(z_0) \in W$ , tales que  $f$  establece una biyección entre  $V$  y  $W$ . Además,  $f^{-1} : W \rightarrow V$  es derivable en  $w_0$ , y se verifica que*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

**Teorema 3.2.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto,  $z_0 \in \Omega$ . Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , tal que  $f(z_0) \neq 0$ , entonces para todo entero  $m \geq 1$ , existe un abierto  $V \subseteq \Omega$ , con  $z_0 \in V$ , y una función  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $V$ , tal que*

$$f(z) = g(z)^m, \quad \forall z \in V.$$

En adelante, salvo que se indique otra cosa,  $X, Y$  denotarán superficies de

Riemann. Como consecuencia de los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente resultado, conocido como Teorema de Forma Local.

**Teorema 3.3.** *Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo en  $p \in X$ , no constante, entonces existe un único entero  $m \geq 1$ , que satisface la siguiente propiedad: Para toda carta  $(U_2, \phi_2)$  en  $Y$ , centrada en  $q = F(p)$ , existe una carta  $(U_1, \phi_1)$  en  $X$ , centrada en  $p$ , con  $F(U_1) \subseteq U_2$ , tal que*

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m, \quad \forall z \in \phi_1(U_1).$$

PRUEBA: Sea  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  una carta en  $Y$ , con  $q \in U_2$ , tal que  $\phi_2(q) = 0$ . Como  $F$  es morfismo en  $p$ , existe una carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ , centrada en  $p$ , tal que  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición

$$\underbrace{\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}}_h : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $V_1$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\overline{B}(0, \varepsilon) \subseteq V_1$ . Si  $(a_n)_{n \geq 0}$  son los coeficientes de la serie de potencias centrada en 0, tal que

$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad \forall w \in B(0, \varepsilon),$$

entonces  $a_0 = 0$ , pues  $h(0) = 0$ . Por lo tanto,  $h(w) = w^m f(w) \forall w \in B(0, \varepsilon)$ , donde

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\},^1 \quad f : B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(w) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n w^{n-m}.$$

Observe que  $f$  es holomorfa en  $B(0, \varepsilon)$ ,  $f(0) \neq 0$ . Por (3.2), existe un abierto  $V \subseteq B(0, \varepsilon)$ , con  $0 \in V$ , y una función  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en  $V$ , tal que

$$f(w) = g(w)^m, \quad \forall w \in V.$$

Luego  $h(w) = (wg(w))^m, \forall w \in V$ . Sea  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$\psi(w) = wg(w), \quad \forall w \in V.$$

Como  $\psi'(0) \neq 0$ , por el teorema de la función inversa, existen abiertos  $C \subseteq V$ ,  $D \subseteq \mathbb{C}$ , tales que  $0 \in C$ ,  $\psi(0) \in D$ , y  $\psi$  establece una biyección entre  $C$  y  $D$ . Consideremos la carta compleja  $\varphi_1 = \psi|_C \circ \phi_1|_{\phi_1^{-1}(C)}$  en  $X$ . Observe que

$$\begin{aligned} \phi_2(F(\varphi_1^{-1}(\psi(w)))) &= (wg(w))^m \\ &= (\psi(w))^m, \quad \forall w \in C, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Note que  $h$  no es idénticamente nula, pues  $F$  no es constante, y  $U_1' \neq \emptyset$ .

luego  $\phi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m, \forall z \in D$ .

Ahora, sea  $\delta > 0$ , tal que  $B = B(0, \delta) \subseteq D$ . Observe que

$$F(\varphi_1^{-1}(z)) = \phi_2^{-1}(z^m), \quad z \in B.$$

Consideremos los abiertos  $\varphi_1^{-1}(B) \subseteq X$ ,  $F(\varphi_1^{-1}(B)) \subseteq Y$ . Como consecuencia de la anterior igualdad, dado  $q' \in F(\varphi_1^{-1}(B))$ , con  $q' \neq q$ , se verifica que existen  $m$  preimágenes en  $\varphi_1^{-1}(B)$  de  $q'$ . Se obtiene así la unicidad del entero  $m \geq 1$ , pues está determinado por las propiedades topológicas de la aplicación en un entorno de  $p$ . □

**Definición 3.4.** Sea  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $p \in X$ , no constante. Se define la multiplicidad de  $F$  en  $p$ , o índice de ramificación de  $F$  en  $p$ , como el único entero  $m \geq 1$ , que satisface la propiedad enunciada en el teorema anterior. Se denota por  $e_p(F)$ .

*Ejemplos 3.5.*

1. Si  $I_d : X \rightarrow X$  es la aplicación identidad, entonces  $e_p(I_d) = 1, \forall p \in X$ .
2. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como  $f(z) = z^m, m \in \mathbb{N}$ . Observe que la multiplicidad de  $f$  en 0 es  $m$ . En cambio,  $e_p(f) = 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ .

**Proposición 3.6.** Sea  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante,  $p \in X$ . Son equivalentes:

1.  $e_p(F) = 1$
2.  $F$  es un isomorfismo local en  $p$ , es decir, existen abiertos conexos  $U_0 \subseteq X$ , con  $p \in U_0$ , y  $V_0 \subseteq Y$ , con  $q = F(p) \in V_0$ , tales que  $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  es un isomorfismo.

PRUEBA: Supongamos  $e_p(F) = 1$ , y consideremos una carta  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , centrada en  $q$ . Por (3.3), existe una carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ , centrada en  $p$ , con  $U_1 \subseteq X$  conexo,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , tal que

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z, \quad \forall z \in V_1.$$

Por lo tanto,  $F|_{U_1} : U_1 \rightarrow F(U_1)$  es un isomorfismo.

Supongamos ahora que existen abiertos conexos  $U_0 \subseteq X$ , con  $p \in U_0$ , y  $V_0 \subseteq Y$ , con  $q \in V_0$ , tales que  $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  es un isomorfismo. Consideremos una carta  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , centrada en  $q$ . De nuevo, por (3.3), existe una carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ , centrada en  $p$ , con  $U_1 \subseteq U_0$ ,  $F(U_1) \subseteq U_2$ , tal que

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m, \quad \forall z \in V_1,$$

donde  $m = e_p(F)$ . Por inyectividad, necesariamente  $m = 1$ . □

Existe una forma fácil de calcular el índice de ramificación sin necesidad de utilizar cartas centradas. Sea  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante,  $p \in X$ . Como  $F$  es morfismo en  $p$ , existen cartas  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ ,  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , con  $p \in U_1$ ,  $F(p) \in U_2$ , tales que  $F(U_1) \subseteq U_2$ , y la composición

$$\underbrace{\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}}_h : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en  $V_1$ . Entonces,

$$e_p(F) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid h^{(n)}(z_0) \neq 0\},^2$$

donde  $h^{(n)}$  es la derivada  $n$ -ésima de  $h$ , y  $z_0 = \phi_1(p)$ . Como consecuencia, si  $e_p(F) > 1$ , entonces existe un abierto  $U \subseteq X$ , con  $p \in U$ , tal que  $e_{p'}(F) = 1$ , para todo  $p' \in U \setminus \{p\}$ . En efecto, pues existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq V_1$ , y  $h'(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in B(z_0, \varepsilon)$ .

**Definición 3.7.** Sea  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante. Un punto  $p \in X$  es un punto de ramificación de  $F$  si  $e_p(F) > 1$ . Un punto  $y \in Y$  es un punto rama de  $F$  si es la imagen de un punto de ramificación de  $F$ .

Como consecuencia de la anterior observación, para todo morfismo  $F : X \rightarrow Y$  no constante, el conjunto  $R = \{p \in X \mid e_p(F) > 1\}$  es discreto. Por lo tanto, si  $X$  es compacta, entonces  $R$  es un conjunto finito, pues  $R$  es cerrado, como consecuencia de (3.6).

## 3.2. Propiedades globales de los morfismos

Ahora, nos interesaremos en las propiedades globales de los morfismos. Introduciremos los conceptos de recubrimiento étale, recubrimiento ramificado y aplicación propia, así podremos enunciar el teorema de caracterización de recubrimientos ramificados y la fórmula de Hurwitz.

### 3.2.1. Aplicaciones recubridoras

**Definición 3.8.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Una aplicación continua  $F : X \rightarrow Y$  es un recubrimiento étale o espacio recubridor si es sobreyectiva, y para todo  $q \in Y$  existe un abierto  $V \subseteq Y$ ,  $q \in V$ , tal que

$$F^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

<sup>2</sup>Observe que no existe  $V \subseteq V_1$  abierto, con  $z_0 \in V$ , tal que  $h$  sea constante en  $V$ , luego existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $h^{(n_0)}(z_0) \neq 0$ .



donde  $U_i \subseteq X$  es abierto,  $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  es homeomorfismo,  $\forall i \in I$ .

En las condiciones de la definición anterior, si  $F : X \rightarrow Y$  es un recubrimiento étale, entonces la aplicación  $q \in Y \rightarrow \#F^{-1}(q)$  es localmente constante. En efecto, pues si  $q \in Y$ , entonces existe un abierto  $V \subseteq Y$ ,  $q \in V$ , tal que

$$F^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

donde  $U_i \subseteq X$  es abierto,  $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  es homeomorfismo,  $\forall i \in I$ . Luego  $\#F^{-1}(q') = \#I$ , para todo  $q' \in V$ .

**Proposición 3.9.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos, y  $F : X \rightarrow Y$  un recubrimiento étale. Si  $Y$  es conexo, entonces la aplicación  $q \in Y \rightarrow \#F^{-1}(q)$  es constante. Al número  $\#F^{-1}(q)$ , con  $q \in Y$ , se le denomina grado del recubrimiento étale.

PRUEBA: Observe que  $A_q = \{q' \in Y \mid \#F^{-1}(q) = \#F^{-1}(q')\}$ , con  $q \in Y$ , es abierto y cerrado. Además,  $q \in A_q$ , luego  $A_q = Y$ . □

*Ejemplos 3.10.*

1. Si  $X$  es un espacio topológico conexo, la aplicación identidad  $I_d : X \rightarrow X$  es un recubrimiento étale de grado 1.
2. La aplicación  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  es un espacio recubridor. En efecto, pues si  $s_0 \in \mathbb{C}^*$ , como consecuencia del teorema de la función inversa, existen abiertos  $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ ,  $V_0 \subseteq \mathbb{C}^*$ , con  $s_0 \in V_0$ , tales que  $\exp|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  es una biyección holomorfa. Luego

$$\exp^{-1}(V_0) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n, \quad \text{donde } U_n = 2\pi i n + U_0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Observe que cada restricción  $\exp|_{U_n} : U_n \rightarrow V_0$  es homeomorfismo.

**Definición 3.11.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann. Un morfismo  $F : X \rightarrow Y$  es un recubrimiento ramificado si para todo  $q \in Y$  se verifica  $F^{-1}(q)$  es finito y no vacío, y además, si  $F^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\}$ , entonces existen cartas  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  en  $X$ , centradas en  $p_i$ , y  $\phi : U \rightarrow V$  en  $Y$ , centrada en  $q$ , y enteros  $e_i \geq 1$ , tales que  $F^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^r U_i$ , y el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{F} & U \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi \\ V_i & \xrightarrow{\psi_i} & V \end{array}$$

es conmutativo, donde  $\psi_i(z) = z^{\varepsilon_i}$ .

*Ejemplos 3.12.*

1. Si  $X$  es una superficie de Riemann, la aplicación identidad  $I_d : X \rightarrow X$  es un recubrimiento ramificado.
2. Sea  $m \in \mathbb{N}$ . La aplicación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como  $f(z) = z^m$ , es un recubrimiento ramificado.

### 3.2.2. Teorema de caracterización

**Definición 3.13.** *Un espacio topológico  $X$  es localmente compacto si cada punto de  $X$  tiene una base de entornos compuesta de conjuntos compactos.*

**Proposición 3.14.** *Sea  $X$  espacio topológico Hausdorff. Entonces,  $X$  es localmente compacto si, y solo si, en cada punto de  $X$  existe un entorno compacto.*

PRUEBA: [Wil70, p.130]

□

Como consecuencia del resultado anterior, cualquier superficie de Riemann  $X$  es un espacio localmente compacto. En efecto, pues si  $p \in X$ , entonces existe una carta  $\phi : U \rightarrow V$  en  $X$ , con  $p \in U$ . Como  $V \subseteq \mathbb{C}$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\overline{B}(\phi(p), \varepsilon)$ . Luego  $\phi^{-1}(\overline{B}(\phi(p), \varepsilon)) \subseteq X$  es un entorno compacto de  $p$ .

**Corolario 3.15.** *Un espacio topológico Hausdorff, compacto, es localmente compacto.*

**Definición 3.16.** *Sean  $X, Y$  espacio topológicos. Una aplicación  $F : X \rightarrow Y$  es propia si  $F^{-1}(K) \subseteq X$  es compacto, para todo  $K \subseteq Y$  compacto.*

*Ejemplos 3.17.*

1. En cualquier espacio topológico  $X$ , la aplicación identidad  $I_d : X \rightarrow X$  es una aplicación propia.
2. Si  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$ , la proyección  $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi(x, y) = x$ , no es una aplicación propia, pues  $\pi^{-1}(K)$ , con  $K = [-1, 1]$ , no es acotado.

**Proposición 3.18.** *Sean  $X, Y$  espacio topológicos, y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $X$  es compacto e  $Y$  es Hausdorff, entonces  $F$  es una aplicación propia.*

PRUEBA: Si  $K \subseteq Y$  es compacto, entonces  $K$  es cerrado, pues  $Y$  es Hausdorff. Además, como  $F$  es una aplicación continua,  $F^{-1}(K) \subseteq X$  es cerrado, luego compacto. □

**Proposición 3.19.** Sean  $X, Y$  espacio topológicos Hausdorff, localmente compactos, y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $F$  es propia, entonces  $F$  es cerrada.

PRUEBA: Sea  $A \subseteq X$  cerrado. Por (3.14), para cada  $y \in Y$ , existe un entorno  $K_y \subseteq Y$  compacto. Observe que

$$F(A) \cap K_y = F(A \cap F^{-1}(K_y)), \quad \forall y \in Y.$$

Ahora, como  $X$  es Hausdorff,  $A \cap F^{-1}(K_y)$  es compacto. Por continuidad, obtenemos  $F(A \cap F^{-1}(K_y))$  es compacto. Como también  $Y$  es Hausdorff,  $F(A \cap F^{-1}(K_y))$  es cerrado. Además, se verifica que  $F(A \cap F^{-1}(K_y)) \subseteq K_y$ , luego

$$\overline{F(A)} \cap K_y = F(A) \cap K_y, \quad \forall y \in Y.$$

Obtenemos así  $\overline{F(A)} = F(A)$ , pues  $\bigcup_{y \in Y} K_y = Y$ . □

El siguiente resultado caracteriza el concepto de recubrimiento ramificado. Se denomina Teorema de Caracterización de Recubrimientos Ramificados.

**Teorema 3.20.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann, y  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante. Son equivalentes:

1.  $F$  es un recubrimiento ramificado
2. Para cada  $q \in Y$ , el conjunto  $F^{-1}(q)$  es finito y no vacío, y además, la aplicación que a cada  $q \in Y$  le asocia el número

$$\sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F),$$

es constante.

3.  $F$  es una aplicación propia.

PRUEBA: [DD05, sec. 6.1] □

Como consecuencia de los dos resultados anteriores, si  $F : X \rightarrow Y$  es un recubrimiento ramificado, entonces  $F$  es una aplicación cerrada. Además, recuerde que también es abierta, pues  $F$  es un morfismo no constante.

**Definición 3.21.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann, y  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante. Si  $F$  es un recubrimiento ramificado, al número

$$\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F),$$

con  $q \in Y$ , se le denomina grado del recubrimiento.

**Corolario 3.22.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann, con  $X$  compacta. Si  $F : X \rightarrow Y$  es un morfismo no constante, entonces  $F$  es un recubrimiento ramificado.

PRUEBA: Consecuencia inmediata de (3.18) y (3.20). □

**Proposición 3.23.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann, y  $F : X \rightarrow Y$  un recubrimiento ramificado. Consideremos

$$R = \{p \in X \mid e_p(F) > 1\}.$$

Entonces  $F(R)$  es un conjunto discreto y cerrado. Además,  $R$  es vacío si, y solo si,  $F$  es un recubrimiento étale.

PRUEBA: Sea  $q \in Y$ . Como  $F$  es un recubrimiento ramificado,  $F^{-1}(q)$  es finito y no vacío, digamos  $F^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\}$ , y además existen cartas  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  en  $X$ , centradas en  $p_i$ , y  $\phi : U \rightarrow V$  en  $Y$ , centrada en  $q$ , y enteros  $e_i \geq 1$ , tales que  $F^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^r U_i$ , y el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{F} & U \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi \\ V_i & \xrightarrow{\psi_i} & V \end{array}$$

es conmutativo, donde  $\psi_i(z) = z^{e_i}$ . Sea  $q' \in U$ , con  $q' \neq q$ . Observe que en cada abierto  $U_i$ ,  $F$  solo se puede ramificar en el punto  $p_i$ , por lo tanto, si  $p \in F^{-1}(q')$ , entonces  $e_p(F) = 1$ . Obtenemos así que  $U \cap F(R) \subseteq \{q\}$ . Esto prueba que  $F(R)$  es un conjunto discreto. También se verifica que es cerrado, pues  $F$  es una aplicación cerrada.

Por último, si  $F$  es un recubrimiento étale, la aplicación que a cada  $q \in Y$  asocia  $\#F^{-1}(q)$  es constante, luego no pueden existir puntos de ramificación. Recíprocamente, si no existen puntos de ramificación, todas las formas locales son de potencia igual a 1, y entonces  $F$  es un recubrimiento étale. □

**Corolario 3.24.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann, y  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo, no constante, tal que  $F$  es un isomorfismo local. Si  $F^{-1}(q)$  es finito,  $\forall q \in Y$ , y la aplicación que a cada  $q \in Y$  le asigna el número de elementos de  $F^{-1}(q)$  es constante, entonces  $F$  es un recubrimiento étale.

PRUEBA: Por (3.6),  $e_p(F) = 1 \forall p \in X$ . Luego, la aplicación que a cada  $q \in Y$  le asocia el número

$$\sum_{p \in F^{-1}(q)} e_p(F)$$

es constante. Por lo tanto,  $F$  es un recubrimiento ramificado, como consecuencia de (3.20). Además,  $F$  no tiene puntos de ramificación.  $\square$

*Ejemplo 3.25.*

Sea  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 1$ . La aplicación  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , definida como  $f(z) = z^m$ , es un recubrimiento étale de grado  $m$ .

### 3.2.3. Fórmula de Hurwitz

En la sección (1.2), habíamos justificado que toda superficie de Riemann compacta es homeomorfa a una esfera con  $g$  asas. A continuación, presentamos un resultado, conocido como Formula de Hurwitz, que relaciona el género de dos superficies de Riemann compactas a través de un morfismo no constante.

**Teorema 3.26.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann compactas, y  $F : X \rightarrow Y$  un morfismo no constante. Entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e_p(F) - 1).$$

PRUEBA: [Mir95, p.52]  $\square$

Este resultado nos permitirá determinar el género de las curvas hiperelípticas que introduciremos en la siguiente sección.

## 3.3. Más ejemplos de superficies de Riemann

### 3.3.1. Estructura heredada

Sea  $X$  es una superficie de Riemann,  $Y$  un conjunto, y  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación biyectiva. Dotemos a  $Y$  con la topología heredada de  $X$  vía  $F$ , es decir,  $U \subseteq Y$  es abierto si y solo si  $F^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Sea  $\mathcal{A}_X$  el

atlas complejo maximal en  $X$  que determina su estructura de superficie de Riemann. Consideremos la siguiente colección de cartas complejas en  $Y$ ,

$$\mathcal{A}_Y = \{(F(U), \phi \circ F^{-1}) \mid (U, \phi) \in \mathcal{A}_X\}.$$

Es rutinario comprobar que  $\mathcal{A}_Y$  es un atlas complejo en  $Y$ . Dotemos a  $Y$  de la estructura compleja determinada por  $\mathcal{A}_Y$ . Como consecuencia,  $X$  le confiere al conjunto  $Y$  estructura de Superficie de Riemann. Observe que  $Y$  es un espacio topológico Hausdorff, conexo. Es más, se obtiene  $X \cong Y$ , pues  $F$  se convierte en un isomorfismo.

**Proposición 3.27.** *Sean  $X_i$  superficies de Riemann,  $i = 1, 2$ . Consideremos un conjunto  $Y$ , y aplicaciones biyectivas  $F_i : X_i \rightarrow Y$ . Si  $F_2^{-1} \circ F_1$  es un isomorfismo de  $X_1$  a  $X_2$ , entonces las topologías y las estructuras complejas en  $Y$  heredadas de  $X_i$  via  $F_i$  son idénticas.*

PRUEBA: Denotemos por  $Y_i$  la superficie de Riemann resultante al heredar el conjunto  $Y$  la topología y la estructura compleja de  $X_i$ , vía  $F_i$ . Consideremos la aplicación identidad  $I_d : Y_1 \rightarrow Y_2$ . Como

$$I_d = F_2 \circ (F_2^{-1} \circ F_1) \circ F_1^{-1},$$

obtenemos que  $I_d$  es un isomorfismo. □

*Ejemplo 3.28. (Cónicas lisas)*

Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ . En el apéndice (C) introducimos parametrizaciones cuadráticas de cónicas lisas en  $\mathbb{P}^2$ . Consideremos una parametrización cuadrática  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow C$ , y dotemos a  $C$  con la topología y estructura compleja heredada de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , vía  $f$ . Así,  $C$  se convierte en una superficie de Riemann isomorfa a  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Además, como consecuencia del resultado anterior, la topología y la estructura compleja en  $C$  no dependen de la parametrización cuadrática elegida. En efecto, pues si  $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow C$  es otra parametrización cuadrática, entonces  $g^{-1} \circ f$  es una transformación de Möbius (C.4). Por lo tanto,  $g^{-1} \circ f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es un automorfismo (2.20).

La superficie de Riemann  $C$  la denominaremos **cónica lisa** en  $\mathbb{P}^2$ . Observe que es compacta. Es más,  $C$  es homeomorfa a  $S^2$ .

### 3.3.2. Suma conexa de superficies de Riemann

Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Supongamos que existe un homeomorfismo  $\psi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  son abiertos no vacíos. Formemos la unión disjunta  $X \amalg Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\})$ , y consideremos las inclusiones

$$i_X : X \rightarrow X \amalg Y, \quad i_Y : Y \rightarrow X \amalg Y,$$

definidas como  $i_X(x) = (x, 1)$ ,  $i_Y(y) = (y, 2)$ . Los abiertos de  $X \amalg Y$  son los subconjuntos cuyas preimágenes por  $i_X, i_Y$  son abiertos respectivos de  $X, Y$ .

Sea  $R$  la relación de equivalencia en  $X \amalg Y$  generada por  $\{(u, \psi(u)) \mid u \in U\}$ . En el conjunto cociente  $(X \amalg Y)/R$ , existen tres tipos de elementos,

- conjuntos de un elemento  $\{x\}$  para  $x \in X - U$ ,
- conjuntos de un elemento  $\{y\}$  para  $y \in Y - V$ ,
- pares  $\{u, \psi(u)\}$  para  $u \in U$ .

Este cociente se suele denotar por  $X \cup_{\psi} Y$ , o por  $X \amalg Y/\psi$ . En adelante, para abreviar la notación, lo denotaremos por  $Z$ . Mediante la proyección  $\pi : X \amalg Y \rightarrow Z$ , dotemos a  $Z$  de la topología final, es decir, un subconjunto  $W \subseteq Z$  es abierto si y solamente si  $\pi^{-1}(W)$  es abierto de  $X \amalg Y$ .

**Lema 3.29.** *Las aplicaciones*

$$\pi \circ i_X : X \rightarrow Z, \quad \pi \circ i_Y : Y \rightarrow Z$$

*son inyectivas y abiertas. Las denotaremos, respectivamente, por  $j_X, j_Y$ .*

PRUEBA: Veamos que son inyectivas. Sean  $x, x' \in X$ , tales que  $j_X(x) = j_X(x')$ . Si  $x \in X \setminus U$ , entonces  $j_X(x) = \{x\}$ , luego necesariamente  $x' \in X \setminus U$ ,  $x' = x$ . En cambio, si  $x \in U$ , entonces  $j_X(x) = \{x, h(x)\}$ , luego  $x' \in U$ ,  $x' = x$ . Análogamente, se prueba la inyectividad de  $j_Y$ .

Ahora, sea  $G \subseteq X$  abierto. Como  $\pi^{-1}(j_X(G)) = G \amalg \psi(G \cap U)$ , obtenemos  $j_X(G) \subseteq Z$  es abierto. Actuando de manera similar se obtiene el carácter abierto de la aplicación  $j_Y$ .

□

Observe que las aplicaciones  $j_X, j_Y$  son continuas. Es más, como consecuencia del resultado anterior son inmersiones.

**Lema 3.30.** *Si  $X, Y$  son espacios topológicos conexos, entonces  $Z$  es conexo.*

PRUEBA: Sea  $A \subseteq Z$  abierto, cerrado, no vacío. Por continuidad,  $j_X^{-1}(A)$  es abierto y cerrado de  $X$ . Si  $j_X^{-1}(A) = \emptyset$ , entonces  $j_Y^{-1}(A) \subseteq Y \setminus V$ . Además,  $A$  es no vacío, luego  $j_Y^{-1}(A)$  es un abierto, cerrado, no vacío de  $Y$ . Como  $Y$  es conexo, obtenemos  $V = \emptyset$ . Por lo tanto, necesariamente  $j_X^{-1}(A) = X$ . Ahora,  $j_Y^{-1}(A)$  es un abierto y cerrado de  $Y$ . Además,  $j_Y^{-1}(A) \neq \emptyset$ , pues en otro caso,  $U = \emptyset$ , luego  $j_Y^{-1}(A) = Y$ . Obtenemos así que  $A = Z$ .

□

Estamos interesados en estudiar qué ocurre cuando  $X, Y$  son superficies de Riemann.

**Proposición 3.31.** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann. Supongamos que existe un isomorfismo  $\psi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  son abiertos conexos no vacíos. Si  $Z$  es Hausdorff, entonces existe una estructura de superficie de Riemann en  $Z$ , tal que las inclusiones  $j_X, j_Y$  son morfismos.

PRUEBA: Comencemos definiendo un atlas complejo en  $Z$ . Para cada carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ , consideremos la carta compleja

$$\phi_1 \circ j_X^{-1} : j_X(U_1) \rightarrow V_1.$$

Análogamente, para cada carta  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$ , consideremos la carta compleja

$$\phi_2 \circ j_Y^{-1} : j_Y(U_2) \rightarrow V_2.$$

Justifiquemos que esta colección de cartas complejas en  $Z$  son compatibles dos a dos. Es fácil comprobar la compatibilidad si ambas cartas provienen de  $X$ , o de  $Y$ . Supongamos entonces que  $j_X(U_1) \cap j_Y(U_2) \neq \emptyset$ . En tal caso,

$$(\phi_2 \circ j_Y^{-1}) \circ (\phi_1 \circ j_X^{-1})^{-1}(z) = \phi_2 \circ \psi \circ \phi_1^{-1}(z), \quad \forall z \in V,$$

donde  $V = \phi_1 \circ j_X^{-1}(j_X(U_1) \cap j_Y(U_2))$ , luego la función de transición entre las cartas complejas  $\phi_1 \circ j_X^{-1}, \phi_2 \circ j_Y^{-1}$  es holomorfa en  $V$ , pues  $\psi$  es morfismo.

Este atlas complejo determinará una estructura compleja en  $Z$ . Además, por hipótesis  $Z$  es Hausdorff, y por el resultado anterior  $Z$  es conexo, pues tanto  $X$  como  $Y$  lo son. Finalicemos, probando que las inclusiones  $j_X, j_Y$  son morfismos.

Sea  $p \in X$ . Consideremos una carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$ , con  $p \in U_1$ . Observe que  $\phi_1 \circ j_X^{-1} : j_X(U_1) \rightarrow V_1$  es una carta en  $Z$ , con  $j_X(p) \in j_X(U_1)$ . Se verifica

$$(\phi_1 \circ j_X^{-1}) \circ j_X \circ \phi_1^{-1}(z) = z, \quad \forall z \in V_1,$$

luego  $j_X$  es morfismo. Actuando análogamente, se prueba que  $j_Y$  es morfismo.  $\square$

En el resultado anterior, hemos exigido que  $Z$  sea Hausdorff para poder dotarlo de estructura de superficie de Riemann. Está hipótesis es esencial. En efecto, pues si  $X, Y = \mathbb{C}$ , y consideramos el isomorfismo  $\psi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , definido como  $\psi(z) = z$ , entonces  $Z$  no es Hausdorff: los puntos  $0_X, 0_Y$  no se pueden separar.

*Ejemplo 3.32. (Curvas hiperelípticas)*

Sea  $f \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio de grado  $2g + 1$  ó  $2g + 2$ , con raíces distintas. Consideremos la curva plana afín  $X$ , determinada por el polinomio  $w^2 - f(z) \in \mathbb{C}[z, w]$ . Definamos  $\hat{f} = u^{2g+2}f(1/u) \in \mathbb{C}[u]$ . Observe que  $\hat{f}$  también tiene raíces distintas. Determinemos el grado de  $\hat{f}$ , y sus raíces:

1. Supongamos que el grado de  $f$  es  $2g + 2$ .



- a) Si  $f(0) \neq 0$ , entonces  $\hat{f}$  es de grado  $2g + 2$ , y sus raíces son las inversas de las raíces de  $f$ .
- b) Si  $f(0) = 0$ , entonces  $\hat{f}$  es de grado  $2g + 1$ , y sus raíces son las inversas de las raíces no nulas de  $f$ .

En ambos casos,  $\hat{f}(0) \neq 0$ .

2. Supongamos que el grado de  $f$  es  $2g + 1$ .

- a) Si  $f(0) \neq 0$ , entonces  $\hat{f}$  es de grado  $2g + 2$ , y sus raíces son las inversas de las raíces de  $f$ , más el cero.
- b) Si  $f(0) = 0$ , entonces  $\hat{f}$  es de grado  $2g + 1$ , y sus raíces son las inversas de las raíces no nulas de  $f$ , más el cero.

Observe que  $\hat{f}(0) = 0$ , en ambos casos.

Ahora, consideremos la curva plana afín  $Y$ , definida por el polinomio  $v^2 - \hat{f}(u) \in \mathbb{C}[u, v]$ , y definamos la aplicación  $\psi : U \rightarrow V$  como

$$\psi(z, w) = \left( \frac{1}{z}, \frac{w}{z^{g+1}} \right),$$

donde  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq Y$  son los abiertos, respectivamente

$$\{(z, w) \in X \mid z \neq 0\}, \quad \{(u, v) \in Y \mid u \neq 0\}.$$

Claramente  $\psi$  es biyectiva. Su inversa  $\psi^{-1} : V \rightarrow U$  está definida como

$$\psi^{-1}(u, v) = \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u^{g+1}} \right).$$

Probemos que  $\psi$  es morfismo. Sea  $p = (z_0, w_0) \in U$ . Si  $w_0 \neq 0$ , entonces  $\pi_z$  es la carta en  $U$  de  $p$ . Además, como  $\psi(p) = (u_0, v_0)$  verifica que  $v_0 \neq 0$ , la carta en  $V$  de  $\psi(p)$  es  $\pi_u$ . Por lo tanto,

$$(\pi_u \circ \psi \circ \pi_z^{-1})(s) = (\pi_u \circ \psi)(s, t(s)) = \frac{1}{s}.$$

En cambio, si  $w_0 = 0$ , entonces  $\pi_w$  es la carta en  $U$  de  $p$ ,<sup>3</sup> y  $\pi_v$  es la carta en  $V$  de  $\psi(p)$ . Obtenemos así,

$$(\pi_v \circ \psi \circ \pi_w^{-1})(s) = (\pi_v \circ \psi)(r(s), s) = \frac{s}{r(s)^{g+1}}.$$

Observe que ambas composiciones están bien definidas y son holomorfas en un entorno abierto respectivamente de  $z_0$ ,  $w_0$ , pues  $\psi$  es continua y  $\pi_z^{-1}(s), \pi_w^{-1}(s) \in U$ .

---

<sup>3</sup>Recuerde que  $f$  tiene raíces distintas.

Además,  $Z = X \cup_{\phi} Y$  es Hausdorff. Justifiquemos el caso  $p \in X \setminus U$ ,  $q \in Y \setminus V$ .<sup>4</sup> Observe que los abiertos

$$U_p = \{(z, w) \in X \mid |z| < 1\}, \quad V_q = \{(u, v) \in Y \mid |u| < 1\}$$

no se cortan, y  $p \in U_p$ ,  $q \in V_q$ .

La superficie de Riemann resultante de realizar el pegado  $X \cup_{\phi} Y$ , se denomina **superficie de Riemann hiperelíptica** asociada a la curva plana afín  $X$ , o **curva hiperelíptica**.

A continuación, probaremos que  $Z$  es una superficie de Riemann compacta, y que la aplicación  $\pi : Z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definida como

$$\pi(p) = \begin{cases} z & \text{si } p \in X, \\ \infty & \text{si } p \in Y \setminus V, \end{cases}$$

es un morfismo de grado 2.

El carácter compacto de  $Z$  se deduce a partir de la igualdad

$$Z = \{(z, w) \in X \mid |z| \leq 1\} \cup \{(u, v) \in Y \mid |u| \leq 1\}.$$

Centrémonos ahora en la aplicación. Sea  $p = (z_0, w_0) \in X$ . Si  $w_0 \neq 0$ , la carta en  $Z$  de  $p$  es  $\pi_z \circ j_X^{-1}$ , mientras que si  $w_0 = 0$ , la carta en  $Z$  de  $p$  es  $\pi_w \circ j_X^{-1}$ . En ambos casos, la carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\pi(p) = z_0$  es  $\phi_1$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_1(s) &= \phi_1 \circ \pi \circ (\pi_z \circ j_X^{-1})^{-1}(s) = \phi_1(s) = s, \\ h_2(s) &= \phi_1 \circ \pi \circ (\pi_w \circ j_X^{-1})^{-1}(s) = \pi(r(s), s) = r(s), \end{aligned}$$

con  $r(s)$  holomorfa en un entorno abierto de 0, verificándose  $f(r(s)) = s^2$ . Ahora, sea  $p = (0, v) \in Y \setminus V$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $\deg(f) = 2g + 2$ , entonces  $\hat{f}(0) \neq 0$ . Por lo tanto, existen  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^*$ , tales que  $\beta_i^2 = \hat{f}(0)$ . Observe que necesariamente  $v = \beta_i$ , para algún  $i = 1, 2$ . La carta en  $Z$  de  $p$  es  $\pi_u \circ j_Y^{-1}$ , y la carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\pi(p) = \infty$  es  $\phi_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_3(s) &= \phi_2 \circ \pi \circ (\pi_u \circ j_Y^{-1})^{-1}(s) \\ &= \phi_2 \circ \pi \circ j_Y(s, t(s)) \\ &= \phi_2 \circ \pi(1/s, t(s)/s^{g+1}) = s, \quad \forall s \neq 0, \\ h_3(0) &= \phi_2 \circ \pi \circ (\pi_u \circ j_Y^{-1})^{-1}(0) = 0. \end{aligned}$$

- Si  $\deg(f) = 2g + 1$ , entonces  $\hat{f}(0) = 0$ . Así,  $v = 0$ , y la carta en  $Z$  de  $p$  es  $\pi_v \circ j_Y^{-1}$ , y la carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\pi(p) = \infty$  es  $\phi_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_4(s) &= \phi_2 \circ \pi \circ (\pi_v \circ j_Y^{-1})^{-1}(s) \\ &= \phi_2 \circ \pi \circ j_Y(b(s), s) \\ &= \phi_2 \circ \pi(1/b(s), s/b(s)^{g+1}) = b(s), \quad \forall s \neq 0, \\ h_4(0) &= \phi_2 \circ \pi \circ (\pi_v \circ j_Y^{-1})^{-1}(0) = 0, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Los casos restantes son triviales.

con  $b(s)$  holomorfa en un entorno abierto de 0, verificándose  $\hat{f}(b(s)) = s^2$ .

Finalicemos determinando el grado del recubrimiento ramificado  $\pi$ , y sus puntos de ramificación. Haciendo uso de las funciones  $h_i$  que hemos calculado previamente, obtenemos:

- Puntos  $p = (z_0, w_0) \in X$ , con  $w_0 \neq 0$ . La función a estudiar es  $h_1(s) = s$ , cuya derivada no se anula. Por tanto, estos puntos no son de ramificación.
- Puntos  $p = (z_0, 0) \in X$ . Se corresponden con las raíces de  $f$ . La función a estudiar es la derivada de  $h_2(s) = r(s)$ , en  $s = 0$ . Como  $s^2 = f(r(s))$ , obtenemos  $2s = f'(r(s))r'(s)$ . Además,  $f(r(0)) = 0$ , luego  $f'(r(0)) \neq 0$ , y entonces  $r'(0) = 0$ . Por tanto, estos puntos son de ramificación. Observe que hay tantos como el grado de  $f$ .
- Puntos  $p = (0, \beta_1), (0, \beta_2) \in Y$ , para  $\deg(f) = 2g + 2$ . A partir de  $h_3$ , es inmediato que no son de ramificación.
- Punto  $p = (0, 0) \in Y$ , para  $\deg(f) = 2g + 1$ . Hay que estudiar la derivada de la función  $h_4(s) = b(s)$ , en  $s = 0$ . Como  $\hat{f}(b(0)) = 0$ , deducimos  $\hat{f}'(b(0)) \neq 0$ . Además,  $2s = \hat{f}'(b(s))b'(s)$ , por lo que  $b'(0) = 0$ . Por lo tanto, es un punto de ramificación.

En conclusión, de manera independiente al grado de  $f$ , obtenemos  $2g + 2$  puntos de ramificación, con índice igual a 2, pues la imagen inversa de un punto  $z \in \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) \neq 0$ , consta de dos puntos. Ahora, si aplicamos la fórmula de Hurwitz, obtenemos que

$$\begin{aligned} 2g(Z) - 2 &= \deg(\pi)(2g(\widehat{\mathbb{C}}) - 2) + \sum_{p \in R} (e_p(\pi) - 1) \\ &= 2(-2) + 2g + 2 = 2g - 2, \end{aligned}$$

luego  $g(Z) = g$ .

### Observaciones 3.33.

▷ Consideremos la curva plana afín  $X_a$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - af(z) \in \mathbb{C}[z, w], \quad \text{con } a \in \mathbb{C}^*,$$

y denotemos por  $Z_a$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X_a$ . Aunque no lo probaremos aquí, se verifica que  $Z \cong Z_a$ . Este hecho lo usaremos en (7.8).

▷ Sean  $a_1, \dots, a_n$  números complejos distintos, con  $n$  un natural par. Consideremos la curva plana afín  $X_1$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - (z - a_1) \cdots (z - a_n) \in \mathbb{C}[z, w],$$

y denotemos por  $Z_1$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X_1$ . Análogamente, consideremos la curva plana afín  $X_2$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - (z - b_1) \cdots (z - b_{n-1}) \in \mathbb{C}[z, w],$$

donde  $b_j = 1/(a_j - a_n)$ , y denotemos por  $Z_2$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X_2$ .

En el apéndice (D) demostramos que ambas curvas hiperelípticas son isomorfas. Este hecho también lo usaremos en (7.8).

## Capítulo 4

# Introducción a funciones elípticas

En el presente capítulo, introducimos el concepto de función elíptica y derivamos sus principales propiedades. Como ejemplo, presentamos en detalle la función  $\wp$  de Weierstrass, y determinamos la ecuación diferencial que satisface. Además, estudiamos algunas funciones relacionadas con  $\wp$  para caracterizar el conjunto de ceros y polos de las funciones elípticas no constantes.

### 4.1. Funciones elípticas

Comencemos precisando el concepto de aplicación meromorfa.

**Definición 4.1.** *Sea  $X$  una superficie de Riemann. Una aplicación  $f: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es meromorfa en  $X$  si  $f$  es un morfismo, y  $f^{-1}(\infty) \subsetneq X$ .*

#### Observaciones 4.2.

- ▷ En las condiciones de la definición anterior, observe que si  $f: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es meromorfa en  $X$ , entonces, como consecuencia de (2.18),  $f^{-1}(\infty)$  es un subconjunto discreto de  $X$ .
- ▷ Si  $X$  es una superficie de Riemann, es usual denotar al conjunto de aplicaciones meromorfas en  $X$  por  $\mathcal{M}(X)$ . Se prueba que  $\mathcal{M}(X)$  es un cuerpo que presenta estructura de  $\mathbb{C}$ -álgebra. Por lo tanto, si  $f, g: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  son meromorfas en  $X$ , entonces  $f+g, fg$  y  $1/f$  (si  $f \neq 0$ ) son meromorfas en  $X$ .
- ▷ Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  una región. Si  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ , entonces  $\Omega_1 = \Omega \setminus f^{-1}(\infty) \subseteq \mathbb{C}$  es una región,  $f^{-1}(\infty)' \cap \Omega = \emptyset$ , y se verifica que  $f|_{\Omega_1}: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Además, si  $z_0 \in f^{-1}(\infty)$ , entonces  $z_0$  es un polo de  $f|_{\Omega_1}$ . En efecto, pues

si  $(z_n) \subseteq \Omega_1$  es una sucesión, tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f|_{\Omega_1}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty.$$

Recíprocamente, si  $\Omega_1 \subseteq \Omega$  es una región, tal que  $A' \cap \Omega = \emptyset$ , donde  $A = \Omega \setminus \Omega_1$ , y  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa que verifica

$$\lim_{s \rightarrow z} f(s) = \infty, \quad \forall z \in A,$$

entonces la función  $f_e : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definida como

$$f_e(z) = \lim_{s \rightarrow z} f(s), \quad \forall z \in \Omega,$$

es meromorfa en  $\Omega$ . Obtenemos así una correspondencia entre las funciones meromorfas en  $\Omega$ , y las funciones holomorfas en regiones contenidas en  $\Omega$  con polos en el complementario respecto de  $\Omega$ . En adelante, para abreviar la notación, si  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ , entonces a  $f|_{\Omega_1}$  también la denotaremos por  $f$ .

Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , y consideremos el retículo  $\Lambda$  generado por  $w_1, w_2$ .

**Definición 4.3.** Una función  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  es *elíptica con periodos*  $w_1, w_2$  si

$$f(z) = f(z + w_1) = f(z + w_2), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Las funciones constantes son ejemplos triviales de funciones elípticas. En (4.2) introduciremos un ejemplo no constante de función elíptica. Observe que si  $f, g$  son funciones elípticas con periodos  $w_1, w_2$ , entonces  $f + g, fg, 1/f$  (si  $f \neq 0$ ) y  $f'$  también son funciones elípticas con periodos  $w_1, w_2$ .

Si  $f$  es elíptica con periodos  $w_1, w_2$ , entonces

$$f(z) = f(z + w), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall w \in \Lambda.$$

Por lo tanto,  $f$  está determinada por sus valores en

$$P_a = \{a + \lambda w_1 + \beta w_2 \mid 0 \leq \lambda, \beta < 1\},$$

con  $a \in \mathbb{C}$ . En efecto, pues dado  $z \in \mathbb{C}$ , existe un único  $z' \in P_a$ , tal que  $z \equiv z' \pmod{\Lambda}$ . A  $P_a$  se le denomina periodo o paralelogramo fundamental. Además, como  $f^{-1}(\infty)' = \emptyset$ , deducimos que  $f^{-1}(\infty) \cap P_a$  es un conjunto finito, ya que  $P_a$  es acotado. Análogamente, si  $f$  no es idénticamente nula, se deduce que  $f^{-1}(0) \cap P_a$  también es un conjunto finito. En tal caso, denotaremos por  $\mathcal{N}_c$  al número de ceros de  $f$  en  $P_a$ , y por  $\mathcal{N}_p$  al número de polos de  $f$  en  $P_a$ , contados los ceros y polos tantas veces como indiquen sus respectivos ordenes. Observe que tanto  $\mathcal{N}_c$  como  $\mathcal{N}_p$  no dependen del

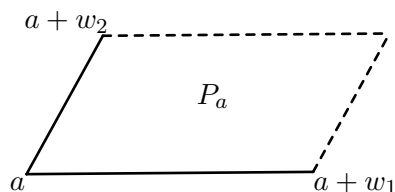


Figura 4.1: Paralelogramo fundamental

periodo  $P_a$ . Cuando hablemos de los ceros y polos de  $f$  siempre deberemos entender que nos estamos refiriendo a los conjuntos  $\pi(f^{-1}(0))$  y  $\pi(f^{-1}(\infty))$ ,<sup>1</sup> respectivamente, donde  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  es la proyección al conjunto cociente.

En el siguiente teorema presentamos los resultados básicos correspondientes a ceros y polos de funciones elípticas.

**Teorema 4.4.** *Si  $f$  es una función elíptica, no constante, con periodos  $w_1, w_2$ , entonces:*

1.  $f^{-1}(\infty) \neq \emptyset$ , o equivalentemente,  $f$  tiene polos.
2. La suma de los residuos de los polos de  $f$  es igual a cero.
3.  $\mathcal{N}_c = \mathcal{N}_p$ .
4. Si  $a_1, \dots, a_n$  (resp.  $b_1, \dots, b_n$ ) son los ceros (resp. polos) de  $f$ , se verifica

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{\Lambda}.$$

PRUEBA: Antes de comenzar con la prueba, observe que en cualquier subconjunto acotado de  $\mathbb{C}$  solo existen un número finito de ceros y polos de  $f$ . Por lo tanto, elijamos  $a \in \mathbb{C}$ , tal que  $\partial P_a \cap f^{-1}\{0, \infty\} = \emptyset$ .

1. Supongamos por reducción al absurdo que  $f^{-1}(\infty) = \emptyset$ . En tal caso, existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$ ,  $\forall z \in \overline{P_a}$ , pues  $f$  es continua, y  $\overline{P_a}$  es un conjunto compacto. Por periodicidad, deducimos

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

luego  $f$  está acotada. Por lo tanto, como consecuencia del teorema de Liouville obtenemos la contradicción deseada, pues  $f$  no es constante.

2. Por el teorema de los residuos, la suma de los residuos de los polos de  $f$  en  $P_a$  es igual  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} f(z) dz$ , donde  $\partial P_a$  está orientada positivamente.

<sup>1</sup>Habitualmente, a través de representantes de las clases de equivalencia describiremos tales conjuntos. Además, de acuerdo al orden correspondiente se repetirán representantes.

Ahora, sean  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$  los lados consecutivos dirigidos de  $\partial P_a$ , con  $\Gamma_1$  el lado que une  $a$  con  $a + w_1$ . Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} f(z) dz &= \int_{\Gamma_1} f(z + w_2) dz = - \int_{\Gamma_3} f(z) dz, \\ \int_{\Gamma_4} f(z) dz &= \int_{\Gamma_4} f(z + w_1) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz,\end{aligned}$$

$$\text{luego } \int_{\partial P_a} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} f(z) dz = 0.$$

3. Por el principio del argumento

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_c - \mathcal{N}_p.$$

Además, como  $f'/f$  es una función elíptica, no constante, con periodos  $w_1, w_2$ , deducimos por el apartado anterior  $\int_{\partial P_a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ .

4. Por el teorema de los residuos,

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Ahora, observe que

$$\int_{\Gamma_1} (z + w_2) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{\Gamma_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right] z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \frac{w_2}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Obtenemos así

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right] z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = s w_2,$$

para algún  $s \in \mathbb{Z}$ , pues

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(f(\Gamma_1), 0) \in \mathbb{Z},$$

donde  $n(f(\Gamma_1), 0)$  denota el índice de  $f(\Gamma_1)$  respecto de 0.

Análogamente, se prueba

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} \right] z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = r w_1,$$

para algún  $r \in \mathbb{Z}$ .

□



Si  $f$  es una función elíptica, no constante, con periodos  $w_1, w_2$ , al número  $\mathcal{N}_p$  se le denomina orden de  $f$ . Observe que dado  $c \in \mathbb{C}$ , el orden de  $f_c = f - c$  es igual al orden de  $f$ . Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 4.5.** *Si  $f$  una función elíptica, no constante, con periodos  $w_1, w_2$ , entonces, en cada paralelogramo  $P_a$ ,  $f$  asume cada valor el mismo número de veces.*

## 4.2. La función $\wp$ de Weierstrass

Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , y consideremos el retículo  $\Lambda$  generado por  $w_1, w_2$ . Por (4.4), si  $f$  es una función elíptica, no constante, con periodos  $w_1, w_2$ , entonces  $f^{-1}(\infty) \neq \emptyset$ . Además, su orden  $\mathcal{N}_p$  debe ser mayor o igual a dos, pues la suma de los residuos de los polos de  $f$  es igual a cero. Si suponemos que  $\mathcal{N}_p = 2$ , entonces o bien  $f$  presenta tan solo un polo de orden dos, o bien  $f$  presenta dos polos simples no congruentes. En esta sección presentamos un ejemplo del primer caso.

La función  $\wp$  de Weierstrass para  $\Lambda$  está definida como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right),$$

donde la suma se extiende sobre todos los puntos  $w \in \Lambda$ , no nulos. A continuación, probaremos que  $\wp$  es una función elíptica con periodos  $w_1, w_2$ , y determinaremos sus principales propiedades.

**Lema 4.6.** *Para cualquier número real  $r > 2$ , se verifica*

$$\sum_{w \neq 0} \frac{1}{|w|^r} < \infty.$$

PRUEBA: Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_k &= \{mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}, |m| + |n| = k\}, \\ S_k &= \{xw_1 + yw_2 \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = k\}. \end{aligned}$$

Observe que, para cada  $k \in \mathbb{N}$  se verifica

$$A_k \subseteq S_k, \quad S_k = kS_1, \quad |A_k| = 4k.$$

Por lo tanto, para todo  $w \in A_k$  se verifica

$$|w| \geq ck, \quad \text{donde } c = \min_{z \in S_1} |z| > 0.$$

Como consecuencia,

$$\sum_{w \neq 0} \frac{1}{|w|^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w \in A_k} \frac{1}{|w|^r} \leq \frac{4}{c^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{r-1}} < \infty.$$

□

**Lema 4.7.** Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  compacto. Si  $K \cap \Lambda = \emptyset$ , entonces la serie

$$\sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

converge uniformemente en  $K$ .<sup>2</sup>

PRUEBA: Dados  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ,  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ , se verifica

$$\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{z(2w-z)}{(z-w)^2 w^2}.$$

Si además  $|w| \geq 2|z|$ , entonces

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{10|z|}{|w|^3},$$

pues

$$|2w-z| \leq \frac{5}{2}|w|, \quad |z-w| \geq \frac{|w|}{2}.$$

Ahora, basta aplicar el criterio mayorante de Weierstrass, como consecuencia del lema anterior.

□

Del resultado anterior, deducimos que  $\wp$  define una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Además, observe que cada punto  $w \in \Lambda$  es un polo de  $\wp$  de orden dos.

**Teorema 4.8.** La función  $\wp$  de Weierstrass para  $\Lambda$  es un función elíptica par, con periodos  $w_1, w_2$ , de orden 2.

PRUEBA: Sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Se verifica que

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \wp(z), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Bastaría con exigir que  $K \cap (\Lambda \setminus \{0\}) = \emptyset$ , para obtener la misma conclusión.

como consecuencia del carácter incondicionalmente convergente de la serie.

Ahora, probaremos

$$\wp(z) = \wp(z + w_j), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

para  $j = 1, 2$ . Derivando término a término, obtenemos

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z - w)^3}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Por lo tanto,

$$\wp'(z + w_j) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z - (w - w_j))^3}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

De nuevo, debido al carácter incondicionalmente convergente de la serie,<sup>3</sup> deducimos

$$\wp'(z) - \wp'(z + w_j) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$$

Como  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  es una región, existe  $a_j \in \mathbb{C}$ , tal que

$$\wp(z) = \wp(z + w_j) + a_j, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Por último, observe que  $a_j = 0$ , pues

$$\wp\left(\frac{w_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{-w_j}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_j}{2}\right) + a_j$$

□

Como consecuencia de la prueba anterior, es fácil probar que  $\wp'$  es una función elíptica impar, con periodos  $w_1, w_2$ , de orden 3.

**Corolario 4.9.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$\wp(z_1) = \wp(z_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}.$$

PRUEBA: Supongamos que  $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ . Si  $\wp(z_1) = \infty$ , entonces  $z_1, z_2 \in \Lambda$ . En cambio, si  $\wp(z_1) \neq \infty$ , definamos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  como

$$f(z) = \wp(z) - \wp(z_1), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Observe que  $f(z_1) = f(z_2) = 0$ . Ahora, si  $z_1 \not\equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$ , entonces  $\pm z_1$  constituyen los ceros de  $f$ .<sup>4</sup> Por lo tanto,  $z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}$ . Si  $z_1 \equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$ , entonces  $\wp'(z_1) = \wp'(-z_1) = -\wp'(z_1)$ . Deducimos así  $f'(z_1) = 0$ , luego necesariamente  $z_2 \equiv z_1 \pmod{\Lambda}$ , pues  $z_1$  es un cero de orden 2 de  $f$ .

La implicación contraria es consecuencia inmediata del teorema anterior.

□

<sup>3</sup> $\Lambda - w_j = \Lambda$ , para  $j = 1, 2$ .

<sup>4</sup>Note que el orden de  $f$  es 2.

### 4.2.1. Ecuación diferencial para $\wp$

Sean

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^6}.$$

Por (4.6), observe que ambas series son absolutamente convergente.

**Teorema 4.10.** *La función  $\wp$  satisface la ecuación diferencial*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

PRUEBA: Fijado  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ , se verifica

$$\frac{1}{(z-w)^2} = \frac{1}{w^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{w^{n+2}}, \quad \forall z \in B(0, |w|),$$

pues

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Sustituyendo y reordenando términos, obtenemos

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \dot{B}(0, r),$$

donde

$$a_n = (n+1) \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^{n+2}}, \quad r = \min_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \{|w|\}.$$

Además, como  $\wp$  es una función par, deducimos que  $a_n = 0$  si  $n$  es impar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \wp(z) &= 1/z^2 + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots, \\ \wp'(z) &= -2/z^3 + 6G_2 z + 20G_3 z^3 + \dots, \\ \wp(z)^3 &= 1/z^6 + 9G_2/z^2 + 15G_3 + \dots, \\ \wp'(z)^2 &= 4/z^6 - 24G_2/z^2 - 80G_3 + \dots, \end{aligned}$$

$\forall z \in \dot{B}(0, r)$ , donde

$$G_n = \sum_{w \neq 0} 1/w^{2n}, \quad \forall n > 1.$$

Obtenemos así,

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -g_3 + \dots, \quad \forall z \in \dot{B}(0, r).$$

Como consecuencia, deducimos

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -g_3, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

pues la función  $(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp$  es elíptica con periodos  $w_1, w_2$ , sin polos.<sup>5</sup>

□

**Corolario 4.11.** *Sean*

$$e_1 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right).$$

Los valores  $e_i$  son distintos, y son las tres raíces del polinomio  $f \in \mathbb{C}[z]$ ,

$$f = 4z^3 - g_2z - g_3.$$

PRUEBA: Sea  $w$  cualquiera de los tres números complejos  $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$ . Como  $\wp'$  es impar, y  $\wp'(z) = \wp'(z + 2w)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , deducimos  $\wp'(w) = 0$ . Por lo tanto,  $f(\wp(z)) = 0$ , como consecuencia del resultado anterior.

Ahora, justifiquemos que los valores  $e_i$  son distintos. Como  $\wp'(w_1/2) = 0$ , y  $\wp$  tiene orden 2, por (4.5), deducimos que necesariamente  $e_2, e_3 \neq e_1$ . Razonando análogamente, se deduce  $e_2 \neq e_3$ .

□

Del corolario anterior, deducimos que los números complejos  $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$  constituyen los ceros de  $\wp'$ , pues el orden de  $\wp'$  es 3.

**Corolario 4.12.** *Sea  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ . Entonces  $\Delta \neq 0$ .*

PRUEBA: Como  $f$  no tiene raíces múltiples, deducimos que  $f$  y  $f'$  no tienen raíces comunes. Las raíces de  $f'$  son  $\pm\sqrt{g_2/12}$ , luego

$$f(\pm\sqrt{g_2/12}) = \mp\frac{2}{3}g_2\sqrt{g_2/12} - g_3 \neq 0.$$

□

### 4.3. Las funciones $\zeta$ y $\sigma$

En esta sección nos proponemos caracterizar los ceros y polos de las funciones elípticas no constantes. Con tal fin, introduciremos algunas funciones auxiliares relacionadas con la función  $\wp$  de Weierstrass.

<sup>5</sup>La única singularidad posible sería 0 (salvo congruencia), pero es fácil deducir de la igualdad que le precede que no es un polo.

Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , y consideremos el retículo  $\Lambda$  generado por  $w_1, w_2$ . Las funciones  $\zeta$  y  $\sigma$  para  $\Lambda$  están definidas como

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right),$$

$$\sigma(z) = z \prod_{w \neq 0} \left( 1 - \frac{z}{w} \right) e^{z/w + \frac{1}{2}(z/w)^2}.$$

donde la suma y el producto se extienden sobre todos los puntos  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ .

**Lema 4.13.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  compacto. Si  $K \cap \Lambda = \emptyset$ , entonces la serie*

$$\sum_{w \neq 0} \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right)$$

*converge uniformemente en  $K$ .*<sup>6</sup>

PRUEBA: Dados  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ,  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ , se verifica

$$\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = \frac{z^2}{w^2(z-w)}.$$

Si además  $|w| \geq 2|z|$ , entonces

$$\left| \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right| \leq \frac{2|z|^2}{|w|^3}.$$

Basta ahora aplicar el criterio mayorante de Weierstrass, y usar (4.6). □

Como consecuencia del resultado anterior, observe que  $\zeta$  define una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ , con polos simples en  $\Lambda$ . Además, derivando término a término obtenemos

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Corolario 4.14.** *Existen dos constantes  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$  tales que*

$$\zeta(z + w_j) = \zeta(z) + \eta_j, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

PRUEBA: Consecuencia inmediata de la identidad anterior. □

---

<sup>6</sup>De nuevo, observe que bastaría con exigir que  $K \cap (\Lambda \setminus \{0\}) = \emptyset$ .

**Teorema 4.15.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto, y consideremos una sucesión  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de funciones holomorfas en  $\Omega$ . Supongamos que existe una sucesión  $(a_n)$  de números reales no negativos, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \quad |f_n(z) - 1| \leq a_n, \quad \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  define una función  $F$  holomorfa en  $\Omega$ . Además,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}$$

uniformemente en compactos  $K \subseteq \Omega \setminus F^{-1}(0)$ .

PRUEBA: [SS03, p.141]

□

**Lema 4.16.** El producto

$$\prod_{w \neq 0} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{z/w + \frac{1}{2}(z/w)^2},$$

define una función entera, cuyos ceros son  $\Lambda \setminus \{0\}$ .

PRUEBA: Para cada  $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ , definamos  $E_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$E_w(z) = \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{z/w + \frac{1}{2}(z/w)^2}.$$

Consideremos la rama principal del logaritmo  $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ . Es bien conocido, que

$$\begin{aligned} \log(1-z) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \\ &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \cdots, \quad \forall z \in B(0, 1). \end{aligned}$$

Fijemos  $s \in B(0, \frac{1}{2})$ , y definamos  $v = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{s^k}{k}$ . Se verifica

$$|v| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|s|^k}{k} \leq \frac{2}{3}|s|^3 \leq \frac{1}{2},$$

$$|e^v - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k}{k!} \right| \leq \frac{|v|}{1-|v|} \leq 2|v|.$$

Por lo tanto,

$$|(1-s)e^{s+\frac{s^2}{2}} - 1| = |e^v - 1| \leq 2|v| \leq \frac{4}{3}|s|^3 \leq 2|s|^3.$$

Sea  $r > 0$ . Observe que si  $|w| > 2r$ , entonces

$$|E_w(z) - 1| \leq 2\frac{r^3}{|w|^3}, \quad \forall z \in B(0, r),$$

como consecuencia de los razonamientos anteriores. Ahora, basta aplicar (4.6) junto con el teorema anterior.  $\square$

Debido al resultado anterior,  $\sigma$  define una función entera, cuyo conjunto de ceros es  $\Lambda$ . Observe que todos sus ceros son simples. Además, se verifica

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z) = \zeta(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

**Teorema 4.17.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  una región simplemente conexa. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa que no se anula en  $\Omega$ , entonces existe una función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa, tal que  $e^{g(z)} = f(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ .*

PRUEBA: [SS03, p.100]  $\square$

**Corolario 4.18.** *Para cada  $z \in \mathbb{C}$ , se verifica*

$$\sigma(z + w_j) = -\sigma(z)e^{\eta_j(z+w_j/2)}, \quad j = 1, 2.$$

PRUEBA: Sea  $a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B = B(a, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Lambda$ . Por el teorema anterior, existen funciones  $g_1, g_2 : B \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfas, tales que

$$e^{g_1(z)} = \sigma(z), \quad e^{g_2(z)} = \sigma(z + w_j), \quad \forall z \in B.$$

Derivando, obtenemos

$$\begin{aligned} g_2'(z) - g_1'(z) &= \frac{\sigma'}{\sigma}(z + w_j) - \frac{\sigma'}{\sigma}(z) \\ &= \zeta(z + w_j) - \zeta(z) = \eta_j, \quad \forall z \in B, \end{aligned}$$

como consecuencia de (4.14). Por lo tanto,

$$g_2(z) - g_1(z) = \eta_j z + d_j, \quad \forall z \in B,$$

con  $d_j \in \mathbb{C}$ , pues  $B$  es una región. Obtenemos así

$$\sigma(z + w_j) = c_j e^{\eta_j z} \sigma(z), \quad \forall z \in B,$$



donde  $c_j = e^{d_j}$ . Por (2.10), la igualdad anterior se extiende a  $\mathbb{C}$ . Por último, para determinar  $c_j$ , usemos que  $\sigma$  es impar, es decir,  $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .<sup>7</sup>

Como

$$\sigma\left(\frac{w_j}{2}\right) = \sigma\left(-\frac{w_j}{2} + w_j\right) = c_j e^{-\eta_j w_j/2} \sigma\left(-\frac{w_j}{2}\right),$$

deducimos  $c_j = -e^{\eta_j w_j/2}$ .

□

**Teorema 4.19.** *Existe una función elíptica  $f$  con periodos  $w_1, w_2$ , cuyos ceros y polos son, respectivamente,  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_n$ , si, y solo si,*

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{\Lambda}.$$

*Es más,  $f$  está unívocamente determinada salvo una constante multiplicativa.*

PRUEBA: La condición necesaria se probó en (4.4). Justifiquemos ahora el carácter suficiente de la condición. Por hipótesis, existe  $w \in \Lambda$ , tal que

$$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k = w.$$

Supongamos que  $w = 0$ , y definamos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  como

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k) / \prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k).$$

Observe que  $f$  es una función elíptica con periodos  $w_1, w_2$ , como consecuencia del corolario anterior. Además,  $f$  tiene los ceros y polos deseados.

Por último, supongamos que  $f_1, f_2$  son funciones elípticas con periodos  $w_1, w_2$ , cuyos ceros y polos coinciden. En tal caso,  $f_2/f_1$  es una función elíptica con periodos  $w_1, w_2$ , sin polos, luego es una constante.

□

---

<sup>7</sup>Observe que  $\Lambda = -\Lambda$ .



## Capítulo 5

# La función modular

En el capítulo anterior definimos las cantidades  $g_k(\Lambda)$ ,  $k = 2, 3$ , para un retículo  $\Lambda$  arbitrario, y probamos que  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . Esto plantea la siguiente pregunta:

Sean  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ , tales que  $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ . ¿Existe un retículo  $\Lambda$  cumpliendo  $g_k(\Lambda) = c_k$ , para  $k = 2, 3$ ?

La cuestión anterior se denomina problema de inversión. En este capítulo probaremos que efectivamente existe un retículo  $\Lambda$  cumpliendo  $g_k(\Lambda) = c_k$ , para  $k = 2, 3$ , y más aun,  $\Lambda$  será el único retículo que lo cumpla. La prueba que exponemos aquí esta basada en propiedades de la función modular  $J$ . Por tal motivo, comenzaremos definiendo la función modular  $J$ , y precisaremos sus principales propiedades.

### 5.1. Las funciones $g_2, g_3$

Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ . En (4.2.1) habíamos definido las cantidades  $g_2, g_3$  respecto de un retículo arbitrario. Tales cantidades pueden ser consideradas como función de  $w_1, w_2$ , es decir,

$$g_2(w_1, w_2) = 60 \sum' \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^4},$$
$$g_3(w_1, w_2) = 140 \sum' \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^6},$$

donde la suma  $\sum'$  se extiende sobre todos pares de enteros  $(m, n) \neq (0, 0)$ .

**Lema 5.1.** *Las funciones  $g_k$ ,  $k = 2, 3$ , verifican las siguientes propiedades:*

1.  $g_k$  es homogénea de grado  $-2k$ ,

$$g_k(\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda^{-2k} g_k(w_1, w_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

2. Si  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , tales que  $ad - bc = \pm 1$ , entonces

$$g_k(aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) = g_k(w_1, w_2).$$

PRUEBA: La primera propiedad es inmediata. Con respecto a la segunda, definamos

$$w'_1 = aw_1 + bw_2, \quad w'_2 = cw_1 + dw_2.$$

Como  $ad - bc = \pm 1$ , obtenemos

$$w_1 = \pm(dw'_1 - bw'_2), \quad w_2 = \pm(-cw'_1 + aw'_2).$$

Si  $\Lambda$  es el retículo generado por  $w_1, w_2$ , y  $\Lambda'$  es el retículo generado por  $w'_1, w'_2$ , entonces  $\Lambda = \Lambda'$  como consecuencia de las igualdades anteriores. Así, debido al carácter incondicionalmente convergente de las series que definen las cantidades  $g_k(w_1, w_2)$ , se obtienen las identidades deseadas.  $\square$

De la prueba anterior deducimos que para cualesquiera  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , tales que  $ad - bc = \pm 1$ , el retículo generado por

$$w'_1 = aw_1 + bw_2, \quad w'_2 = cw_1 + dw_2$$

coincide con el retículo generado por  $w_1, w_2$ . Además, el recíproco también es cierto, es decir, si  $w'_1, w'_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ , generan el mismo retículo que  $w_1, w_2$ , entonces existen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad - bc = \pm 1$ , tales que

$$w'_1 = aw_1 + bw_2, \quad w'_2 = cw_1 + dw_2.$$

En efecto, pues

$$\begin{aligned} w'_1 &= a_1w_1 + b_1w_2, & w_1 &= c_1w'_1 + d_1w'_2, \\ w'_2 &= a_2w_1 + b_2w_2, & w_2 &= c_2w'_1 + d_2w'_2, \end{aligned}$$

con  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ , luego

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} w'_1 & \operatorname{Im} w'_1 \\ \operatorname{Re} w'_2 & \operatorname{Im} w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w'_1 & \operatorname{Im} w'_1 \\ \operatorname{Re} w'_2 & \operatorname{Im} w'_2 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 5.2. La función modular $J$

Sea  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ , y consideremos las funciones  $g_k, \Delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 2, 3$ , definidas como

$$\begin{aligned} g_k(z) &= g_k(1, z), \\ \Delta(z) &= g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2, \quad \forall z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

La función modular  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , está definida como

$$J(z) = \frac{g_2(z)^3}{\Delta(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Debido a (4.12), deducimos que la función modular  $J$  está bien definida, pues  $\Delta$  no se anula en  $\mathbb{H}$ .

**Teorema 5.2.** *La función modular  $J$  es holomorfa en  $\mathbb{H}$ .*

PRUEBA: Observe que bastará probar que las funciones  $g_k$  son holomorfas en  $\mathbb{H}$ . Sean  $a, b > 0$ . Dado  $z \in \mathbb{H}$ ,  $z = x + iy$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , se verifica

$$|m + nz|^2 = m^2 + 2mnx + n^2x^2 + n^2y^2.$$

Elijamos  $\delta > 0$ , tal que  $\frac{a^2}{a^2+b^2} < \delta^2 < 1$ , y reescribamos

$$|m + nz|^2 = (1 - \delta^2)m^2 + \left(\delta m + \frac{xn}{\delta}\right)^2 + \left[y^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)x^2\right]n^2.$$

Si suponemos  $|x| \leq a$ ,  $y \geq b$ , entonces

$$|m + nz|^2 \geq (1 - \delta^2)m^2 + \left[b^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)a^2\right]n^2.$$

Ahora, como  $1 - \delta^2$ ,  $b^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)a^2 > 0$ , fijemos  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$|m + nz|^2 \geq \varepsilon^2(m^2 + n^2).$$

Obtenemos así

$$\frac{1}{|m + nz|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{|m + ni|},$$

para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ , no ambos nulos. Además, por (4.6) se verifica

$$\sum' \frac{1}{|m + ni|^r} < \infty, \quad \text{para } r > 2,$$

luego basta aplicar el criterio mayorante de Weierstrass para deducir que la serie

$$\sum' \frac{1}{(m + nz)^r}, \quad \text{para } r > 2,$$

converge uniformemente en  $\{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} z| \leq a, \operatorname{Im} z \geq b\}$ . □

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , tales que  $ad - bc = 1$ . Consideremos el automorfismo  $\mathcal{G} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definido como

$$\mathcal{G}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dado  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , se verifica que

$$\operatorname{Im} \mathcal{G}(z) = \operatorname{Im} \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

Así, deducimos que  $\gamma = \mathcal{G}_{|\mathbb{H}}$  es un automorfismo en  $\mathbb{H}$ . Además, es rutinario comprobar que el conjunto constituido por todos los automorfismos en  $\mathbb{H}$  de esta forma presenta estructura de grupo bajo la operación de composición. A este grupo se le denomina grupo modular, y se le denota por  $\Gamma$ .

**Teorema 5.3.** *La función modular  $J$  satisface la ecuación*

$$J(\gamma(z)) = J(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}, \forall \gamma \in \Gamma.$$

PRUEBA: Sea  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Como  $ad - bc = 1$ , obtenemos

$$g_k(z) = g_k(cz + d, az + b) = (cz + d)^{-2k} g_k(\gamma(z)), \quad \forall z \in \mathbb{H},$$

para  $k = 2, 3$ , como consecuencia de (5.1). Así, se deduce

$$\begin{aligned} g_2(\gamma(z))^3 &= (cz + d)^{12} g_2(z)^3, \\ g_3(\gamma(z))^2 &= (cz + d)^{12} g_3(z)^2, \quad \forall z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

□

### 5.3. Región fundamental para $\Gamma$

Comencemos definiendo una relación de equivalencia en  $\mathbb{H}$ . Dados  $z, z' \in \mathbb{H}$ ,  $z$  está relacionado con  $z'$ ,  $z \sim_{\Gamma} z'$ , si existe  $\gamma \in \Gamma$ , tal que  $z' = \gamma(z)$ . Las clases de equivalencia resultantes las denominaremos  $\Gamma$ -órbitas. Así, las  $\Gamma$ -órbitas son idénticas o disjuntas, y la unión de todas las  $\Gamma$ -órbitas es igual a  $\mathbb{H}$ .

Ahora, un subconjunto  $F$  de  $\mathbb{H}$  es una región fundamental para  $\Gamma$  si  $F$  es conexo por caminos, y cada  $\Gamma$ -órbita interseca con  $F$  en un único punto. Observe que la función modular  $J$  es constante en cada  $\Gamma$ -órbita, como consecuencia de (5.3), por lo tanto, si  $F$  es una región fundamental para  $\Gamma$ , la función modular  $J$  está determinada por sus valores en  $F$ .

**Teorema 5.4.** *Sea*

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 0, |z| = 1 \right\}.$$

*Entonces,  $F$  es una región fundamental para  $\Gamma$ .*

Los puntos  $\rho, i, \rho+1$ , con  $\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ , se denominan vértices de  $F$ . Observe que los automorfismos  $T(z) = z + 1$ ,  $U(z) = -1/z$  de  $\mathbb{H}$  están en  $\Gamma$ .

PRUEBA: Comencemos probando que cada  $\Gamma$ -órbita tiene intersección no vacía con  $F$ . Fijemos  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ . Si  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , entonces

$$\operatorname{Im} \gamma(z) = \frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2}.$$

Así, deducimos que existe  $\gamma_0 \in \Gamma$ , tal que

$$\operatorname{Im} \gamma_0(z) = \max_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{Im} \gamma(z).$$

Sea  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z_0 < \frac{1}{2}$ , donde  $z_0 = \gamma_0(z) - n$ . Observe que  $z_0$  es un punto de la  $\Gamma$ -órbita de  $z$ . Además, como  $\operatorname{Im} z_0 = \operatorname{Im} \gamma_0(z)$ , deducimos que necesariamente  $|z_0| \geq 1$ , pues en caso contrario, obtendríamos

$$\operatorname{Im}(-1/z_0) = \frac{\operatorname{Im} z_0}{|z_0|^2} > \operatorname{Im} z_0,$$

que contradice la maximalidad de  $\operatorname{Im} z_0$ . Así,  $z_0$  es el punto deseado en la  $\Gamma$ -órbita de  $z$ , salvo que  $|z_0| = 1$ , en cuyo caso, el punto deseado es  $-1/z_0$ .

Ahora, justifiquemos que cada  $\Gamma$ -órbita interseca a  $F$  en un solo punto. En (5.11), probaremos que  $J|_F : F \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación biyectiva. Por lo tanto, si una  $\Gamma$ -órbita interseca a  $F$  en dos puntos  $z_1, z_2$  distintos, se obtendría  $J(z_1) = J(z_2)$ , contradiciendo la inyectividad de  $J|_F$ .  $\square$

**Corolario 5.5.** *Cualquier retículo  $\Lambda$  puede ser generado por elementos  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ , tales que  $w_2/w_1 \in F$ .*

PRUEBA: Sean  $w'_1, w'_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , y consideremos el retículo  $\Lambda$  generado por  $w'_1, w'_2$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos  $z_0 = w'_2/w'_1 \in \mathbb{H}$ . Por el teorema anterior, existe  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , tal que  $\gamma(z_0) \in F$ . Sean

$$w_1 = dw'_1 + cw'_2, \quad w_2 = bw'_1 + aw'_2.$$

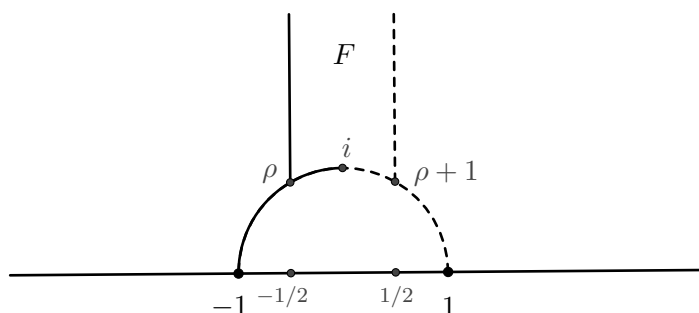


Figura 5.1: Región fundamental  $F$

Como  $ad - bc = 1$ , deducimos que  $w_1, w_2$  generan el retículo  $\Lambda$ . Además, se verifica

$$w_2/w_1 = \frac{aw'_2 + bw'_1}{cw'_2 + dw'_1} = \gamma(z_0) \in F.$$

□

## 5.4. Expansión de Fourier de $J$

Por (5.3), deducimos que

$$J(z+1) = J(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Así, la función modular  $J$  es una función holomorfa de periodo 1. Ahora, consideremos la aplicación  $t : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$t(z) = e^{2\pi iz}, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Observe que  $t(\mathbb{H}) = \dot{B}$ , donde  $\dot{B} = \dot{B}(0, 1)$ . Además, dado  $z_0 \in \mathbb{H}$ , si  $t_0 = t(z_0)$ , se verifica que  $t^{-1}(t_0) = \{z_0 + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Por lo tanto, la aplicación  $f : \dot{B} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$f(t(z)) = J(z), \quad \forall z \in \mathbb{H},$$

está bien definida. Es más, usando el teorema de la función inversa es fácil comprobar que  $f$  es holomorfa en  $\dot{B}$ . Como consecuencia,  $f$  admite un desarrollo en serie de Laurent en  $\dot{B}$ , es decir, existen coeficientes  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  unívocamente determinados, tales que

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n, \quad \forall t \in \dot{B}.$$

Así, obtenemos que

$$J(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

En (5.8), probaremos que  $a_{-1} \neq 0$ , y que  $a_n = 0$ , para todo  $n \leq -2$ . Esto nos permitirá determinar el comportamiento asintótico de la función modular  $J$  cuando  $\text{Im } z \rightarrow \infty$ , lo cual será requerido en la siguiente sección.

**Lema 5.6.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  compacto. Si  $K \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ , entonces la serie*

$$\sum_{m \neq 0} \left( \frac{1}{z+m} - \frac{1}{m} \right),$$



extendida sobre todos los enteros no nulos, converge uniformemente en  $K$ . Además, se verifica que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{m \neq 0} \left( \frac{1}{z+m} - \frac{1}{m} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

PRUEBA: [Ahl78, p.189]

□

Desarrollando en series de Laurent ambos lados de la identidad anterior sobre  $z = 0$ , e igualando los coeficientes asociados a  $z^3$ ,  $z^5$ , se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

**Lema 5.7.** Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$  una serie de potencias de radio de convergencia  $R \geq 1$ , y consideremos la función  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad \forall t \in B(0, 1).$$

Entonces,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(t^n)$  converge uniformemente en compactos contenidos en  $B(0, 1)$ . Como consecuencia, la función  $g : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t^n), \quad \forall t \in B(0, 1),$$

es holomorfa, y su serie de potencias centrada en 0 se obtiene sumando formalmente las series de potencias centradas en 0 de  $f(t)$ ,  $f(t^2)$ ,  $\dots$ .

PRUEBA: Sea  $r \in (0, 1)$ . Si  $|t| \leq r$ , entonces

$$|f(t^n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{nk}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Intercambiando el orden de sumación, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{r^k}{1-r^k} \leq \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \infty.$$

Ahora, basta aplicar el criterio mayorante de Weierstrass, para obtener el resultado.

□

**Teorema 5.8.** Para cada  $z \in \mathbb{H}$ , se verifica

$$J(z) = \frac{1}{1728t} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

PRUEBA: Las funciones  $g_k$ ,  $k = 2, 3$ , son holomorfas en  $\mathbb{H}$  de periodo 1, es decir,

$$g_k(z) = g_k(z + 1), \quad \forall z \in \mathbb{H}.^1$$

Determinemos las expansiones de Fourier de  $g_k$ ,  $k = 2, 3$ .

Comencemos por  $g_2$ . Como

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s-1} &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} s^n\right) \\ &= -(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^n), \quad \forall s \in \mathbb{C}, |s| < 1, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= \pi i \frac{t+1}{t-1} \\ &= -\pi i(1 + 2t + 2t^2 + \dots), \quad \forall z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Igualando con la expresión obtenida en (5.6) y derivando, tres y cinco veces, deducimos que

$$\begin{aligned} 6 \sum \frac{1}{(m+z)^4} &= 16\pi^4(t + 8t^2 + 27t^3 \dots), \\ 120 \sum \frac{1}{(m+z)^6} &= -64\pi^6(t + 32t^2 + 243t^3 + \dots), \quad \forall z \in \mathbb{H}, \end{aligned}$$

donde ambas series se extienden sobre todos los enteros.

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} g_2(z) &= 60 \sum' \frac{1}{(m+nz)^4} \\ &= 60 \left( 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^4} \right) \\ &= 60 \left( \frac{\pi^4}{45} + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + 8t^{2n} + \dots) \right), \quad \forall z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Consecuencia inmediata de la prueba del resultado (5.3).

Usando ahora el lema anterior, conseguimos que

$$g_2(z) = \pi^4 \left( \frac{4}{3} + 320t + \dots \right), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Por un razonamiento similar, usando ahora la igualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

$$120 \sum \frac{1}{(m+z)^6} = -64\pi^6(t + 32t^2 + \dots), \quad \forall z \in \mathbb{H},$$

obtenemos

$$g_3(z) = \pi^6 \left( \frac{8}{27} - \frac{448}{3}t + \dots \right), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Así,

$$\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2 = \pi^{12}(4016t + \dots), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

□

**Corolario 5.9.** Sea  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ . Entonces

$$\lim_{y \rightarrow \infty} tJ(z) = \frac{1}{1728},$$

uniformemente en  $x$ .

## 5.5. Valores de $J$

Para solucionar el problema de inversión necesitamos conocer los siguientes dos resultados.

**Lema 5.10.** Se verifica

$$g_2(\rho) = 0, \quad g_3(i) = 0.$$

Respectivamente, es equivalente a

$$J(\rho) = 0, \quad J(i) = 1.$$

PRUEBA: Sea  $\Lambda_\rho$  el retículo generado por  $1, \rho$ . Como  $\rho\Lambda_\rho = \Lambda_\rho$ , obtenemos

$$g_2(\rho) = 60 \sum' \frac{1}{(\rho w)^4} = \rho^{-4} g_2(\rho),$$

luego necesariamente  $g_2(\rho) = 0$ , pues  $\rho^{-4} \neq 1$ .

Por otro lado, sea  $\Lambda_i$  el retículo generado por  $1, i$ . Observe que  $i\Lambda_i = \Lambda_i$ , luego

$$g_3(i) = 140 \sum' \frac{1}{(iw)^6} = -g_3(i).$$

Por lo tanto,  $g_3(i) = 0$ .

□

**Teorema 5.11.** *La función modular  $J$  asume cada valor complejo  $c$  en la región fundamental  $F$ , definida en (5.4). Es más, si  $c \neq 0, 1$ , entonces es asumido tan solamente una vez en  $F$ , y si  $c = 0, 1$ , entonces*

$$J(z) \neq c, \quad \forall z \in F \setminus \{\rho, i\}.$$

Como consecuencia,  $J|_F : F \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación biyectiva.

PRUEBA: Sea  $c \in \mathbb{C}$ . Definamos  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , como

$$f(z) = J(z) - c, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

Por (5.9), observe que  $\lim_{y \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ , uniformemente en  $x$ . Por lo tanto, existe  $y_0 \geq 2$ , tal que  $|f(z)| \geq 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}$ , con  $y \geq y_0$ . Como consecuencia,  $f$  presenta un número finito de ceros en  $F$ . Denotemos por  $N$  el número de ceros de  $f$  en  $F$ , contados estos tantas veces como indiquen sus respectivos ordenes, y consideremos la curva de Jordan  $C$  orientada positivamente, constituida por los cinco lados etiquetados  $\ell_1, \dots, \ell_5$ , descritos en Figura 5.2.

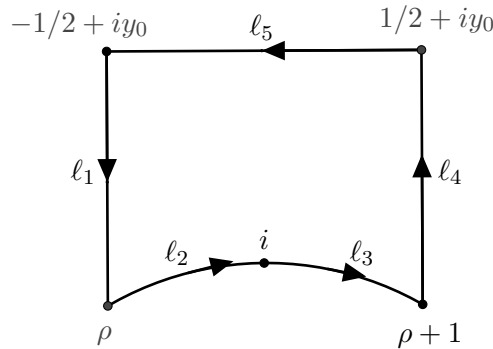


Figura 5.2

Para determinar  $N$ , distinguiremos los siguientes tres casos:

- Supongamos que  $f$  no presenta ceros en  $C$ . En tal caso, por el principio del argumento, obtenemos que

$$N = \frac{1}{2\pi i} (\Delta_1 + \dots + \Delta_5),$$

donde

$$\Delta_j = \int_{\ell_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \forall j = 1, \dots, 5.$$

Ahora, como  $f(z+1) = f(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}$ , deducimos  $\Delta_1 = -\Delta_4$ . Análogamente, deducimos  $\Delta_2 = -\Delta_3$ , pues  $f(-1/z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{H}$ . Luego,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Usando de nuevo (5.9), obtenemos que la aplicación  $g : \dot{B} = \dot{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$g(t(z)) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{H},^2$$

presenta un polo simple en 0. Además, la aplicación  $t$  transforma el segmento de curva  $\ell_5$  en una circunferencia de radio  $e^{-2\pi y_0}$ , orientada negativamente. Como consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell_5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t(\ell_5)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 1.$$

- Ahora, supongamos que  $f$  presenta ceros en  $C$ , pero no en los vértices. Observe que estos ceros vienen en pares, los cuales son simétricos respecto de la recta  $x = 0$ . Modifiquemos la curva  $C$  cerca de estos ceros como en Figura 5.3, de modo que el automorfismo  $T$  envíe la modificaciones realizadas a  $\ell_1$  a las modificaciones realizada en  $\ell_4$ , y el automorfismo  $U$  envíe la modificaciones realizadas a  $\ell_2$  a las modificaciones realizada en  $\ell_3$ . Argumento como el caso anterior, volvemos a obtener que  $N = 1$ .

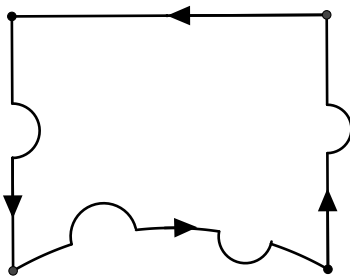


Figura 5.3

- Por último, supongamos que  $f$  presenta ceros en algunos de los vértices. En tal caso, modifiquemos la curva  $C$  introduciendo arcos circulares de radio  $r > 0$ , suficientemente pequeño, sobre los vértices como en Figura 5.4.

<sup>2</sup>Observe que  $g$  está bien definida, y es holomorfa en  $\dot{B}$ .

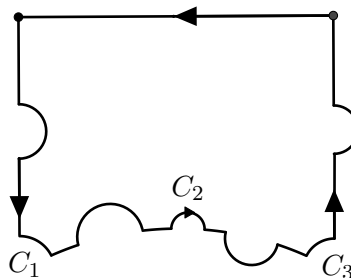


Figura 5.4

Aplicando de nuevo el principio del argumento, y actuando como antes, obtenemos

$$N_0 = 1 + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^3 \Delta(C_j),$$

donde  $N_0$  denota el número de ceros de  $f$  en  $F \setminus \{\rho, i\}$ , contados estos tantas veces como indiquen sus respectivos ordenes, y

$$\Delta(C_j) = \int_{C_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \forall j = 1, \dots, 3.$$

Sean  $m_\rho, m_i, m_{\rho+1}$  las respectivas multiplicidades de  $f$  en  $\rho, i, \rho + 1$ . Observe que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_\rho}{z - \rho} + g_\rho(z), \quad \forall z \in \dot{B}(\rho, \varepsilon),$$

donde  $g_\rho : B(\rho, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa. Como consecuencia,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_1) = -\frac{i\pi}{3} m_\rho.$$

Por un razonamiento análogo,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_2) &= -i\pi m_i, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_3) &= -\frac{i\pi}{3} m_{\rho+1}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$N_0 + \frac{m_i}{2} + \frac{m_\rho}{3} = 1,$$

pues  $m_\rho = m_{\rho+1}$ . Ahora bien, como hemos supuesto que  $f$  presenta ceros en algunos de los vértices, deducimos que necesariamente las soluciones a la ecuación anterior son

$$(N_0, m_i, m_\rho) = (0, 2, 0), (0, 0, 3).$$

□

## 5.6. Solución al problema de inversión

Resolvamos el problema de inversión mencionado en la introducción del capítulo.

**Teorema 5.12.** Sean  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ , tales que  $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ . Entonces, existe un único retículo  $\Lambda$  cumpliendo

$$g_k(\Lambda) = c_k, \quad k = 2, 3. \quad (5.14)$$

PRUEBA: Por (5.5), cualquier retículo  $\Lambda$  puede ser generado por elementos  $w, wz$ , con  $w \in \mathbb{C}^*$ ,  $z \in F$ , así que bastará con determinar las soluciones de

$$g_k(w, wz) = c_k, \quad k = 2, 3, \quad (5.15)$$

con  $w \in \mathbb{C}^*$ ,  $z \in F$ . Distingamos los siguientes tres casos:

Si  $c_2, c_3 \neq 0$ , entonces (5.15) es equivalente a

$$\frac{g_2^3(w, wz)}{g_2^3(w, wz) - 27g_3^2(w, wz)} = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad \frac{g_3(w, wz)}{g_2(w, wz)} = \frac{c_3}{c_2}.$$

Es más, por (5.1) esto equivale a

$$J(z) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad (5.16)$$

$$w^2 = \frac{c_2 g_3(z)}{c_3 g_2(z)}. \quad (5.17)$$

Por (5.11), existe una única solución  $z_0 \in F$  de (5.16). Además,  $c_2, c_3 \neq 0$ , luego  $J(z_0) \neq 0, 1$ , lo cual es equivalente  $g_2(z_0), g_3(z_0) \neq 0$ . Por lo tanto, existen dos soluciones  $\pm w_0 \in \mathbb{C}^*$  de la ecuación

$$w^2 = \frac{c_2 g_3(z_0)}{c_3 g_2(z_0)}.$$

Observe que las dos soluciones obtenidas de (5.15),  $w_0, w_0 z_0$  y  $-w_0, -w_0 z_0$ , generan el mismo retículo  $\Lambda$ , el cual es la única solución de (5.14).

Si  $c_2 = 0$ , entonces  $c_3 \neq 0$ . Además, (5.15) equivale a

$$g_2(z) = 0, \quad (5.18)$$

$$w^{-6} g_3(z) = c_3. \quad (5.19)$$

Como consecuencia de (5.10) y (5.11), deducimos que  $\rho$  es la única solución en  $F$  de (5.18). Por lo tanto, obtenemos seis soluciones de (5.15), a saber,

$$w, w\rho \quad \text{con } w \in \sqrt[6]{g_3(\rho)/c_3}.$$

Ahora, es rutinario comprobar que estas seis soluciones generan el mismo retículo  $\Lambda$ , el cual es la única solución de (5.14).

Si  $c_3 = 0$ , entonces  $c_2 \neq 0$ . Además, en este caso (5.15) equivale a

$$g_3(z) = 0, \quad (5.20)$$

$$w^{-4}g_2(z) = c_2. \quad (5.21)$$

Como consecuencia de (5.10) y (5.11), deducimos que  $i$  es la única solución en  $F$  de (5.20). Por lo tanto, las soluciones de (5.15) son

$$w, wi \quad \text{con } w \in \sqrt[4]{g_2(i)/c_2}.$$

Observe que estas cuatro soluciones generan el mismo retículo  $\Lambda$ , el cual es la única solución de (5.14).

□



## Capítulo 6

# Curvas elípticas

Las superficies de Riemann las cuales son isomorfas a toros complejos se denominan curvas elípticas. Las curvas elípticas pueden ser dotadas con una estructura de grupo analítico. Además, dicha estructura está unívocamente determinada por la elección del elemento neutro. En este capítulo probaremos que las curvas hiperelípticas asociadas a curvas planas afines determinadas por polinomios de la forma

$$w^2 - (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3),$$

con  $a_1, a_2, a_3$  números complejos distintos, son curvas elípticas, y recíprocamente, cualquier toro complejo es isomorfo a una curva hiperelíptica de este estilo.

### 6.1. Curvas elípticas

**Definición 6.1.** *Una superficie de Riemann  $X$  es una curva elíptica si es isomorfa a un toro complejo, es decir, si existe algún retículo  $\Lambda$ , tal que  $X \cong \mathbb{C}/\Lambda$ .*

Sea  $\Lambda$  un retículo, y consideremos el toro complejo  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . A lo largo del capítulo, con el fin de abreviar la notación, denotaremos por  $\tilde{z}$  la clase de equivalencia en  $\mathbb{C}/\Lambda$  de  $z \in \mathbb{C}$ , es decir,  $\tilde{z} = z + \Lambda$ .

Es obvio que  $T$  es una curva elíptica. Además, como  $\Lambda$  es subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$ , el conjunto cociente  $\mathbb{C}/\Lambda$  presenta estructura de grupo, a saber,

$$\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 = \widetilde{z_1 + z_2}, \quad \forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \mathbb{C}/\Lambda.$$

Sean  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in T$ , y consideremos las cartas complejas en  $T$

$$\begin{aligned} \phi_{z_1} &: \pi(B_{z_1}) \rightarrow B_{z_1}, \\ \phi_{z_2} &: \pi(B_{z_2}) \rightarrow B_{z_2}, \\ \phi_{w_0} &: \pi(B_{w_0}) \rightarrow B_{w_0}, \end{aligned}$$

con  $w_0 = z_1 + z_2$ . Observe que existe un abierto  $V \subseteq B_{z_1} \times B_{z_2}$ , tal que  $z + w \in B_{w_0}$ ,  $\forall (z, w) \in V$ . Por lo tanto,

$$\phi_{w_0}(\phi_{z_1}^{-1}(z) + \phi_{z_2}^{-1}(w)) = z + w, \quad \forall (z, w) \in V.$$

Como consecuencia,  $T$  presenta estructura de grupo analítico. Esto significa que, en términos de cartas locales sobre dos puntos cualesquiera  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in T$ , la adición es una función holomorfa de dos variables complejas. Es más, a continuación probaremos que esta es la única estructura de grupo analítico en  $T$ , tal que  $\tilde{0}$  es el elemento neutro.

**Lema 6.2.** *Sea  $\Lambda$  un retículo, y consideremos el toro complejo  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . Entonces, existe una única estructura de grupo analítico en  $T$ , tal que  $\tilde{0}$  es el elemento neutro.*

PRUEBA: Supongamos que  $T$  presenta otra estructura de grupo analítico, distinta de la estructura anterior, determinada por la adición  $\oplus$ , tal que  $\tilde{0}$  es el elemento neutro. Bastará probar que

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \quad \forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in T,$$

para obtener la contradicción deseada. Evidentemente, si  $\tilde{z}_2 = 0$ , la identidad es obvia. Si  $\tilde{z}_2 \neq \tilde{0}$ , entonces la aplicación  $\mathcal{G}_{\tilde{z}_2} : T \rightarrow T$ , definida como

$$\mathcal{G}_{\tilde{z}_2}(\tilde{z}) = \tilde{z} \oplus \tilde{z}_2, \quad \forall \tilde{z} \in T,$$

es un automorfismo sin puntos fijos. Por lo tanto, como consecuencia de (2.23), existe  $\tilde{\beta} \in T$ ,  $\tilde{\beta} \neq 0$ , tal que

$$\mathcal{G}_{\tilde{z}_2}(\tilde{z}) = \tilde{z} + \tilde{\beta}, \quad \forall \tilde{z} \in T,$$

o equivalentemente,

$$\tilde{z} \oplus \tilde{z}_2 = \tilde{z} + \tilde{\beta}, \quad \forall \tilde{z} \in T.$$

Así, deducimos  $\tilde{z}_2 = \tilde{\beta}$ , pues

$$\tilde{0} \oplus \tilde{z}_2 = \tilde{0} + \tilde{\beta}.$$

□

Si  $X$  es una curva elíptica, entonces existe un retículo  $\Lambda$ , y un isomorfismo  $F : T \rightarrow X$ , donde  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . Mediante el isomorfismo  $F$ , la curva elíptica  $X$  hereda la estructura de grupo analítico de  $T$ . Para ello, basta definir la adición

$$F(\tilde{z}_1) + F(\tilde{z}_2) := F(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2), \quad \forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in T.$$

Así,  $F$  se convierte en un isomorfismo de grupos. Además, observe que  $F(\tilde{0})$  es el elemento neutro de la estructura de grupo analítico heredada en  $X$ .

**Teorema 6.3.** *Sea  $X$  una curva elíptica,  $p_0 \in X$ . Entonces, existe una única estructura de grupo analítico en  $X$ , tal que  $p_0$  es el elemento neutro.*

PRUEBA: Por hipótesis, existe un retículo  $\Lambda$ , y un isomorfismo  $F : X \rightarrow T$ , donde  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . Consideremos el automorfismo  $\mathcal{G} : T \rightarrow T$ , definido como

$$\mathcal{G}(\tilde{z}) = \tilde{z} - \tilde{z}_0, \quad \forall \tilde{z} \in T,$$

donde  $\tilde{z}_0 = F(p_0)$ . Observe que  $\mathcal{G} \circ F : X \rightarrow T$  es un isomorfismo, tal que  $\mathcal{G} \circ F(p_0) = \tilde{0}$ . Por lo tanto, basta dotar a  $X$  de la estructura de grupo analítico heredada de  $T$  vía  $(\mathcal{G} \circ F)^{-1}$ , como en el razonamiento anterior que precede al enunciado del teorema.

Ahora, justifiquemos la unicidad. Supongamos que  $X$  presenta otra estructura de grupo analítico, distinta de la estructura anterior, determinada por la adición  $\oplus$ , tal que  $p_0$  es el elemento neutro. En tal caso, dotemos a  $T$  de ambas estructuras de grupo analítico heredadas de  $X$  vía  $\mathcal{G} \circ F$ . Basta ahora usar el lema anterior para obtener la contradicción deseada. □

**Corolario 6.4.** *Sean  $X_1, X_2$  curvas elípticas, con elementos neutros  $p_1, p_2$ , respectivamente. Si  $F : X_1 \rightarrow X_2$  es un isomorfismo, tal que  $F(p_1) = F(p_2)$ , entonces*

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad \forall x, y \in X_1.$$

Como consecuencia,  $F$  es un isomorfismo de grupos.

PRUEBA: Basta dotar a  $X_2$  de la estructura de grupo analítico heredada de  $X_1$  vía  $F$ , como consecuencia del teorema anterior. □

## 6.2. Modelos algebraicos

Sean  $a_1, a_2, a_3$  números complejos distintos. Consideremos la curva plana afín  $X$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) \in \mathbb{C}[z, w],$$

y denotemos por  $S_a = S(a_1, a_2, a_3)$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X$ . Recuerde que  $S_a = X \amalg Y/\psi$ , donde  $Y$  es la curva plana afín determinada por el polinomio

$$v^2 - u(1 - a_1u)(1 - a_2u)(1 - a_3u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

Además, el conjunto  $S_a \setminus X \subseteq Y$  está constituido por un único elemento  $q_0 = (0, 0)$ .

A continuación, probaremos que  $S_a$  es una curva elíptica.

**Teorema 6.5.** *La curva hiperelíptica  $S_a$  es una curva elíptica.*

PRUEBA: Sea  $s = \sum a_i$ . El cambio de variable

$$z = x + s/3, \quad w = y/2,$$

transforma la ecuación  $w^2 = \prod(z - a_i)$  en  $y^2 = 4 \prod(x - e_i)$ , con  $e_i = a_i - s/3$ . Además, observe que la ecuación  $y^2 = 4 \prod(x - e_i)$  es equivalente a la ecuación

$$y^2 = 4x^3 - c_2x - c_3,$$

donde

$$c_2 = -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3), \quad c_3 = 4 \prod e_i,$$

pues  $\sum e_i = 0$ . Ahora, como consecuencia de (5.12), existe un retículo  $\Lambda$ , tal que  $g_k(\Lambda) = c_k$ . Es más, por (4.10), la función  $\wp$  de Weierstrass para  $\Lambda$  satisface la ecuación diferencial

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - c_2\wp - c_3.$$

Consideremos la aplicación  $F : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow S_a$ , definida como

$$F(\tilde{z}) = \begin{cases} (\wp(z) + s/3, \wp'(z)/2) & \text{si } z \notin \Lambda, \\ q_0 & \text{si } z \in \Lambda. \end{cases}$$

Observe que  $F$  está bien definida. A continuación, probaremos que  $F$  es un isomorfismo. Así, obtendremos que  $S_a$  es una curva elíptica.

Comencemos justificando que  $F$  es una aplicación biyectiva.

Sea  $(z_0, w_0) \in X$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $z_0 \neq a_i$ , entonces  $w_0 \neq 0$ . Además, como  $\wp$  es una función elíptica de orden dos, deducimos de la ecuación diferencial que la ecuación

$$\wp(z) = z_0 - s/3$$

presenta dos soluciones  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$ . Observe que bastará probar que  $\wp'(z_1) \neq \wp'(z_2)$ . Por (4.9), obtenemos que  $\tilde{z}_2 = -\tilde{z}_1$ , luego

$$\wp'(z_2) = \wp'(-z_1) = -\wp'(z_1),$$

pues  $\wp'$  es una función elíptica impar. Por lo tanto,  $\wp'(z_1) \neq \wp'(z_2)$ .<sup>1</sup>

- Si  $z_0 = a_i$ , entonces  $w_0 = 0$ . Además, usando de nuevo que  $\wp$  es una función elíptica de orden dos, deducimos de la ecuación diferencial que la ecuación

$$\wp(z) = z_0 - s/3$$

presenta una única solución  $\tilde{z}_1 \in \mathbb{C}/\Lambda$ . Es más, observe que  $\wp'(z_1) = 0$ , luego  $F(\tilde{z}_1) = (z_0, w_0)$ .

---

<sup>1</sup>Note que  $\wp'(z_1) \neq 0$ .

Por último, centrémonos en probar que efectivamente  $F$  es morfismo. Sea  $\tilde{z}_0 \in \mathbb{C}/\Lambda$ , y consideremos la carta compleja  $\pi_{z_0} : \pi(B_{z_0}) \rightarrow B_{z_0}$  en  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $z_0 \notin \Lambda$ , entonces la carta en  $S_a$  de  $F(z_0)$  depende del valor  $\wp(z_0)$ , es decir, si  $\wp(z_0) \neq e_i$ , entonces la carta es  $\pi_z \circ j_X^{-1}$ , y si  $\wp(z_0) = e_i$ , entonces la carta es  $\pi_w \circ j_X^{-1}$ . Así, en el primer caso obtenemos que

$$\begin{aligned} (\pi_z \circ j_X^{-1}) \circ F \circ (\pi_{z_0})^{-1}(z) &= (\pi_z \circ j_X^{-1}) \circ F(\tilde{z}) \\ &= (\pi_z \circ j_X^{-1})(\wp(z) + s/3, \wp'(z)/2) \\ &= \wp(z) + s/3, \end{aligned}$$

y en el segundo caso

$$\begin{aligned} (\pi_w \circ j_X^{-1}) \circ F \circ (\pi_{z_0})^{-1}(z) &= (\pi_w \circ j_X^{-1}) \circ F(\tilde{z}) \\ &= (\pi_w \circ j_X^{-1})(\wp(z) + s/3, \wp'(z)/2) \\ &= \wp'(z)/2. \end{aligned}$$

Observe que ambas composiciones están bien definidas y son holomorfas en entornos abiertos de  $z_0$ .

- Si  $z_0 \in \Lambda$ , entonces la carta en  $S_a$  de  $F(z_0) = q_0$  es  $\pi_v \circ j_Y^{-1}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\pi_v \circ j_Y^{-1}) \circ F \circ (\pi_{z_0})^{-1}(z) &= (\pi_v \circ j_Y^{-1}) \circ F(\tilde{z}) \\ &= (\pi_v \circ j_Y^{-1})(\wp(z) + s/3, \wp'(z)/2) \\ &= \pi_v(\psi(\wp(z) + s/3, \wp'(z)/2)) \\ &= \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + s/3)^2}, \quad \forall z \neq z_0, \end{aligned}$$

$$(\pi_v \circ j_Y^{-1}) \circ F \circ (\pi_{z_0})^{-1}(z_0) = 0.$$

De nuevo, observe que la composición está bien definida y es holomorfa en un entorno abierto de  $z_0$ , pues

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + s/3)^2} = 0.$$

□

**Teorema 6.6.** Sean  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ , y consideremos el retículo  $\Lambda$  generado por  $w_1, w_2$ . Entonces,  $\mathbb{C}/\Lambda \cong S(e_1, e_2, e_3)$ , donde

$$e_1 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right),$$

con  $\wp$  la función de Weierstrass para  $\Lambda$ .

PRUEBA: Basta reproducir la prueba anterior.

□



## Capítulo 7

# Teorema de Poncelet

El principal objetivo de este capítulo es demostrar el teorema de Poncelet para dos cónicas lisas  $C$  y  $D$  en posición general. Para tal fin, comenzaremos definiendo la correspondencia de Poncelet  $\mathcal{M}$  para  $C$  y  $D$ , y precisaremos la aplicación de Poncelet  $\eta$  asociada a  $\mathcal{M}$ . Concretamente, probaremos la siguiente reformulación del teorema de Poncelet, en términos de  $\eta$ :

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ . Si la aplicación  $\eta^n$  presenta un punto fijo, entonces  $\eta^n$  es la aplicación identidad.

Para probar la afirmación anterior, identificaremos  $\mathcal{M}$  a través de una aplicación biyectiva con una curva algebraica lisa  $\gamma$  en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ , así  $\mathcal{M}$  heredará la topología y la estructura de superficie de Riemann de  $\gamma$ . A continuación, probaremos que  $\mathcal{M}$  dotada con esta estructura heredada es una curva elíptica. Como consecuencia, podremos dotar a  $\mathcal{M}$  con una estructura de grupo analítico, y mostraremos que la aplicación  $\eta$  es una traslación con respecto a la estructura de grupo. El teorema de Poncelet se deducirá fácilmente de este último hecho.

### 7.1. Correspondencia de Poncelet

Sean  $C$  y  $D$  dos cónicas lisas en  $\mathbb{P}^2$ . La correspondencia de Poncelet  $\mathcal{M}$  para  $C$  y  $D$  está definida como

$$\mathcal{M} = \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*, x \in \xi\},$$

donde  $D^*$  es la cónica dual de  $D$ . Observe que las proyecciones  $\pi_x : \mathcal{M} \rightarrow C$ ,  $\pi_\xi : \mathcal{M} \rightarrow D^*$ ,

$$\pi_x(x, \xi) = x, \quad \pi_\xi(x, \xi) = \xi, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{M},$$

son aplicaciones sobreyectivas. Es más, fijado  $x \in C$ , existen únicamente dos rectas  $\xi, \xi' \in D^*$ , tales que  $(x, \xi), (x, \xi') \in \mathcal{M}$ , salvo que  $x \in C \cap D$ ,

en cuyo caso, existe tan solamente una recta  $\xi \in D^*$ , tal que  $(x, \xi) \in \mathcal{M}$ . Análogamente, fijada una recta  $\xi \in D^*$ , existen únicamente dos puntos  $x, x' \in C$ , tales que  $(x, \xi), (x', \xi) \in \mathcal{M}$ , salvo que  $\xi \in C^* \cap D^*$ , en cuyo caso, existe tan solamente un punto  $x \in C$ , tal que  $(x, \xi) \in \mathcal{M}$ .

Precisada esta notación, consideremos las aplicaciones  $\sigma, \tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,

$$\sigma(x, \xi) = (x', \xi), \quad \tau(x, \xi) = (x, \xi'), \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{M}.$$

Observe que ambas aplicaciones son involuciones de  $\mathcal{M}$ . Es más, como consecuencia de la observación anterior,  $(x, \xi) \in \mathcal{M}$  es punto fijo para  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) si y solo si  $\xi \in C^* \cap D^*$  (resp.  $x \in C \cap D$ ). A la composición de las aplicaciones anteriores,  $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , definida como

$$\eta = \tau \circ \sigma,$$

se le denomina aplicación de Poncelet para  $\mathcal{M}$ .

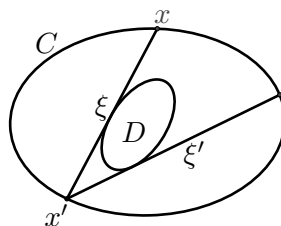


Figura 7.1: Aplicación de Poncelet para  $\mathcal{M}$

**Lema 7.1.** *Las cónicas lisas  $C$  y  $D$  están en posición general si, y solo si,  $C^*$  y  $D^*$  están en posición general.*

PRUEBA: Sea  $\mathcal{F} = \{(x, \xi) \mid x \in C \cap D, \xi \in C^* \cap D^*, x \in \xi\}$ . Observe que  $(x, \xi) \in \mathcal{F}$  si y solo si  $C$  y  $D$  son ambas tangentes a  $\xi$  en  $x$ . Ahora bien,  $C$  y  $D$  están en posición general si y solo si  $\mathcal{F} = \emptyset$ . Además, por dualidad,  $C^*$  y  $D^*$  están en posición general si y solo si  $\mathcal{F} = \emptyset$ . □

## 7.2. Ecuación algebraica para $\mathcal{M}$

Sea  $q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , la aplicación definida como

$$q(z) = \begin{cases} (1, z, z^2) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$



Por (C.3),  $C$  y  $D^*$  admiten parametrizaciones

$$\begin{aligned}x(z) &= Aq(z), \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}, \\ \xi(w) &= Bq(w), \quad \forall w \in \widehat{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

con  $A, B \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ , invertibles. Estas ecuaciones paramétricas permiten identificar  $\widehat{\mathbb{C}}^2$  con  $C \times D^*$ , mediante la aplicación  $m : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow C \times D^*$ ,

$$m(z, w) = (x(z), \xi(w)), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2.$$

Además, consideremos la aplicación  $P : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$\begin{aligned}P(z, w) &= x(z) \cdot \xi(w) \\ &= Tq(z) \cdot q(w) \quad (T = [t_{ij}]_{i,j=0}^2 = B'A) \\ &= (T_0(z), T_1(z), T_2(z)) \cdot q(w), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2,\end{aligned}$$

donde  $T_i : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , está definida como  $T_i(z) = (t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}) \cdot q(z)$ ,  $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Observe que la restricción de la aplicación  $P$  a  $\mathbb{C}^2$  determina un polinomio  $p \in \mathbb{C}[z, w]$ , a saber,

$$p = \sum_{i=0}^2 \left( \sum_{j=0}^2 t_{ij} z^j \right) w^i.$$

Es más, es fácil comprobar que dado  $(z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ , si  $\gamma$  es la curva algebraica en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$  definida por el polinomio  $p$ , entonces  $(z, w) \in \gamma$  si y solo si  $P(z, w) = 0$ . Como consecuencia,  $m|_{\gamma} : \gamma \rightarrow \mathcal{M}$  es una biyección, pues

$$x \cdot \xi = 0, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{M}.$$

Sea  $\Delta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$\Delta(z) = T_1(z)^2 - 4T_0(z)T_2(z), \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

**Lema 7.2.** *Sea  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Entonces*

$$x(z) \in C \cap D \quad \text{si, y solo si,} \quad \Delta(z) = 0.$$

*Como consecuencia,  $C$  y  $D$  están en posición general si, y solo si,  $\Delta$  tiene cuatro raíces distintas en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

Antes de comenzar con la prueba, observe que las aplicaciones  $T_i$  no tienen raíces comunes en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , pues  $T$  es una matriz regular y  $q(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

PRUEBA: Recuerde que existen dos rectas distintas en  $x(z)_*$  tangentes a  $D$ , salvo que  $x(z) \in C \cap D$ , en cuyo caso tan solamente existe una única recta. Por lo tanto,  $x(z) \in C \cap D$  si y solo si existe un único  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ , tal que  $P(z, w) = 0$ . A continuación, probaremos que esto último equivale  $\Delta(z) = 0$ .

Si  $T_2(z) \neq 0$ , entonces  $P(z, \infty) \neq 0$ . Como consecuencia, las soluciones de la ecuación  $P(z, w) = 0$  son

$$w = \frac{-T_1(z) + \sqrt{\Delta(z)}}{2T_2(z)},$$

y la equivalencia es obvia.

Ahora, supongamos  $T_2(z) = 0$ . En tal caso, observe que  $P(z, \infty) = 0$ . Si además  $T_1(z) = 0$ , entonces  $P(z, w) \neq 0, \forall w \in \mathbb{C}$ , pues  $T_0(z) \neq 0$ . En cambio, si  $T_1(z) \neq 0$ , entonces la única solución de la ecuación  $P(z, w) = 0$  en  $\mathbb{C}$  es  $w = -T_0(z)/T_1(z)$ . Así, concluimos que existe un único  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ , tal que  $P(z, w) = 0$ , si y solo si  $T_1(z) = 0$ , o equivalentemente  $\Delta(z) = 0$ , pues  $\Delta(z) = T_1(z)^2$ . □

Podemos obtener un resultado análogo al anterior intercambiando los roles de las variables  $z$  y  $w$ . Observe que

$$\begin{aligned} P(z, w) &= q(z) \cdot T'q(w) \\ &= q(z) \cdot (\tilde{T}_0(w), \tilde{T}_1(w), \tilde{T}_2(w)), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{T}_j : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , está definida como  $\tilde{T}_j(w) = (t_{0j}, t_{1j}, t_{2j}) \cdot q(w), \forall w \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Sea  $\tilde{\Delta} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida como

$$\tilde{\Delta}(w) = \tilde{T}_1(w)^2 - 4\tilde{T}_1(w)\tilde{T}_2(w), \quad \forall w \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

**Lema 7.3.** *Sea  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Entonces*

$$\xi(w) \in C^* \cap D^* \quad \text{si, y solo si,} \quad \tilde{\Delta}(w) = 0.$$

*Como consecuencia,  $C$  y  $D$  están en posición general si, y solo si,  $\tilde{\Delta}$  tiene cuatro raíces distintas en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

PRUEBA: Basta reproducir la prueba realizada en el lema anterior intercambiando los papeles de las variables  $z$  y  $w$ . La consecuencia es inmediata de (7.1). □

### 7.3. Estructura compleja en $\mathcal{M}$

Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} q &= z^2 p(1/z, w), \\ r &= w^2 p(z, 1/w), \\ s &= z^2 w^2 p(1/z, 1/w), \end{aligned}$$

y los subconjuntos  $\mathcal{B}_C, \mathcal{B}_{D^*}$  de  $\mathcal{M}$ , definidos como

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_C &= \{(x, \xi) \in \mathcal{M} \mid x \in C \cap D\}, \\ \mathcal{B}_{D^*} &= \{(x, \xi) \in \mathcal{M} \mid \xi \in C^* \cap D^*\}.\end{aligned}$$

**Lema 7.4.** *Sea  $(a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ . Entonces,  $m(a, b) \in \mathcal{B}_C$  si, y solo si,*

1.  $p(a, b) = p_w(a, b) = 0$ , si  $a, b \neq \infty$ ,
2.  $q(0, b) = q_w(0, b) = 0$ , si  $a = \infty, b \neq \infty$ ,
3.  $r(a, 0) = r_w(a, 0) = 0$ , si  $a \neq \infty, b = \infty$ ,
4.  $s(0, 0) = s_w(0, 0) = 0$ , si  $a, b = \infty$ .

PRUEBA: Probaremos la equivalencia correspondiente al primer caso. Los restantes casos son análogos,<sup>1</sup> y se dejan como ejercicio para el lector.

Sea  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Por (7.2),  $m(a, b) \in \mathcal{B}_C$  si y solo si  $p(a, b) = \Delta(a) = 0$ . Además, se verifica que

$$\begin{aligned}p(a, b) &= T_2(a)b^2 + T_1(a)b + T_0(a), \\ p_w(a, b) &= 2T_2(a)b + T_1(a),\end{aligned}$$

luego

$$\Delta(a) = p_w^2(a, b) - 4T_2(a)p(a, b).$$

□

Usando ahora (7.3), obtenemos un resultado similar al anterior.

**Lema 7.5.** *Sea  $(a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ . Entonces,  $m(a, b) \in \mathcal{B}_{D^*}$  si, y solo si,*

1.  $p(a, b) = p_z(a, b) = 0$ , si  $a, b \neq \infty$ ,
2.  $q(0, b) = q_z(0, b) = 0$ , si  $a = \infty, b \neq \infty$ ,
3.  $r(a, 0) = r_z(a, 0) = 0$ , si  $a \neq \infty, b = \infty$ ,
4.  $s(0, 0) = s_z(0, 0) = 0$ , si  $a, b = \infty$ .

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema.

---

<sup>1</sup>Realice los respectivos cambios de variables.

**Teorema 7.6.** *Sea  $(a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ . Entonces,  $m(a, b) \in \mathcal{F}$  si, y solo si,  $(a, b)$  es un punto singular de  $\gamma$ . Como consecuencia,  $\gamma$  es una curva algebraica lisa en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$  si, y solo si,  $\mathcal{F} = \emptyset$ , o equivalentemente,  $C$  y  $D$  están posición general.*

PRUEBA: Basta tener en cuenta  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_C \cap \mathcal{B}_{D^*}$ . □

### Observaciones 7.7.

▷ En adelante, supondremos que  $C$  y  $D$  están posición general. En tal caso,  $\gamma$  presenta estructura de superficie de Riemann, como consecuencia del resultado anterior. Por lo tanto,  $\mathcal{M}$  hereda la topología y la estructura compleja de  $\gamma$ , vía  $m|_\gamma$ . A continuación, justificaremos que estas estructuras heredadas por  $\mathcal{M}$  son independientes de las parametrizaciones cuadráticas elegidas de  $C$  y  $D$ .

Sean

$$\tilde{x}(z), \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}, \quad \tilde{\xi}(w), \quad \forall w \in \widehat{\mathbb{C}},$$

otras parametrizaciones cuadráticas de  $C$  y  $D$ , respectivamente. Consideremos la curva algebraica lisa  $\tilde{\gamma}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$  con ecuación  $\tilde{x}(z) \cdot \tilde{\xi}(w) = 0$ , y la aplicación  $\tilde{m} : \widehat{\mathbb{C}}^2 \rightarrow C \times D^*$ , definida como

$$\tilde{m}(z, w) = (\tilde{x}(z), \tilde{\xi}(w)), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}}^2.$$

Observe que bastará probar que  $\varphi : \gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$ , definida como

$$\varphi = (\tilde{m}|_{\tilde{\gamma}})^{-1} \circ m|_\gamma,$$

es un isomorfismo de  $\gamma$  a  $\tilde{\gamma}$ , como consecuencia de (3.27). Por (C.4), esto último es inmediato, pues cada componente de  $\varphi$  es una transformación de Möbius.

▷ Supongamos que hemos probado que las proyecciones

$$\pi_x : \mathcal{M} \rightarrow C, \quad \pi_\xi : \mathcal{M} \rightarrow D^*$$

son morfismos.<sup>2</sup> En tal caso, por (3.22), observe que son recubrimientos ramificados, pues  $\mathcal{M}$  es compacta. Además, si  $R_x, R_\xi$  denotan respectivamente los puntos de ramificación de  $\pi_x, \pi_\xi$ , entonces  $\pi_x(R_x), \pi_\xi(R_\xi)$  son ambos conjuntos finitos, ya que ambos son conjuntos discretos y cerrados, como consecuencia de (3.23). Por lo tanto, deducimos

$$\deg(\pi_x) = \deg(\pi_\xi) = 2.$$

---

<sup>2</sup>En la siguiente sección probaremos que ambas proyecciones son morfismos.

Es más,

$$R_x = \mathcal{B}_C, \quad R_\xi = \mathcal{B}_{D^*}.$$

Por último, observe que  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_C \cap \mathcal{B}_{D^*} = \emptyset$ , pues  $C$  y  $D$  están en posición general.

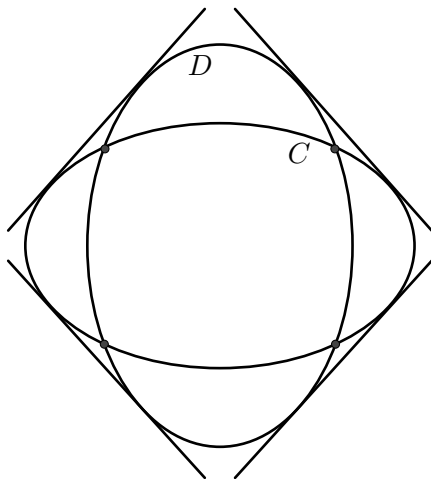


Figura 7.2: Puntos de Ramificación de  $\pi_x, \pi_\xi$

#### 7.4. $\mathcal{M}$ es una curva elíptica

En esta sección probaremos que  $\gamma$  es una curva elíptica, es decir, existe un retículo  $\Lambda$ , y un isomorfismo  $F : T \rightarrow \gamma$ , donde  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . Como consecuencia, obtendremos que  $\mathcal{M}$  es una curva elíptica, pues  $\mathcal{M} \cong \gamma$ .

Comencemos probando que las proyecciones  $\pi_z, \pi_w : \gamma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ,

$$\pi_z(z, w) = z, \quad \pi_w(z, w) = w, \quad \forall (z, w) \in \gamma,$$

son morfismos.

Consideremos los subconjuntos de  $\gamma$

$$\mathcal{B}_z = m^{-1}(\mathcal{B}_C), \quad \mathcal{B}_w = m^{-1}(\mathcal{B}_{D^*}).$$

Como consecuencia de (7.4) y (7.5), observe que:

- Si  $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_z$ , entonces  $\pi_z$  (resp.  $1/\pi_z$ ) es la carta en  $\gamma$  de  $(a, b)$  si  $a \neq \infty$  (resp.  $a = \infty$ ).
- Si  $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_w$ , entonces  $\pi_w$  (resp.  $1/\pi_w$ ) es la carta en  $\gamma$  de  $(a, b)$  si  $b \neq \infty$  (resp.  $b = \infty$ ).

Probemos que  $\pi_z$  es morfismo.

Sea  $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_z$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $a \neq \infty$ , entonces la carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\pi_z(a, b) = a$  es  $\phi_1$ . Por lo tanto,

$$\phi_1 \circ \pi_z \circ (\pi_z)^{-1}(z) = z.$$

- Si  $a = \infty$ , entonces la carta en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de  $\pi_z(a, b) = \infty$  es  $\phi_2$ . Por lo tanto,

$$\phi_2 \circ \pi_z \circ (1/\pi_z)^{-1}(z) = z.$$

Ahora, basta aplicar (2.19), para deducir que  $\pi_z$  es morfismo. Actuando análogamente, se obtiene fácilmente que  $\pi_w$  es morfismo.

Como consecuencia, observe que las proyecciones

$$\pi_x : \mathcal{M} \rightarrow C \quad \pi_\xi : \mathcal{M} \rightarrow D^*$$

son morfismos. En efecto, pues

$$\begin{aligned} \pi_x &= x \circ \pi_z \circ (m|_\gamma)^{-1}, \\ \pi_\xi &= \xi \circ \pi_w \circ (m|_\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que  $\gamma$  es una curva elíptica.

**Teorema 7.8.** *La superficie de Riemann  $\gamma$  es una curva elíptica.*

PRUEBA: Observe que la restricción a  $\mathbb{C}$  de la aplicación  $\Delta$  determina un polinomio  $f \in \mathbb{C}[z]$ , con raíces distintas. Es más, si  $\Delta(\infty) = 0$ , entonces  $\deg(f) = 3$ , y si  $\Delta(\infty) \neq 0$ , entonces  $\deg(f) = 4$ , como consecuencia de (7.2).

Consideremos la curva plana afín  $X$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - f(z) \in \mathbb{C}[z, w],$$

y denotemos por  $Z$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X$ , es decir,  $Z = X \amalg Y/\psi$ , donde  $Y$  es la curva plana afín determinada por el polinomio

$$v^2 - u^4 f(1/u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

Por (6.5),  $Z$  es una curva elíptica,<sup>3</sup> luego bastará probar que  $Z$  es isomorfa a  $\gamma$ .

Antes de seguir, observe que como consecuencia de la prueba del resultado (7.2), fijado  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $(z, w) \in \gamma$  si, y solo si,

<sup>3</sup>Véase los isomorfismos entre curvas hiperelípticas [3.33, p.51].

- $w = \frac{-T_1(z) + \sqrt{\Delta(z)}}{2T_2(z)}$ , si  $T_2(z) \neq 0$ ,
- $w = \infty$ , si  $T_2(z) = T_1(z) = 0$ ,
- $w = \infty$  ó  $w = \frac{-T_0(z)}{T_1(z)}$ , si  $T_2(z) = 0, T_1(z) \neq 0$ .

Sea  $X_0 = \{(z, w) \in X \mid T_2(z) \neq 0\}$ . Definamos  $F : X_0 \rightarrow \gamma$  como

$$F(z, w) = \left( z, \frac{-T_1(z) + w}{2T_2(z)} \right), \quad \forall (z, w) \in X_0.$$

Es rutinario comprobar que  $F$  está bien definida. Además, es inyectiva y continua. Extendamos  $F$  a  $Z$ , es decir, definamos

$$F(p) = \lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w), \quad \forall p \in Z \setminus X_0.$$

Comprobemos que esta extensión está bien definida. Distingamos los siguientes cuatro casos:

- Puntos  $p = (z_0, w_0) \in X$ , con  $T_2(z_0) = T_1(z_0) = 0$ . En este caso,

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = (z_0, \infty).$$

- Puntos  $p = (z_0, w_0) \in X$ , con  $T_2(z_0) = 0, T_1(z_0) \neq 0$ . Observe que necesariamente  $w_0 = T_1(z_0)$  ó  $w_0 = -T_1(z_0)$ . En el primer caso,  $w_0 = T_1(z_0)$ , se obtiene que

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = \left( z_0, \frac{-T_0(z_0)}{T_1(z_0)} \right),$$

sin embargo, en el segundo caso,  $w_0 = -T_1(z_0)$ , se verifica que

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = (z_0, \infty).$$

- Punto  $p = (0, 0) \in Y$ , para  $\deg(f) = 3$ . Si  $T_2(\infty) \neq 0$ , se obtiene que

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = \left( \infty, \frac{-T_1(\infty)}{2T_2(\infty)} \right).$$

En cambio, si  $T_2(z) = 0$ , se verifica que

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = (\infty, \infty).$$

- Puntos  $p = (0, v) \in Y$ , para  $\deg(f) = 4$ . En este caso, necesariamente  $v \in \sqrt{\Delta(\infty)}$ , pues

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^4 \Delta(1/u) = \Delta(\infty).$$

Además, si  $T_2(\infty) = 0$ , entonces  $v = T_1(\infty)$  ó  $v = -T_1(\infty)$ , y

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = (\infty, \infty),$$

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = \left(\infty, \frac{-T_1(\infty)}{T_0(\infty)}\right),$$

respectivamente. En cambio, si  $T_2(\infty) \neq 0$ , entonces

$$\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow p \\ (z,w) \in X_0}} F(z, w) = \left(\infty, \frac{-T_1(\infty) + v}{2T_2(\infty)}\right).$$

Como consecuencia de la comprobación anterior, observe que la extensión es una aplicación continua y biyectiva.

Ahora, probemos que es morfismo. Sea  $p = (z_0, w_0) \in X_0$ , tal que  $\Delta(z_0) \neq 0$ . Observe que la carta en  $Z$  de  $p$  es  $\pi_z \circ j_X^{-1}$ , y la carta en  $\gamma$  de  $F(p)$  es  $\pi_z$ , pues  $(z_0, w_0) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_z$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \pi_z \circ F \circ (\pi_z \circ j_X^{-1})^{-1}(z) &= \pi_z \circ F((z, h(z))) \\ &= \pi_z \left( z, \frac{-T_1(z) + h(z)}{2T_2(z)} \right) = z. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que  $F$  es holomorfa en  $p$ . Además, como  $F$  es continua en  $Z$ , basta aplicar (2.19) para obtener la conclusión deseada.  $\square$

## 7.5. Los automorfismos $\sigma, \tau$ y $\eta$

Consideremos las aplicaciones  $\sigma_*, \tau_* : \gamma \rightarrow \gamma$ , definidas como

$$\sigma_* = (m_{|\gamma})^{-1} \circ \sigma \circ m_{|\gamma}, \quad \tau_* = (m_{|\gamma})^{-1} \circ \tau \circ m_{|\gamma}.$$

Observe que ambas aplicaciones son involuciones. Es más,  $(a, b) \in \gamma$  es punto fijo para  $\sigma_*$  (resp.  $\tau_*$ ) si y solo si  $(a, b) \in \mathcal{B}_w$  (resp.  $(a, b) \in \mathcal{B}_z$ ).

En esta sección nos proponemos como objetivo probar que ambas involuciones son automorfismos de  $\gamma$ . Como consecuencia, obtendremos que las aplicaciones  $\sigma, \tau, \eta$  son automorfismos de  $\mathcal{M}$ , pues  $m_{|\gamma}$  es isomorfismo.

**Teorema 7.9.** *Las involuciones  $\sigma_*$  y  $\tau_*$  son automorfismos de  $\gamma$ .*



PRUEBA: Probemos que  $\tau_*$  es automorfismo.<sup>4</sup>

Sea  $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_z$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $a \neq \infty$ , entonces existen cartas complejas  $(U, \pi_z), (U', \pi_z)$  en  $\gamma$ , con  $(a, b) \in U$ ,  $\tau_*(a, b) \in U'$ , tales que

$$U, U' \subseteq \gamma \setminus \mathcal{B}_z, \quad U \cap U' = \emptyset, \quad \pi_z(U) = \pi_z(U').$$

Por lo tanto,

$$\pi_z \circ \tau_* \circ (\pi_z)^{-1}(z) = z, \quad \forall z \in U.$$

- Si  $a = \infty$ , entonces existen cartas complejas  $(U, 1/\pi_z), (U', 1/\pi_z)$  en  $\gamma$ , con  $(a, b) \in U$ ,  $\tau_*(a, b) \in U'$ , tales que

$$U, U' \subseteq \gamma \setminus \mathcal{B}_z, \quad U \cap U' = \emptyset, \quad 1/\pi_z(U) = 1/\pi_z(U').$$

Por lo tanto,

$$1/\pi_z \circ \tau_* \circ (1/\pi_z)^{-1}(z) = z, \quad \forall z \in U.$$

Obtenemos así que  $\tau_*$  es holomorfa en  $\gamma \setminus \mathcal{B}_z$ . Ahora, bastará probar que  $\tau_*$  es continua en  $\mathcal{B}_z$ , como consecuencia de (2.19).

Sea  $(a, b) \in \mathcal{B}_z$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\gamma$  no es continua en  $(a, b)$ . En tal caso, existe un abierto  $U \subseteq \gamma$ , con  $(a, b) \in U$ , y una sucesión  $(a_n, b_n) \subseteq \gamma \setminus \mathcal{B}_z$  convergente a  $(a, b)$ , tal que

$$\tau_*(a_n, b_n) = (a_n, b'_n) \notin U, \quad \forall n \in \mathbb{N}^5$$

Ahora bien,  $\gamma$  es compacta, luego existe una subsucesión  $(a_{n_k}, b'_{n_k})$  convergente a cierto  $(a_0, b_0) \in \gamma$ . Observe que necesariamente

$$a_0 = a, \quad b_0 \neq b,$$

pero esto es una contradicción, pues  $x(a) \in C \cap D$ .

□

## 7.6. Automorfismos involutivos del toro complejo

Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  un retículo arbitrario, y consideremos el toro complejo  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ .

**Teorema 7.10.** *Si  $\mathcal{G} : T \rightarrow T$  es un automorfismo involutivo, distinto de la aplicación identidad, con al menos un punto fijo, entonces existe  $\beta \in \mathbb{C}$ , tal que*

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = -z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

<sup>4</sup>Probar que  $\sigma_*$  es automorfismo es similar.

<sup>5</sup>Observe que  $b'_n \neq b_n$ , pues  $(a_n, b_n) \notin \mathcal{B}_z$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{G} : T \rightarrow T$  está definida como

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = -z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con  $\beta \in \mathbb{C}$ , entonces  $\mathcal{G}$  es un automorfismo involutivo con cuatro puntos fijos.

PRUEBA: Sea  $\mathcal{G} : T \rightarrow T$  un automorfismo involutivo, distinto de la aplicación identidad, con al menos un punto fijo. Por (2.23), existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha\Lambda = \Lambda$ , tales que

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = \alpha z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto,

$$z + \Lambda = \alpha^2 z + \beta(\alpha + 1) + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así, obtenemos

$$(\alpha^2 - 1)z + \beta(\alpha + 1) \in \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Observe que necesariamente  $\alpha = \pm 1$ . Es más, si  $\alpha = 1$ , entonces  $\beta \in \Lambda$ , pues en caso contrario  $\mathcal{G}$  no presentaría ningún punto fijo.

Ahora, centrémonos en el recíproco. Sea  $\mathcal{G} : T \rightarrow T$ , definida como

$$\mathcal{G}(z + \Lambda) = -z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con  $\beta \in \mathbb{C}$ . Como consecuencia de (2.23),  $\mathcal{G}$  es un automorfismo. Además, es rutinario comprobar que  $\mathcal{G} \circ \mathcal{G} = I_T$ , donde  $I_T : T \rightarrow T$  es la aplicación identidad. Por último, es fácil calcular que los cuatro puntos fijos de  $\mathcal{G}$  son

$$\frac{1}{2}(\beta + mw_1 + nw_2) + \Lambda, \quad m, n = 0, 1,$$

con  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , generadores del retículo  $\Lambda$ . □

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del resultado anterior.

**Corolario 7.11.** Si  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  son automorfismo involutivos de  $T$ , distintos de la aplicación identidad, con al menos un punto fijo, entonces  $\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1$  es una traslación de  $T$ , es decir,

$$\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con  $\beta \in \mathbb{C}$ .

## 7.7. Prueba del teorema de Poncelet

Por (7.8),  $\mathcal{M}$  es una curva elíptica, luego existe un retículo  $\Lambda$ , y un isomorfismo  $F : T \rightarrow \mathcal{M}$ , donde  $T = \mathbb{C}/\Lambda$ . Además, recuerde que mediante el isomorfismo  $F$ ,  $\mathcal{M}$  hereda la estructura de grupo analítico de  $T$ . Para ello, basta definir la adición

$$F(\tilde{z}_1) + F(\tilde{z}_2) := F(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2), \quad \forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in T.$$

**Teorema 7.12.** *La aplicación  $\eta$  es una traslación de  $\mathcal{M}$ , es decir, existe  $b \in \mathcal{M}$ , tal que*

$$\eta(p) = p + b, \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

PRUEBA: Consideremos los automorfismos involutivos  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : T \rightarrow T$ , definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= F^{-1} \circ \sigma \circ F, \\ \mathcal{G}_2 &= F^{-1} \circ \tau \circ F. \end{aligned}$$

Por (2.8), ambos automorfismos tienen cuatro puntos fijos. Aplicando (7.11), obtenemos  $\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1$  es una traslación de  $T$ , es decir,

$$\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

con  $\beta \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto,  $\eta$  es una traslación de  $\mathcal{M}$ , pues

$$\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1 = F^{-1} \circ \eta \circ F.$$

□

**Prueba del teorema de Poncelet.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ . Supongamos que existe  $p_0 \in \mathcal{M}$ , tal que  $\eta^n(p_0) = p_0$ . En tal caso, por el teorema anterior,

$$\begin{aligned} \eta(p)^n &= p + nb \\ &= p, \quad \forall p \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

pues  $p_0 + nb = p_0$ .

□



## Apéndice A

# La esfera de Riemann

Es conveniente en Análisis Complejo añadir el punto del infinito como un punto más del plano complejo. Con tal fin, se le une a  $\mathbb{C}$  un elemento adicional que no esté en él. Tal elemento se denota por  $\infty$ . Se obtiene así el plano complejo extendido o completado  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . A continuación, a través de la proyección estereográfica, dotaremos a  $\widehat{\mathbb{C}}$  de una topología métrica, respecto de la cual  $\widehat{\mathbb{C}}$  será un espacio compacto. Además, la topología relativa a  $\mathbb{C}$  resultante coincidirá con la topología euclídea.

Sea  $S^2$  la esfera de Riemann, es decir,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Consideremos la proyección estereográfica  $p : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ , definida como

$$p(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

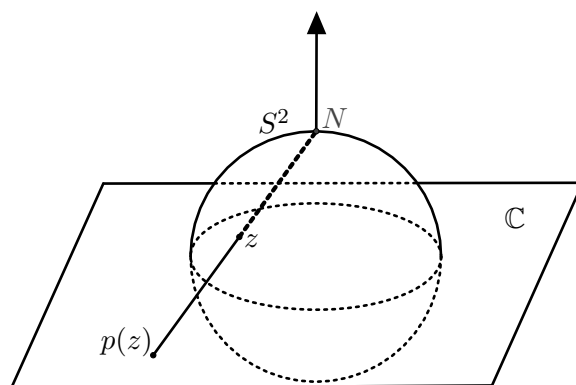


Figura A.1: Proyección estereográfica

donde  $N = (0, 0, 1)$ . Observe que  $p$  es una aplicación biyectiva. De hecho,  $p^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ , viene dada por

$$p^{-1}(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}, \quad \forall (x, y, z) \in S^2.$$

Nosotros estamos interesados en la extensión de la proyección estereográfica a  $\widehat{\mathbb{C}}$ , esto es,  $\tilde{p} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ , definida como

$$\tilde{p}(z) = \begin{cases} p(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ N & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

**Teorema A.1.** Sea  $d_e$  la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, la aplicación  $\mathcal{X} : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$\mathcal{X}(z, w) = d_e(\tilde{p}(z), \tilde{p}(w)) \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}},$$

es una distancia en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , denominada distancia cordal. Además, explícitamente

$$\mathcal{X}(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{si } z, w \in \mathbb{C}, \\ 0 & \text{si } z, w = \infty, \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} & \text{si } z \in \mathbb{C}, w = \infty. \end{cases}$$

**Teorema A.2.** Denotemos por  $\mathcal{T}_c$  la topología inducida en  $\widehat{\mathbb{C}}$  por la distancia cordal. Se verifica:

1. La topología relativa de  $\mathcal{T}_c$  a  $\mathbb{C}$  es la topología euclídea  $\mathcal{T}_e$ .
2.  $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  es entorno de  $\infty$  si y solo si existe  $r > 0$  tal que

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \subseteq A.$$

3. La extensión de la proyección estereográfica a  $\widehat{\mathbb{C}}$  es un homeomorfismo.

PRUEBA:

1. Probaremos que la aplicación identidad  $I_d : (\mathbb{C}, d_e) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{X}_{|\mathbb{C}})$  es homeomorfismo. Observe que la proyección estereográfica  $p : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$  es homeomorfismo. Por lo tanto, dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $d_e(p(z), p(z')) < \varepsilon$ , para todo  $z' \in B(z, \delta)$ . Obtenemos así la continuidad de la aplicación identidad  $I_d : (\mathbb{C}, d_e) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{X}_{|\mathbb{C}})$ , pues  $\mathcal{X}_{|\mathbb{C}}(z, w) = d_e(p(z), p(w))$ ,  $\forall (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Análogamente, se obtiene la continuidad de la aplicación identidad  $I_d : (\mathbb{C}, \mathcal{X}_{|\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}, d_e)$ , sin más que tener en cuenta la continuidad de la aplicación  $p^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

2. Si  $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  es entorno de  $\infty$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B_{\mathcal{X}}(\infty, \varepsilon) \subseteq A$ .  
Luego,

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \subseteq \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} < \varepsilon\} \subseteq A,$$

donde  $r = 2/\varepsilon$ . Recíprocamente, si existe  $r > 0$  tal que

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \subseteq A,$$

entonces  $B_{\mathcal{X}}(\infty, \varepsilon) \subseteq A$ , donde  $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{1+r^2}}$ .

3. Basta tener en cuenta

$$\mathcal{X}(z, w) = d_e(\tilde{p}(z), \tilde{p}(w)), \quad \forall (z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}.$$

□





## Apéndice B

# Curvas algebraicas

### Curvas algebraicas en $\mathbb{C}^2$

Sea  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  un polinomio de grado positivo. Consideremos el subconjunto

$$\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid p(a, b) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Al subconjunto  $\gamma$  se le denomina curva algebraica en  $\mathbb{C}^2$ , determinada por el polinomio  $p$ .

Sea  $(a, b) \in \gamma$ . La curva algebraica  $\gamma$  es singular en  $(a, b)$  si

$$p_z(a, b) = p_w(a, b) = 0.$$

En tal caso, al punto  $(a, b)$  se le denomina punto singular de la curva algebraica  $\gamma$ . La curva algebraica  $\gamma$  es lisa si no contiene puntos singulares.

Además, supuesto que  $p$  es un polinomio irreducible, puede probarse que  $\gamma$  es un espacio topológico conexo por caminos.<sup>1</sup> La prueba de la afirmación anterior puede ser consultada en [Ahl78, cap.8, sec.2].

### Curvas algebraicas en $\widehat{\mathbb{C}}^2$

Sea  $p \in \mathbb{C}[z, w]$  un polinomio de grado positivo. Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} q &= z^m p(1/z, w), \\ r &= w^n p(z, 1/w), \\ s &= z^m w^n p(1/z, 1/w), \end{aligned}$$

donde  $m = \deg_z p$ ,  $n = \deg_w p$ . Al subconjunto

$$\gamma = \{(a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid p(a, b) = 0\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}^2$$

---

<sup>1</sup>La curva algebraica  $\gamma$  es un subespacio topológico de  $\mathbb{C}^2$ .

se le denomina curva algebraica en  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ , determinada por el polinomio  $p$ . Precisemos la propiedad  $p(a, b) = 0$ , cuando  $a = \infty$  ó  $b = \infty$ :

$$\begin{cases} p(\infty, b) = 0, \text{ con } b \in \mathbb{C}, & \text{si } q(0, b) = 0, \\ p(a, \infty) = 0, \text{ con } a \in \mathbb{C}, & \text{si } r(a, 0) = 0, \\ p(\infty, \infty) = 0, & \text{si } s(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Sea  $(a, b) \in \gamma$ . La curva algebraica  $\gamma$  es singular en  $(a, b)$  si

- $p_z(a, b) = p_w(a, b) = 0$ , para  $a, b \neq \infty$ ,
- $q_z(a, b) = q_w(a, b) = 0$ , para  $a = \infty, b \neq \infty$ ,
- $r_z(a, b) = r_w(a, b) = 0$ , para  $a \neq \infty, b = \infty$ ,
- $s_z(a, b) = s_w(a, b) = 0$ , para  $a, b = \infty$ .

En tal caso, al punto  $(a, b)$  se le denomina punto singular de la curva algebraica  $\gamma$ . La curva algebraica  $\gamma$  es lisa si no contiene puntos singulares.

De nuevo, supuesto que  $p$  es un polinomio irreducible, puede probarse que  $\gamma$  es un espacio topológico conexo por caminos.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>La curva algebraica  $\gamma$  es un subespacio topológico de  $\widehat{\mathbb{C}}^2$ .

## Apéndice C

# Ecuaciones paramétricas de cónicas lisas

Sea  $\mathbb{P}^2$  el plano proyectivo complejo, es decir,

$$\mathbb{P}^2 = \{\pi(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\},$$

donde  $\pi$  es la proyección al conjunto cociente resultante de la relación de equivalencia  $\sim$  en  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ ,

$$x, y \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \quad x \sim y \text{ si } \exists \alpha \in \mathbb{C}^*, \text{ tal que } y = \alpha x.$$

Definamos  $x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \forall x, y \in \mathbb{C}^3$ . Además, para cada  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ , denotemos por  $l_a$  al subconjunto

$$\{\pi(x) \in \mathbb{P}^2 \mid a \cdot x = 0\}.$$

Observe que  $l_a$  es una recta en  $\mathbb{P}^2$ . Es más,  $l_a = l_b$  si, y solo si,  $a \sim b$ .

Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ . Consideremos el haz de rectas  $m_*$  de un punto  $m \in C$ . Cualquier recta  $l \in m_*$  interseca la cónica  $C$  en otro punto, que denotaremos por  $m_l$ , salvo que  $l$  sea la recta tangente a  $C$  en  $m$ .

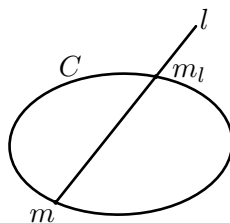


Figura C.1: Parametrización de cónicas lisas

Por lo tanto, la aplicación  $f_m^C : m_* \rightarrow C$ , definida como

$$f_m^C(l) = \begin{cases} m, & \text{si } l \text{ es tangente a } C \text{ en } m, \\ m_l, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

es biyectiva. Además, fijadas dos rectas  $l_a, l_b \in m_*$  distintas, la aplicación que a cada  $t \in \widehat{\mathbb{C}}$  asocia la recta  $l_{ta+b}$ , con  $l_{\infty a+b} := l_a$ , es una biyección de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $m_*$ . Así, obtenemos una parametrización de la cónica  $C$ ,

$$f_m^C(l_{ta+b}), \quad t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Observe que la parametrización depende del punto  $m \in C$ , y de las rectas  $l_a, l_b \in m_*$ , aunque si fijamos otras rectas  $l_c, l_d \in m_*$  distintas, es fácil comprobar que la composición

$$f_m^C(l_{uc+d})^{-1} \circ f_m^C(l_{ta+b})$$

es una transformación de Möebius, pues las homografías en la recta proyectiva compleja se identifican con las transformaciones de Möebius.

Una aplicación  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow C$  biyectiva es una relación de coordenadas homogéneas (abreviado r.c.h) en  $C$ , si existe  $m \in C$ , tal que

$$f(t) = f_m^C(l_{ta+b}), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

para algunas rectas  $l_a, l_b \in m_*$  distintas.

**Lema C.1.** *Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ , y  $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  una homografía determinada por una matriz  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  invertible, es decir,*

$$T(\pi(x)) = \pi(Ax), \quad \forall x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}.$$

*Si  $f$  es una r.c.h en  $C$ , entonces  $T \circ f$  es una r.c.h en la cónica  $D = T(C)$ .*

PRUEBA: Sea  $f = f_m^C(l_{ta+b})$ , con  $m \in C$ , y  $l_a, l_b \in m_*$  rectas distintas. Se verifica que

$$T(l_{ta+b}) = l_{tA^*a+A^*b}, \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

donde  $A^* = (A^{-1})^t$ . Por lo tanto,

$$T(f_m^C(l_{ta+b})) = f_{Tm}^D(l_{tA^*a+A^*b}), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

□

Sea  $q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , la aplicación definida como

$$q(t) = \begin{cases} (1, t, t^2) & \text{si } t \in \mathbb{C}, \\ (0, 0, 1) & \text{si } t = \infty. \end{cases}$$

Para cada transformación de Möebius  $\gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,

$$\gamma(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , definamos  $q_\gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^3$  como

$$q_\gamma(t) = (ct + d)^2 q(\gamma(t)), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Es rutinario comprobar que para cada  $t \in \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $q_\gamma(t), q(\gamma(t))$  son vectores no nulos proporcionales. Además, se verifica que

$$q_\gamma(t) = Aq(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

donde  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  es la matriz

$$\begin{pmatrix} d^2 & 2cd & c^2 \\ db & cb + da & ca \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

Sea  $C_0$  la cónica lisa de ecuación

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0.$$

**Lema C.2.** *Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ . Si  $f, g$  son r.c.h en  $C$ , entonces la composición  $g^{-1} \circ f$  es una transformación de Möebius.*

PRUEBA: Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $C$  es la cónica lisa  $C_0$ .<sup>1</sup> Observe que  $m = (0, 0, 1), n = (1, 0, 0) \in C_0$ . Además, supongamos que

$$f = f_m^C(l_{ta+b}), \quad g = f_n^C(l_{uc+d})$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} a &= (1, 0, 0), & c &= (0, 1, 0), \\ b &= (0, -1, 0), & d &= (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Se verifica que

$$\begin{aligned} f_m^C(l_{ta+b}) &= q(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}, \\ f_n^C(l_{uc+d}) &= q(u), \quad \forall u \in \widehat{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Así,

$$f_n^C(l_{uc+d})^{-1} \circ f_m^C(l_{ta+b}) = t, \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

□

<sup>1</sup>Para cualesquiera  $p, q \in C$ ,  $p \neq q$ , existe una homografía  $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , tal que  $T(C) = C_0$ ,  $T(p) = m$  y  $T(q) = n$ .

**Teorema C.3.** *Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ , y  $f_m^C(l_{ta+b})$  una r.c.h en  $C$ . Entonces, existe una matriz  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  invertible, tal que*

$$f_m^C(l_{ta+b}) = Aq(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

*Es más, la matriz  $A$  está unívocamente determinada salvo una constante multiplicativa no nula.*

*Recíprocamente, si  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  parametriza la cónica lisa  $C$ , es decir, la aplicación  $Aq(t)$  es una biyección de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $C$ , entonces  $A$  es no singular y  $Aq(t)$  es una r.c.h en  $C$ .*

PRUEBA: Sea  $f$  una r.c.h en  $C_0$ . Como consecuencia del lema anterior, existe una transformación de Möebius  $\gamma$ , tal que  $f = q_\gamma$ . Por lo tanto, existe  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ , tal que

$$f(t) = Aq(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Además, la matriz  $A$  es invertible. En efecto, pues en caso contrario, existiría  $c \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ , tal que  $A^t c = 0$ , luego

$$c \cdot Aq(t) = A^t c \cdot q(t) = 0, \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

es decir,  $C_0 \subseteq l_c$ .

Ahora, sea  $T$  una homografía, tal que  $T(C) = C_0$ . Por (C.1), es fácil deducir la existencia de una matriz  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  invertible, tal que

$$f_m^C(l_{ta+b}) = Aq(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Probemos que la matriz  $A$  está unívocamente determinada salvo constante multiplicativa. Sea  $B \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$  invertible, tal que

$$Aq(t) = Bq(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Fijemos cuatro distintos  $t_1, \dots, t_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Observe que

$$p_1 = q(t_1), \dots, p_4 = q(t_4)$$

son cuatro puntos distintos en  $C_0$ . Como  $C_0$  es una cónica lisa, los puntos  $p_1, \dots, p_4$  están en posición general. Además,  $Aq(t_i) = Bq(t_i)$ , luego existe  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , tal que  $B = \alpha A$ .

Por último, centrémonos en el recíproco. Sea  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ , tal que  $Aq(t)$  es una biyección de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $C$ . Por un razonamiento similar al realizado anteriormente se deduce que  $A$  es invertible. Además, si  $T$  es la homografía determinada por la matriz  $A^{-1}$ , entonces

$$T(Aq(t)) = q(t), \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Por lo tanto,  $Aq(t)$  es una r.c.h en  $C$ , como consecuencia de (C.1). □

**Corolario C.4.** *Sea  $C$  una cónica lisa en  $\mathbb{P}^2$ , y  $A, B \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ . Si ambas matrices parametrizan la cónica  $C$ , entonces*

$$Bq(u)^{-1} \circ Aq(t)$$

*es una transformación de Möebius.*

PRUEBA: Consecuencia inmediata de la afirmación recíproca del teorema anterior. □

En este documento, las parametrizaciones de cónicas lisas en  $\mathbb{P}^2$  que siempre usaremos son de la forma

$$Aq(t), \quad t \in \widehat{\mathbb{C}},$$

con  $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ , invertible. Por parametrizaciones cuadráticas nos referiremos a tales parametrizaciones.





## Apéndice D

# Isomorfismo entre curvas hiperelípticas

Sean  $a_1, \dots, a_n$  números complejos distintos, con  $n$  un natural par. Consideremos la curva plana afín  $X_1$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - (z - a_1) \cdots (z - a_n) \in \mathbb{C}[z, w],$$

y denotemos por  $Z_1$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X_1$ . Análogamente, consideremos la curva plana afín  $X_2$ , determinada por el polinomio

$$w^2 - (z - b_1) \cdots (z - b_{n-1}) \in \mathbb{C}[z, w],$$

donde  $b_j = 1/(a_j - a_n)$ , y denotemos por  $Z_2$  la superficie de Riemann hiperelíptica asociada a la curva plana afín  $X_2$ .

A continuación, probaremos que ambas curvas hiperelípticas son isomorfas. Sean  $E_1 \subseteq Z_1$ ,  $E_2 \subseteq Z_2$  los subconjuntos

$$\{(a_n, 0)\} \cup (Z_1 \setminus X_1), \quad \{(0, c), (0, -c)\} \cup (Z_2 \setminus X_2),$$

respectivamente, con  $c$  una raíz cuadrada de  $-b_1 \cdots b_{n-1}$ . Recuerde que:

- $Z_1 = X_1 \amalg Y_1/\psi$ , donde  $Y_1$  es la curva plana afín determinada por el polinomio

$$v^2 - (1 - a_1u) \cdots (1 - a_nu) \in \mathbb{C}[u, v].$$

- $Z_2 = X_2 \amalg Y_2/\psi$ , donde  $Y_2$  es la curva plana afín determinada por el polinomio

$$v^2 - u(1 - b_1u) \cdots (1 - b_{n-1}u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

- El conjunto  $Z_1 \setminus X_1 \subseteq Y_1$  está constituido por dos elementos, a saber,  $p_0^1 = (0, 1), p_0^2 = (0, -1)$ .

- El conjunto  $Z_2 \setminus X_2 \subseteq Y_2$  está constituido por un único elemento  $q_0 = (0, 0)$ .

Ahora, consideremos la aplicación  $f : Z_1 \setminus E_1 \rightarrow Z_2 \setminus E_2$ , definida como

$$f(z, w) = \left( \frac{1}{z - a_n}, \frac{cw}{(z - a_n)^{n/2}} \right), \quad \forall (z, w) \in Z_1 \setminus E_1.$$

Es rutinario comprobar que  $f$  es una aplicación biyectiva y continua.

Interesémonos en la extensión a  $Z_1$ , es decir,  $F : Z_1 \rightarrow Z_2$ , definida como

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \in Z_1 \setminus E_1, \\ q_0 & \text{si } p = (a_n, 0), \\ (0, c) & \text{si } p = p_0^1, \\ (0, -c) & \text{si } p = p_0^2. \end{cases}$$

Por (2.19), bastara probar que  $F$  es holomorfa en  $Z_1 \setminus E_1$ , y continua en  $E_1$ , para obtener que  $F$  es isomorfismo.

Comencemos probando que  $F$  es continua en  $E_1$ . Sea  $G_2 \subseteq Z_2$  abierto, tal que  $q_0 \in G_2$ . Observe que

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \left( \frac{1}{z - a_n}, \frac{cw}{(z - a_n)^{n/2}} \right) \\ &= \psi \left( \frac{1}{z - a_n}, \frac{cw}{(z - a_n)^{n/2}} \right) \\ &= (z - a_n, cw), \quad \forall (z, w) \in X_1 \setminus \{(a_n, 0)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un abierto  $G_1 \subseteq X_1$ , tal que  $(a_n, 0) \in G_1$  y  $F(G_1) \subseteq G_2$ . Ahora, sean  $G_2^1, G_2^2 \subseteq Z_2$  abiertos, tales que  $(0, c) \in G_2^1$ ,  $(0, -c) \in G_2^2$ . Se verifica que

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F(\psi^{-1}(u, v)) \\ &= F \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u^{n/2}} \right) \\ &= \left( \frac{u}{1 - a_nv}, \frac{cv}{(1 - a_nu)^{n/2}} \right), \quad \forall (u, v) \in Y_1, \end{aligned}$$

con  $u \neq 0$ , tal que  $\psi^{-1}(u, v) \neq (a_n, 0)$ , luego existen abiertos  $G_1^1, G_1^2 \subseteq Y_1$ , tales que  $p_0^1 \in G_1^1$ ,  $p_0^2 \in G_1^2$  y  $F(G_1^1) \subseteq G_2^1$ ,  $F(G_1^2) \subseteq G_2^2$ .

Por último, comprobemos que  $F$  es holomorfa en  $Z_1 \setminus E_1$ .

Sea  $p = (z_0, w_0) \in Z_1 \setminus E_1$ . Distingamos los siguientes dos casos:

- Si  $z_0 \neq a_i$ , la carta en  $Z_1$  de  $p$  es  $\pi_z \circ j_{X_1}^{-1}$ , y la carta de  $F(p)$  en  $Z_2$  es  $\pi_z \circ j_{X_2}^{-1}$ . Entonces

$$(\pi_z \circ j_{X_2}^{-1}) \circ F \circ (\pi_z \circ j_{X_1}^{-1})^{-1}(s) = \frac{1}{s - a_n}.$$

- Si  $z_0 = a_i$ , la carta en  $Z_1$  de  $p$  es  $\pi_w \circ j_{X_1}^{-1}$ , y la carta de  $F(p)$  en  $Z_2$  es  $\pi_z \circ j_{X_2}^{-1}$ . Entonces

$$(\pi_w \circ j_{X_2}^{-1}) \circ F \circ (\pi_w \circ j_{X_1}^{-1})^{-1}(s) = \frac{cs}{(h(s) - a_n)^{n/2}},$$

con  $h(s)$  holomorfa en un entorno abierto de 0, verificándose

$$s^2 = (h(s) - a_1) \cdots (h(s) - a_n).$$

Observe que ambas composiciones están bien definidas en un entorno abierto respectivamente de  $z_0, 0$ , pues  $F$  es una aplicación continua.



# Bibliografía

- [Ahl78] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [Apo90] Tom M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [BGLA10] Luis Bernal-González and Genaro López-Acedo. *Análisis de variable compleja*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 2010.
- [BKOR87] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven. Poncelet's closure theorem. *Exposition. Math.*, 5(4):289–364, 1987.
- [CA14] Eduardo Casas-Alvero. *Analytic projective geometry*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014.
- [Car63] Henri Cartan. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Éditions Scientifiques Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1963.
- [Cay54] A. Cayley. Developments on the porism of the in and circumscribed polygon. *Philosophical Magazine Series*, 7(46):339–345, 1854.
- [DD05] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini, Paris, 2005.
- [Fla09] Leopold Flatto. *Poncelet's theorem*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. Chapter 15 by S. Tabachnikov.
- [GH77] Phillip Griffiths and Joe Harris. A Poncelet theorem in space. *Comment. Math. Helv.*, 52(2):145–160, 1977.

- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. *Enseign. Math. (2)*, 24(1-2):31–40, 1978.
- [Jac84] C. Jacobi. *Vorlesungen über Dynamic. Gesammelte Werke, Supplementband*. Berlin, 1884.
- [Kir92] Frances Kirwan. *Complex algebraic curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Leb42] H. Lebesgue. *Les coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [MS06] L.M. Merino and E. Santos. *Álgebra Lineal con métodos elementales*. Editorial Paraninfo, 2006.
- [NR11] Terrence Napier and Mohan Ramachandran. *An introduction to Riemann surfaces*. Cornerstones. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [Pon22] J. V. Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*. Metz, Paris, 1822.
- [SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [Wil70] Stephen Willard. *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.