FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas y no expansivas

Memoria realizada por Fátima Llorente Gunowski

Dirigido por:

Dr. Rafael Espínola García

Abstract

In this work we present some theorems about fixed points, with an specific goal: Fixed points of contractive and non expansive applications. Therefore, we introduce the rule of the contractive applications and some generalizations. Finally, we study the uniformly convex spaces. Our approach can be seen as an introductory course to this theory.

Índice general

Prólogo

Fue en 1922 cuando Stefan Banach $(1892-1945)$ enunció y demostró el Teorema del Punto Fijo para aplicaciones contractivas, el cual ha sido de mucha utilidad no solo en las matemáticas, sino también en la física la biología, etc., formuladas habitualmente como ecuaciones funcionales. En la resolución de problemas no lineales del Análisis Funcional, se recurre habitualmente a propiedades de los espacios topológicos y operadores involucrados que son de tres tipos fundamentalmente:

1. Propiedades de completitud (Teorema del Punto Fijo de Banach)

2. Propiedades de compacidad (Teorema del Punto Fijo de Brouwer).

3. Propiedades de monotonía y ordenación (Teorema del Punto Fijo de Bourbaki-Kneser)

En este trabajo, por cuestiones de extensión, abarcaremos solamente el primero. Nos enfocaremos en mostrar algunos teoremas que busquen mejorar el Teorema del Punto Fijo de Banach al menos en cuanto que en su enunciado aparecen aplicaciones más generales. Y es que en el Principio de Banach se trabaja con contracciones, o sea, con aplicaciones de un espacio métrico en sí mismo que cumplen que para todo x, y, puntos del espacio $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ con $k < 1$; nos preguntamos qué ocurre cuando $k = 1$. Estudiaremos primero distintas clases de funciones con la condición de que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ y después veremos el caso $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$. Cuando $k = 1$ no funciona el Teorema de Banach, basta considerar las traslaciones sobre $\mathbf{R}^n$ para verificarlo, sin embargo el problema está ahí, resulta ineludible. Estas nuevas aplicaciones las llamaremos aplicaciones no expansivas, y serán aplicaciones continuas.
Por consiguiente, nos encontramos en un nuevo marco donde las aplicaciones no expansivas son las más importantes y para las cuales buscamos teoremas

efectivos de existencia de puntos fijos.
Así, comenzaremos nuestro trabajo definiendo las aplicaciones contractivas y exponiendo y probando el Teorema del Punto Fijo de Banach. A continuación, generalizaremos este concepto y veremos utilidades importantes de la aplicación contractiva. Para finalizar, en los espacios uniformemente convexos definiremos las aplicaciones no expansivas, llegando así al Teorema del Punto Fijo para espacios de Hilbert y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.
Se completa la memoria con una lista de las referencias biliográficas que se han consultado para su elaboración.
No quiero pasar la ocasión sin agradecerle a mi tutor, el Prof. Rafael Espínola García, por su esfuerzo, paciencia y dedicación.
También merece una mención el que fue el primer tutor de estas memorias, el Prof. José María Ayerbe Toledano, con quien se inició el germen de este trabajo. Y por último a mi familia y pareja, por soportar tanta frustación por mi parte hasta que he conseguido acabar este trabajo.
A todos, muchas gracias.

Capítulo 1

El principio de la aplicación contractiva

Consideremos una aplicación T de un conjunto X en X. En este contexto general, cabe preguntarse si existe algún punto $x \in X$ tal que $Tx = x$. Tal punto será llamado fijo para la aplicación T. Vamos a estudiar cómo bajo determinadas condiciones existen puntos fijos.
En este capítulo impondremos condiciones muy fuertes a T (ser contractiva) y muy débiles para X (ser un espacio métrico completo), obteniendo el teorema del punto fijo de Banach o principio de la aplicación contractiva, quizás el teorema de punto fijo es más conocido.

1.1. Aplicaciones contractivas

Definición 1.1.1 Sea (X, d) un espacio métrico y M un subconjunto de X. Una aplicación $T : M \longrightarrow X$ se dice contractiva si verifica que para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

Proposición 1.1.2 *Toda aplicación contractiva es uniformemente continua en su dominio de definición.*

Demostración. Supongamos que T es un operador contractivo. Tenemos que ver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in M$ $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon$.
Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon$. Entonces, si $x, y \in M$ tal que $d(x, y) < \delta \Longrightarrow$ $d(Tx, Ty) \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$. $\square$

Nota 1.1.3 Las aplicaciones contractivas no siempre tienen punto fijo. Para mostrarlo basta considerar los siguientes ejemplos:

Ejemplos 1.1.4

1. Consideramos la aplicación $T : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por
$$Tx = 1 + \ln(1 + e^x).$$
Se verifica que T es contractiva, pero $\forall x \in \mathbf{R}$ $|Tx - x| > 1$ por lo que no tiene punto fijo (para ver que T es contractiva basta observar que $|T'x| = \frac{e^x}{1+e^x} < 1$ y aplica el teorema del valor medio).

2. Sea $\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que f es continua$\}$ y sea $M = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 1\ \forall t \in [0,1]\}$. Consideramos
$$T : M \longrightarrow M \text{ tal que } Tf(t) = tf(t), \forall t \in [0,1].$$
Se verifica que M es cerrado, acotado y convexo, T es contractiva y no posee puntos fijos.

Definición 1.1.5 Sea (X,d) un espacio métrico y sea M un subconjunto de X. Un operador $T : M \longrightarrow X$ es llamado k-contractivo si
$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ para todo $x,y \in M$ y k fijo, $0 \leq k < 1$.

Nota 1.1.6 Toda aplicacion k-contractiva es contractiva.

Nota 1.1.7 Si $k = 0$ se tiene que $\forall x,y \in M$,
$$d(Tx,Ty) = 0 \Longrightarrow Tx = Ty.$$
Por tanto, T es constante.

1.2. El Teorema del Punto Fijo de Banach

Teorema 1.2.1 (del punto fijo de Banach o de la aplicación k-contractiva). *Supongamos que:*

1. *Tenemos un operador $T : M \subset X \longrightarrow M$.*

2. *M es un subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico completo (X,d).*

3. *T es k-contractivo.*

Entonces podemos concluir lo siguiente:

1. *Existencia y unicidad: T tiene un único punto fijo x en M.*

2. *Convergencia de la iteración: La sucesión $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ definida por $x_0 \in M$ tal que $x_{n+1} = Tx_n$ de aproximaciones sucesivas converge a la solución x, para cualquier elección arbitraria del punto inicial $x_0 \in M$.*

3. *Estimación del error: Para todo $n = 0, 1, 2, ...$ tenemos la estimación del error a priori, o velocidad de convergencia:*

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1),$$

y la estimación del error a posteriori:

$$d(x_{n+1}, x) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1}).$$

4. *Además, podemos dar una aproximación. Para todo $n = 0, 1, 2, ...$ tenemos:*

$$d(x_{n+1}, x) \leq d(x_n, x).$$

Demostración. Vamos a suponer que $d(x_0, x_1) \neq 0$. En otro caso obtendríamos que $x_0 = x_1 = Tx_0$ y por lo tanto x_0 sería un punto fijo. Primero, vamos a probar que la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M.
$\forall n \in \mathbf{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq ... \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Por lo tanto, para todo $n, m \in M$:

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(n_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq$$
$$\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+m-1}) d(x_0, x_1) \leq$$
$$\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+m-1} + ...) d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Así, hemos obtenido que $\forall n, m \in \mathbf{N}$

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Sabemos que $\{k^n\} \longrightarrow 0$. Dado ahora $\varepsilon > 0$, tomo $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que:

$$k^{n_0} < \frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_0, x_1)}$$

y entonces obtengo que $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbf{N}$ de donde sigue que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M.
Como M es un espacio métrico completo y $\{x_n\}$ es de Cauchy en M, sigue que $x_n \longrightarrow x \in M$.
Veamos que $Tx = x$. Por la continuidad de T, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. Pero además:

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n+1} = x$$

Por tanto $Tx = x$, luego la aplicación T tiene un punto fijo.
Veamos que el punto fijo es único.
Supongamos que $\exists y \in M$ tal que $Ty = y$.
Entonces

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq kd(x, y) \Longrightarrow$$

$$(1-k)d(x, y) \leq 0.$$

Ya que $1 - k > 0$, y $d(x, y) \geq 0 \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.
En segundo lugar, puesto que $\forall n, m \in \mathbf{N}$,

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

si $n \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

La estimación a posteriori se obtiene de $\forall n, m \in \mathbf{N}$

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \leq$$

$$\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + ... + d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \leq$$

$$\leq kd(x_n, x_{n+1}) + k^2 d(x_n, x_{n+1}) + ... + k^m d(x_n, x_{n+1}) \leq$$

$$\leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1}).$$

Haciendo ahora que $m \longrightarrow \infty$ obtenemos que:

$$d(x_{n+1}, x) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1}).$$

Finalmente la velocidad de convergencia se obtiene de:
$\forall n \in \mathbf{N}$

$$d(x_{n+1}, x) = d(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x).$$

$\square$

Nota 1.2.2 Veamos que en el Teorema del Punto Fijo de Banach todas las hipótesis son esenciales:

1. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si la aplicación no es k-contractiva. Concretamente, no es cierto si la aplicación es contractiva, como ya vimos en los ejemplos 1.1.4.

2. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si M no es cerrado.
   Contraejemplo:
   Sea de nuevo $X = \mathbf{R}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$.
   Sea $M = (0, 1]$ que no es cerrado.
   Sea $T : M \longrightarrow M$ tal que $Tx = \frac{x}{2}$. Se verifica que T es una aplicación $\frac{1}{2}$-contractiva, pues

   $$d(x, y) = |x - y| = |\frac{x - y}{2}| = \frac{1}{2} d(x, y).$$

   Sin embargo, T no tiene punto fijo en M pues para $Tx = x \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = x \Longleftrightarrow x = 0$ pero $0 \notin M$.

3. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si T no es una aplicación de M en sí mismo.

4. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si M es vacío.

5. El Teorema del punto Fijo de Banach no es cierto si el espacio métrico (X, d) no es completo.
   Contraejemplo:

Sea $X = (0, 1]$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ que es un espacio métrico no completo (por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ es de Cauchy pero no converge).
Sea $M = (0, 1]$ que es un cerrado. Sea $T : M \longrightarrow M$ tal que $Tx = \frac{x}{2}$ que es $\frac{1}{2}$-contractiva. Sin embargo T no tiene punto fijo en M.

Nota 1.2.3 La gran importancia del Teorema del Punto Fijo de Banach deriva del hecho de que este teorema contiene siete elementos fundamentales en el tratamiento teórico y práctico de ecuaciones matemáticas. A saber:

1. Existencia de una solución.
2. Unicidad de la solución.
3. Existencia de un método convergente de aproximación.
4. Una estimación del error a priori.
5. Una estimación del error a posteriori.
6. Una estimación de la velocidad de convergencia.
7. Estabilidad del método de aproximación, esto es, un cambio del elemento inicial x_0, no cambia el valor del límite de iteraciones.

Capítulo 2

Algunas generalizaciones del principio de la aplicación contractiva

A lo largo de este capítulo consideraremos X un espacio métrico completo y la aplicación $T : X \longrightarrow X$. Estudiaremos diferentes generalizaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach, debilitando a las aplicaciones la condición de contracción.

2.1. Primeras generalizaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach

Una generalización inmediata del Teorema del punto fijo de Banach es la siguiente:

Proposición 2.1.1 *Sea $T : M \subset X \longrightarrow M$ una aplicación con las siguientes propiedades:*

1. *M es un subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico completo (X, d).*

2. *Existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $T^m = T \circ \overbrace{\ldots}^{(m)} \circ T$ es k-contractivo.*

Entonces T tiene un único punto fijo en M.

Demostración. Sea x_0 el único punto fijo de T^m (que existe por el Teorema del punto fijo de Banach). Se tiene que:

$$Tx_0 = T(T^m x_0) = T^m(Tx_0) \Longrightarrow Tx_0 \text{ es un punto fijo para } T^m,$$

entonces

$$Tx_0 = x_0.$$

Por tanto x_0 es un punto fijo para T. Supongamos ahora que T tiene otro punto fijo y_0. Entonces:

$$\begin{gathered} Ty_0 = y_0 \Longrightarrow \\ T^2 y_0 = Ty_0 = y_0 \Longrightarrow \\ ... \\ \Longrightarrow T^m y_0 = y_0 \\ \Longrightarrow y_0 = x_0. \end{gathered}$$

Luego T tiene un único punto fijo. $\square$

Sea (X, d) un espacio métrico completo.

Definición 2.1.2 Sea $T : X \to X$ una aplicación continua. La aplicación T es llamada aplicación contractiva débil puntual, si existe una una constante $K < 1$ y $\forall x \in X$, existe un $n = n(x)$ tal que $\forall y \in X$

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leqq Kd(x, y).$$

Lema 2.1.3 *Si $T : X \to X$ es una aplicación contractiva entonces, para cada $x \in X$, el número $r(x) = \sup_{n \in N} d(x, T^n(x))$ es finito.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea

$$m(x) = \text{máx}\{d(x, T^k(x)) : 1 \leqq k \leqq n(x)\}.$$

Ahora si n es un número arbitrario entonces existe $s > 0$ tal que $sn(x) \leqq n \leqq (s+1)n(x)$ y así tenemos,

$$\begin{aligned} d(x, T^n(x)) &\leqq d(T^{n(x)} o T^{n-m}(x), T^{n(x)}(x)) + d(T^{n(x)}, x) \\ &\leqq Kd(T^{n-m}(x), x) + m(x) \\ &\leqq m(x) + Km(x) + K^2 m(x) + ... + K^s m(x) \\ &\leqq \frac{m(x)}{(1-K)} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.1.4 *Sea $(X.d)$ un espacio métrico completo y $T : X \to X$. Si T es una aplicación contractiva débil puntual entonces existe un único punto fijo de T.*

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario en X y sea $n_0 = n(x_0)$, $x_1 = T^{n_0}(x_0)$ y definimos por inducción una sucesión de números y una sucesión de puntos $\{x_i\}$ en X como sigue: $n_i = n(x_i)$ y $x_{i+1} = T^{n_i}(x_i)$. Primero vamos a probar que es una sucesión de Cauchy. Para esto calculamos $d(x_n, x_{n+1})$. Tenemos:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &= d(T^{n_{i-1}}x_{i-1}, T^{n_i}x_i) \\ &\leqq Kd(T^{n_i}x_{i-1}, x_{i-1}) \\ &\leqq ... \leqq K^i d(T^{n_i}x_0, x_0) \end{aligned}$$

y esto implica, obviamente, para $n > m$ que:

$$d(x_n, x_m) \leqq K^m \frac{1}{(1-K)}$$

que muestra que $\{x_i\}$ es una sucesión de Cauchy. Vamos a ver que x es un punto fijo de T. Supongamos que no es verdad. Entonces encontramos un par de entornos separados U y V de tal manera que $x \in U$ y $y = Tx \in V$. Sea d_0 la distancia

$$d_0 = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in U, y \in V\} > 0$$

y, dado que T es continuo para un n grande, $Tx_n \in V$ y también $x_n \in U$. Ahora

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &= d(T^{n_{n-1}}oT^{n_n}x_{n-1}, T^{n_{n-1}}x_{n-1}) \\ &\leqq Kd(Tx_{n-1}, x_{n-1}) \leqq ... \leqq K^n d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

y para n grande esto es una contradicción. Así $Tx = x$.
Como la unicidad es obvia, el teorema queda probado. □

El siguiente ejemplo muestra que existe una función continua en un espacio métrico que satisface la condición del Teorema 2.1.4 y que ninguna iteración de la función es una función de contracción

Ejemplo 2.1.5 Sea $X = [0, 1]$ con

$$d(x, y) = |x - y|$$

y observamos que X es de la forma

$$X = \bigcup\{[1/2^n, 1/2^{n-1}]\}\bigcup\{0\}$$

La función $f : X \to X$ esta definida como sigue:

$$f : [1/2^n, 1/2^{n-1}] \to [1/2^{n+1}, 1/2^n]$$

por la relación

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n+2}{(n+3)(x-1/2^n)} + \frac{1}{2^n}, \text{ si } x \in [\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}, \frac{1}{2^{n-1}}] \\ \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ si } x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{(3n+5)}{2^{n+1}(n+2)}] \end{cases}$$

y también $f(0) = 0$.
De la definición se sigue que f es una función continua no decreciente en $[0, 1]$ con valores en $[0, 1]$ y el único punto fijo de f es $x = 0$. Hemos visto que f satisface el Teorema 2.1.4.
En efecto, si $x \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]$ e y es arbitrario, entonces nosotros tenemos que considerar los casos $m \geqq n$ y $m < n$ tanto como $y \in [1/2^m, 1/2^{m-1}]$ que satisface la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| < \frac{(n+3)}{(n+4)}|x - y|$$

y así, $K = 1/2$ para cada $x \in X$, $x \in [1/2^n, 1/2^{n-1}]$, $n(x)$ siendo $n+3$ y $n(0)$ números enteros menores o iguales que 1.
Ahora veamos que cualquier iteración de f no es una función contractiva.
En efecto, si $K < 1$ y con N dado veamos que existe x, y en X tal que

$$|f^N(x) - f^N(y)| > K|x - y|$$

Sea $n > \frac{NK}{1-K} - 2$. Como f es continuo en un intervalo compacto, es uniformemente continuo y la afirmación es válida para todo f^i.
Esto implica que existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \to |f^i(x) - f^i(y)| < \frac{n+N+3}{n+N+2}2^{n+N+1}$$

para $i = 1, 2, 3, ..., N$. Dado $x = 1/2^{n-1}$ e y unos puntos de $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ tal que $0 < |x - y| < \delta$ y así $f^i(x)$ y $f^i(y)$ están en

$$[\frac{3(n+i)+5}{2^{n+i+1}(n+i+2)}, \frac{1}{2^{n+i-1}}]$$

Esto nos da

$$|f(x) - f(y)| = (n+2)/(n+3)|x-y|$$
$$|f^2(x) - f^2(y)| = (n+2)/(n+4)|x-y|$$
$$\dots$$
$$|f^N(x) - f^N(y)| = (n+2)/(n+N+2)|x-y|$$

y la afirmación está probada.

2.2. Teoremas de punto fijo para contracciones generalizadas

Veamos ahora algunas generalizaciones más elaboradas del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Definición 2.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$. Diremos que T es una aplicación contractiva generalizada en el sentido de Kranoselskii si:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(x, y) d(x, y),$$

donde $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ tiene la siguiente propiedad:
Para cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ contenido en los reales positivos, se tiene:

$$\sup\{\alpha(x, y) : a \leq d(x, y) \leq b\} = \lambda(a, b) < 1.$$

Nota 2.2.2 Si T es k-contractiva, entonces es contractiva generalizada en el sentido de Kranoselskii con $\alpha(x, y) = k$, $\forall x, y \in X$.

Teorema 2.2.3 *Si T es una contracción generalizada en el sentido de Kranoselskii, entonces existe un único punto fijo x de T.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ la sucesión de X definida por $x_0 \in X$ cualquiera, $x_{n+1} = Tx_n$, $\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.
Considero ahora la sucesión $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ dada por $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = d(x_n, x_{n-1})$.
Se verifica que:

1. $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente en $\mathbf{R}$. En efecto, $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = d(x_{n+1}, x_n) - d(x_n, x_{n-1}) =$$

$$= d(Tx_n, Tx_{n-1}) - d(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\leq \alpha(x_n, x_{n-1})d(x_n, x_{n-1}) - d(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\leq \lambda(a_n, b_n)d(x_n, x_{n-1}) - d(x_n, x_{n-1}) < 0$$

donde $a_n, b_n \in \mathbf{R}^+, a_n < b_n$ se han elegido arbitrariamente pero de forma que $a_n \leq d(x_n.x_{n-1}) \leq b_n$ (esta elección siempre puede hacerse exepto en el caso de que $x_n = x_{n-1}$, en cuyo caso x_{n-1} sería un punto fijo para T, que es lo que queremos probar. Suponemos que ese caso no se da).

2. $\{a_n\}$ está acotada inferiormente $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ debe ser convergente en $\mathbf{R}$. Sea $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

3. Veamos que $a = 0$.
En efecto, en otro caso habría de ser $a > 0$. Entonces puedo elegir N suficientemente grande de forma que $\forall m \in \mathbf{N}$

$$0 < a \leq a_{N+m} = d(x_{N+m}, x_{N+m-1}) < a + 1.$$

Así

$$a_{N+m} = d(x_{N+m}, x_{N+m-1}) =$$

$$= d(Tx_{N+m-1}, Tx_{N+m-2}) \leq$$

$$\leq \alpha(x_{N+m-1}, x_{N+m-2})d(x_{N+m-1}, x_{N+m-2}) \leq$$

$$\leq [\lambda(a, a+1)]d(x_{N+m-1}, x_{N+m-2}) \leq$$

$$...$$

$$\leq [\lambda(a, a+1)]^{m-1}d(x_{N+1}, x_N) =$$

$$= [\lambda(a, a+1)]^{m-1}a_{N+1} <$$

$$< [\lambda(a, a+1)]^{m-1}(a+1).$$

Por tanto, si $a > 0$ obtenemos que $\forall m \in \mathbf{N}$

$$a_{N+m} < [\lambda(a, a+1)]^{m-1}(a+1)$$

y haciendo ahora tender $m \longrightarrow +\infty$ tenemos que $a \leq 0$, lo que contradice el hecho de ser $a > 0$.

4. Sea ahora $\varepsilon > 0$, puesto que $\{a_n\} \longrightarrow 0$ puedo elegir N tal que $a_N \leq \frac{\varepsilon}{2}[1 - \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)]$. Sea $A = \{x \in X$ tal que $d(x, x_N) \leq \varepsilon\}$, veamos que $\forall x \in A$, $Tx \in A$.
En efecto, sea $x \in A$ tal que $d(x, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces
$$d(Tx, x_N) \leq d(Tx, Tx_N) + d(Tx_N, x_N) =$$
$$= d(Tx, Tx_N) + d(x_{N+1}, x_N) = d(Tx, Tx_N) + a_{N+1} \leq$$
$$\leq d(x, x_N) + a_N \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}[1 - \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)] \leq \varepsilon.$$
Por tanto, en este caso $Tx \in A$.
Sea ahora $x \in A$: $\frac{\varepsilon}{2} < d(x, x_N) \leq \varepsilon$
$$d(Tx, x_N) \leq d(Tx, Tx_N) + d(Tx_N, x_N) \leq$$
$$\leq \alpha(x, x_N)d(x, x_N) + d(x_{N+1}, x_N) < \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)d(x, x_N) + a_N \leq$$
$$\leq \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}[1 - \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \lambda(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Por lo tanto, también en este caso $Tx \in A$.

5. Veamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y elijo $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado $\varepsilon' > 0$ puedo escoger N tal que
$$a_N \leq \frac{\varepsilon'}{2}[1 - \lambda(\frac{\varepsilon'}{2}, \varepsilon')].$$
Sea $A = \{x \in X : d(x, x_N) \leq \varepsilon'\}$. Se verifica que $x_N \in A$, y por tanto $Tx_N = x_{N+1} \in A, Tx_{N+1} = x_{N+2} \in A$...
Es decir, $\forall n \geq N$ $x_n \in A$. Así, $\forall n, m \geq N$
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \leq$$
$$\varepsilon' + \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Como $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo (X, d), debe ser convergente.

6. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Veamos que x es un punto fijo para T. Como $\{x_n\} \longrightarrow x$ y T es continua (por como la tenemos definida en la Defición 2.2.1) sigue que
$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$
Pero, $\forall n \in \mathbf{N}$
$$Tx_n = x_{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$
Entonces, $Tx = x$.

7. Veamos finalmente que x es el único punto fijo de T en X. En efecto, supongamos que $\exists y \in X$ tal que $Ty = y$, entonces $d(Tx, Ty) \leq \alpha(x, y)d(x, y)$.
Si $d(x, y) > 0$, puedo elegir $[a, b] = \mathbf{R}^+ - \{0\}$ tal que $a \leq d(x, y) \leq b$, y por tanto $\alpha(x, y) \leq \lambda(a, b) < 1$. Así obtenemos que
$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq \lambda(a, b)d(x, y) < d(x, y)$$
lo cual es una contradicción.
Por lo tanto ha de ser $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

$\square$

Nota 2.2.4 Obsérvese que la demostración, aunque más complicada, sigue los pasos del Teorema del Punto Fijo de Banach, obteniéndose también que la sucesión de Picard
$$x_0 \in X, x_{n+1} = Tx_n, \forall n \in \mathbf{N}$$
converge al punto fijo.

Otra interesante y natural generalización del Teorema de la Aplicación Contractiva fue dada por Rakotch, y es como sigue:

Definición 2.2.5 Sea (X, d) un espacio métrico completo. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$ se dirá Rakotch-contractiva si existe una función decreciente α definida sobre el rango de la métrica con $\alpha(t) < 1$ $\forall t$ y tal que
$$d(Tx, Ty) < \alpha(d(x, y))d(x, y)$$
$\forall x, y \in X, x \neq y$.

Nota 2.2.6 Si tomamos $\alpha(t) = k$ para todo t, podemos decir que una aplicación contractiva es Rakotch-contractiva.

Una clase más general fue considerada por Body y Wong (1969) y es como sigue:

Definición 2.2.7 Sea (X, d) un espacio métrico completo. Diremos que una aplicación $T : X \longrightarrow X$ es Body Wong-contractivo si existe una función φ definida sobre el rango de la métrica verificando:

1. $0 < \varphi(t) < t, \forall t > 0$.
2. $d(Tx, Ty) < \varphi(d(x, y))$.
3. φ es semicontinua superiormente por la derecha ($\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ si $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon$).

Nota 2.2.8 Si T es Rakotch contractiva, entonces T es Wody-Wong contractiva. En efecto, basta tomar $\varphi(t) = \alpha(t)t$ siendo $\alpha(t)$ la función de Rakotch.

Nota 2.2.9 Se observa que una aplicación contractiva en el sentido de Body Wong es uniformemente continua.

Para este tipo de contracciones, tenemos el siguiente Teorema del punto fijo:

Teorema 2.2.10 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva en el sentido de Body Wong. Entonces existe un único punto punto $x \in X$ tal que $Tx = x$.*

Demostración. Se toma un punto cualquiera $x_0 \in X$ y se define la sucesión de números reales
$$a_n = d(T^n x, T^{n-1} x).$$
Se verifica que,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
y que,
$$\{T^n x\} \text{ es una sucesión de Cauchy en } X.$$
El límite de esta sucesión es el único punto fijo de T en X. Desde aquí la demostración es análoga a la del Teorema 2.2.3 (Teorema de Kranoselskii). □

Capítulo 3

Algunas aplicaciones del principio de la aplicación contractiva

El Teorema del Punto Fijo de Banach es una herramienta muy útil para resolver una serie de cuestiones tanto de resultado teórico como problemas prácticos. Definiremos métodos para resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones ineales y ecuaciones integrales. Por ejemplo, puede ser usado para resolver el teorema de Picard-Lindelof sobre solución de ecuaciones obtenidas.

3.1. Métodos iterados para ecuaciones lineales

Sea X un espacio de Banach, donde $A \in \mathcal{L}(X,X) = \mathcal{B}(X)$, con $\mathcal{L}(X,X)$ el conjunto de los operadores lineales y $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con la composición de aplicaciones.
El objetivo de nuestro estudio será las ecuaciones con operadores lineales

$$x = Ax + b, x \in X \tag{3.1.1}$$

y el correspondiente método iterado

$$x_n = Ax_{n-1} + b, x_0 \in X, n = 1, 2, ...$$

Definición 3.1.1 Diremos que la ecuación 3.1.1 tiene un método iterado estable si tiene exactamente una solución x para cada $b \in X$, y la sucesión

iterada $\{x_n\}$ converge a x para cualquier elección del elemento inicial $x_0 \in X$.
El número $R_n = \log(||A^n||^{1/n})$ es llamado velocidad media de convergencia para n iteraciones.
El número $R_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$ es llamado la velocidad asintótica de convergencia.
Se verifica que R_∞ siempre existe y $R_\infty = \log_{10} r(A)^{-1}$, siendo
$r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} (||A^n||)^{1/n}$ el radio espectral (recordamos que $r(A) \leq ||A||$).

Nota 3.1.2 El inverso $(I - A)^{-1}$ existe como operador lineal y continuo sobre X y $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.
Por tanto, esta serie geométrica generalizada o serie de Neumann converge en la norma de $\mathcal{B}\ (X)$.

Teorema 3.1.3 (principal para ecuaciones con operadores lineales). *Supongamos que $A : X \longrightarrow X$ es un operador lineal continuo sobre el espacio de Banach real o complejo X. Consideremos la ecuación:*

$$x = Ax + b, b \in X \text{ fijo.} \tag{3.1.2}$$

La única solución de 3.1.2 es $x = (I - A)^{-1}b$.

1. *Criterio de la norma: Supongamos que $||A|| < 1$. Entonces 3.1.2 tiene un método iterado estable. Para $n = 0, 1, 2, ...$ tenemos:*

$$||x - x_n|| \leq ||A||^n \frac{||x_1 - x_0||}{1 - ||A||} \text{ (Estimación del error a priori)}$$

$$||x - x_{n+1}|| \leq ||A|| \frac{||x_{n+1} - x_n||}{1 - ||A||} \text{ (Estimación del error a posteriori)}$$

$$||x_n - x_{n+1}|| \leq ||A|| ||x - x_n|| \text{ (Velocidad de convergencia)}$$

2. *Criterio del radio espectral: Supongamos que X es un espacio de Banach complejo y $r(A)$ el radio espectral de A. Entonces, 3.1.2 tiene un método iterado estable para $r(A) < 1$ y no lo tiene para $r(A) > 1$. Para $r(A) < 1$ y x la única solución de 3.1.2 el error estimado es:*

$$||x - x_n|| \leq ||A^n|| ||x - x_0|| = 10^{-nR_n} ||x - x_0||, n = 1, 2, ...$$

Corolario 3.1.4 *Sea $A : X \longrightarrow X$ un operador lineal continuo sobre un espacio de Banach complejo X. Entonces:*

1. *Si* $r(A) < 1$*, entonces* $\{x_n\} = \{Ax_{n-1} + b\}$ *converge para cada* $b \in X$ *y para cualquier elección arbitraria del elemento inicial* $x_0 \in X$ *a una única solución* x *de 3.1.2. Además para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número positivo* $c(\varepsilon)$ *tal que:*

$$||x - x_n|| \leq c(\varepsilon)(r(A) + \varepsilon)^n + ||x_1 - x_0||, n = 1, 2, ...$$

2. *Si* $r(A) > 1$*, entonces existe un punto* $b \in X$ *tal que* $\{x_n\}$ *diverge para* $x_0 = 0$*. De hecho, si denotamos por*
$K_0 = \{b \in X : \{x_n\}$ *converge para* $x_0 = 0\}$ *resulta ser un conjunto de primera categoría de Bert en* X*.*

3. *Si* $r(A) = 1$ *y* A *tiene un autovalor* $\lambda \in \mathbf{C}$ *con* $|\lambda| = 1$ *y autovector correspondiente* y*, entonces las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dadas por:*

$$\begin{cases} x_n = Ax_{n-1} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_n = Ay_{n-1} \\ y_0 = y \end{cases}$$

no pueden converger simultáneamente al mismo punto x*, es decir, 3.1.2 no tiene un método iterado estable.*

A continuación, demostraremos los apartados tanto del teorema como del corolario.

Demostración. (Apartado 1 del teorema). Sabemos que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$||A^n|| \leq ||A||^n$$

y por tanto:

$$||I|| + ||A|| + ||A^2|| + ... \leq 1 + ||A|| + ||A||^2 + ...$$

Así, como $||A|| < 1$ la serie converge, y por tanto también la otra. Así, la serie

$$F(A) = I + A + A^2 + ...$$

es absolutamente convergente en el espacio de Banach $\mathcal{B}$ (X). Ya que

$$I = F(A)(I - A) = (I - A)F(A),$$

sigue que

$$F(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

Consideremos ahora el operador $T : X \longrightarrow X$ tal que $Tx = Ax + b$. Se verifica que X es un espacio de Banach (y por tanto métrico completo) y T es un operador continuo. Además, $\forall x, y \in X$:

$$||Tx - Ty|| = ||Ax - Ay|| = ||A(x - y)|| \leq ||A||||x - y||.$$

Por tanto, al ser $||A|| < 1$ resulta T un operador contractivo con $k = ||A||$ y el resto de las afirmaciones de esta parte del teorema siguen del Teorema del punto fijo de Banach.
(Apartado 1 del corolario) Definimos

$$||x||_\varepsilon = \sup\{(r(A) + \varepsilon)^{-n}||A^n x||; n \in \mathbf{N}\}$$

para cada $\varepsilon > 0$.
Podemos introducir sobre X una norma equivalente a la de partida, es decir, que verifique:

$$m(\varepsilon)||x|| \leq ||x||_\varepsilon \leq M(\varepsilon)||x||, \forall x \in X$$

y que la correspondiente norma del operador $||A||_\varepsilon$ verifique

$$r(A) \leq ||A||_\varepsilon \leq r(A) + \varepsilon.$$

Ya que $r(A) < 1$, puedo tomar $\varepsilon > 0$ tal que $r(A) + \varepsilon < 1$, y así asegurar $||A||_\varepsilon < 1$. Entonces la parte 1 del teorema prueba que la ecuación 3.1.2 tiene exactamente una solución para cada $b \in X$, y si $x_n = Ax_n + b$ tenemos:

$$||x - x_n||_\varepsilon \leq ||A||_\varepsilon^n ||x_1 - x||_\varepsilon (1 - ||A||_\varepsilon).$$

Entonces:

$$m(\varepsilon)||x - x_n|| \leq ||x - x_n||_\varepsilon \leq$$
$$(r(A) + \varepsilon)^n M(\varepsilon)||x_1 - x_0|| \;|_{1-r(A)-\varepsilon}=$$
$$= c(\varepsilon)(r(A) + \varepsilon)^n ||x_1 - x_0||.$$

(Parte 2 del corolario) Sea $r(A) > 1$. Puesto que $||A^n||^{\frac{1}{n}} \longrightarrow r(A)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, tenemos $||A^n||^{\frac{1}{n}} \geq q > 1$, y por tanto $||A^n|| \geq q^n$ para n suficientemente grande.

Consecuentemente, $||A^n|| \longrightarrow +\infty$ cuando $n \longrightarrow +\infty$.
Sea $K_0 = \{b \in X$ tal que $x_{n+1} = Ax_n + b, x_0 = 0$ converge$\}$. Basta ver que K_0 es de primera categoría de Bert.
Se verifica que:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = A0 + b = b \\ x_2 = Ab + b \\ x_3 = A^2 b + Ab + b \\ ... \\ x_{n+1} = A^n b + A^{n-1} b + ... + Ab + b \end{cases}$$

y por tanto

$$x_{n+1} - x_n = A^n b, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Puesto que $b \in K_0$, la sucesión $\{x_n\}$ debe ser convergente, y por tanto de Cauchy en X, por lo que

$$x_{n+1} - x_n = A^n b \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow +\infty$, $\forall b \in K_0$.
Si K_0 no es de primera categoría de Bert, entonces es de segunda categoría, y en ese caso el teorema de la acotación uniforme Banach-Steinhaus nos lleva a

$$\sup ||A^n|| < +\infty,$$

contradicción con $||A^n|| \longrightarrow +\infty$ cuando $n \longrightarrow +\infty$. Así K_0 debe ser de primera categoría y por tanto $x - x_1$ de segunda categoría y denso en X.
(Apartado 3 del corolario) Se verifica que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$y_n - x_n = A(y_{n-1} - x_{n-1}) =$$

$$= A^2(y_{n-2} - x_{n-2}) = ... =$$

$$A^n(y_0 - x_0) = A^n y = \lambda^n y$$

puesto que $Ay = \lambda y$, por ser y un autovector correspondiente al autovalor λ.
Ya que $|\lambda| \geq 1$ e $y \neq 0$ se verifica que

$$||\lambda^n y|| = |\lambda|^n ||y|| = ||y|| > 0, \forall n \in \mathbf{N},$$

por lo que las dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ no puede converger al mismo límite.
(Apartado 2 del teorema) Si $r(A) < 1$ la parte 1 del corolario prueba que la ecuación 3.1.1 tiene un método iterado estable. Además si x es el punto fijo y $x_n = Ax_{n-1} + b$ tenemos que,

$$x - x_n = Ax + b - Ax_{n-1} - b =$$
$$= A(x - x_{n-1}) = A^2(x - x_{n-2}) = ... =$$
$$= A^n(x - x_0)$$

y por tanto,

$$||x - x_n|| \leq ||A^n|| ||x - x_0|| = 10^{-nR_n} ||x - x_n||.$$

Para $r(A) > 1$ la parte 2 del corolario asegura que la ecuacion 3.1.1 no tiene método iterado estable. $\square$

Nota 3.1.5 En el caso $r(A) = 1$ no puedo afirmarse nada. En el caso de que el operador tenga un autovalor $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1$ entonces el apartado 3 del corolario permite asegurar que el método iterado no es estable.

3.2. Aplicaciones a sistemas de ecuaciones lineales

Tomamos el siguiente sistema lineal:

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} \varsigma_j = c_i \text{ con } i = 1, ..., N \tag{3.2.1}$$

donde $b_{ii} \neq 0$ para todo i, y reescribimos la ecuación

$$\varsigma_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \varsigma_j + b_i \text{ con } i = 1, ..., N \tag{3.2.2}$$

donde $b_i = \frac{c_i}{b_{ii}}$ y $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{ii}}$, con $i \neq j$ y $a_{ii} = 0$. El método iterativo correspondiente se denomina método de paso total y seve como:

$$\varsigma_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \varsigma_j^{(n)} + b_i, \text{ con } n = 0, 1, 2, ..., i = 1, ..., N. \tag{3.2.3}$$

Ejemplo 3.2.1 (Criterio de suma de filas y columnas para el método de paso total).
Dado (b_{ij}) una matriz compleja $(N \times N)$ que satisface una de las siguientes condiciones para cada $i = 1, ..., N$

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{N} |b_{ij}| < |b_{ii}| \text{ suma de filas.} \tag{3.2.4}$$

$$\sum_{k=1, K\neq i}^{N} |b_{ki}| < |b_{ii}| \text{ suma de columnas.} \tag{3.2.5}$$

Dado $c_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, ..., N$ la ecuación 3.2.1 tiene exactamente una solución $\varsigma_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, ..., N$, y el método iterativo 3.2.3 converge a esa solución a partir de elementos de arranque arbitrarios $\varsigma_i^{(0)} \in \mathbf{C}$, $i = 1, ..., N$.

Proposición 3.2.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz compleja $(N \times N)$. Entonces 3.2.2 tiene un método iterativo estable exactamente cuando todos los autovalores λ de A satisfacen $|\lambda| < 1$.*

Ejemplo 3.2.3 Fijados $x = (\varsigma_1, ..., \varsigma_N)$, $b = (b_1, ..., b_N)$ y $X = \mathbf{C}^N$. Entonces, la ecuación 3.2.2 queda como la ecuación $x = Ax + b$ con $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Como normas en X, tomamos $||.||_\infty$ y $||.||_1$, así que obtenemos las siguientes normas en A respectivamente:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| < 1. \tag{3.2.6}$$

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| < 1. \tag{3.2.7}$$

Hay que darse cuenta que la convergencia respecto de $||.||_\infty$ y respecto a $||.||_1$ es equivalente a que $\varsigma_i^{(n)} \longrightarrow \varsigma_i$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo i.

Demostración. El radio espectral satisface que $r(A) = \max_i |\lambda_i|$ con λ_i un autovalor de A, sabemos entoces que la ecuación 3.2.2 tiene un método iterativo estable exacto cuando $r(A) < 1$. $\square$

3.3. Aplicaciones a ecuaciones integrales

Vamos a aplicar el teorema principal para ecuaciones con operadores lineales a las ecuaciones integrales lineales.

Definición 3.3.1 Llamaremos ecuación integral de Fredholm de segunda especie a una ecuación de la forma

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{3.3.1}$$

con $X = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ y $t \in [a,b]$ donde:

1. $f : [a,b] \longrightarrow X$ es continua.
2. $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow X$ es continua y no idénticamente nula.
3. $x : [a,b] \longrightarrow X$ es la función incógnita.

Teorema 3.3.2 *Existe una única función $x : [a,b] \longrightarrow K$ continua y solución de la ecuación integral 3.3.1 para cada $\mu \in K$ con*

$$|\mu| < \frac{1}{(b-a)max\{||K(t,s)|| : a \le t, s \le b\}}.$$

Además la sucesión

$$x_n(t) = \mu \int_a^t K(t,s)x_{n-1}(s)ds + f(t), n = 1, 2, ...$$

converge a x para cualquier elección arbitraria del punto inicial $x_0 \in C([a,b])$.

Nota 3.3.3 Puesto que por $\mathcal{C}([a,b],K)$ denotamos el espacio de Banach de todas las funciones continuas $X : [a,b] \longrightarrow K$ con la norma del supremo $||x|| = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$, la convergencia de $\{x_n\} \longrightarrow x$ debe ser entendida como convergencia uniforme sobre $[a,b]$.

Demostración. Escribamos la ecuación 3.3.1 en la forma

$$x = Ax + f$$

con $x \in X = \mathcal{C}([a,b],K)$, $f \in X$ donde $A : X \longrightarrow X$ tal que

$$(Ax)(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \forall t \in [a,b].$$

Se verifica que el operador $A \in \mathcal{B}\ (X)$. En efecto:

1. $\forall x \in X$, $Ax \in X$ si, y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que
$$|t - t_0| < \delta, \forall t \in [a, b]$$
entonces,
$$|(Ax)t - (Ax)t_0| < \varepsilon \text{ para cada } t_0 \in [a, b]$$
$$|(Ax)t - (Ax)t_0| \leq |\mu| \int_a^b |K(t, s) - K(t_0, s)||x(s)|ds \leq$$
$$\leq |\mu|||x|| \int_a^b |k(t, s) - k(t_0, s)|ds.$$
Por la continuidad de K sigue que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|t - t_0| < \delta$, entonces,
$$|K(t, s) - K(t_0, s)| < \frac{\varepsilon}{|\mu|||x||(b - a)}.$$
Así, $\forall t \in [a, b], |t - t_0| < \delta$ sigue $|(Ax)t - (Ax)b_0| < \varepsilon$.

2. A lineal $\Longleftrightarrow A(x+x') = Ax+Ax'$ y $A(\lambda x) = \lambda Ax, \forall x, x' \in K, \forall \lambda \in \mathbf{R}$ (trivial).

3. $\exists n > 0$ tal que $||Ax|| \leq n||x||, \forall x \in X \Longleftrightarrow$ Dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x' \in X$ $||x' - x|| < \delta \Longrightarrow ||Ax - Ax'|| < \varepsilon$
$$||Ax - Ax'|| = ||A(x - x')|| =$$
$$= \max_{a \leq t \leq b} |\mu \int_a^b K(t, s)(x(s) - x'(s))ds| \leq$$
$$\leq |\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |K(t, s)|||x - x'||(b - a)$$
y basta tomar
$$\delta = \frac{\varepsilon}{|\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |K(t, s)|(b - a)}.$$
Veamos finalmente que $||A|| < 1$.
En efecto,
$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$$

y

$$||Ax|| = \max_{a \leq t \leq b} |\mu \int_a^b k(t,s)x(s)ds| \leq$$

$$\leq |\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |k(t,s)| ||x|| (b-a) \leq$$

$$\leq |\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |K(t,s)|(b-a) < 1.$$

Así, $\forall x \in X$ con $||x|| \leq 1$,

$$||Ax|| \leq |\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |k(t,s)|(b-a) < 1$$

y por tanto

$$||A|| = sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| \leq |\mu| \max_{a \leq t, s \leq b} |k(t,s)|(b-a) < 1.$$

Estamos pues en las condiciones del apartado 1 del teorema 3.1.2. y se puede concluir la tesis del teorema.

□

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.4 *La ecuación integral de Volterra:*

$$x(t) = \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds + f(t), t \in [a,b] \tag{3.3.2}$$

con el correspondiente método iterado

$$x_n(t) = \mu \int_a^t K(t,s)x_{n-1}(s)ds + f(t)$$

con $t \in [a,b]$, $n = 1, 2, ...$ $x_0 \in \mathcal{C}([a,b],K)$ tiene una única solución para todo $\mu \in K$ y la sucesión $\{x_n\}$ converge a dicho punto para cualquier elección del punto inicial x_0 en $\mathcal{C}([a,b],K)$.

Demostración. Escribimos la integral 3.3.2 de la forma:

$$x = Ax + f, x \in \mathcal{C}([a,b],K)$$

donde

$$(Ax)(t) = \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds.$$

Razonando como en el teorema anterior es fácil probar que $A \in \mathcal{B}(X)$. Además se tiene lo siguiente,$\forall t \in [a,b]$:

$$|(Ax)(t)| = |\mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds| \leq |\mu| \text{max}_{a\leq t,s\leq b}|k(t,s)|||x||(t-a)$$

$$|A^2x)(t)| = |\mu \int_a^t k(t,s)Ax(s)ds| \leq$$

$$\leq |\mu| \text{max}_{a\leq t,s\leq b}|k(t,s)|||x|| \int_a^t (\delta - a)ds =$$

$$= \frac{|\mu|^2 C^2 ||x||(t-a)^2}{n!}$$

siendo $C = \text{max}_{a\leq t,s\leq b}|k(t,s)|$.
Continuando este proceso obtenemos que

$$|(A^n x)(t)| \leq \frac{|\mu|^n C^n ||x||(t-a)^n}{n!}$$

y, por tanto,

$$||A^n x|| = \text{max}_{a\leq t\leq b}|(A^n x)t)| \leq \frac{|\mu|^n C^n ||x||(b-a)^n}{n!}.$$

Así

$$||A^n|| = \sup_{x\in X} \frac{||A^n x||}{||x||} \leq \frac{|\mu^n C^n (b-a)^n}{n!}.$$

Por tanto, como el radio espectral es:

$$r(A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{|\mu|^n C^n (b-a)^n}{n!})^{\frac{1}{n}} = 0 \Longrightarrow r(A) = 0 < 1.$$

Ahora la tesis del teorema sigue de la parte 2 del Teorema 3.1.3, lo cual nos permite además evaluar el error. □

Capítulo 4

Espacios uniformemente convexos: puntos fijos de aplicaciones no expansivas

En este capítulo vamos a ver algunas nociones para finalmente poder hablar de un Teorema de punto fijo para aplicaciones no expansivas. El objetivo de este capítulo va a ser estudiar de qué forma el Teorema del Punto Fijo de Banach puede ser extendido a operadores no expansivos. La clave va a ser, como veremos, imponer restricciones sobre el espacio X, que ya no podrá ser tan general como un espacio métrico completo. Comenzaremos dando una breve introducción de los espacios de Hilbert.

4.1. Introducción

Vamos a ver resultados de los espacios de Hilbert, que son un tipo muy particular de espacios de Banach.
Vamos a introducir para ello el concepto de producto escalar $(x|y)$ de dos vectores $x, y \in K^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)}.$$

Un producto escalar en un espacio vectorial X, es una aplicación $(x|y) \longmapsto (x|y)$ de $X \times X$ en K que verifica:

1. Es lineal en la primera variable

$$(\alpha u + v|y) = \alpha(u|y) + (v|y)$$

con $\alpha \in K$, $u, v, y \in X$.

2. Es conjugado-lineal en la segunda variable

$$(x|\alpha u + v) = \overline{\alpha}(x|u) + (x|v)$$

con $\alpha \in K$, $x, u, v \in X$.

3. Es hermítica

$$(y|x) = \overline{(x|y)}$$

con $x, y \in X$.

4. Verifica que

$$x \in X, x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0.$$

Definición 4.1.1 Sea $x \in X$, se define la norma euclídea $||.||$ como:

$$||x|| = \sqrt{(x|x)}.$$

Definición 4.1.2 H es un espacio de Hilbert, si es completo con respecto a la norma euclídea.

4.2. Aplicaciones no expansivas

Definición 4.2.1 Sea X un espacio métrico y sea $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ un operador. Diremos que T es no expansivo si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in D(T)$.

Nota 4.2.2 Por lo tanto, todo operador $k-$contractivo es también no expansivo, aunque el recíproco naturalmente no es cierto.

Vamos a ver que condiciones deben cumplir las aplicaciones para tener un punto fijo. Vamos a ver que la completitud no es suficiente.

Nota 4.2.3 Veamos que la hipótesis de ser el espacio métrico completo no es suficiente para garantizar la existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas.
Contraejemplo : $X = c0$ con la norma infinito es un espacio de Banach no uniformemente convexo, puesto que no es reflexivo.
El operador $T : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ dado por $Tx = (1 - ||x||, x_1, x_2, ...)$ es no expansivo pero no tiene ningún punto fijo en $c0$.
Por lo tanto es fundamental exigir al espacio de Banach alguna condición adicional que permita asegurar la existencia de puntos fijos.

4.3. El Teorema de Punto Fijo para espacios de Hilbert

Teorema 4.3.1 *Sea H un espacio de Hilbert y sea C un cerrado convexo y acotado en H. Si $T : C \to C$ es una función no expansiva en C entonces T tiene puntos fijos en C.*

Desmostración. Sea x_0 un punto fijo en C y consideramos una sucesión de números positivos (r_n) convergiendo a 1 y $r_n < 1$.
Para cada n consideramos las funciones $T_n : C \to C$ definidas como sigue:

$$T_n x = r_n T x + (1 - r_n)\overline{x}_0$$

y es fácil ver que son funciones contractivas. Entonces buscamos un único punto x_n en C tal que

$$T_n x_n = x_n.$$

Ya que C es un cerrado y convexo, así como un subconjunto en un espacio de Hilbert buscamos una subsucesión débilmente convergente de (x_n).
Suponemos, sin pérdida de generalidad, que (x_n) tiene esa propiedad, es decir (x_n) es débilmente convergente. Dado

$$x_n \rightharpoonup x_0$$

y entonces, x_0 está en C.
Vamos a probar que x_0 es un punto fijo de T.
Sea x un punto arbitrario de H así tenemos,

$$||x_n - x||^2 = ||(x_n - x_0) + (x_0 - x)||^2$$

$$= ||x_n - x_0||^2 + ||x_0 - x||^2 + 2(x_n - x_0|x_0 - x)$$

y observamos que

$$2(x_n - x_0|x_0 - x) \to 0.$$

Así (x_n) converge débilmente a x_0. Ahora la sucesión (r_n) converge a 1 y esto implica que

$$Tx_n - x_n = (r_nTx_n) + (1 - r_n)\overline{x}_0) - x_n + (1 - r_n)(Tx_n) - \overline{x}_0)$$

$$= (T_nx_n - x_n + (1 - r_n)(Tx_n - \overline{x}_0)$$

$$= (1 - r_n)(Tx_n - \overline{x}_0)$$

tiende a cero.
Tomamos ahora $x = Tx_0$ y obtenemos

$$\text{lím}(||Tx_0 - x_n||^2 - ||(x_n - x_0)||^2) = ||x_0 - Tx_0||^2.$$

Como T es no expansiva tenemos

$$||Tx_n - Tx_0|| \leqq ||x_n - x_0||,$$

y así,

$$||x_n - Tx_0|| \leqq ||x_n - Tx_n|| + ||Tx_n - Tx_0||$$

$$\leqq ||x_n - Tx_n|| + ||x_n - x_0||.$$

Esto implica la siguiente relación

$$\overline{lim}(||x_n - Tx_0|| - ||x_n - x_0||) \leqq 0$$

y, por lo tanto

$$\overline{lim}(||x_n - Tx_0||^2 - ||x_n - x_0||^2) \leqq 0.$$

Esto claramente nos da

$$||x_0 - Tx_0||^2 = 0$$

es decir, x_0 es un unto fijo de T. $\square$

4.4. Espacios uniformemente convexos

Definición 4.4.1 Un espacio de Banach X es llamado uniformemente convexo si para cada $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\delta \in (0,1]$ tal que si $||x|| \leq R$, $||y|| \leq R$ y $||x-y|| \geq \varepsilon R$ para todo $x, y \in X$, $R > 0$ se sigue que

$$||\frac{x+y}{2}|| \leq (1-\delta)R.$$

Nota 4.4.2 Podemos elegir la función $\varepsilon \longrightarrow \delta(\varepsilon)$ con las siguientes propiedades:

1. $\delta(2) = 1$.
   En efecto, dado $\varepsilon = 2$, $\exists \delta(2) \in (0,1]$ tal que si $||x|| \leq R, ||y|| \leq R$,

   $$||x-y|| \geq 2R \Longrightarrow ||\frac{x+y}{2}|| \leq (1-\delta(2))R.$$

   Veamos que puede tomarse $\delta(2) = 1$. En otro caso $\exists x, y \in X$ tal que,

   $$||x|| \leq k$$

   $$||x-y|| \geq 2R, \tag{4.4.1}$$

   y,

   $$||\frac{x-y}{2}|| > 0.$$

   En este caso, considero $(x-y) \in X$. Se verifica que $||x|| \leq R$, $||-y|| \leq R$ y $||x-(-y)|| = ||x+y|| > 0$ y por tanto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $||x+y|| \geq \varepsilon R$. Esto implica, al ser el espacio uniformemente convexo que

   $$||\frac{x-y}{2}|| \leq (1-\delta(\varepsilon))R < R,$$

   entonces,

   $$||x-y|| < 2R$$

   lo que contradice 4.4.1.

2. Se define $\delta(0) = 0$, puedo suponer que la función $\delta : [0,1] \longrightarrow [0,2]$ es estrictamente creciente, biyectiva y que $\delta(\varepsilon) \longrightarrow 0$ si $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
   En efecto, en el caso de que no tuviera δ estas propiedades, basta sustituirla por δ_2, donde $\delta_1(\varepsilon) = \sup_{\eta \in [1,\varepsilon]} \delta(\eta)$ y $\delta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \delta_1(\varepsilon)}{2}$.

3. Si denotamos por $\eta : [0,1] \longrightarrow [0,2]$ la función monótona creciente inversa de la función δ se tiene lo siguiente: Si $x, y, z \in X$ tal que $||z-x|| \leq R$, $||z-y|| \leq R$ y $||z - \frac{(x+y)}{2}|| \geq r$, para $0 < r < R$, entonces

$$||x-y|| \leq R\eta(\frac{k-r}{k})$$

Vamos a probarlo por reducción al absurdo:
Sea $z \in X$ fijo, y supongamos que $\exists x, y \in X$ tal que

$$||z-x|| \leq R$$

$$||z-y|| \leq R$$

y,

$$||z - \frac{x+y}{2}|| \geq r, \tag{4.4.2}$$

pues,

$$||x-y|| > R\eta(\frac{k-r}{R}).$$

Sea $\varepsilon = \eta\frac{R-r}{R} > 0$. Por definición de espacio de Banach uniformemente convexo, existe

$$\delta(\varepsilon) = \frac{R-r}{R} > 0$$

al ser:

$$||z-x|| \leq R$$

$$||z-y|| \leq R,$$

$$||(z-x)-(z-y)|| = ||x-y|| > R\varepsilon,$$

como

$$||(z-x)-(z-y)|| > k\varepsilon,$$

se debe tener que:

$$||\frac{(z-x)+(z-y)}{2}|| = ||z - \frac{x+y}{2}|| <$$

$$< (1-\delta(\varepsilon))R = (1 - \frac{R-r}{R}) = r$$

que es una contradicción con 4.4.2.
Y por tanto

$$||(z-x)-(z-y)|| > R\varepsilon'$$

con $\varepsilon < \varepsilon' \Longrightarrow \delta(\varepsilon') > \delta(\varepsilon)$.
Así,
$$||z - \frac{x+y}{2}|| \leq (1-\delta(\varepsilon'))R < (1-\delta(\varepsilon))R.$$

Nota 4.4.3 Geométricamente, la convexidad uniforme para X significa que para cualesquiera dos puntos $x, y \in B(0,1)$, el punto medio del segmento que los une, es decir, el punto $z = \frac{x+y}{2}$ está dentro de una bola centrada en el origen de radio $r < 1$, donde r depende de la distancia $||x-y||$. Esto quiere decir que la frontera de la bola unidad debe ser "redonda".

Ejemplos 4.4.4 1. Sea $X = \mathbf{R}^2$. Entonces:

a) X es uniformemente convexa si introducimos la norma euclídea
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
Veamos que $(\mathbf{R}^2, ||.||)$ es uniformemente convexo.
En efecto, sea $0 < \varepsilon < 2$ y sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ tal que $||x|| \leq R$, $||y|| \leq R$ y $||x-y|| \geq \varepsilon R$ para algún $R > 0$. Esto significa que
$$||x||^2 \leq R \Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq R$$
$$||y||^2 \leq R \Longrightarrow y_1^2 + y_2^2 \leq R$$
$$||x-y||^2 \geq \varepsilon^2 R^2 \Longleftrightarrow$$
$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \geq \varepsilon^2 R^2 \Longleftrightarrow$$
$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 \geq \varepsilon^2 R^2 \Longleftrightarrow$$
$$R^2 + R^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 \geq \varepsilon^2 R^2 \Longleftrightarrow$$
$$R^2 - x_1y_1 - x_2y_2 \geq \frac{\varepsilon^2 R^2}{2} \Longleftrightarrow$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq R^2 - \frac{\varepsilon^2 R^2}{2}.$$
Evaluemos ahora $||\frac{x+y}{2}||$. Debe existir $\delta(\varepsilon) \in (0,1]$ tal que
$$||\frac{x+y}{2}|| \leq (1-\delta)R$$
$$||\frac{x+y}{2}|| = \frac{1}{4}[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2] =$$

$$= \frac{1}{4}[x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2] \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}[R^2 + R^2 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2] \leq \frac{1}{2}[R^2 + R^2 - \frac{\varepsilon^2 R^2}{2}] =$$
$$= R^2 - \frac{\varepsilon^2 R^2}{4} = R^2(1 - \frac{\varepsilon^2}{4})$$

Así, $||\frac{x+y}{2}|| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}R = (1 - \delta(\varepsilon))R$, tomando

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \in (0, 1] \Longrightarrow (\mathbf{R}^2, ||.||_e)$$

es uniformemente convexo.

b) X no es uniformemente convexo si introducimos la norma del supremo

$$||x|| = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Veámoslo, $(\mathbf{R}^2, ||.||_\infty)$ no es uniformemente convexo.
Sea $\varepsilon = 2$ y sea $R = 1$. Tomamos $x = (-1, 1)$ e $y = (1, 1)$ tal que $||x||_\infty = 1$, $||y||_\infty = 1$ y $||x - y||_\infty = 2 = \varepsilon$.
Sin embargo,

$$||\frac{x+y}{2}|| = \frac{1}{2}||(0, 2)|| = 1$$

que no es menor o igual a $1 - \delta$ para ningún $\delta > 0$.

2. Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.
En efecto, sean $x, y \in H$ tal que $||x|| \leq R$, $||y|| \leq R$ y $||x - y|| \geq \varepsilon R$ para $\varepsilon > 0$.
Entonces, por la igualdad del paralelogramo:

$$||\frac{x+y}{2}||^2 + ||\frac{x-y}{2}||^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(||x + y||^2 + ||x - y||^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2).$$

Entonces,

$$||\frac{x+y}{2}||^2 \leq \frac{1}{2}(R^2 + R^2) - \frac{\varepsilon^2 R^2}{4} = (1 - \frac{\varepsilon^2}{4})R^2 \Longrightarrow$$

y así

$$||\frac{x+y}{2}|| \leq \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}R = (1-\delta(\varepsilon))R$$

donde $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$ que es un valor factible para $\varepsilon \in [0,2]$.

Nota 4.4.5 Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. Este importante resultado fue dado por Yosida (1965) y no lo probamos. El recíproco no es cierto, por ejemplo: $(\mathbf{R}^n, ||.||_\infty)$.

4.5. El Teorema de Punto Fijo de Browder

Cuando se estudió el teorema del punto fijo de Banach ya dimos algún ejemplo de que si se sustituye la hipótesis de que T sea $k-$contractiva por la de que T sea no expansiva (incluso estrictamente), no se obtiene en el marco general de los espacios métricos completos la existencia de punto fijo para T. Ahora estamos en condiciones de dar el siguiente importante resultado.

Teorema 4.5.1 (Teorema del punto fijo de Browder) *Supongamos que la aplicación $T : M \subseteq X \longrightarrow M$ es no expansiva, donde M es un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo en un espacio de Banach uniformemente convexo X. Entonces el conjunto de puntos fijos de T, $Fix(T)$ es no vacío, cerrado y convexo.*

Demostración.

1. Mostremos primero que $Fix(T) \neq \emptyset$.
   Fijado $p \in M$ denotemos $T_n : M \longrightarrow X$ definido por:

   $$T_n x = (1-\frac{1}{n})Tx + \frac{p}{n}, \text{ donde } n \in \mathbf{N}, x \in M.$$

   Veamos que $\forall n \in \mathbf{N}$, $T_n(M) \subseteq M$, y por tanto $T_n : M \longrightarrow M$.
   En efecto, puesto que $T : M \longrightarrow M$ se cumple que $\forall x \in M$, $Tx \in M$.
   Así,

   $$T_n(x) = \lambda Tx + \mu p$$

   donde $\lambda = 1 - \frac{1}{n}, \mu = \frac{1}{n}$ y, por tanto, $\lambda + \mu = 1$.
   Por tanto, $T_n x$ es una combinación lineal convexa de Tx y p que son dos elementos de M, y así en virtud de la convexidad de M sigue que

$T_n x \in M$. Además, $\forall n \in \mathbf{N}$, T_n es una aplicación contractiva. En efecto,$\forall x, y \in M$,

$$||T_n x - T_n y|| \leq (1 - \frac{1}{n})||Tx - Ty|| \leq (1 - \frac{1}{n})||x - y||.$$

Así, el Teorema del Punto Fijo de Banach garantiza ahora que existe una sucesión de puntos $\{x_n\}$ tales que $\forall n \in \mathbf{N}$, $T_n x_n = x_n$.
Puesto que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada ya que está en M y X es un espacio de Banach uniformemente convexo, y por tanto reflexivo, sigue que $\{x_n\}$ debe tener una subsucesión, que denotaremos por $\{x_{n'}\}$ débilmente convergente a cierto punto x (este punto $x \in \overline{c0}\{x_{n'} : n \in \mathbf{N}\}$ y por tanto en nuestro caso, al ser M convexo y cerrado, sigue que $x \in M$ necesariamente). Ya que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$x_n = T_n x_n = (1 - \frac{1}{n})Tx_n + \frac{p}{n} \Longrightarrow$$

$$x_n - Tx_n = \frac{1}{n}Tx_n + \frac{p}{n}, \forall n \in \mathbf{N}$$

y haciento tender $n' \longrightarrow +\infty$ obtenemos que $x_{n'} - Tx_{n'} \longrightarrow 0$ (observar que la sucesión $\{Tx_n : n \in \mathbf{N}\}$ es acotada puesto que está en M y el producto $\frac{1}{n}Tx_n \longrightarrow 0$). Por tanto como la proposición anterior el operador $(I - T)$ es semicerrado, sigue que

$$(I - T)x = 0 \Longleftrightarrow x - Tx = 0 \Longleftrightarrow x = Tx.$$

Luego x es un punto fijo de T. Así, $Fix(T) \neq \emptyset$.

2. Veamos ahora que $Fix(T)$ es cerrado.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $Fix(T)$ tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$. Veamos que $x \in Fix(T)$. En efecto, como $\{x_n\} \longrightarrow x$ y T es no expansiva y, por tanto, continua, sigue que $Tx_n \longrightarrow Tx$, pero $\forall n \in \mathbf{N}$, $Tx_n = x_n$. Así que tenemos

$$\begin{cases} Tx_n \to Tx \\ Tx_n = x_n \to x \end{cases}$$

Entonces,

$$x = Tx \Longrightarrow x \in Fix(T).$$

3. Veamos finalmente que $Fix(T)$ es convexo.
   Sea X un espacio uniformemente convexo y sean $x_0, x_1 \in Fix(T)$. Entonces para todo $t \in (0,1)$ existe un único $y \in X$ tal que:
   $$d(x_0, y) = td(x_0, x_1)$$
   $$d(x_1, y) = (1-t)d(x_0, x_1).$$
   Supongamos que existe un $y_t = tx_0 + (1-t)x_1$ tal que:
   $$d(x_0, Ty_t) = d(Tx_0, Ty_t) \leq d(x_0, y_t) = td(x_0, x_1)$$
   $$d(x_1, Ty_t) = d(Tx_1, Ty_t) \leq d(x_1, y_t) = (1-t)d(x_0, x_1)$$
   Así $Ty_t = y_t$. Por tanto $y_t \in Fix(T)$

□

Nota 4.5.2 No hay desde luego expectativa de unicidad ya que el operador identidad sobre un espacio de Banach X es no expansivo y en él, cada punto es un punto fijo. Tomando pues X uniformemente convexo y M en las condiciones del teorema sigue que $Fix(T) = M$.

Nota 4.5.3 El siguiente contraejemplo muestra la importancia de que el operador T sea no-expansivo para obtener teoremas generales de punto fijo. *Contraejemplo* : Consideremos en el espacio de Hilbert $l^2(\mathbf{Z})$ la base natural que notaremos por $\{y_n : n \in \mathbf{Z}\}$ y para cada $0 < \varepsilon < 1$ definamos el operador $T_\varepsilon : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ dado por $T_\varepsilon(x) = \varepsilon(1 - ||x||)y_0 + Ux$ donde U es el operador $U : l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z})$ tal que $U(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n y_{n+1}$. En este caso se verifica que $||Tx - Ty|| \leq (1+\varepsilon)||x-y||$ pero sin embargo, la aplicación T no tiene ningún punto fijo. Se trata por tanto de un operador casi no expansivo y que sin embargo no tiene punto fijo.

Nota 4.5.4 Veamos que las hipótesis del Teorema del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas son esenciales:

1. T debe ser no expansiva. Como vimos en el contraejemplo de la Nota 4.1.4 esta hipótesis es esencial, y que de hecho no se puede permitir a T una condición más amplia en este sentido.

2. M no vacío, cerrado, acotado y conexo.
   Contraejemplo : $X = \mathbf{R}$, $||x|| = |x|$ espacio de Banach uniformemente convexo.

a) $M = (0, 1]$ acotado, convexo y no vacío y $T : M \longrightarrow M$ tal que $Tx = \frac{x}{2}$.

b) $M = [0, +\infty)$ cerrado, convexo y no vacío y $T : M \longrightarrow M$, con $Tx = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

c) $M = \{0, 1\}$ cerrado, acotado y no vacío y $T : M \longrightarrow M$, tal que $T_0 = 1$, $T_1 = 0$.

3. X espacio de Banach uniformemente convexo. En la Nota 4.2.3 vimos un contraejemplo de esto.

4.6. Aplicaciones a soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales

Teorema 4.6.1 *Supongamos que:*

1. *X es un espacio de Hilbert real con producto escalar $(.|.)$.*

2. *La aplicación $f : [0, +\infty) \times X \longrightarrow X$ satisface:*

   a*)* *$f(t + p, x) = f(t, x), \forall t \in [0, +\infty), x \in X$ donde $p > 0$ es fijo.*

   b*)* *$(f(t, x) - f(t, y)|x - y) \geq 0, \forall t \in [0, +\infty), x, y \in X$*

3. *Existe un número $R > 0$ tal que $(f(t, x)|x) < 0, \forall t \in [0, p]$ y $x \in X$ con $||x|| = R$.*

4. *El problema de valores iniciales (PCo)*

$$x'(t) = f(t, x(t)); x(0) = x_0 \tag{4.6.1}$$

   tiene solución $x : [0, +\infty) \longrightarrow X, \forall x_0 \in X$ con $||x_0|| \leq R$.

Entonces la ecuación diferencial 4.6.1 tiene solución de periodo $p > 0$.

Demostración.-

1. Veamos en primer lugar la unicidad de la solución del problema de Cauchy planteado. Para ella utilizaremos la fórmula

$$\frac{d}{dt}(||x(t)||^2) = 2(x'(t)|x(t)) \tag{4.6.2}$$

que luego probaremos.
Si $x(.)$ e $y(.)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial planteada satisfaciendo ambas $x(0) = y(0) = x_0$.
Se tiene:

$$\frac{d}{dt}(||x(t) - y(t)||^2) = 2(x'(t) - y'(t)|x(t) - y(t)) =$$
$$= 2(f(t, x(t)) - f(t, y(t))|x(t) - y(t)) \leq 0$$

$\forall t \in [0, +\infty)$.
Por lo tanto la función $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(t) = ||x(t) - y(t)||$ es decreciente, y así

$$\forall t \geq 0, g(t) \leq g(0).$$

Si y solo si,

$$\forall t \geq 0, ||x(t) - y(t)|| \leq ||x(0) - y(0)|| = 0.$$

Entonces

$$\forall t \geq 0, x(t) = y(t).$$

2. Definimos el operador de Liapunov

$$L : X \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tal que } L(x) = ||x||^2, \forall x \in X.$$

Si $x(.)$ es una solución de la ecuación diferencial dada con $||x(t)|| = R$ para algún $t \in [0, p]$ fijo, se verifica que

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = \frac{d}{dt}||x(t)||^2 = L(x'(t)|x(t)) = 2(f(t, x(t))|x(t)) < 0.$$

3. Sea $M = \{x \in X : ||x|| \leq R\}$. Sea $x_0 \in M$ cualquiera. Por 1 y 4 sabemos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.6.3}$$

tiene solución única dada por $x(.)$.
Definamos el operador $T : M \longrightarrow M$ tal que $Tx_0 = x(p)$, donde x es la única solución del problema de Cauchy 4.6.3. Se verifica:

   a) T está bien definida en virtud de la unicidad de la solución.

b) $T(M) \leq M$.
Vamos a probar que si $x(.)$ es solución de 4.6.1 con $x(0) = x_0$ y $||x_0|| \leq R$, entonces $\forall t \in [0,p], ||x(t)|| \leq R$ y por tanto en particular $||Tx_0|| = ||x(p)|| \leq R$ lo cual implica $Tx_0 \in M$. En efecto, veamos que $\forall t \in [0,p]$ tal que $||x(t)|| = R, \exists \delta > 0$ tal que $||x(t)|| < R, \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Supongamos que $||x(t_0)|| = R$. Entonces:
$$\frac{d}{dt} Lx(t_0) = \frac{d}{dt}||x(t_0)||^2 < 0 \text{ por } (2)$$
$\Longrightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in (t_0, t_0+\delta), ||x(t)|| < ||x(t_0)|| = R$. Esto implica que $||x(t) > R$ para algún $t \in [0,p]$.

c) El operador $T : M \longrightarrow M$ es no expansivo, esto es, $\forall x_0, t_0 \in M$, $||Tx_0 - Ty_0|| \leq ||x_0 - y_0||$. En efecto
$||Tx_0 - Ty_0|| = ||x(p) - y(p)|| \leq ||x(0) - y(0)|| = ||x_0 - y_0||$.

d) M es un conjunto cerrado, acotado y convexo en el espacio de Hilbert (y por tanto Banach uniformemente convexo) H. Podemos por tanto aplicar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, Gohde y Kink para obtener que $\exists x_0 \in M$ tal que $Tx_0 = x_0$. Sea $x(.)$ la solución del problema de Cauchy 4.6.3 tal que $x(0) = x_0$ que como sabemos es única. Se verifica que $x(p) = Tx_0 = x_0$.

4. Veamos que $x(.)$ tiene periodo $p > 0$. En efecto, sea $y(t) = x(t+p)$ se verfica que $\forall t \in [0, +\infty), y'(t) = x'(t+p) = f(t+p, x(t+p)) = f(t, x(t+p)) = f(t, y(t))$ $y(0) = x(p) = x_0$
Por tanto, $y(t)$ es la única solución del problema de Cauchy 4.6.3 $\Longrightarrow$ $\forall t \in [0,+\infty), y(t) = x(t) \Longleftrightarrow \forall t \in [0, +\infty), x(t+p) = x(t) \Longrightarrow X$ es una solución periódica de periodo $p > 0$ del problema de Cauchy planteado.

□

Nota 4.6.2 Probaremos la fórmula
$$\frac{d}{dt}(||x(t)||^2) = 2(x'(t)|x(t)).$$
Lo haremos de la forma más general. Sean $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow X$ donde X es un espacio de Hilbert real y f, g son derivables respecto de t. Entonces:
$$\frac{d}{dt}(f(t)|g(t)) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t)).$$

Demostración.- Sea $l : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $l(t) = (f(t)|g(t))$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(f(t)|g(t)) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{l(t+h)-l(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f(t+h)|g(t+h))-(f(t)|g(t))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(f(t+h)-f(t)|g(t+h))+(f(t)|g(t+h)-g(t))] =$$

$$\lim_{h\to 0}[(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}|g(t+h))+(f(t)|\frac{g(t+h)-g(t)}{h})] =$$

$$= (f'(t)|g(t))+(f(t)|g'(t)).$$

En nuestro caso particular sería:

$$\frac{d}{dt}(||x(t)||^2) = \frac{d}{dt}(x(t)|x'(t)) = (x'(t)|x(t))+(x(t)|x'(t)) =$$
$$= 2(x(t)|x'(t)) = 2(x'(t)|x(t)).$$

□

Nota 4.6.3 Para garantizar la condición 4 es suficiente, por ejemplo, que la función f sea continua sobre $[0,+\infty)\times X$ y localmente Lipschiziana respecto de X, esto es para cada $(t_0,x_0)\in[0,+\infty)\times X, \exists a,b>0$ y $L\leq 0$ tales que

$$||f(t,x)-f(t,y)|| \leq L||x-y||$$

$\forall t\in\mathbf{R}, x,y\in X$ tales que $|t-t_0|\leq a, ||x-x_0||\leq b$ y $||y-x_0||\leq b$.

Nota 4.6.4 La condición 2 es fundamental para que el operador T sea no expansivo.
La condición 3 permitirá concluir que el operador T aplica M en M.

Bibliografía

[1] E., Zeidler, *Nonlineal Functional Analysis and its Applications, Vol. I: Fixed point theorems*. Springer Vertag, 1986.

[2] Istratescu. *Fixed Point Theory*. Reidel Pub. Co., 1981.

[3] D. R., Smart. *Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press, 1974.

[4] W. A., Kirk. *Fixed Point Theory for Nonexpansive Mappings, Lecture Notes in Math, 886*. Springer Verlag, 1981.

[5] A.M.S. *Contemporary Math, Vol. 18: Fixed Points on Nonexpansive Mappings*. 1983.

[6] *Lecture Notes in Math, 886, Fixed Print Theory.*

[7] Baillon y J. B., Schoneberg. *Asymptotic Normal Structure and Fixed Points of Nonexpansive Mappings*. Proc. Amer Math. Soc. 81. 1981.

[8] S., Banach. *Sur les Opérations dans les Ensembles Abstraits et leur Applications aux Équations Intégrales*. Fund. Math. 3, 1922.

[9] F. E., Browder. *Nonexpansive nonlinear Operators in Banach Spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1965.

[10] Gohde. *Zum Principder Kontraktiven Abbilding*. Math. Nachr., 1965.