Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

Trabajo Fin de Grado:

Teorema de Picard

Autora: Raquel León Barrado

Tutora: Mª del Carmen Romero Moreno

20 de junio de 2018

Abstract.

In this work, we study *Picrad's theorems* about the range of an analytic function.

The first approach to *Picard Theorem* is the *Casorati-Weierstrass Theorem* which ensures that the range of an analytic function near an essential singularity is dense in $\mathbb{C}$.

In Chapter 3, we prove *Little Picard Theorem*: if a function f is entire and non constant, the set of values that f assumes is either the whole complex plane or the plane minus a single point.

In Chapter 4, we prove *Great Picard Theorem*: if an analytic function f has an essential singularity at a point z_0 then at any punctured neighborhood of z_0, $f(z)$ attains every finite complex value with at most one possible exception.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El teorema de E. Picard [6] fue una revelación en su tiempo y causó un gran interés en la investigación de la *Teoría de funciones*. La prueba original, usaba la *función modular elíptica*, la cual está conectada con el *Criterio Fundamental de Normalidad*, que es empleado en la prueba actual. In 1986, Borel dió una demostración elemental del *Teorema de Picard*, una prueba en la cual no utilizaba la función modular. Montel [7], tuvo la brillante idea de reemplazar una propiedad particular de una función por una familia de funciones que poseían la propiedad en una sucesión de dominios. Este método fue explotado posteriormente por Julia y Montel en una serie de entornos diferentes.

En este trabajo, estudiaremos los teoremas de Picard sobre las funciones analíticas.

El primer teorema que necesitaremos es el *Teorema de Liouville*, el cual afirma que las únicas funciones acotadas enteras son las funciones constantes en $\mathbb{C}$. Como consecuencia, podemos deducir el *Teorema Fundamental del Álgebra*, que nos dice que la imagen del plano complejo $\mathbb{C}$ bajo un polinomio no constante, da $\mathbb{C}$.

La primera aproximación al *Teorema de Picard* es el *Teorema de Casorati-Weierstrass*, cuyo enunciado es que la imagen de una función holomorfa cerca de una singularidad esencial es densa en $\mathbb{C}$.

En el capítulo 3, probaremos el *Teorema pequeño de Picard*: Si una función es entera y no constante, entonces alcanza todo valor en el plano complejo, con una excepción posible. La prueba original de Picard estaba basada en propiedades de la función modular.

En el capítulo 4, probaremos el *Teorema grande de Picard*: Si una función f tiene una singularidad esencial en el punto z_0 y $f(z)$ es holomorfa en una entorno reducido de z_0, entonces $f(z)$ toma cualquier valor finito complejo, a excepción de uno.
Esto refuerza el *Teorema de Casorati-Weierstrass*.

Capítulo 2

Conceptos básicos.

Definición 2.0.1 Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea el disco $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.
Diremos que z_0 es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $D(z_0; r) \subset A$. Al conjunto de todos los puntos interiores de A lo llamaremos **interior** de A y lo denotaremos por $\mathring{A}$.

Diremos que z_0 es un **punto de adherencia** de A si para todo $r > 0$ se verifica que $D(z_0; r) \cap A \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A lo llamaremos **clausura** de A y lo denotaremos por $\overline{A}$.

Diremos que z_0 es un **punto de acumulación** de A si para todo $r > 0$ se verifica que $D(z_0; r) \cap (A \backslash \{z_0\}) \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A lo llamaremos **conjunto derivado** de A y lo denotaremos por A'.

Definición 2.0.2 Diremos que A es un conjunto **abierto** si $\mathring{A} = A$. Diremos que A es un conjunto **cerrado** si $\overline{A} = A$.

Definición 2.0.3 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Sea la familia de subconjuntos de A,

$$\mathscr{T}_A = \{A \cap G, \ G \in \mathscr{T}\}.$$

Entonces, la familia $\mathscr{T}_A$ es una topología sobre A llamada **topología relativa** a A.

Definición 2.0.4 Diremos que un conjunto A de $\mathbb{C}$ es **conexo** si, para la topología relativa de A, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el propio A y $\varnothing$.

Definición 2.0.5 Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ se dice **denso** en $(X, \mathscr{T})$ si $\overline{A} = X$.

Definición 2.0.6 Diremos que Ω es una **región**, si es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$.

Definición 2.0.7 Una función f con dominio en D se dice que es **uno a uno** (o **inyectiva**) si no existen dos elementos de D con la misma imagen.

2.1. Función holomorfa.

Definición 2.1.1 Sea Ω una región $\subseteq \mathbb{C}$, sea f una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Diremos que f es **derivable en** z_0 si existe y

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

Diremos que f es **derivable en** Ω si es derivable en cada punto de Ω. Al conjunto

$$\{f : \Omega \to \mathbb{C} \big| f \text{ es dervivable en } \Omega\}$$

lo denotaremos por H(Ω). Si $f \in H(\Omega)$, diremos que f es **holomorfa** en Ω. Si $f \in H(\mathbb{C})$, diremos que f es **entera**.

Recordemos a continuación algunos resultados de la *Teoría de la integral de Cauchy* que serán usados más adelante.

Teorema 2.1.2 Supongamos que Ω es una región, f es holomorfa en Ω y que $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$. Tenemos entonces que f es constante en Ω.

Teorema 2.1.3 (Teorema de la Primitiva.) Sea f una fucnión continua en una región Ω. Entonces son equivalentes :

1. la integral de f a lo largo de cualquier arco cerrado diferenciable a trozos es nula;

2. la integral a lo largo de cualquier arco diferenciable a trozos en Ω uniendo dos puntos a y b de Ω es independiente del arco elegido;

3. existe una función F (llamada primitiva de f) holomorfa en Ω cuya derivada $F'(z) = f(z)$ para todo z de Ω.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Cauchy) (para un disco). Si f es continua en un disco abierto D, $a \in D$ y $f \in H(D \backslash \{a\}$, entonces para todo arco cerrado γ en D se tiene que

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

Definición 2.1.5 Se define el **índice** de un punto a respecto a un arco cerrado diferenciable a trozos γ como

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\nu}{\nu - a}.$$

Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$n(\gamma, z) f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{n+1}}.$$

Teorema 2.1.6 Supongamos que una función f es holomorfa en un disco abierto $D = D(z_0; r)$ y que $|f(z)| \leqslant m$ en todo D, donde m es una constante. Luego para cada entero positivo k

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k! m r}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

para cada $z \in D$. En particular, $|f^{(k)}(z_0)| \leqslant k! m r^{-k}$.

Demostración. Tomamos un z fijo en D, hay un s que satisface $|z - z_0| < s < r$. Si ν está situado en $\partial D(z_0, s)$, tenemos

$$|\nu - z| = |(\nu - z_0) + (z_0 - z)| \geqslant |\nu - z_0| - |z - z_0| = s - |z - z_0|.$$

Acotando $|f^{(k)}(z)|$:

$$|f^{(k)}(z)| = \Big| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\nu - z_0| = s} \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} \Big| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_{|\nu - z_0| = s} \frac{|f(\nu)||d\nu|}{|\nu - z|^{k+1}} \leqslant$$

$$\frac{k!}{2\pi} \int_{|\nu - z_0| = s} \frac{m |d\nu|}{(s - |z - z_0|)^{k+1}} = \frac{k! m s}{(s - |z - z_0|)^{k+1}}.$$

Haciendo $s \to r$ llegamos a la desigualdad deseada.

$\diamond$

Pasamos ahora a probar el teorema sobre la imagen de funciones enteras.

Teorema 2.1.7 (Teorema de Liouville.) Las únicas funciones acotadas enteras son las funciones constantes en $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que f, una función entera, satisface $|f(z)| \leqslant m$ $\forall z$, con m constante. Para un número fijo z y algún $r > |z|$ deducimos que para f en $D = D(0, r)$ tenemos

$$|f'(z)| \leqslant \frac{mr}{(r - |z|)^2}.$$

Cuando $r \to \infty$, deducimos que $f'(z) = 0$. Como esto es cierto para cada $z \in \mathbb{C}$, tenemos por tanto que f es constante en el plano complejo.

$\diamond$

Obtenemos ahora el siguiente resultado a partir del *Teorema de Liouville.*

Teorema 2.1.8 (Teorema Fundamental del Álgebra.) Caulquier polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, de grado $n \geqslant 1$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Este es una aplicación del *Teorema de Liouville* a $1/p$, de modo que $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Teorema 2.1.9 (Teorema de Morera.) Supongamos que f es una función compleja continua en un conjunto abierto Ω tal que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

para todo triángulo cerrado $\Delta \subset \Omega$. Entonces $f \in H(\Omega)$.

Demostración. Sea V un conjunto abierto convexo en Ω. Podemos construir una $F \in H(V)$ tal que $F' = f$. Como las derivadas de las funciones holomorfas son holomorfas, tenemos $f \in H(V)$, para todo abierto convexo $V \subset \Omega$, y, por tanto, $f \in H(\Omega)$.

$\diamond$

Definición 2.1.10 Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$. Llamaremos una **multifunción** a una correspondencia $F : S \subset \mathbb{C} \to \mathscr{P}(\mathbb{C})$ tal que a cada número complejo $z \in S$ le hace corresponder un subconjunto $F(z)$ de $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.11 Diremos que f es una **rama** de la multifunción F en un subconjunto B de S si $f : B \subset S \to \mathbb{C}$ es una aplicación tal que a cada $z \in B$ le hace corresponder un único elemento $f(z)$ de $F(z)$. Si además f es continua en B diremos que f es una **rama continua** de F en B.

Definición 2.1.12 Sea Ω una región del plano complejo, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es la función identidad, definida por $f(z) = z$. Diremos que una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es una **rama del logaritmo** en Ω si satisface $e^{g(z)} = z = f(z)$ para cada punto $z \in \Omega$.

Una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista dicha función g es que el origen no pertenzca a Ω o, dicho de otra forma, que la función f no tenga su única raíz en Ω.

Ejemplo. Llamaremos $L_\alpha = \{te^{i\alpha} : t \in [0, +\infty]\}$ a la semirecta que parte del origen y con ángulo de inclinación α. Siempre existe una rama del $log(z)$ en $\mathbb{C}\backslash L_\alpha$ con $arg_\alpha(z) \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$, dada por

$$\log_\alpha = \ln|z| + i \arg_\alpha z.$$

2.2. Ceros.

Definición 2.2.1 Sea Ω una región de $\mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Diremos que $z_0 \in \Omega$ es un **cero** de f si $f(z_0) = 0$. Diremos que el cero es de **orden** m, $(m \in \mathbb{N})$, si existe un entorno abierto V de z_0, $(V \subset \Omega)$, y una función $\varphi \in H(V)$ tales que $\varphi(z_0) \neq 0$ y para todo $z \in V$

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z).$$

Proposición 2.2.2 Sea Ω una región de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

- z_0 es un cero de orden m de f.
- $f(z_0) = 0$ y $m = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$.
- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

2.3. Singularidades aisladas

Definición 2.3.1 Una función f tiene una **singularidad aislada** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe un $r > 0$ con la propiedad de que f es holomorfa en $D^*(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$, pero no es necesariamente holomorfa en todo el disco $D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.

2.3.1. Tipos de singularidades aisladas

Definición 2.3.2 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de la función f.

- Diremos que f tiene en z_0 una singularidad **evitable** si existe el $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
  Ejemplo:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \qquad \textit{en } z_0 = 0.$$

- Diremos que f tiene una singularidad de tipo **polo** en z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
  Ejemplo:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^3} \qquad \textit{en } z_0 = 1.$$

- Diremos que f tiene en z_0 una singularidad **esencial** si no existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$.
  Ejemplo:

$$f(z) = e^{1/z} \qquad \textit{en } z_0 = 0.$$

2.4. Relación con series de potencias

Definición 2.4.1 Una **sucesión bilátera** de números complejos es una aplicación $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Si escribimos $\varphi(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, la sucesión bilátera se denotará por $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 2.4.2 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Una **serie de Laurent centrada en** z_0 es una serie bilátera de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ donde los a_n son números complejos, que llamamos **coeficientes de la serie**.

Sea f holomorfa en $D^*(z_0; r)$ con una singularidad aislada en z_0. Entonces f puede representarse como serie de Laurent centrada en z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n.$$

- Diremos que f tiene una singularidad **evitable** en z_0 si $a_n = 0$ para cada índice negativo de n.

Ejemplo:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

- Diremos que f tiene una singularidad de tipo **polo** en z_0 si $a_n \neq 0$ un número finito de índices negativos; es decir, si existe m tal que $a_{-m} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \ \forall n > m$.
  Ejemplo:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, \pi^{2n+1}\, (z-1)^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

- Diremos que f tiene una singularidad **esencial** en z_0 si $a_n \neq 0$ para un número infinito de índices negativos.
  Ejemplo:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}.$$

2.5. Teorema de Extensión de Riemann

Teorema 2.5.1 Dada una función f con una singularidad aislada en z_0. La singularidad es de tipo evitable si y sólo si f está acotada en un disco reducido de centro z_0.

Demostración. Supongamos primero que f está acotada en el disco $D^* = D^*(z_0; r)$, tal que $|f(z)| \leqslant m$ para cada $z \in D^*$. Tomando r suficientemente pequeño, asumimos que f es holomorfa en D^*. El coeficiente a_n de la expansión de la serie de Laurent de f en D^* viene dado por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=s} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

donde s satisface $0 < s < r$. Los procedimientos de la estimación estándar nos llevan a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=s} \frac{|f(z)|\, |dz|}{|z-z_0|^{n+1}} \leqslant \frac{m}{s^n}.$$

Cuando $n < 0$, podemos hacer $s \to 0$ y concluimos que $|a_n| = 0$. Por tanto, $a_n = 0$ para cada valor negativo de n, que es justo lo que ha de cumplir f para que la singularidad en z_0 sea evitable.

Supongamos ahora que la singularidad de f en z_0 es de tipo evitable. Podemos suponer que el valor $f(z_o)$ está definido para que f sea diferenciable en z_0. Naturalmente, debe cumplirse $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} |f(z)|$. Podemos elegir $r > 0$ que nos asegure $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$ para cada z en el disco D^*. Luego esto prueba que f está acotada en el disco D^*.

$\diamond$

2.6. Funciones meromorfas

Definición 2.6.1 Se dice que una función f es **meromorfa** en un conjunto abierto Ω si existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que

1. A no tiene puntos de acumulación en Ω,
2. $f \in H(\Omega - A)$,
3. f posee un polo en cada punto de A.

Ya que no se excluye la posibilidad de que $A = \varnothing$, toda $f \in H(\Omega)$ es meromorfa en Ω.

Recordemos que en un entorno de un polo λ de orden γ la función $f(z)$ admite un desarrollo

$$f(z) = \frac{A_{-\gamma}}{(z-\lambda)^\gamma} + \frac{A_{-\gamma+1}}{(z-\lambda)^{\gamma-1}} + \ \dots\ + \frac{A_{-1}}{z-\lambda} + A_0 + A_1(z-\lambda) + \ \dots\ ,$$

donde la función racional

$$\frac{A_{-\gamma}}{(z-\lambda)^\gamma} + \ \dots\ + \frac{A_{-1}}{z-\lambda}$$

representa la **parte principal** de $f(z)$ en el punto λ.

Teorema 2.6.2 (Teorema de Mittag-Leffler.) Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos, distintos entre sí, que no decrecen en valor absoluto, convergente hacia el infinito, y sea $\{G_n(z)\}$ una sucesión de funciones racionales, cada una de las cuales es de la forma

$$G_n(z) = \frac{A^{(n)}_{-\gamma_n}}{(z-\lambda_n)^{\gamma_n}} \ + \ \dots \ + \ \frac{A^{(n)}_{-1}}{z-\lambda_n}$$

de modo que el punto λ_n es un polo de la función $G_n(z)$ de orden γ_n y ésta no posee más polos. Entonces existe una función meromorfa $f(z)$ que tiene polos en los puntos λ_n, y sólo en estos puntos, y cuyas partes principales en los puntos λ_n coinciden con las funciones dadas $G_n(z)$.

Demostración. La función buscada $f(z)$ la obtendremos en forma de la suma de una serie

$$f(z) = \sum_1^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)], \tag{2.1}$$

donde $P_k(z)$ son ciertos polinomios. Evidentemente, cualquiera que sea el polinomio $P_k(z)$, la suma $G_k(z) + P_k(z)$ es una función racional con un polo en el punto λ_k y cuya parte principal coincide con $G_k(z)$. En los puntos finitos del plano esta función no tiene otros polos.

Demostremos que se pueden elegir los polinomios $P_k(z)$ de tal modo, que en cualquier círculo $|z| < R$ sea uniformemente convergente la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)],$$

que resulta de la serie (2.1) al excluir unos cuantos términos primeros. Supongamos que $\sum_1^{\infty} \epsilon_k$ es una serie convergente de térmios positivos. Si $\lambda_1 = 0$, entonces supongamos que el polinomio correspondiente $P_1(z)$ es igual a cero. Supongamos ahora que $\lambda_k \neq 0$ $(k \geqslant 1)$. Como $G_k(z)$ es una función holomorfa en el círculo $|z| < |\lambda_k|$, su desarrollo de Taylor

$$G_k(z) = A_0^{(k)} \ + \ A_1^{(k)} z \ + \ ... \ + \ A_n^{(k)} z^n \ + \ ...$$

es convergente en el interior del círculo indicado y es uniformemente convergente en el círculo $|z| \leqslant \frac{1}{2}|\lambda_k|$. Elijamos $n = n_k$ de tal modo que en el último círculo se cumpla la desigualdad

$$|G_k(z) - [A_0^{(k)} \ + \ ... \ + \ A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}]| < \epsilon_k,$$

y hagamos :

$$P_k(z) = -A_0^{(k)} \ - \ ... \ - \ A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}.$$

Entonces

$$|G_k(z) + P_k(z)| < \epsilon_k, \quad si \quad |z| \leqslant \frac{1}{2}|\lambda_k|. \tag{2.2}$$

Sea $|z| < R$ un círculo arbitrario con el centro en el origen de coordenadas y sea $N(R) + 1$ el índice, comenzando desde el cual todos los puntos λ_k están situados fuera de un círculo de radio doblemente mayor:

$$|\lambda_k| > 2R \quad para \ \ k > N(R). \tag{2.3}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty}[G_k(z)+P_k(z)]; \tag{2.4}$$

todos los polos λ_k de sus términos satisfacen la condición (2.3), por lo cual $\frac{1}{2}|\lambda_k|$ es superior a R y, por consiguiente, el círculo $|z|<R$ está contenido en cada uno de los círculos $|z|<\frac{1}{2}|\lambda_k|$. Por esto, en virtud de (2.2), se puede afirmar que

$$|G_k(z)+P_k(z)|<\epsilon_k, \quad si \;\; |z|<R \;\; y \;\; k>N(R).$$

De aquí se deduce que la serie (2.4) es absoluta y uniformemente convergente en el círculo $|z|<R$ y, por consiguiente, representa en este círculo una fucnión holomorfa $\varphi_R(z)$. Por lo tanto, para la elección hecha de los polinomios $P_k(z)$, la suma de la serie (2.1) también será holomorfa en el círculo $|z|<R$. Esta puede escribirse de la forma

$$f(z)=\sum_{0}^{N(R)}[G_k(z)+P_k(z)]+\varphi_R(z),$$

de donde se deduce que los polos de la función $f(z)$ en el círculo $|z|<R$ coinciden con los términos de la sucesión $\{\lambda_k\}$ que están situados en el círculo; además, las partes principales de la función $f(z)$ en los puntos λ_k coinciden con $G_k(z)$.

Como esta conclusión es válida para cualquier círculo $|z|<R$, de aquí se deduce que la suma de la serie (2.1) es una función meromorfa que satisface todas las condiciones propuestas en el teorema.

$\diamond$

Teorema 2.6.3 Una función $F(z)$ es meromorfa en Ω si puede expresarse en forma del cociente de dos funciones uniformes y holomorfas en Ω, $G(z)$ y $H(z)$,

$$F(z)=\frac{G(z)}{H(z)}.$$

Demostración. Si $F(z)$ es meromorfa en Ω, entonces no puede tener aquí otros puntos singulares más que los polos. Si el conjunto de polos es finito y consta de los puntos $\nu_1,...,\nu_n$ de órdenes $\alpha_1,...\alpha_n$, entonces, formando el polinomio $H(z)=(z-\nu_1)^{\alpha_1}...(z-\nu_n)^{\alpha_n}$ y multiplicándolo por $F(z)$, resulta una función $G(z)=F(z)H(z)$ que es holomorfa en todos los puntos de Ω. Por lo tanto, $F(z)=\frac{G(z)}{H(z)}$ es cociente de dos funciones holomorfas en Ω. Si el conjunto de polos de la función $F(z)$ es infinito, entonces, éste es un conjunto numerable $\{\nu_n\}$ que no tiene puntos de acumulación en el interior de Ω. Sean $\gamma_1, ..., \gamma_n, ...$ los órdenes de los polos. Formemos entonces una función $H(z)$ holomorfa en Ω, que tenga en cada punto ν_n un cero de orden γ_n y que no tenga ningún cero distinto de los puntos ν_n. Entonces el producto $F(z)H(z)$ será una función $G(z)$ holomorfa en Ω, y de nuevo tendremo que $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ es cociente de dos funciones holomorfas en Ω.

$\diamond$

2.7. Teorema de Casorati-Weierstrass

A continuación, vamos a demostrar el *Teorema de Casorati-Weierstrass*, el cual es la aproximación elemental al *Teorema grande de Picard*.

Teorema 2.7.1 Si f es una función holomorfa en un disco $D^* = D^*(z_0; r)$ y tiene una singularidad esencial en el centro z_0, entonces $f(D^*)$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}\backslash f(D^*)$ no tiene puntos interiores.

Demostración. Lo vamos a demostrar por reducción al absurdo.
Supongamos que $\mathbb{C}\backslash f(D^*)$ tiene puntos interiores y deducimos que f sólo puede tener una singularidad de tipo evitable o polo en z_0, contrario a la hipótesis. Sea w_0 un punto interior de $\mathbb{C}\backslash f(D^*)$, y sea $s > 0$ tal que el disco $D(w_0; s)$ está contenido en $\mathbb{C}\backslash f(D^*)$. Luego se tiene $|f(z) - w_0| \geqslant s$ para cada $z \in D^*$. Se tiene que la función $g : D^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = [f(z) - w_0]^{-1}$$

es holomorfa y satisface $|g(z)| \leqslant s^{-1}$ en todo D^*. El *Teorema de extensión de Riemann* nos dice que la singularidad de g en z_0 es de tipo evitable. Además, como la función g no tiene ceros en D^*, la función inversa $1/g$ tiene una singularidad aislada en z_0. Dicha singularidad puede ser evitable o polo, dependiendo si $\lim_{z\to z_0} |g(z)|$ es cero o no. Esto asegura, que la singularidad en z_0 de $f = w_0 + (1/g)$ solo puede ser evitable o polo, no esencial, luego hemos llegado a una contradición. Por tanto, $\mathbb{C}\backslash f(D^*)$ no tiene puntos interiores.

$\diamond$

El *Teorema de Casorati-Weierstrass* afirma que la imagen de un disco $D^*(z_0; r)$, sin importar como de pequeño sea, bajo una función f con una singularidad aislada de tipo esencial en z_0, es denso en todo el plano complejo. Entre sus

consecuencias está:
Dado un número w_0 del plano complejo, existe una sucesión $\{z_n\} \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to w_0$.

Ejemplo. Una considerable mejora de este teorema, es el *Teorema de Picard*, que asegura que $\mathbb{C}\backslash f(D^*(z_0;r))$ contiene un punto a lo sumo. La función $f(z) = e^{1/z}$, la cual tiene una singularidad esencial en el origen demuestra que el valor excepcional permitido por el *Teorema de Picard* existe. La existencia de tal valor no implica siempre que sea cierto. Por ejemplo, la singularidad de $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ en el origen es también esencial y, en este caso, $f(D^*) = \mathbb{C}$ para cada $D^* = D^*(0;r)$. Esto puede ser probado considerando que la imagen de la banda

$$\mathscr{A} = \left\{z : |\mathbf{Re}\ z| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

mediante $g(z) = \operatorname{sen}(z)$ es todo $\mathbb{C}$. De hecho, los segmentos horizontales se transforman en $[-1, 1]$ o elipses de focos -1 y 1. Las rectas verticales se transforman en el eje imaginario $[1, \infty)$, $(-\infty, -1]$ o hipérbolas con focos en -1 y 1.
La imagen mediante $1/z$ de $D^*(0;r)$ contiene una banda de la forma

$$\tilde{\mathscr{A}} = \left\{z : \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \leqslant \mathbf{Re}\ z \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$$

y se cumple $\operatorname{sen}(\mathscr{A}) = \operatorname{sen}(\tilde{\mathscr{A}}) = \mathbb{C}$; con lo que $f(D^*) = \mathbb{C}$.

Capítulo 3

Teorema pequeño de Picard

3.1. Principio de Reflexión

Definición 3.1.1 Diremos que una función f es una **transformación conforme** si f es una función holomorfa y su derivada no se anula.

Teorema 3.1.2 Supongamos que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$, y

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$$

Entonces, o bien $Z(f) = \Omega$, o $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. En el último caso, a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega), \tag{3.1}$$

donde $g \in H(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$.

Demostración. Sea A el conjunto de todos los puntos de acumulación de $Z(f)$ en Ω. Como f es continua, $A \subset Z(f)$.
Fijemos $a \in Z(f)$, y tomemos $r > 0$ de modo que $D(a;r) \subset \Omega$. Tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)). \tag{3.2}$$

Existen ahora dos posibilidades. O bien todos los c_n son 0, en cuyo caso $D(a;r) \subset A$ y a es un punto interior de A, o existe un mínimo entero $m > 0$ tal que $c_m \neq 0$. En este caso, definimos

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & \text{si } z \in \Omega \backslash \{a\} \\ c_m & \text{si } z = a \end{cases}$$

Entonces se verifica (3.1). Es claro que $g \in H(\Omega \backslash \{a\})$. Pero (3.2) implica que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k \qquad (z \in D(a;r)).$$

En consecuencia, $g \in H(D(a;r))$, por lo que, en realidad, $g \in H(\Omega)$.
Más aún, $g(a) \neq 0$, y la continuidad de g muestra que existe un entorno de a en el que g no tiene ningún cero. Entonces a es un punto aislado de $Z(f)$ por (3.1).

Si $a \in A$, debe presentarse el primer caso. Por tanto, A es abierto. Si $B = \Omega - A$, de la definición de A como conjunto de puntos de acumulación se deduce que B es abierto. Entonces Ω es la unión de los conjuntos abiertos disjuntos A y B. Como Ω es conexo, tenemos que o bien $A = \Omega$, en cuyo caso $Z(f) = \Omega$, o $A = \varnothing$.

$\diamond$

Definición 3.1.3 Decimos que una función continua u en un conjunto abierto Ω tiene la **propiedad del valor medio** si a todo $z \in \Omega$ le corresponde una sucesión $\{r_n\}$ tal que $r_n > 0$, $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it})dt \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Teorema 3.1.4 Si una función continua u tiene la propiedad del valor medio en un conjunto abierto Ω, u es armónica en Ω.

Demostración La demostración viene detallada en la página 227 del libro [1].

Teorema 3.1.5 (Principio de reflexión de Schwarz.) Supongamos que L es un segmento del eje real, Ω^+ es una región de Π^+, con Π^+ el semiplano superior abierto, y que todo $t \in L$ es el centro de un disco abierto D_t, tal que $\Pi^+ \cap D_t$ está en Ω^+. Sea Ω^- la reflexión de Ω^+:

$$\Omega^- = \{z : \overline{z} \in \Omega^+\}$$

Supongamos que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω^+, y que

$$\lim_{n\to\infty} v(z_n) = 0 \tag{3.3}$$

para toda sucesión $\{z_n\}$ en Ω^+ que converja a un punto de L.
Entonces existe una función F, holomorfa en $\Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$, tal que $F(z) = f(z)$ en Ω^+ y tal que F satisface la relación

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \qquad (z \in \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-).$$

Demostración. Pongamos $\Omega = \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$. Extendemos v a Ω definiendo $v(z) = 0$ para $z \in L$ y $v(z) = -v(\overline{z})$ para $z \in \Omega^-$. Como v es continua y tiene la propiedad del valor medio en Ω, tenemos que v es armónica por el **Teorema 3.1.4**.
En consecuencia, v es localmente la parte imaginaria de una función holomorfa. Esto significa que a cada uno de los discos D_t le corresponde una $f_t \in H(D_t)$ tal que $\mathbf{Im} f_t = v$. Cada f_t está determinada por v salvo una constante aditiva real. Si esta constante se elige de tal forma que $f_t(z) = f(z)$ para algún $z \in D_t \cap \Pi^+$, se verificará lo mismo para todo $z \in D_t \cap \Pi^+$, porque $f - f_t$ es constante en la región $D_t \cap \Pi^+$. Suponemos que las funciones f_t están ajustadas así.
El desarrollo de f_t en serie de potencias de $z - t$ tiene sólo coeficientes reales, puesto que $v = 0$ en L, de modo que todas las derivadas de f_t son reales en t. Se tiene que

$$f_t(\overline{z}) = \overline{f_t(z)} \qquad (z \in D_t).$$

Por otro lado, supongamos que $D_s \cap D_t \neq \varnothing$. Entonces $f_t = f = f_s$ en $D_t \cap D_s \cap \Pi^+$; y como $D_t \cap D_s$ es conexo, el **Teorema 3.1.2** muestra que

$$f_t(z) = f_s(z) \qquad (z \in D_t \cap D_s).$$

Por tanto, es consistente definir

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ f_t(z) & \text{si } z \in D_t \\ \overline{f_t(\overline{z})} & \text{si } z \in \Omega^- \end{cases}$$

y queda por demostrar que F es holomorfa en Ω^-. Si $D(a;r) \subset \Omega^-$, entonces $D(\overline{a};r) \subset \Omega^+$, por lo que para todo $z \in D(a;r)$ tenemos

$$f(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\overline{z} - \overline{a})^n.$$

En consecuencia,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}(z - a)^n \qquad (z \in D(a;r)),$$

lo que prueba el enunciado del teorema.

◇

3.2. Prolongación a lo largo de curvas

Definición 3.2.1 Un **elemento de función** es un par ordenado (f, D), donde D es un disco circular abierto y $f \in H(D)$. Dos elementos de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son prolongaciones directas uno del otro si se verifican dos condiciones:

- $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$.
- $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$.

En este caso escribiremos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1). \tag{3.4}$$

Una **cadena** es una sucesión finita de discos $\mathscr{C}$, por ejemplo $\mathscr{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$, tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \varnothing$ para $i = 1, ..., n$.

Si se da (f_0, D_0) y existen elementos (f_i, D_i) tales que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ para $i = 1, ..., n$, entonces (f_n, D_n) se llama **prolongación analítica** de (f_0, D_0) a lo largo de $\mathscr{C}$. Notemos que f_n está determinada de manera única por f_0 y por $\mathscr{C}$ (si existe). Para verlo, supongamos que se verifica (3.4), y supongamos que se verifica (3.4) también con g_1 en lugar de f_1. Entonces $g_1 = f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$; y como D_1 es conexo, tenemos $g_1 = f_1$ en D_1. La unicidad de f_n se deduce ahora por inducción sobre el número de términos de $\mathscr{C}$.

Si (f_n, D_n) es la prolongación de (f_0, D_0) a lo largo de $\mathscr{C}$, y si $D_n \cap D_0 \neq \varnothing$, no es necesariamente cierto que $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$; en otras palabras, la relación $\sim$ no es transitiva.

Ejemplo. Tomamos, en primer lugar, el disco $D_1 = D(1; 1)$ y el logaritmo principal $\log_p(z)$ cuyo $\arg_p(z)$ está en $(-\pi, \pi)$; en segundo lugar, el disco $D_2 = D(i; 1)$ y el logaritmo $\log_{3\pi/2}(z)$ y cuyo argumento $\arg_{3\pi/2}(z)$ está en $(-\pi/2, 3\pi/2)$;a continuación, el disco $D_3 = D(-1; 1)$ y el logaritmo $\log_{2\pi}(z)$ cuyo $\arg_{2\pi}(z)$ está en $(0, 2\pi)$; y por último, el disco $D_4 = D(-i; 1)$ con logaritmo $\log_{5\pi/2}(z)$ y cuyo $\arg_{5\pi/2}$ está en $(\pi/2, 5\pi/2)$.
Entonces, el argumento del disco D_1 está ahora en el intervalo $(\pi, 3\pi)$.

Definición 3.2.2 Una cadena $\mathscr{C} = \{D_0, ..., D_n\}$ se dice que **recubre** una curva γ con $[0, 1]$ como intervalo paramétrico si existen números $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$, tales que $\gamma(0)$ es el centro de D_0, $\gamma(1)$ es el centro de D_n, y

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i, \qquad (i = 0, ..., n-1).$$

Si (f_0, D_0) puede prolongarse a lo largo de esta $\mathscr{C}$ hasta (f_n, D_n), llamamos a (f_n, D_n) una **prolongación analítica** de (f_0, D_0) a lo largo de γ; se dice que (f_0, D_0) admite una prolongación analítica a lo largo de γ.

Definición 3.2.3 Una región Ω es **simplemente conexo** si $\mathbb{C}^\infty \backslash \Omega$ es conexo, donde $\mathbb{C}^\infty$ es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ejemplo. Un ejemplo de la definición anterior es que sea $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, Ω es conexo pero no es simplemente conexo.

Teorema 3.2.4 Sea Ω una región del plano complejo. Diremos que Ω es simplemente conexo si y sólo si cada función que es holomorfa en Ω posee una primitiva en esta región.

Demostración. Supongamos primero que Ω es simplemente conexo y que la función f es holomorfa en Ω. Por el *Teorema de Cauchy*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

con γ un camino cerrado en Ω, homológico a cero en Ω. Luego f tiene una primitiva en Ω.
Supongamos ahora que cada función que es holomorfa en Ω tiene primitiva ahí. Sea γ un camino cerrado arbitrario en Ω. Afirmamos que γ es homológico a cero en la región. Para ver esto, sea z un punto cualquiera de $\mathbb{C}\backslash\Omega$. La función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida como $f(\nu) = (\nu - z)^{-1}$ es holomorfa. Como estamos suponiendo que f tiene primitiva, tenemos

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\nu}{\nu - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\nu)d\nu = 0,$$

necesario para que γ sea homológico a cero en Ω. Luego Ω es simplemente conexo.

$\diamond$

Teorema 3.2.5 Sea Ω una región del plano complejo. Diremos que Ω es simplemente conexo si y sólo si para cada función f que es holomorfa y no tiene ceros en Ω existe una rama del $\log(z)$ en esta región.

Demostración. Supongamos primero que Ω es simplemente conexo y que f es holomorfa en Ω y no tiene ceros ahí. Por el *Teorema de Cauchy* tenemos

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

para cada caminos cerrado por partes γ en Ω. Luego existe una rama del $\log f(z)$ en Ω.
Consideremos ahora un punto arbitrario $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ y asociado a él la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida como $f(\nu) = \nu - z$. Como f es holomorfa y no tiene ceros

en Ω, nuestra hipótesis nos dice que existen ramas del logaritmo de f en Ω. Elegimos una y la llamamos g. Tenemos entonces

$$g'(\nu) = (\nu - z)^{-1}$$

en Ω, con la consecuancia

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\nu}{\nu - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g'(\nu) d\nu = 0$$

con γ un camino cerrado por partes en Ω. Como esto es cierto para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, cada trozo de γ es homólogo a cero en Ω, i.e., Ω es simplemente conexo.

$\diamond$

Proposición 3.2.6 Supongamos que $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ y $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$. Entonces $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$.

Demostración. Por hipótesis, $f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$ y $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$. Por tanto, $f_0 = f_2$ en el conjunto abierto no vacío $D_0 \cap D_1 \cap D_2$. Como f_0 y f_2 son holomorfas en $D_0 \cap D_2$ y $D_0 \cap D_2$ es conexo, se deduce que $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_2$.

$\diamond$

Teorema 3.2.7 Si (f, D) es un elemento de función y si γ es una curva que comienza en el centro de D, entonces (f, D) admite a lo sumo una prolongación analítica a lo largo de γ.

He aquí un enunciado más explícito de lo que afirma el teorema: Si γ se recubre por cadenas $\mathscr{C}_1 = \{A_0, A_1, ..., A_m\}$ y $\mathscr{C}_2 = \{B_0, B_1, ..., B_n\}$, donde $A_0 = B_0 = D$, si (f, D) puede prolongarse analíticamente a o largo de $\mathscr{C}_1$ hasta un elemento de función (g_m, A_m), y si (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de $\mathscr{C}_2$ hasta (h_n, B_n), entonces $g_m = h_n$ en $A_m \cap B_n$.
Como A_m y B_n son, por hipótesis, discos con el mismo centro $\gamma(1)$, se deduce que g_m y h_n poseen el mismo desarrollo en potencias de $z - \gamma(1)$, y podemos remplazar A_m y B_n por el que sea más grande de los dos. Con este convenio, la conclusión es que $g_m = h_n$.

Demostración. Sean $\mathscr{C}_1 = \{A_0, ..., A_m\}$ y $\mathscr{C}_2 = \{B_0, ..., B_n\}$ dos cadenas con $A_0 = B_0 = D$. Existen números

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_m < s_{m+1} = 1$$

y $0 = \sigma_0 < ... < \sigma_n < \sigma_{n+1} = 1$ tales que

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \quad \gamma([\sigma_i, \sigma_{j+1}]) \subset B_j, \quad (0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n).$$

Existen elementos de función $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ y $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$, para $0 \leqslant i \leqslant m-1$ y $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Aquí $g_0 = h_0 = f$.
Pretendemos probar que si $0 \leqslant i \leqslant m$ y $0 \leqslant j \leqslant n$, y si $[s_i, s_{i+1}]$ corta $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, entonces $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.
Supongamos que existen pares (i, j) para los que esto es falso. Entre ellos existe uno para el que $i+j$ es el mínimo. Es claro que entonces $i+j > 0$. Supongamos $s_i \geqslant \sigma_j$. Entonces $i \geqslant 1$, y como $[s_i, s_{i+1}]$ corta $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, vemos que

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j.$$

La minimalidad de $i+j$ muestra que $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$; y como $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$, la proposición anterior implica que $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. Esto contradice nuestra hipótesis. La posibilidad $s_i \leqslant \sigma_j$ se excluye de la misma manera. Por tanto, llegamos al resultado pretendido.

$\diamond$

Definición 3.2.8 Supongamos que α y β son puntos en un espacio topológico X y que φ es una aplicación continua del cuadrado unidad $I^2 = I \times I$ en X tal que $\varphi(0, t) = \alpha$ y $\varphi(1, t) = \beta$ para todo $t \in I$. Las curvas γ_t definidas mediante

$$\gamma_t(s) = \varphi(s, t) \quad (s \in I, t \in I)$$

se dice entonces que forman una **familia uniparamétrica** $\{\gamma_t\}$ de curvas de α a β en X.

Teorema 3.2.9 Supongamos que $\{\gamma_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ es una familia uniparamétrica de α a β en el plano, que D es un disco con centro en α, y que el elemento de función (f, D) admite una prolongación analítica a lo largo de cada γ_t, hasta un elemento (g_t, D_t). Entonces $g_1 = g_0$.

Demostración. Fijemos $t \in I$. Existe una cadena $\mathscr{C} = \{A_0, ..., A_n\}$ que recubre γ_t, con $A_0 = D$, tal que (g_t, D_t) se obtiene por prolongación de (f, D) a lo largo de $\mathscr{C}$. Existen números $0 = s_0 < ... < s_n = 1$ tales que

$$E_i = \gamma_i([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \quad (i = 0, ..., n-1).$$

Existe un $\epsilon > 0$ menor que la distancia de cualquiera de los conjuntos compactos E_i al complementario del correspondiente disco abierto A_i. La continuidad uniforme de φ en I^2 muestra que existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \epsilon \quad si \quad s \in I, u \in I, |u - t| < \delta. \tag{3.5}$$

Supongamos que u satisface estas condiciones. Entonces (3.5) muestra que $\mathscr{C}$ recubre γ_u, y en consecuencia el teorema anterior muestra que tanto g_t como g_u se obtienen por prolongación de (f, D) a lo largo de la misma cadena. Por tanto, $g_t = g_u$.
Luego, cada $t \in I$ está recubierto por un segmento J_t tal que $g_u = g_t$ para todo $u \in I \cap J_t$. Como I es compacto, I puede recubrirse por un número finito de J_t; y como I es conexo, vemos que en un número finito de pasos $g_1 = g_0$.

◇

Definición 3.2.10 Supongamos que γ_0 y γ_1 son curvas cerradas en un espacio topológico X, ambas con $I = [0, 1]$ como intervalo del parámetro. Decimos que γ_0 y γ_1 son **homotópicas** en X si existe una aplicación continua H del cuadrado unidad $I^2 = I \times I$ en X tal que

$$H(s, 0) = \gamma_0(s), \quad H(s, 1) = \gamma_1(s), \quad H(0, t) = H(1, t)$$

para todo $s \in I$ y $t \in I$.
Si X es conexo y si toda curva cerrada en X es homotópica a un punto, X se dice **simplemente conexo**.

Teorema 3.2.11 Supongamos que Γ_0 y Γ_1 son curvas en un espacio topológico X, con un punto inicial común α y un punto final común β. Si X es simplemente conexo, entonces existe una familia uniparamétrica $\{\gamma_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ de curvas α a β en X, tal que $\gamma_0 = \Gamma_0$ y $\gamma_1 = \Gamma_1$.

Demostración. Sea $[0, \pi]$ el intervalo del parámetro de Γ_0 y Γ_1. Entonces

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \Gamma_0(s) & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant \pi \\ \Gamma_1(2\pi - s) & \text{si } \pi \leqslant s \leqslant 2\pi \end{cases}$$

define una curva cerrada en X. Como X es simplemente conexo, Γ es homotópica a un punto. En consecuencia existe una función continua $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to X$ tal que

$$H(s, 0) = \Gamma(s), \quad H(s, 1) = c \in X, \quad H(0, t) = H(2\pi, t). \tag{3.6}$$

Si $\Phi : \overline{U} \to X$ se define mediante

$$\Phi(re^{i\theta}) = H(\theta, 1 - r) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

(3.6) implica que Φ es continua. Pongamos

$$\gamma_t(\theta) = \Phi[(1 - t)e^{i\theta} + te^{-i\theta}] \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Como $\Phi(e^{i\theta}) = H(\theta, 0) = \Gamma(\theta)$, se deduce que

$$\gamma_t(0) = \Phi(1) = \Gamma(0) = \alpha \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$\gamma_t(\pi) = \Phi(-1) = \Gamma(\pi) = \beta \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$\gamma_0(\theta) = \Phi(e^{i\theta}) = \Gamma(\theta) = \Gamma_0(\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi),$$

y

$$\gamma_1(\theta) = \Phi(e^{-i\theta}) = \Phi(e^{i(2\pi-\theta)}) = \Gamma(2\pi - \theta) = \Gamma_1(\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

◇

3.3. Teorema de monodromía

Teorema 3.3.1 Supongamos que Ω es una región simplemente conexa, que (f, D) es un elemento de función, $D \subset \Omega$, y que (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de toda curva de Ω que comience en el centro de D. Entonces existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.

Demostración. Sean Γ_0 y Γ_1 dos curvas en Ω desde el centro α de D hasta algún punto $\beta \in \Omega$. Se deduce de la sección anterior que las prolongaciones analíticas de (f, D) a lo largo de Γ_0 y Γ_1 conducen al mismo elemento (g_β, D_β), donde D_β es un disco con centro en β. Si D_{β_1} corta a D_β, entonces $(g_{\beta_1}, D_{\beta_1})$ puede obtenerse prolongando en primer lugar (f, D) hasta β, y luego a lo largo de la línea recta que une β y β_1. Esto muestra que $g_{\beta_1} = g_\beta$ en $D_{\beta_1} \cap D_\beta$.
La definición

$$g(z) = g_\beta(z) \qquad (z \in D_\beta)$$

es en consecuencia consistente y proporciona la extensión holomorfa de f deseada.

◇

Observación. Sea Ω una región plana, fijemos $w \notin \Omega$, y sea D un disco en Ω. Como D es simplemente conexo, existe una $f \in H(D)$ tal que $exp[f(z)] = z - w$. Notemos que $f'(z) = (z - w)^{-1}$ en D, y que esta función es holomorfa en todo Ω. Esto implica que (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de todo camino γ en Ω que comience en el centro α de D : Si γ va de α a β, si

$$D_\beta = D(\beta; r) \subset \Omega,$$

si

$$\Gamma_z = \gamma + [\beta, z] \quad (z \in D_\beta),$$

y si

$$g_\beta(z) = \int_{\Gamma_z} (\nu - w)^{-1} d\nu + f(\alpha) \quad (z \in D_\beta)$$

entonces (g_β, D_β) es la prolongación de (f, D) a lo largo de γ.

Notemos que $g'_\beta(z) = (z - w)^{-1}$ en D_β.

Supongamos ahora que existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ en D. Entonces $g'(z) = (z - w)^{-1}$ para todo $z \in \Omega$. Si Γ es un camino cerrado en Ω, se deduce que

$$\mathbf{Ind}_\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g'(z) dz = 0,$$

donde $\mathbf{Ind}_\Gamma(w)$ es el índice de w con respecto a Γ.

Concluimos que el teorema de monodromía no se verifica en ninguna región plana que no sea simplemente conexa.

3.4. Función modular

Definición 3.4.1 Si a, b, c y d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$, la aplicación

$$z \to \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.7}$$

se llama una **transformación bilineal**. Es conveniente considerar (3.7) como una aplicación de $\mathbb{C}^\infty$ en $\mathbb{C}^\infty$, con los convenios obvios referentes al punto ∞. Por ejemplo, $-d/c$ se transforma en ∞ y ∞ se transforma en a/c, si $c \neq 0$.

Es entonces fácil de ver que cada transformación bilineal es una aplicación uno a uno de $\mathbb{C}^\infty$ sobre $\mathbb{C}^\infty$. Además, cada una de ellas se obtiene como composición de transformaciones de los tipos siguientes:

1. Traslaciones : $z \to z + b$.

2. Rotaciones: $z \to az$, $|a| = 1$.

3. Homotecias: $z \to rz$, $r > 0$.
4. Inversión: $z \to 1/z$.

Si $c = 0$ en (3.7), esto es obvio. Si $c \neq 0$, se deduce de la identidad

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d}, \quad \lambda = \frac{bc-ad}{c}.$$

Los tres primeros tipos transforman evidentemente rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. Esto no es cierto para 4). Pero si $\mathscr{F}$ es la familia que consiste en todas las rectas y circunferencias, $\mathscr{F}$ se conserva mediante 4), y obtenemos, pues, el importante resultado de que $\mathscr{F}$ se conserva frente a toda transformación bilineal.

La demostración de que $\mathscr{F}$ se conserva frente a inversiones es muy sencilla. De geometría analítica se tiene que todo elemento de $\mathscr{F}$ es el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{3.8}$$

donde α y γ son constantes reales y β es una constante compleja, tal que $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$. Si $\alpha \neq 0$, (3.8) define una circunferencia; $\alpha = 0$ proporciona líneas rectas. El cambio de z por $1/z$ transforma (3.8) en

$$\alpha + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma z\overline{z} = 0,$$

que es una ecuación del mismo tipo.
Supongamos que a, b y c son números complejos distintos. Podemos construir una transformación bilineal φ que transforma la terna ordenada $\{a, b, c\}$ en $\{0, 1, \infty\}$,

$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}. \tag{3.9}$$

Existe sólo una φ; ya que si $\varphi(a) = 0$, debemos tener $z - a$ en el numerador; si $\varphi(c) = \infty$, hemos de tener $z-c$ en el denominador; y si $\varphi(b) = 1$ los coeficientes han de ajustarse como en (3.9). Si a o b o c es ∞, pueden escribirse fórmulas análogas. Si se aplica a continuación de (3.9) la inversa de una transformación del mismo tipo, obtenemos el resultado siguiente:
Dadas dos ternas ordenadas cualesquiera $\{a, b, c\}$ y $\{a', b', c'\}$ en $\mathbb{C}^\infty$, existe una, y sólo una, transformación bilineal que transforma a en a', b en b' y c en c'.
Concluimos de esto que toda circunferencia puede transformarse en cualquier otra circunferencia mediante una transformación bilineal. De más interés es el

hecho de que toda circunferencia puede transformarse en cualquier línea recta, y por tanto, que todo disco abierto puede transformarse conformemente en cualquier semiplano abierto.

Podemos asociar a una transformación bilineal $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una matriz compleja no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Llamaremos φ_A a cada matriz A de los coeficientes de las transformaciones bilineales. La correspondencia $\varphi_A \to A$ tiene la característica de

$$\begin{cases} AB \to \varphi_A \circ \varphi_B, \\ A^{-1} \to \varphi_A^{-1}, \end{cases} \tag{3.10}$$

donde AB es la multiplicación de las matrices y A^{-1} es la inversa. Gracias a esto, podemos reducir los cálculos de las transformaciones bilineales a simples cálculos matriciales.

Definición 3.4.2 El **grupo modular** es el conjunto G de todas las transformaciones bilineales de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{3.11}$$

donde a, b, c y d son enteros y $ad - bc = 1$. La parte imaginaria de $\varphi(i)$ es $(c^2 + d^2)^{-1} > 0$. Estas transformaciones, transforman el eje real en sí mismo. Por tanto,

$$\varphi(\Pi^+) = \Pi^+ \qquad (\varphi \in G),$$

donde Π^+ es el semiplano superior abierto. Si φ viene dada por (3.11), entonces

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

de modo que $\varphi^{-1} \in G$. Además $\varphi \circ \psi \in G$ si $\varphi \in G$ y $\psi \in G$ utilizando las matrices complejas no singulares.

Por tanto, G es un grupo con la composición como operación de grupo.
Las transformaciones $z \to z+1$ y $z \to -1/z$ pertenecen a G; de hecho, generan G.

Una **función modular** es una función meromorfa f sobre Π^+ que es invariante con respecto a G o al menos con respecto a algún subgrupo no trivial Γ de G. Esto significa que $f \circ \varphi = f$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

Tomaremos como Γ el grupo generado por σ y τ, donde

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1}, \tau(z) = z + 2. \qquad (3.12)$$

Nuestro objetivo es la construcción de cierta función λ que sea invariante con respecto a Γ y que permita una demostración del *Teorema Pequeño de Picard.*

Sea Q el conjunto de todos los z que satisfacen las siguientes cuatro condiciones y donde $z = x + yi$:
$y > 0, \quad -1 \leqslant x < 1, \quad |2z+1| \geqslant 1, \quad |2z-1| > 1$
Q está acotado por las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ y está acotado por debajo por dos semicircunferencias de radio $1/2$, y con centros en $-1/2$ y $1/2$. Q contiene a aquellos de sus puntos frontera que están en la mitad izquierda de Π^+. Q no contiene ningún punto del eje real.
Pretendemos probar que Q es un dominio fundamental de Γ. Esto significa que son ciertos los enunciados 1) y 2) del teorema siguiente:

Teorema 3.4.3 Sean Γ y Q como antes:

1. Si φ_1 y $\varphi_2 \in \Gamma$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q) = \varnothing$.
2. $\cup_{\varphi\in\Gamma}\varphi(Q) = \Pi^+$.
3. Γ contiene a todas las transformaciones $\varphi \in G$ de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (3.13)$$

para las que a y d son enteros impares, y b y c son pares.

Demostración. Sea Γ_1 el conjunto de todas las $\varphi \in G$ descritas en 3). Por la correspondencia de matrices, tenemos que Γ_1 es un subgrupo de G. Como $\sigma \in \Gamma_1$ y $\tau \in \Gamma_1$ se deduce que $\Gamma \subset \Gamma_1$. Para demostrar que $\Gamma = \Gamma_1$, es decir, para demostrar 3), basta demostrar que se cumple el apartado 1) para Γ_1 y el apartado 2).
Necesitamos la relación

$$\textbf{Im } \varphi(z) = \frac{\textbf{Im } z}{|cz+d|^2} \qquad (3.14)$$

que es válida para toda $\varphi \in G$ dada por (3.13). La demostración de (3.14) se basa en la relación $ad - bc = 1$. Multiplicando por el conjugado, tenemos

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{c\overline{z}+d}{c\overline{z}+d} = \frac{ac|z|^2 + bc\overline{z} + adz + bd}{|cz+d|^2}$$

Luego tenemos

$$\mathbf{Im}\ \varphi(z) = \frac{\mathbf{Im}\ z}{|cz+d|^2} \qquad (3.14)$$

Demostremos ahora 1) cambiando Γ por Γ_1. Supongamos que φ_1 y $\varphi_2 \in \Gamma$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, y definamos $\varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi$. Si $z \in \varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q)$, entonces $\varphi_1^{-1}(z) \in Q \cap \varphi(Q)$. En consecuencia, basta demostrar que

$$Q \cap \varphi(Q) = \varnothing \qquad (3.15)$$

si $\varphi \in \Gamma_1$ y φ no es la transformación identidad. La demostración de (3.15) se desdobla en tres casos.

Si $c = 0$ en (3.13), entonces $ad = 1$, y como a y d son enteros, tenemos $a = d = \pm 1$. Por tanto, $\varphi(z) = z + 2n$ para algún entero $n \neq 0$, y la descripción de Q hace evidente que se verifica (3.15), por ser traslaciones horizontales. Si $c = 2d$, entonces $c = \pm 2$ y $d = \pm 1$. Por tanto, $\varphi(z) = \sigma(z) + 2m$, donde m es un entero. Como $\sigma(Q) \subset \overline{D}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, se verifica (3.15). Si $c \neq 0$ y $c \neq 2d$, afirmamos que $|cz + d| > 1$ para todo $z \in Q$. De otro modo, el disco $\overline{D}(-d/c; 1/|c|)$ cortaría a Q. La descripción de Q muestra que si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ es un número real y si $\overline{D}(\alpha; r)$ corta a Q, entonces al menos uno de los puntos $-1, 0, 1$ está en $D(\alpha; r)$. Por tanto, $|cw + d| < 1$, para w=-1 ó 0 ó 1. Pero para estos w, $cw + d$ es un entero impar cuyo absoluto no puede ser menor que 1. Por tanto, $|cw + d| > 1$, y se deduce de (3.14) que $\mathbf{Im}\ \varphi(z) < \mathbf{Im}\ z$ para todo $z \in Q$. Si fuera cierto para algún $z \in Q$ que $\varphi(z) \in Q$, el mismo razonamiento podría aplicarse a φ^{-1} y mostraría que

$$\mathbf{Im}\ z = \mathbf{Im}\ \varphi^{-1}(\varphi(z)) \leqslant \mathbf{Im}\ \varphi(z)$$

Esta contradicción verifica (3.15).

Por tanto, queda demostrado el apartado 1) cambiando Γ por Γ_1.

Para demostrar 2), sea Σ la unión de los conjuntos $\varphi(Q)$, para $\varphi \in \Gamma$. Es claro que $\Sigma \subset \Pi^+$. Además, Σ contiene a los conjuntos $\tau^n(Q)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, donde $\tau^n(z) = z + 2n$. Como σ transforma el círculo $|2z + 1| = 1$ sobre el círculo $|2z - 1| = 1$, vemos que Σ contiene a todo $z \in \Pi^+$ que satisface las desigualdades

$$|2z - (2m + 1)| \geqslant 1 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad (3.16)$$

Fijemos $w \in \Pi^+$. Como $\mathbf{Im}\ w > 0$, existe sólo un número finito de pares de enteros c y d tales que $|cw + d|$ sea inferior a cualquier cota dada, y podemos tomar $\varphi_0 \in \Gamma$ de modo que se minimice $|cw + d|$. Por (3.14), esto significa que

$$\mathbf{Im}\ \varphi(w) \leqslant \mathbf{Im}\ \varphi_0(w) \quad (\varphi \in \Gamma) \qquad (3.17)$$

Pongamos $z = \varphi_0(w)$. Entonces (3.17) resulta ser

$$\mathbf{Im}\ \varphi(z) \leqslant \mathbf{Im}\ z \quad (\varphi \in \Gamma) \qquad (3.18)$$

Apliquemos esto a $\varphi = \sigma\tau^{-n}$ y a $\varphi = \sigma^{-1}\tau^{-n}$. Puesto que

$$(\sigma\tau^{-n})(z) = \frac{z-2n}{2z-4n+1}, \quad (\sigma^{-1}\tau^{-n})(z) = \frac{z-2n}{-2z+4n+1},$$

se deduce de (3.14) y (3.18)que

$$|2z-4n+1| \geqslant 1, \quad |2z-4n-1| \geqslant 1, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Por tanto, z satisface (3.16), y por ello $z \in \Sigma$; y como $w = \varphi_0^{-1}(z)$ y $\varphi_0^{-1} \in \Gamma$, tenemos $w \in \Sigma$.

◇

Teorema 3.4.4 Si Ω es una región simplemente conexa acotada en el plano y si todo punto frontera de Ω es simple, entonces toda transformación conforme de Ω sobre U se extiende como homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{U}$.

Demostración. Supongamos que $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) = U$ y que f es uno a uno. Podemos extender f como aplicación de $\overline{\Omega}$ en $\overline{U}$ tal que $f(\alpha_n) \to f(z)$ si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión en Ω que converge a z. Si $\{z_n\}$ es una sucesión de $\overline{\Omega}$ que converge a z, existen puntos $\alpha_n \in \Omega$ tales que $|\alpha_n - z_n| < 1/n$ y $|f(\alpha_n) - f(z_n)| < 1/n$. Por tanto, $\alpha_n \to z$, con los que $f(\alpha_n) \to f(z)$, y esto muestra que $f(z_n) \to f(z)$.
Hemos demostrado, que nuestra extensión de f es continua en $\overline{\Omega}$. Además, $U \subset f(\overline{\Omega}) \subset \overline{U}$. La compacidad de $\overline{\Omega}$ implica que $f(\overline{\Omega})$ es compacto. Por tanto, $f(\overline{\Omega}) = \overline{U}$.
Como f es uno a uno en $\overline{\Omega}$ y como toda aplicación uno a uno continua de un conjunto compacto tiene una inversa continua, la demostración está completa.

◇

Definición 3.4.5 Sea D un disco circular abierto, supongamos que $f \in H(D)$, y sea β un punto frontera de D. Llamamos a β **punto regular** de f si existe un disco D_1 con centro en β y una función $g \in H(D_1)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in D \cap D_1$. Un punto frontera cualquiera de D que no sea un punto regular de f se llama un **punto singular** de f.

Definición 3.4.6 Sea U el disco unidad y sea T la circunferencia unidad. Si $f \in H(U)$ y si todo punto de T es un punto singular de f, entonces T se dice que es la **frontera natural** de f.
Esta definición se extiende a regiones que se transforman en el disco unidad.

El teorema siguiente resume algunas de las propiedades de la función modular λ mencionada anteriormente y que se utilizará en el *Teorema pequeño de Picard.*

Teorema 3.4.7 Si Γ y Q son como los descritos en (3.12), existe una funcion $\lambda \in H(\Pi^+)$ tal que

1. $\lambda \circ \varphi = \lambda$ para toda $\varphi \in \Gamma$.
2. λ es uno a uno en Q.
3. El recorrido Ω de λ, es la región que consiste en todos los números complejos diferentes del 0 y 1.
4. λ tiene el eje real como su frontera natural.

Demostración. Sea Q_0 la mitad derecha de Q. Más precisamente, Q_0 consiste en todos los $z \in \Pi^+$ tales que

$$0 < \mathbf{Re}\ z < 1, \quad |2z - 1| > 1.$$

Por el **Teorema 3.4.4** existe una función continua h en $\overline{Q_0}$ que es uno a uno en $\overline{Q_0}$ y holomorfa en Q_0, tal que $h(Q_0) = \Pi^+$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ y $h(\infty) = \infty$. El principio de reflexión muestra que la fórmula

$$h(-x + iy) = \overline{h(x + iy)} \tag{3.19}$$

extiende h como función continua sobre la adherencia $\overline{Q}$ de Q, la cual es una transformación conforme del interior de Q sobre el plano complejo menos el eje real no negativo. Vemos además que h es uno a uno en Q, que $h(Q)$ es la región Ω descrita en 3), que

$$h(-1 + iy) = h(1 + iy) = h(\tau(-1 + iy)) \quad (0 < y < \infty), \tag{3.20}$$

y que

$$h\Big(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta}\Big) = h\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)}\Big) = h\Big(\sigma\Big(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta}\Big)\Big) \quad (0 < \theta < \pi). \tag{3.21}$$

Como h es real en la frontera de Q, (3.20) y (3.21) se deducen de (3.19) y de las definiciones de τ y σ.
Definimos ahora la función λ:

$$\lambda(z) = h(\varphi^{-1}(z)) \quad (z \in \varphi(Q), \varphi \in \Gamma). \tag{3.22}$$

Por el **Teorema 3.4.3**, cada $z \in \Pi^+$ está en $\varphi(Q)$ para una, y sólo una, $\varphi \in \Gamma$.
Por tanto, (3.22) define $\lambda(z)$ para $z \in \Pi^+$, y vemos inmediatamente que λ posee las propiedades de 1) a 3), y que λ es holomorfa en el interior de cada

uno de los conjuntos $\varphi(Q)$.
Se deduce de (3.21) y (3.20) que λ es continua en

$$Q \cup \tau^{-1}(Q) \cup \sigma^{-1}(Q)$$

y, por tanto, en un conjunto abierto V que contiene a Q. Tenemos también que λ es holomorfa en V. Como Π^+ está recubierto por la unión de los conjuntos $\varphi(V)$, $\varphi \in \Gamma$, y como $\lambda \circ \varphi = \lambda$, concluimos que $\lambda \in H(\Pi^+)$.
Finalmente, el conjunto de todos los números $\varphi(0) = b/d$ es denso en el eje real. Si λ pudiera ser prolongada analíticamente hasta una región que contuviera propiamente a Π^+, los ceros de λ tendrían un punto límite en esta región, lo cual es imposible porque λ no es constante.

$\diamond$

3.5. Teorema pequeño de Picard

El *'Teorema pequeño de Picard'* afirma que toda función entera no constante alcanza todo valor, con una excepción posible. En esta sección vamos a exponer algunas proposiciones elementales que, para el caso de orden finito, establecen el llamado **Teorema pequeño de Picard.**

Existen varias aproximaciones al *Teorema de Picard* para ciertos tipos de funciones.

Definición 3.5.1 Supongamos que f es entera, que λ es un número positivo, y que se verifica la desigualdad

$$|f(z)| < exp\{|z|^\lambda\}$$

para $|z|$ suficientemente grande. Se dice entonces que f es de **orden finito**. El ínfimo de todos los λ para los que se verifica la condición es el **orden** de f.

Teorema 3.5.2 Si una función entera $f(z)$ no toma cierto valor α en ningún punto del plano, entonces $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \alpha + e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera.

Demostración. Como $f(z) - \alpha$ no se anula, $f(z) - \alpha \neq 0$. Por el **Teorema 3.2.4** existe una función $g(z)$ rama del logaritmo de forma que

$$f - \alpha = e^{g(z)}$$

lo que implica

$$f = \alpha + e^{g(z)}$$

$\diamond$

Teorema 3.5.3 Si una función entera $f(z)$, que no toma cierto valor α en ningún punto del plano, es de orden finito p, entonces p necesariamente es un número entero y $f(z)$ posee la forma

$$f(z) = \alpha + e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado p.

Demostración. Debido al teorema anterior, $f(z)$ puede expresarse de la forma

$$f(z) = \alpha + e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Pero, para cualquier $\epsilon > 0$ y $r > R(\epsilon)$, se cumple la desigualdad

$$|f(z)| < e^{r^{p+\frac{\epsilon}{2}}},$$

de donde

$$|e^{g(z)}| < |\alpha| + e^{r^{p+\frac{\epsilon}{2}}}.$$

Eligiendo $R'(\epsilon) \geqslant R(\epsilon)$ de modo que para $r > R'(\epsilon)$ sea

$$|\alpha| + e^{r^{p+\frac{\epsilon}{2}}} < e^{r^{p+\epsilon}},$$

y observando que $|e^{g(z)}| = e^{\mathbf{Re}[g(z)]}$, obtenemos:

$$e^{\mathbf{Re}[g(z)]} < e^{r^{p+\epsilon}} \quad para \quad r > R'(\epsilon).$$

Por consiguiente, para estos mismos valores de r

$$\mathbf{Re}[g(z)] < r^{p+\epsilon},$$

de donde $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a $[p+\epsilon]$.
Por otra parte, está claro que si $f(z)$ es una función de orden p, entonces $f(z) - \alpha = e^{P(z)}$ también es una función del mismo orden, y como el orden de la función $e^P(z)$ es igual al grado n del polinomio $P(z)$, resulta que $p = n$ es un número entero y $P(z)$ un polinomio de grado p.

$\diamond$

Teorema 3.5.4 Si una función entera $f(z)$ toma un valor α en un número finito de puntos $z_1, z_2, ..., z_m$ con los órdenes de multiplicidad $k_1, k_2, ..., k_m$, entonces $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \alpha + (z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera.

Demostración. Por las condiciones del teorema, la función $\frac{f(z)-\alpha}{(z-z_1)^{k_1}...(z-z_m)^{k_m}}$ es entera y no se anula en ningún punto del plano. De aquí que, ésta es de la forma $e^{g(z)}$, donde $g(z)$ es una función entera.
Por tanto,

$$\frac{f(z) - \alpha}{(z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m}} = e^{g(z)},$$

de donde

$$f(z) = \alpha + (z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m} e^{g(z)}.$$

$\diamond$

Teorema 3.5.5 Si respecto de una función entera $f(z)$ que satisface la condición del teorema precedente, se sabe que es orden finito p, entonces p tiene que ser un número entero y la función $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \alpha + (z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m} e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado p.

Demostración. Por el teorema anterior, $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \alpha + (z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Como

$$|e^{g(z)}| = e^{\mathbf{Re}[g(z)]} < \frac{|f(z)| + |\alpha|}{|z - z_1|^{k_1}...|z - z_m|^{k_m}} < |f(z)| + |\alpha|,$$

si $|z - z_1| > 1, ..., |z - z_m| > 1$ y además para todos los valores de r suficientemente grandes: $|f(z) + |\alpha| < e^{r^{p+\epsilon}}$, resulta

$$\mathbf{Re}[g(z)] < r^{p+\epsilon},$$

de donde $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a p.
Por otra parte, es evidente que si $f(z)$ es una función de orden p, entonces

$$\frac{f(z) - \alpha}{(z - z_1)^{k_1}...(z - z_m)^{k_m}} = e^{P(z)},$$

es una función del mismo orden. En efecto, ya se ha observado que

$$|e^{P(z)}| = |e^{g(z)}| < r^{p+\epsilon} \quad para \quad r > R(\epsilon),$$

y, por consiguiente, el orden de $e^{P(z)}$ no es superior a p. Pero éste no puede ser inferior a p, pues en caso contrario tendríamos para algún λ positivo que

$$|e^{P(z)}| < e^{r^{p-2\lambda}} \quad para \quad r > R'(\lambda)$$

y, por tanto,

$$|f(z)| < |\alpha| + e^{r^{p-2\lambda}}(r + |z_1|)^{k_1}...(r - |z_m|)^{k_m}$$

para $r > R'(\epsilon)$.
Es evidente que la razón de la magnitud que figura en el segundo miembro de la desigualdad $e^{r^{p-\lambda}}$ tiende a cero cuando $r \to \infty$. Por ello, para $r > R''(\lambda) > R'(\lambda)$ tendremos:

$$|f(z)| < e^{r^{p-\lambda}},$$

lo cual es incompatible con la hipótesis del teorema según la cual el orden de la función $f(z)$ es p.
Así, el orden de la función $e^{P(z)}$ también es igual a p y, por consiguiente, p es un número entero que coincide con el grado del polinomio $P(z)$.

$\diamond$

Teorema 3.5.6 (Teorema pequeño de Picard.) Si f es una función entera y si existen dos números complejos distintos α y β que no están en el recorido de f, f es constante.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$; si no, cambiamos f por $(f - \alpha)/(\beta - \alpha)$. Entonces f transforma el plano en la región Ω descrita en el **teorema 3.4.7**.

A cada disco $D_1 \subset \Omega$ le corresponde una región $V_1 \subset \Pi^+$ tal que λ es uno a uno en V_1 y $\lambda(V_1) = D_1$; cada una de estas V_1 corta como mucho a dos de los dominios $\varphi(Q)$. Para cada elección de V_1 existe una función $\psi_1 \in H(D_1)$ tal que $\psi_1(\lambda(z)) = z$ para todo $z \in V_1$.

Si D_2 es otro disco en Ω y si $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, podemos tomar un V_2 correspondiente de modo que $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Los elementos de función (ψ_1, D_1) y (ψ_2, D_2) serán entonces prolongaciones analíticas directas uno del otro. Notemos que $\psi_i(D_i) \subset \Pi^+$.

Como el recorrido de f está en Ω, existe un disco A_0 con centro en 0 tal que $f(A_0)$ está en un disco D_0 de Ω. Tomemos $\psi_0 \in H(D_0)$, como antes, pongamos $g(z) = \psi_0(f(z))$ para $z \in A_0$, y sea γ una curva cualquiera del plano que comienza en 0. El recorrido de $f \circ \gamma$ es un subconjunto compacto de Ω. Por tanto, γ puede ser recubierta por una cadena de discos, A_0,...,A_n, de modo que cada $f(A_i)$ esté en un disco D_i de Ω, y podemos tomar $\psi_i \in H(D_i)$ de modo que (ψ_i, D_i) sea una prolongación analítica directa de (ψ_{i-1}, D_{i-1}), para $i = 1, ..., n$. Esto proporciona una prolongación analítica directa del elemento de función (g, A_0) a lo largo de la cadena $\{A_0, ..., A_n\}$; notemos que $\psi_n \circ f$ tiene parte imaginaria positiva.

Como (g, A_0) puede prolongarse analíticamente a lo largo de toda la curva del plano y como el plano es simplemente conexo, el *Teorema de monodromía* implica que g puede extenderse como función entera. Además, el recorrido de g está en Π^+, por lo que $(g-i)/(g+i)$ está acotada, y, por tanto, es constante, por el *Teorema de Liouville.* Esto muestra que g es constante, y como ψ_0 es uno a uno en $f(A_0)$ y A_0 es un conjunto abierto no vacío, concluimos que f es constante.

$\diamond$

Teorema 3.5.7 Toda función meromorfa $F(z) \not\equiv$ constante toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos.

Demostración. Supongamos que para la función $F(z)$ existen tres valores a, b y c que ésta no toma. Si uno de ellos, por ejemplo c, es igual a ∞, entonces $F(z) \not\equiv$ constante es una función entera que no toma dos valores finitos a y b, lo cual es imposible. Así, pues, los números a, b y c son finitos. Formemos la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{F(z) - c};$$

ésta es una función meromorfa que no toma el valor ∞, por lo cual es entera y, además, $\Phi \not\equiv$ constante. Por otra parte, $\Phi(z)$ no toma dos valores finitos

$$\frac{1}{a-c} \quad y \quad \frac{1}{b-c}.$$

Resulta de nuevo una contradicción con el *Teorema pequeño de Picard*, de donde se deduce que el teorema es cierto.

$\diamond$

Ejemplo. Un ejemplo de función meromorfa con dos valores excepcionales es $\operatorname{tg} z$, cuyos valores excepcionales son i y $-i$.

$$f(z) = \operatorname{tg}(z) = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \frac{1}{i}\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t = e^{iz}.$$

Aquí, $S(t) = \frac{1}{i}\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $S(0) = i$, $S(\infty) = -i$ y $S(t)$ no toma los valores i y $-i$ cuando $t \neq 0$, $t \neq \infty$. Por lo tanto, $f(z)$ no toma los valores i y $-i$ para ningún valor de z.

Capítulo 4

Teorema grande de Picard.

4.1. Función modular elíptica

Ya hemos visto funciones modulares en el capítulo anterior. También se pueden construir en el marco de funciones elípticas. (ver [4])

En el disco abierto unidad U, consideremos una región Ω_0, la cual es el interior de un triángulo hiperbólico regular cuyos lados son arcos de circunferencia que cortan a $|z| = 1$ ortogonalmente y los vértices formando ángulo nulo. Hay una transformación, debido a Schwarz, del semiplano superior en Ω_0, y la inversa de dicha transformación la denotaremos por $\mu(z)$. Los tres arcos límites de Ω_0 son transformados por μ uno a uno continuamente en el eje real extendido, y podemos tomar dicha transformación de manera que los vértices sean transformados en 0, 1 e ∞ respectivamente. Vamos a extender μ a todo U.

Primero, reflejamos Ω_0 en U sobre cada uno de sus lados para obtener los dominios Ω_1, Ω_2 y Ω_3. Como $\mu(z)$ toma valores reales en los tres arcos límites de Ω_0, *el Principio de Reflexión de Schwarz* permite que $\mu(z)$ se extienda analíticamente a Ω_1, Ω_2 y Ω_3, transformando cada una de estas regiones analíticamente en $\mathbf{Im}(\tau) < 0$. Luego $\mu(z)$ es holomorfa en $\Omega' = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Los seis arcos límites de Ω' son ortogonales a $|z| = 1$, formando vértices de ángulo cero y μ es de nuevo real en estos arcos. Reflejando Ω_i, $i = 1, 2, 3$, a través de cada uno de sus lados correspondientes, se puede extender $\mu(z)$ a las seis nuevas regiones, cada una de las cuales se transforma analíticamente en el semiplano superior.

Continuando de esta forma, triangulamos el disco U entero. Además, $\mu(z)$ es holomorfa en U y toma todos los valores excepto 0, 1 e ∞. Para algún $\tau = \mu(z)$

en el semiplano superior, z estará en una de esas siete regiones triangulares. La acción de dos reflexiones consecutivas lleva $z \to z'$, con $\tau = \mu(z) = \mu(z')$. En otras palabras, $\mu(z)$ es invariante bajo un número par de reflexiones. La construcción es análoga a la del tema anterior pero en el disco unidad. La función $\mu(z)$ es conocida como la **función modular elíptica**.

La función inversa $\nu(w) = \mu^{-1}(w)$ toma múltiples valores, pero cada elemento de función puede ser prolongado analíticamente a lo largo de cualquier curva que no tome los valores 0, 1 e ∞.

4.2. Criterio fundamental de normalidad

Definición 4.2.1 Una familia $\mathscr{F}$ de funciones holomorfas en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es **normal** en Ω si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathscr{F}$ contiene, ya sea una subsucesión la cual converge uniformemente a una función $f \not\equiv \infty$ en cada conjunto compacto de Ω, o una subsucesión la cual converge uniformemente a ∞ en cada conjunto compacto.

Definición 4.2.2 Una familia de funciones $\mathscr{F}$ está localmente acotada en Ω si, para cada $z_0 \in \Omega$, hay una número positivo $M = M(z_0)$ y un entorno $D(z_0; r) \subseteq \Omega$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in D(z_0; r)$ y $f \in \mathscr{F}$.

Teorema 4.2.3 Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas convergen uniformemente en un conjunto compacto K a una función $f(\not\equiv \infty)$, entonces $\{f_n\}$ es equicontinua en K, y f es continua. Si $\{f_n\}$ es equicontinua y está localmente acotada en Ω, entonces podemos extraer una subsucesión de $\{f_n\}$ la cual converge localmente y uniformemente en Ω a una función f continua.

Teorema 4.2.4 (Teorema de Montel.) Si $\mathscr{F}$ es una familia de funciones holomorfas localmente acotadas en Ω, entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal en Ω.

Teorema 4.2.5 Sea una familia $\mathscr{F}$ de funciones holomorfas en una región Ω, la cual no toma los valores a y $b \in \mathbb{C}$. Entonces $\mathscr{F}$ es normal en Ω.

Demostración. Primero, podemos suponer que los valores a y b son 0 y 1, respectivamente, considerando la familia

$$\hat{\mathscr{F}} = \left\{ \hat{f}(z) = \frac{f(z) - a}{b - a} : f \in \mathscr{F} \right\},$$

que omite 0 y 1, y cuya normalidad es equivalente a la de $\mathscr{F}$. Además, como la normalidad es una propiedad local, podemos suponer Ω es el disco abierto $|z| < 1$.

Sea $\mu(\tau) = w$ la función modular elíptica, y sea $z_0 \in \Omega$. Para cualquier $f \in \mathscr{F}$, elegimos la rama holomorfa de $\nu(w) = \mu^{-1}(w)$, para la cual $\nu(f(z_0))$ es el valor principal. Empezando con este valor inicial, es posible definir unicamente $\nu(f(z))$ en un recinto pequeño de z_0. Luego $\nu(f(z))$ puede continuar siendo holomorfa en todo Ω ya que cada $f(z)$ es holomorfa en Ω y toma valores sólo en el dominio de $\nu(w)$. Esto nos da una función holomorfa definida por el *Teorema de Monodromía*, $\tilde{f}(z) = \nu(f(z))$, que satisface $|\tilde{f}(z)| < 1$ para $z \in \Omega$, $f \in \mathscr{F}$.
Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathscr{F}$, y sea $\alpha \in \mathbb{C}^\infty$ un punto de acumulación de la sucesión $\{f_n(z_0)\}$. Consideremos cuatro casos.

1. **Caso** $\alpha \neq 0, 1, \infty$.
   Sea $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ una subsucesión tal que $\{f_{n'}(z_0)\}$ converge a α cuando $n' \to \infty$. Luego la sucesión $\{\tilde{f}_{n'}\}$ tiene una subsucesión $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ que converge uniformemente a $F(z)$ en un subconjunto compacto de Ω por el *Teorema de Montel*, y $|F(z)| \leqslant 1$. Si se da la igualdad para algún $z \in \Omega$, tenemos que $F(z) \equiv e^{i\theta}$ para algún real θ, lo que lleva $|\tilde{f}_{n_k}(z)| \to 1$ cuando $k \to \infty$. Pero esto ocurre solo si $f_{n_k}(z) \to 0, 1$ 0 ∞, luego tenemos que $|F(z)| < 1$ en Ω.
   Tomamos ahora un subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$. Para alguna constante m, $|F(z)| \leqslant m < 1$ en K, y por la convergencia uniforme de $\tilde{f}_{n_k}$ a F en K, existe m' tal que $|\tilde{f}_{n_k}(z)| \leqslant m' < 1$, $z \in K$, para todo k suficientemente grande. Como la función modular $\mu(\tau)$ es holomorfa en U, está acotada en $|\tau| \leqslant m'$, digamos $|\mu(\tau)| \leqslant M$. Luego para todo k suficientemente grande y $z \in K$,
   $$|f_{n_k}(z)| = |\mu(\nu(f_{n_k}(z)))| \leqslant M,$$
   i.e., $\{f_{n_k}\}$ está uniformemente acotada en un subconjunto compacto de Ω. Consecuentemente, esta sucesión tiene una subsucesión la cual converge uniformemente a una función holomorfa en subconjuntos compactos de Ω.

2. **Caso** $\alpha = 1$. Sea $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ una subsucesión tal que $f_{n'}(z_0) \to 1$ cuando $n' \to \infty$, y definimos $g'_n(z) = \sqrt{f_{n'}(z)}$ una rama para la cual $\lim_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = -1$. Luego $g_{n'}$, $n' = 1, 2, 3, ...$, son holomorfas en Ω, omitiendo los valores 0 y 1, con -1 como punto límite en z_0. Por el caso (1), hay una subsucesión $\{g_{n_k}\} \subseteq \{g_{n'}\}$ la cual converge uniformemente en un subconjunto compacto de Ω a una función holomorfa , y se da $\{g_{n_k}^2\} = \{f_{n_k}\}$.

3. **Caso** $\alpha = 0$.
   De nuevo, tomamos una subsucesión $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ tal que $f_{n'}(z_0) \to 0$

cuando $n' \to \infty$ y definimos $g_{n'}(z) = 1 - f_{n'}(z)$, $n' = 1, 2, 3, ...$. Luego las funciones $g_{n'}(z)$ son holomorfas en Ω, omitiendo los valores 0 y 1, con $\lim_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = 1$. Así, $\{g_{n'}\}$ viene dado por el caso (2), y existe una subsucesión la cual converge uniformemente a una función holomorfa en un subconjunto compacto de Ω, e igualmente para $\{f_{n'}\}$.

4. **Caso** $\alpha = \infty$. Sea una subsucesión $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ para la cual $f_{n'}(z_0 \to \infty$ cuando $n' \to \infty$. Luego las funciones $g_{n'}(z) = 1/f_{n'}(z)$, $n' = 1, 2, 3, ...$, son holomorfas en Ω, omitiendo 0 y 1, con $\lim_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = 0$. Así, por el caso (3), hay una subsucesión $\{g_{n_k}\} \subseteq \{g_{n'}\}$ que converge uniformemente a una función holomorfa g en un compacto, con $g(z_0) = 0$. Como ninguno de los $g_{n'}$ son cero en Ω, tenemos que $g \equiv 0$ en Ω, y $f_{n_k} \to \infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

El teorema queda demostrado.

$\diamond$

Ejemplo. La familia $\{e^{nz} : n = 1, 2, 3...\}$ en $\mathbb{C}$ no es normal y muestra que el número de valores excepcionales no puede reducirse a uno sólo.

4.3. Teorema grande de Picard

Teorema 4.3.1 (Teorema grande de Picard.) Si $f(z)$ es holomorfa en un disco $D^* = D^*(z_0; R)$ y z_0 es una singularidad aislada de tipo esencial de $f(z)$, entonces $f(z)$ toma en D^* cualquier valor finito complejo, a excepción, posiblemente, de uno.

Demostración. Tomemos $D^* = \{0 < |z| < R\}$ y supongamos que hay dos valores finitos a y b que $f(z)$ no toma en D^*. Entonces, la familia de funciones $\mathscr{F}$ definida como

$$f_n(z) = f(\frac{z}{2^n}), \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

que son holomorfas en el anillo $\mathscr{A} : \frac{R}{2} < |z| < R$, y que no toma los valores a o b en $\mathscr{A}$.Como $\mathscr{F}$ es una familia normal en $\mathscr{A}$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ uniformemente convergente a $F(z)$ en el conjunto compacto $\{|z| = \rho : \frac{R}{2} < \rho < R\}$, donde $F(z)$ es o una función holomorfa o $\equiv \infty$ en $\mathscr{A}$. Si $F(z)$ es holomorfa, $F(z)$ está acotado en la circunferencia $|z| = \rho$ y, por consiguiente, las funciones $\{f_{n_k}\}$ están uniformemente acotadas en esta circunferencia.

Esto significa que

$$|f_{n_k}(z)| < M, \quad |z| = \rho \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Pero entonces

$$|f(z)| \leqslant M, \quad |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}} \qquad (k = 1, 2, ...)$$

esto es, $f(z)$ está acotado por una sucesión de círculos concéntricos que convergen a cero. Por el *Principio del módulo máximo*, $|f(z)| \leqslant M$ en la región entre cada dos de esos círculos.Como sonsecuencia,

$$|f(z)| \leqslant M, \qquad 0 < |z| < \frac{\rho}{2^{n_1}},$$

lo que contradice el hecho de que $f(z)$ no debería estar acotada en cualquier entorno de una singularidad esencial.
Si $F(z) \equiv \infty$, la sucesión de funciones holomorfas $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z)-a}$, converge uniformemente hacia cero en el interior de un subconjunto compacto de $\mathscr{A}$. De aquí, razonando igual que anteriormente, sacamos la conclusión de que la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ está acotada en un recinto $0 < |z| \leqslant \rho$, y así $f(z)$ tiene una singularidad evitable o polo en el origen, lo que lleva a una contradicción.

$\diamond$

Analizando la demostración del *Teorema grande de Picard*, se puede obtener una proposición más general. Sea $f_n(z) = f(\frac{z}{2^n})$, introduzcamos los anillos circulares

$$\Gamma'_0(\frac{R}{2^4} < |z| < R), \quad \Gamma'_1(\frac{R}{2^5} < |z| < \frac{R}{2}), \quad ... , \quad \Gamma'_n(\frac{R}{2^{n+4}} < |z| < \frac{R}{2^n}), \quad ... ,$$

que se interceptan unos con otros.
Demostremos que la familia de funciones $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal en el anillo Γ'_0. Supongamos lo contrario. Entonces existen subsucesiones de esta sucesión que son uniformemente convergentes en el interior de Γ'_0, en particular, en el anillo cerrado $\Gamma(\frac{R}{2^3} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2})$. La función límite $F(z)$ de cualquiera de las subsucesiones tiene que ser idénticamente infinita; suponiendo lo contrario estableceríamos, razonando igual que en la demostración del *Teorema grande de Picard*, que la función $f(z)$ está acotada en valor absoluto en un recinto de la forma $0 < |z| < \rho$, lo cual es imposible. Pero si cualquier subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ que converge uniformemente en Γ converge hacia el infinito, de aquí se deduce que toda la sucesión $\{f_n(z)\}$ uniformemente hacia el infinito en Γ. En caso contrario, tendrían que existir un número positivo N, una sucesión de puntos $\{z_k\}$, pertenecientes a Γ, y una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}$, tales que $|f_{n_k}(z_k)| \leqslant N$. Pero esta conclusión

contradice que la subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ tiene que contener dentro de sí otra subsucesión $\{f_{n'_k}(z)\}$ que converge uniformemente hacia ∞ en Γ.
Así, pues, de la hipótesis de que la sucesión $\{f_n(z)\}$ es una familia normal en Γ'_0, se deduce que $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia el infinito en Γ. Por ello, para un N arbitrariamente grande, en los puntos del anillo Γ se verifican las desigualdades $|f_n(z)| > N$, si n es suficientemente grande. En otras palabras,

$$\left|f\left(\frac{z}{2^n}\right)\right| > N \quad si \quad n \leqslant \nu(N) \;\; y \;\; z \in \Gamma.$$

Cuando z recorre el anillo

$$\Gamma\left(\frac{R}{2^3} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2}\right),$$

el punto $\frac{z}{2^n}$ recorre el anillo

$$\gamma_n\left(\frac{R}{2^{n+3}} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2^{n+1}}\right).$$

Los anillos γ_n $(n = \nu, \nu + 1, ...)$ se interceptan unos con otros cubriendo todo el recinto $0 < |z| < \frac{R}{2^{\nu+1}}$. Por consiguiente, en todos los puntos de este recinto se verifica la desigualdad

$$|f(z)| > N.$$

En otras palabras,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty,$$

lo cual, no obstante, es imposible, puesto que $z = 0$ es un punto singular esencial de la función $f(z)$.
Por consiguiente, hemos demostrado que la familia $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal en el anillo Γ'_0. De aquí se deduce que en este anillo existe al menos un punto δ tal, que en cualquier entorno del mismo, la familia $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal. En efecto, si todo punto del anillo Γ'_0 poseyese un entorno en el cual la familia $\{f_n(z)\}$ fuese normal, entonces esta familia sería también normal en Γ'_0.
Sea $|z - \delta| < \epsilon$ un entorno arbitrariamente pequeño del punto δ. Como la familia $\{f_n(z)\}$ no es normal en este entorno, las funciones de esta familia en su conjunto toman en el mismo todos los valores finitos, a excepción, posiblemente, de uno. Mejor dicho, para cualquier valor finito A, a excepción, posiblemente, de un valor A_0, existen funciones $f_{n_k}(z)$ de subíndices arbitrariamente grandes, que toman el valor A en cierto punto z_k perteneciente al entorno dado. Observando que

$$f_{n_k}(z) = f\left(\frac{z}{2^{n_k}}\right)$$

y designando $\frac{z_k}{2^{n_k}}$ mediante δ_k, obtenemos:

$$f(\delta_k) = A.$$

Está claro que la sucesión $\{\delta_k\}$ converge hacia el punto $z = 0$ y está contenida dentro del ángulo limitado por los rayos que parten del punto $z = 0$ y son tangentes a la circunferencia $|z - \delta| < \epsilon$. Como el punto δ está fijado y ϵ es arbitrariamente pequeño, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2 Para cada punto singular esencial z_0 de una función holomorfa $f(z)$, existe al menos un rayo que parte de este punto tal que en cualquier ángulo, simétrico respecto de dicho rayo, la función $f(z)$ toma cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno, en una sucesión infinita de puntos que converge hacia z_0.

Es obvio que este teorema es una precisión del *Teorema grande de Picard*. El *Teorema de Picard* no dice cómo están situados los $A - puntos$ de la función $f(z)$ en un entorno del punto singular esencial, mientras que el último teorema afirma que para cualquier A, a excepción, posiblemente, de uno, un conjunto infinito de $A - puntos$ se agrupa en las proximidades de cierto rayo (puede haber unos cuantos rayos e incluso un conjunto infinito).
El rayo (o los rayos) se llaman **rayos de Julia**, nombre del científico que los descubrió.

Teorema 4.3.3 Sea $f(z)$ una función trascendente entera. Entonces en el plano existen unos puntos, distintos del origen de coordenadas, tales que en cualquier entorno de los mismos la familia $\{f(2^n z)\}$ no es normal. El rayo que parte del origen de coordenadas y pasa por tal punto, posee la propiedad de que un ángulo de magnitud arbitrariamente pequeña, simétrico respecto de este rayo, contiene un conjunto infinito de $A - puntos$ de la función para cualquier valor finito A, a excepción, posiblemente, de uno.

Ejemplo. Consideremos la función e^z. Esta posee dos rayos de Julia, dirigidos por las partes positiva y negativa del eje imaginario. En efecto, si $A \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $e^z = A$ son:

$$z_k = \mathrm{LogA} = \log|\mathrm{A}| + \mathrm{i}\arg\mathrm{A} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}.$$

Supongamos, para precisar, que k es positivo. Como la tangente del ángulo formado por el vector z_k y la dirección positiva del eje imaginario es igual a

$$\frac{\log|A|}{\arg A + 2k\pi},$$

ésta tiende a cero cuando k crece indefinidamente. De aquí se deduce que los puntos z_k, comenzando desde uno de ellos en adelante, pertenecen a cualquier ángulo fijado que sea simétrico respecto de la parte positiva del eje imaginario. Para k negativos y para la parte negativa del eje imaginario se obtiene un resultado similar. Obsérvese que aquí todos los puntos del eje imaginario son tales, que en cualquiera de sus entornos la familia $\{e^{2^n z}\}$ no es normal. En efecto, en cada uno de ellos $|e^{2^n z}| = 1$, mientras que en los puntos que están situados en los semiplanos de la derecha y de la izquierda, la sucesión $\{e^{2^n z}\}$ converge hacia ∞ y 0, respectivamente. De aquí se deduce que para los puntos del eje imaginario no existe un entorno en el que la sucesión $\{e^{2^{n_k} z}\}$ sea uniformemente convergente.

Bibliografía

[1] **W. Rudin**, Análisis Real y Complejo, McGraw-Hill, Madrid, 1988.

[2] **A. I. Markushevich**, Teoría de las funciones analíticas, vol.I y II, Mir, Moscú, 1978.

[3] **B. P. Palka**, An introduction to complex function theory, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] **L. V. Ahlfors**, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1979.

[5] **J. L. Schif**, Normal families, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] **É. Picard**, Sur une propriété des fonctions entières, C. R. Acad. Sci., París, 1879.

[7] **P. Montel**, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, Ann. École Norm. Sup., 1912.