TRABAJO FIN DE GRADO

Soluciones débiles en mecánica de fluidos.

Presentado por:
Antonio Hidalgo Torné

Director:
FRANCISCO GANCEDO GARCÍA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático
Sevilla, Junio 2018

Índice general

Abstract

The main aim of this work is to prove theoretical results on partial differential equations from fluid mechanics. Particularly, the theoretical development is destined to prove the existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in two and three dimensions. The Navier-Stokes equations is a classical topic in the study of the dynamics of incompressible viscous fluids. Those equations present basic and important open questions such as regularity and finite time singularity formation of the solutions. It is a current area of mathematical research of fundamental interest in particular due to its physical relevance and broad applicability.

The first chapter introduces concepts of Functional Analysis that go beyond the scope of what is taught in the degree, and will be very useful in the development of this work. It establishes the main concepts and results related to weak convergence, needed to understand the concept of weak solution. The goal of the first section is to prove the weak compactness of bounded sets in a Hilbert space.

Next, we take on the evolution problem of second-order parabolic equations, which has as a representative example the Heat equation. We use variational formulation to prove the existence of weak solutions. For that, we analyze the properties of the terms of the equation. On these properties we will prove some results of continuity and compactness, and we will finally apply Galerkin method. Due to the good properties of the equation, the results are proven in an arbitrary finite dimension and the uniqueness of the solution is proven as well. The techniques used for the study of the equation are repeated in the Navier-Stokes case. This first chapter also serves for acquiring familiarity with the method.

The second chapter deals with the Navier-Stokes equation in the complete space of two and three dimensions with the same techniques as in the previous chapter. We will find greater difficulties due mainly to non-linearity. It begins by introducing the usual Hilbert spaces of fluid problems that incorporate incompressibility, and provides results that allow us to tackle the pressure of the equation, simplifying the problem. Next, we analyze in detail the non-linear term, finding a limitation in the dimension of the workspace. After introducing the variational formulation, compactness theorems which are necessary to treat the non-linear term are proven. Finally, the Galerkin method is applied again, and the existence of weak solutions in the cases of two and three

dimensions is proved. The uniqueness in the two-dimensional case is also tested. This problem was originally studied by Jean Leray, who proved in 1934 [11] the existence of weak solutions. For the three-dimensional case, it has recently been proven that there is no uniqueness of weak solutions[3].

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es probar resultados teóricos de ecuaciones en derivadas parciales que provienen de la mecánica de fluidos. En particular, el desarrollo teórico está enfocado a probar la existencia de soluciones a la ecuación de Navier-Stokes en dos y tres dimensiones. Las ecuaciones de Navier-Stokes son clásicas en el estudio de la dinámica de fluidos viscosos incompresibles. Estas ecuaciones presentan en la actualidad preguntas abiertas básicas e importantes como la regularidad de soluciones y la posible formación de singularidades en tiempo finito. Las ecuaciones de Navier-Stokes se enmarcan en un área actual de investigación matemática de interés fundamental, en particular debido a su relevancia física y una amplia aplicabilidad.

El primer capítulo introduce conceptos de Análisis Funcional que van más allá de los conocimientos que se imparten en el grado y serán de gran utilidad en el desarrollo del trabajo. En particular, establece los conceptos y resultados fundamentales relacionados con la convergencia débil necesarios para entender el concepto de solución débil. El objetivo final de la primera sección es demostrar la compacidad débil de conjuntos acotados en un espacio de Hilbert.

A continuación se aborda el problema de evolución de ecuaciones parabólicas de segundo orden, que tiene como caso representativo la Ecuación del Calor. Para probar la existencia de soluciones débiles se hace uso de la formulación variacional, para lo cual se analizan inicialmente las propiedades de los distintos términos de la ecuación. Sobre estas propiedades probaremos algunos resultados de compacidad y continuidad, y aplicaremos finalmente el método de Galerkin. Debido a la las buenas propiedades de la ecuación, los resultados se prueban en dimensión finita arbitraria y se prueba además la unicidad de solución. Las técnicas utilizadas para el estudio de la ecuación se repiten en el caso de Navier-Stokes, y este primer caso sirve también para familiarizarse con el método.

En el segundo capítulo se aborda la ecuación de Navier-Stokes en el espacio completo de dos y tres dimensiones con las mismas técnicas que en el capítulo previo, pero afrontando mayores dificultades debidas principalmente a la no linealidad. Se comienza introduciendo los espacios de Hilbert habituales de problemas de fluidos que incorporan la incompresibilidad, y se introducen resultados que nos permiten abordar la presión de la ecuación, simplificando el problema. A continuación se analiza en detalle el término no lineal, encontrando una limitación en la dimensión del espacio de trabajo. Tras introducir la formulación variacional se prueban teoremas de compacidad necesarios para tratar el término no lineal. Por último se aplica de nuevo el método de Galerkin, y se consigue probar la existencia de soluciones débiles en los casos de dos y tres dimensiones. Se prueba también la unicidad en el caso bidimensional. Este problema fue estudiado originalmente por Jean Leray, quien demostró en 1934 [11] la existencia de soluciones débiles. Para el caso tridimensional se ha probado recientemente que no hay unicidad de soluciones débiles [3].

Capítulo 1

Convergencia débil y ecuación del calor

En este capítulo vamos a introducir los conceptos y resultados relacionados con la convergencia débil. Estudiaremos también cómo probar la existencia de soluciones débiles en la ecuación del calor en un dominio conexo y acotado con frontera regular, que entenderemos en el trabajo como un paso inicial para abordar la ecuación de Navier-Stokes no lineal, problema que abordaremos en el próximo capítulo. Nos centraremos en demostrar los resultados que no se estudian en el el grado, citando o dando por conocidos los resultados estudiados en las distintas asignaturas.

1.1. Convergencia débil

1.1.1. Introducción

En un espacio normado X, decimos que una sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto x cuando se cumple $||x_n - x||_X \to 0$. Si aplicamos una función continua a la sucesión inicial, por propiedades de continuidad se mantiene la convergencia en el espacio de llegada. En particular, si L es una aplicación $L : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua cumplirá que $L(x_n) \to L(x)$. La convergencia débil solo exige esta segunda parte, por lo que trivialmente la convergencia normal implica la débil.

Veremos que las dos convergencias no son equivalentes, lo que justifica el uso de esta nueva convergencia. El principal resultado que demostraremos en esta sección será que una sucesión acotada en un espacio reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente. Esta propiedad es cierta con convergencia fuerte en espacios de dimensión finita, por lo que la convergencia débil extiende la convergencia habitual a dimensión infinita.

Recordemos que el espacio dual X' de un espacio normado X se define como el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de X a $\mathbb{R}$.

Definición 1.1. *Sea X un espacio normado. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión. Diremos que x_n converge débilmente a x y lo denotaremos $x_n \rightharpoonup x$ si $L(x_n) \to L(x)$ $\forall L \in X'$.*

Usualmente denotaremos $L(x) \equiv \langle L, x\rangle_{X',X} \equiv \langle L, x\rangle$, si los espacios en cuestión no necesitan especificarse. Veamos ahora un ejemplo de una sucesión que converge débilmente y no converge en el sentido habitual.

Ejemplo 1.1. *Consideramos para todo $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{e_n\} = \{e_{n,m}\}$ de números reales definida por $\{e_{n,n}\} = 1$ y $\{e_{n,m}\} = 0$ $\forall m \neq n$.*

Es claro que la sucesión de sucesiones $\{e_n\}$ pertenece a ℓ^2. Trivialmente la sucesión no converge fuertemente, pues no es de Cauchy. El dual de ℓ^2 es el mismo espacio ℓ^2, por lo que para estudiar la convergencia débil tomamos $y = \{y_m\} \in \ell^2$ cualquiera. Entonces $\langle e_n, y\rangle_{l^2} = y_n \to 0$, lo que demuestra que la sucesión de sucesiones $\{e_n\} \rightharpoonup 0$ en ℓ^2.

Proposición 1.1. *Sean X, Y espacios normados y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $x_n \rightharpoonup x$ en X entonces $Ax_n \rightharpoonup Ax$ en Y*

Demostración: Sea $x_n \rightharpoonup x$ en X. Para todo $y' \in Y'$ se tiene que $y' \circ A \in X'$ y por definición de convergencia débil se tiene que

$$\langle y', Ax_n\rangle_{Y',Y} = \langle y' \circ A, x_n\rangle_{X',X} \rightharpoonup \langle y' \circ A, x\rangle_{X',X} = \langle y', Ax\rangle_{Y',Y}. \quad \square$$

Para el estudio de teoremas de compacidad, recordaremos algunos resultados de Análisis Funcional e introduciremos una nueva definición de convergencia.

Sabiendo que el espacio dual de un espacio normado X es el conjunto de aplicaciones lineales y continuas $L : X \to \mathbb{R}$, se demuestra fácilmente que el espacio dual del dual, más conocido como bidual, en general contiene al espacio original. Cuando el espacio bidual coincide con el espacio original, se dice que es un espacio reflexivo.

Proposición 1.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo.*

Esta proposición será útil en el segundo capítulo, pues trabajaremos con subespacios cerrados de espacios que sabemos que son reflexivos. Por otra parte, se dice que un espacio normado (o en general, topológico) es separable si incluye un subconjunto denso y numerable.

Proposición 1.3. *Sea X un espacio normado tal que X' es separable. Entonces X es separable.*

Dado que un espacio reflexivo es igual a su bidual, se tiene directamente el siguiente corolario.

Corolario 1.4. *Un espacio reflexivo X es separable si y solo si X' es separable.*

Además de la convergencia débil, será útil considerar otro tipo de convergencia aún más débil, que introduciremos en la siguiente definición. La utilidad de introducir conceptos débiles es que es más simple probar que ocurren, teniendo la desventaja de poder obtener menos conclusiones a partir de ellos.

Definición 1.2. *Sea X un espacio normado. Se dice que una sucesión $\{x'_n\} \subset X'$ converge *-débilmente a un punto $x' \in X'$ y se escribe $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ si*

$$\langle x'_n, x\rangle \to \langle x', x\rangle, \forall x \in X.$$

Un espacio normado está contenido en su bidual, por lo que la convergencia débil de una sucesión en X' implica la convergencia *-débil. En un espacio reflexivo las dos convergencias son equivalentes trivialmente.

1.1.2. Teoremas de Compacidad

Una de las dificultades de trabajar con espacios de dimensión infinita reside en que los conjuntos cerrados y acotados dejan de ser compactos. El objetivo de este apartado será demostrar que trabajando con convergencia débil y *-débil mantenemos esta propiedad tan útil. Se entenderá que e.n. significa espacio normado.

Teorema 1.5 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Sea X un e.n. separable y $\{x'_n\} \subset X'$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión de $\{x'_n\}$ que converge *-débil.*

Demostración: Sea $\{y_n\} \subset X$ denso numerable. Se tiene

$$|\langle x'_n, y_1\rangle| \leq ||x'_n||_{X'}||y_1||_X,$$

por lo que la sucesión $\langle x'_n, y_1\rangle$ está acotada en $\mathbb{R}$, con lo que existe una subsucesión $\left\{x'_{n_{1,j}}\right\}$ tal que $\langle x'_{n_{1,j}}, y_1\rangle$ converge. Análogamente, la sucesión $\langle x'_{n_{1,j}}, y_2\rangle$ está acotada en $\mathbb{R}$ y podemos encontrar una subsucesión $\left\{x'_{n_{2,j}}\right\}$ tal que $\langle x'_{n_{2,j}}, y_2\rangle$ converge. Repitiendo el razonamiento, podemos formar la subsucesión diagonal $x'_{n_j} = x'_{n_{j,j}}$, la cual cumple que

$$\exists \lim_{j\to\infty} \langle x'_{n_j}, y_k\rangle, \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particular, la sucesión $\langle x'_{n_j}, y_k\rangle$ es de Cauchy. Sea ahora $x \in X$ cualquiera. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\limsup_{i,j\to\infty} \left|\langle x'_{n_j}, x\rangle - \langle x'_{n_i}, x\rangle\right| &= \limsup_{i,j\to\infty} \left|\langle x'_{n_j} - x'_{n_i}, x\rangle\right| \\
&\leq \limsup_{i,j\to\infty} \left|\langle x'_{n_j} - x'_{n_i}, x - y_k\rangle\right| + \limsup_{i,j\to\infty} \left|\langle x'_{n_j} - x'_{n_i}, y_k\rangle\right| \\
&= \limsup_{i,j\to\infty} \left|\langle x'_{n_j} - x'_{n_i}, x - y_k\rangle\right| \leq \limsup_{i,j\to\infty} ||x'_{n_j} - x'_{n_i}||_{X'}||x - y_k||_X.
\end{aligned}$$

Como la sucesión $\{x'_n\}$ está acotada y la sucesión $\{y_k\}$ es densa, se deduce que el último término es tan pequeño como uno quiera, es decir, que

$$\limsup_{i,j\to\infty} \left| \langle x'_{n_j}, x\rangle - \langle x'_{n_i}, x\rangle \right| = 0,$$

por lo que la sucesión $\langle x'_{n_j}, x\rangle$ es de Cauchy y por tanto convergente. Esto implica que podemos definir $x' : X \to \mathbb{R}$ como

$$x'(x) = \lim_{j\to\infty} \langle x'_{n_j}, x\rangle, \forall x \in X.$$

Para ver que x' está en X hay que comprobar la linealidad, que se deduce directamente de la linealidad del límite; y la continuidad, que se deduce de

$$|x'(x)| = \lim_{j\to\infty} |\langle x'_{n_j}, x\rangle| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x'_n||_{X'})||x||_X.$$

Se tiene entonces que $x'_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} x'$. □

Nota 1.1. *De la demostración anterior también se deduce que, cuando trabajamos en un espacio normado separable, una sucesión acotada por C con límite *-débil, tiene dicho límite *-débil acotado también por C. Si el espacio es reflexivo, se tendrá la misma propiedad para el límite débil.*

Proposición 1.6. *Sea X un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. Sea M la clausura del espacio generado por los elementos de la sucesión. Entonces M es separable.*

Demostración: Sea D el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por los vectores x_n. Definiendo

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} D_n, \quad D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{Q} \right\},$$

es claro que el cardinal de D_n es menor o igual que el de $\mathbb{Q}^n$, por lo que D_n es numerable para todo n y por tanto también D. Sea L el espacio generado por la sucesión $\{x_n\}$ (sobre $\mathbb{R}$). Entonces $M = \overline{L}$.

Para ver que D es denso en L, sea $x \in L \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j : \beta_j \in \mathbb{R}$. Tomando $\alpha_j \in \mathbb{Q} : |\beta_j - \alpha_j| \leq \epsilon \cdot 2^{-j}$, definimos $x_D = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$. Se tiene entonces que $||x_D - x||_X \leq \epsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||_X$. Como la sucesión x_n era acotada, $||x_D - x||_X$ es arbitrariamente pequeño y por tanto $\overline{D} = L$, luego $\overline{D} = \overline{L} = M$ y M es separable. □

Teorema 1.7. *Sea X reflexivo. Entonces toda sucesión acotada en X admite una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. Denotamos por M la clausura del espacio generado por los elementos de la sucesión. Por la proposición anterior, M es separable. Sabiendo que la clausura de un subespacio es un subespacio, por ser subespacio cerrado de un espacio reflexivo, la Proposición 1.2 prueba que M es reflexivo y por tanto igual a M''. Por la Proposición 1.3 M' es separable y podemos ver $\{x_n\}$ como una sucesión acotada en el dual del espacio separable M'.
Por el Teorema 1.5 existe una subsucesión $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ y $x \in M$ con $x_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} x$. Al ser M reflexivo, esto equivale a $x_{n_j} \rightharpoonup x$ en M. Por ello, se tiene que $\forall m' \in M'$

$$\langle m', x_{n_j} \rangle_{M',M} \to \langle m', x \rangle_{M',M}.$$

Sea ahora $x' \in X'$ cualquiera. Por ser $M \subset X$, la restricción de x' a M pertenece a M', es decir, $x'_{|M} \in M'$ y por tanto

$$\langle x', x_{n_j} \rangle_{X',X} = \langle x'_{|M}, x_{n_j} \rangle_{M',M} \to \langle x'_{|M}, x \rangle_{M',M} = \langle x', x \rangle_{X',X}.$$

Dado que x' es arbitrario, se tiene que $x_{n_j} \rightharpoonup x$ en X. □

Este es el resultado fundamental que necesitamos para probar la existencia de soluciones débiles en las ecuaciones que vamos a estudiar. Un desarrollo más profundo de estos conceptos se puede ver en [5].

1.2. Ecuación del calor

1.2.1. Consideraciones iniciales

En esta sección vamos a centrarnos en demostrar la existencia de soluciones débiles en problemas de evolución con derivadas parciales de segundo orden parabólicas en un entorno acotado. Veremos que la ecuación del calor es un caso representativo de esta familia de problemas. Antes de formular la expresión general, necesitamos algunas definiciones.

Para toda la sección asumiremos que U es un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular, y para un cierto $T > 0$ fijo denotaremos $U_T = U \times (0, T]$. Como es natural, T representa el tiempo final y usaremos t para denotar la variable temporal.

Por comodidad, expresaremos habitualmente las derivadas parciales espaciales utilizando subíndices. Es decir, se entiende que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv f_{x_i}, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Con esta misma notación podemos expresar derivadas parciales de orden mayor que 1, entendiéndose que el orden de derivación lo marcan los subíndices de izquierda a derecha. Denotaremos la derivada temporal como ∂_t durante todo el trabajo.

Usaremos la letra L para denotar un operador diferencial de segundo orden en las variables espaciales. L puede depender del tiempo t, y podemos expresarlo de forma general como

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{i,j}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \tag{1.1}$$

para unos ciertos $a^{ij}, b^i, c \ \ (i,j = 1,\ldots,n)$. La expresión anterior se conoce como la forma de divergencia de L. En esta sección no vamos a tratar con cualquier elección de coeficientes, ya que vamos a estudiar exclusivamente las ecuaciones parabólicas.

Definición 1.3. *Diremos que el operador diferencial $\partial_t + L$ es parabólico si existe una constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2.$$

Para cualquier $(x,t) \in U_T$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.1. *Si el operador diferencial cumple la definición anterior, estamos exigiendo que L sea elíptico en las variables espaciales para cada t. De ahora en adelante supondremos que L es un operador elíptico en las variables espaciales. Esta propiedad solo será necesaria en los últimos resultados del capítulo.*

Vamos a estudiar el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in U_T, \\ \qquad\qquad\quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial U \times [0,T], \\ \qquad\qquad\quad u(x,0) = g(x), \quad x \in U, \end{cases} \tag{1.2}$$

con $f \in L^2(0,T;H^{-1}(U)), g \in L^2(U)$ y $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)(i,j = 1,\ldots,n)$.

Se define el espacio $L^2(U)$ como el espacio de funciones medibles de cuadrado integrable en U. Este espacio tiene como norma $||h||_{L^2(U)} = \left(\int_U h^2\right)^{1/2}$. Será frecuente utilizar el producto escalar en L^2 que denotaremos como $(h_1,h_2)_{L^2} = \int_U h_1h_2$. El espacio L^2 es Hilbert. Como podemos observar, el espacio U aparece de forma reiterada a pesar de estar claro el espacio de trabajo. Por ello, muchas veces omitiremos el espacio U en integrales o los distintos espacios, sobreentendiendo que se definen sobre U.

Como generalización, se definen los espacios $L^p(U) \ \ (p \in [1,+\infty))$ como los espacios de funciones medibles cuya norma $||h||_{L^p(U)} = (\int_U |h|^p)^{1/p} < +\infty$. También se puede definir el espacio $L^\infty(U)$ como el espacio de funciones medibles cuyo supremo en casi todo U es finito, teniendo como norma $||h||_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 : |h(x)| \leq C \ \ e.c.t. \ \ x \in U\}$. Los espacios L^p con $p \in [1,+\infty]$ son Banach.

Por otro lado, se define el espacio de Sobolev $H^1(U)$ como el espacio de funciones pertenecientes a $L^2(U)$ cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones (ver [8] para más detalle) también pertenecen a $L^2(U)$. Este espacio tiene como norma $||h||^2_{H^1(U)} = ||h||^2_{L^2(U)} + ||\nabla h||^2_{(L^2(U))^n}$, donde el operador ∇ es el operador gradiente, que se define sobre una función escalar multidimensional como $\nabla h(x) = (h_{x_1}, h_{x_2}, \dots, h_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$. Una propiedad importante de las funciones de este espacio es que podemos definir su valor en casi toda la frontera ∂U, a pesar de que la frontera tiene medida nula respecto a la medida de U. El valor en la frontera de una función se conoce como su traza (ver [6], capítulo 5).

Otro espacio recurrente será $H_0^1(U)$, definido como el cierre del espacio $C_c^\infty(U)$ en $H^1(U)$. $C_c^\infty(U)$ es el espacio de funciones infinitamente derivables con soporte compacto en U. Al ser $H_0^1(U)$ un subespacio cerrado de H^1, podemos tomar como norma en H_0^1 la norma de H^1. Sin embargo, cuando el conjunto U es acotado, se cumple la desigualdad de Poincaré, que establece que

$$||h||_{L^2(U)} \leq C_p(U)||\nabla h||_{(L^2(U))^N} \quad \forall h \in H_0^1(U)$$

(ver [6], página 279). Esta desigualdad permite utilizar como norma equivalente en H_0^1 la norma $||\nabla h||_{(L^2(U))^n}$. Las funciones de este espacio tienen valor en la frontera (traza) nulo en casi todo ∂U. Por último, se define el espacio $H^{-1}(U)$ como el espacio dual de $H_0^1(U)$. Los espacios H^1, H_0^1 y H^{-1} son de Hilbert.

Para entender el espacio $L^2(0,T;H^{-1}(U))$ y en general, $L^p(0,T;X)$ con $p \in [1,+\infty]$ y X espacio de Banach, debemos usar la teoría de la medida de Bochner (ver [6], apéndice E). La construcción de esta medida es análoga a la de Lebesgue, y entenderemos el espacio $L^p(0,T;X)$ como el espacio de funciones medibles $h(x,t)$ que en casi todo $t_0 \in (0,T)$ cumple que $h(x,t_0) \in X$ y además tienen norma finita $||h||_{L^p_T(X)} = (\int_0^T ||h||^p_X(t)dt)^{1/p} < +\infty$

En Física encontramos muchos ejemplos de ecuaciones interesantes del tipo (1.1). Tomando $a^{ij} \equiv \delta_{ij}, b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$, tenemos $L = -\Delta$, que es el operador de la ecuación del calor, en la cual u representa la temperatura. Recordamos que al trabajar con coordenadas cartesianas, $\Delta h = \sum_{i=1}^n h_{x_i x_i}$. Al operador Δ se le conoce como operador laplaciano.

En general esta ecuación describe la evolución de la densidad de una magnitud física que se disipa, en la región U, donde los términos de segundo orden describen la difusión, los de primer orden el transporte y el término de orden cero la creación o destrucción.

Dado que pretendemos resolver el problema con $f \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ en cada instante de tiempo, es natural operar la EDP por una función test v. Además la forma en divergencia de L sugiere integrar por partes a costa de derivar v, buscaremos la solución al problema en el espacio de Sobolev $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ y usaremos funciones test $v \in H_0^1(U)$ en casi todo t. De este modo, observamos que para u regular,

$$
\begin{aligned}
(Lu,v)_{L^2} &= \int_U \big(-\sum_{i,j=1}^{n} (a^{i,j}(x,t)u_{x_i})_{x_j} v + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv \big) dx \\
&= \int_U \big(\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv \big) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial U} a^{i,j}(x,t)u_{x_i} v n_j d\sigma,
\end{aligned}
$$

quedando por tanto

$$
(Lu,v)_{L^2} = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv,
$$

$\forall v \in H_0^1 \;\; e.c.t. \;\; 0 \leq t \leq T$. En la ecuación anterior hemos usado integración por partes y que se anulan los términos de frontera gracias a que $v \in H_0^1$. Podemos definir

$$
B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv \;\; dx, \tag{1.3}
$$

$\forall u, v \in H_0^1 \;\; e.c.t. \;\; 0 \leq t \leq T$ .Por la definición es fácil ver que B es una forma bilineal dependiente del tiempo. Nótese que para facilitar la comprensión del problema estamos separando la variable temporal y las espaciales. Es decir, consideramos que u es una aplicación $u : [0,T] \to H_0^1$ definida consistentemente como $[u(t)](x) := u(x,t)(x \in U, e.c.t. \;\; 0 \leq t \leq T)$ así como $f : [0,T] \to H^{-1}$ definida $e.c.t. \;\; 0 \leq t \leq T$.

Por el argumento anterior, podemos multiplicar la EDP por $v \in H_0^1$, resultando la igualdad

$$
\langle \partial_t u, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u,v;t] = \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1}, \;\; e.c.t. \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{1.4}
$$

que es la formulación variacional de (1.2). Hemos denotado $\langle h', h \rangle_{H^{-1},H_0^1}$ el producto de dualidad entre cualesquiera $h' \in H^{-1}, h \in H_0^1$. Este producto de dualidad coincide con el producto escalar en L^2 cuando h', h, pertenecen a L^2.

Para que estas cuentas formales tengan sentido, debe tenerse que $\partial_t u \in H^{-1}(U)$ en casi todo t. Recordemos que la forma general de un elemento de H^{-1} es suma de elementos de L^2 y derivadas de elementos de L^2, es decir, $w \in H^{-1} \iff w = w^0 + \sum_{i=1}^{n} w^i_{x_i} \;\; con \;\; w^i \in L^2 \;\; \forall i = 0, 1, \ldots, n$, donde las derivadas w_{x_i} están tomadas en el sentido de las distribuciones. Gracias a la integración por partes en H_0^1 podemos probar el siguiente enunciado.

Proposición 1.8. *Sea U abierto acotado. Si $w = w^0 + \sum_{i=1}^{n} w^i_{x_i} \;\; con \;\; w^i \in L^2(U) \;\; \forall i = 0, 1, \ldots, n$, entonces $w \in H^{-1}(U)$ y $||w||^2_{H^{-1}} \leq \sum_{i=0}^{n} ||w^i||^2_{L^2}$.*

Demostración: Sea $v \in H_0^1(U)$, y sea $W = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Integrando por partes, y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$
\begin{aligned}
|\langle w, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}| &= \left| \int_U w^0 v dx + \sum_{i=1}^n \langle w^i_{x_i}, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \right| = \left| \int_U (w^0 v - W \nabla v) dx \right| \leq \\
&\leq \int_U \left(|w^0||v| + |W||\nabla v|\right) dx \leq \\
&\leq \int_U \left(|w^0|^2 + |W|^2\right)^{1/2} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right)^{1/2} dx \leq \\
&\leq \left(\int_U (|w^0|^2 + |W|^2) dx \right)^{1/2} \left(\int_U (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(||w^0||_{L^2(U)} + ||W||_{L^2(U)^n} \right) ||v||_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

Por tanto, se tiene que

$$
||w||^2_{H^{-1}} \leq \left(||w^0||^2_{L^2} + ||W||^2_{L^2(U)^n} \right) = \sum_{i=0}^n ||w^i||^2_{L^2}.
$$

Esto prueba la continuidad de w. Por linealidad de $\langle w, \cdot\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, se concluye que w es lineal sobre H_0^1. $\square$

De las ecuaciones (1.3), (1.4), se deduce $\partial_t u = f - Lu$ en H^{-1} siempre que la igualdad tenga sentido, para lo cual debemos demostrar que el lado derecho de la igualdad reside en H^{-1} e.c.t. $t \in (0, T)$. Como $f \in H^{-1}$ e.c.t. $t \in (0, T)$, tenemos que comprobar que Lu también. Dado que $u \in H_0^1$, $u_{x_i} \in L^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty \ \forall i, j$, se cumple que $cu, b^i u_{x_i}, a^{ij} u_{x_i} \in L^2 \ \forall i, j$. Por tanto, denotando $w^0 = -cu - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i}$, $w^i = \sum_{j=1}^n a^{ij} u_{x_i}$ y en virtud de la proposición anterior, se tiene que $\partial_t u \in H^{-1}(U)$ *e.c.t.* $0 \leq t \leq T$. Con esta propiedad ya podemos definir lo que vamos a entender por solución débil, ya que tenemos la siguiente acotación en norma de $\partial_t u$.

Corolario 1.9. *Si u satisface el problema* (1.2)*, entonces* $||\partial_t u||_{H^{-1}} \leq C(||u||_{H_0^1} + ||f||_{H^{-1}})$ *para un cierto* $C > 0$.

Demostración: Como $\partial_t u = -Lu + f \Rightarrow ||\partial_t u||_{H^{-1}} \leq ||f||_{H^{-1}} + ||Lu||_{H^{-1}}$. Por las desigualdades obtenidas en la demostración de la proposición 1.8, se tiene que $||u_{x_i x_j}||_{H^{-1}} \leq ||u_{x_i}||_{L^2} \leq ||u||_{H_0^1} \ \forall i = 1, \ldots, n$. También se deduce de la misma proposición que $||u||_{H^{-1}} \leq ||u||_{H_0^1}$.

Sea $M = \max_{i,j=1,\ldots,n} \left\{ ||c||_{L^\infty(U_T)}, ||b^i||_{L^\infty(U_T)}, ||a^{ij}||_{L^\infty(U_T)} \right\}$. Con esto, acotamos los términos $||(a^{i,j} u_{x_i})_{x_j}||_{H^{-1}} \leq ||a^{i,j} u_{x_i}||_{L^2} \leq M ||u_{x_i}||_{L^2} \leq M ||u||_{H_0^1}$ *e.c.t.* $t \in [0, T], \forall i, j = 1, \ldots, n$. Análogamente, se tiene que $||b^i u_{x_i}||_{H^{-1}} \leq ||b^i u_{x_i}||_{L^2} \leq$

$M||u||_{H_0^1}$ *e.c.t.* $t \in [0,T], \forall i = 1,\ldots,n$, y se sigue que $||cu||_{H^{-1}} \le ||cu||_{L^2} \le M||u||_{H_0^1}$ *e.c.t.* $t \in [0,T]$.

Aplicando la desigualdad triangular a los sumandos y sumatorios de Lu (ver ecuación (1.1)), obtenemos que

$$||Lu||_{H^{-1}} \le \sum_{i,j=1}^{n} ||(a^{i,j}u_{x_i})_{x_j}||_{H^{-1}} + \sum_{i=1}^{n} ||b^i u_{x_i}||_{H^{-1}} + ||cu||_{H^{-1}} \le M(n^2+n+1)||u||_{H_0^1},$$

en casi todo t. Entonces, en casi todo $t \in [0,T]$ se tiene

$$||\partial_t u||_{H^{-1}} \le (1 + M(n^2+n+1))(||u||_{H_0^1} + ||f||_{H^{-1}}).$$

□

A continuación definiremos qué vamos a entender por solución débil al problema planteado. Nuestro objetivo será probar que existe alguna solución débil y, en este caso, probaremos también la unicidad.

Definición 1.4. *Diremos que una función*

$$u \in L^2(0,T,H_0^1(U)),$$

con

$$\partial_t u \in L^2(0,T,H^{-1}(U)),$$

es solución débil del problema (1.2) *si se cumple*
(i)$\langle \partial_t u, v\rangle + B[u,v;t] = \langle f, v\rangle \;\; \forall v \in H_0^1(U), \;\; e.c.t. \;\; 0 \le t \le T.$
(ii) $u(0) = g$.

Nota 1.2. *Para que en la definición 1.4 podamos exigir (ii) es necesario probar que u tiene cierta regularidad en tiempo. Este será el objetivo de la siguiente proposición. Para su demostración será necesario utilizar productos de convolución y sucesiones regularizantes. La deducción de estas propiedades puede verse en el capítulo 5 de [6].*

Comencemos por definir de forma abstracta qué entendemos por un espacio de funciones continuas con valores en un espacio abstracto.

Definición 1.5. *Sea X un espacio de Banach. El espacio $C([0,T];X)$ se define como el espacio de funciones que en cada instante fijo de tiempo pertenece a X y que toma valores continuos en tiempo. Es decir, dado $\phi \in C([0,T];X), t_0 \in [0,T]$, $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0 : ||\phi(x,t) - \phi(x,t_0)||_X \le \varepsilon \;\; \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [0,T]$.*

Proposición 1.10. *Sea X un espacio de Banach. El espacio $C([0,T];X)$ es Banach con la norma $||\phi||_{C_T(X)} = \max_{t\in[0,T]} ||\phi||_X(t)$.*

Demostración: Está claro que por la definición anterior, al ser $[0,T]$ un intervalo compacto cualquier función del espacio tiene una norma finita. Tenemos que comprobar que dicha definición produce una norma. La linealidad es trivial, y también la desigualdad triangular por cumplirse para el máximo. Por ser X un espacio normado, se tiene también que $||\phi||_{C_T(X)} = 0 \Leftrightarrow ||\phi||_X(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,T]$. Queda ver que dicha norma hace al espacio completo.

Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de Cauchy en $C([0,T];X)$. Veamos que existe una función $\phi \in C([0,T];X)$ con $\lim_{n\to\infty} ||\phi_n - \phi||_{C_T(X)} = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces

$$||\phi_n - \phi_m||_{C_T(X)} \leq \varepsilon.$$

Además, por definirse la norma como el máximo, se tiene en particular que

$$||\phi_n - \phi_m||_X(t) \leq ||\phi_n - \phi_m||_{C_T(X)} \leq \varepsilon \ \ \forall t \in [0,T],$$

por lo que la sucesión $\{\phi_n(t)\} \subset X$ es de Cauchy en X para todo $t \in [0,T]$. Al ser X espacio de Banach, existe el límite para cada valor de t y podemos definir una función $\phi : [0,T] \to X : \phi(t) := \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \ \ \forall t \in [0,T]$. Queda ver que dicha función pertenece al espacio original, y que $\lim_{n\to\infty} ||\phi_n - \phi||_{C_T(X)} = 0$.

Partiendo de $||\phi_n - \phi_m||_X(t) \leq \varepsilon \ \ \forall t \in [0,T], \ \ m, n > n_0(\varepsilon)$, podemos tomar límite cuando $m \to \infty$, y por la continuidad de la aplicación norma y definición de ϕ, tenemos que

$$||\phi_n - \phi||_X(t) \leq \varepsilon \ \ \forall t \in [0,T], \ \ n > n_0(\varepsilon).$$

Con esto ya tenemos que $\sup_{t\in[0,T]} ||\phi_n - \phi||_X(t) \leq \varepsilon$, con lo que solo queda probar que ϕ es una función continua (por tanto tendremos la pertenencia y podremos cambiar supremo por máximo).

Sea $t_0 \in [0,T]$. Tomando $l > n_0$, al ser ϕ_l continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in [0,T]$ con $|t_0 - s| < \delta$ se tiene que $||\phi_l(t_0) - \phi_l(s)||_X \leq \varepsilon$. Entonces, por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} ||\phi(t_0) - \phi(s)||_X &= ||\phi(t_0) - \phi(s) + \phi_l(t_0) - \phi_l(t_0) + \phi_l(s) - \phi_l(s)||_X \\ &\leq ||\phi(t_0) - \phi_l(t_0)||_X + ||\phi_l(s) - \phi(s)||_X + ||\phi_l(t_0) - \phi_l(s)||_X \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $s \in [0,T]$ con $|t_0 - s| < \delta$. Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, queda probada la continuidad en t_0, que implica que la función $\phi \in C([0,T];X)$. $\square$

Proposición 1.11. *Sea* $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ *con* $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$. *Entonces* $u \in C([0,T];L^2(U))$.

Demostración: Podemos extender u por 0 fuera del intervalo temporal $[0,T]$. En particular, considerando la extensión en cualquier intervalo ampliado $[-\sigma, T+\sigma]$ para

$\sigma > 0$ y tomando $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que, tomando $\varepsilon > 0$, la regularización en tiempo

$$u^\varepsilon(t) := \eta_\varepsilon * u(t) = \int_{-\sigma}^{T+\sigma} \eta_\varepsilon(s)u(t-s)ds \to_{\varepsilon\to 0^+} u(t) \;\; e.c.t. \;\; t \in (0,T), x \in U.$$

Tomando ahora $\delta > 0$, se define de forma análoga la regularización u^δ. Esta regularización hace a $u^\varepsilon(t), u^\delta(t)$ continuas en tiempo (ver propiedades de la convolución en [6], capítulo 5), obteniendo $u^\varepsilon, u^\delta \in C([0,T]; H_0^1) \subset C([0,T]; L^2)$.

De la relación entre producto escalar y norma, se tiene que

$$\frac{d}{dt}||u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)||_{L^2}^2 = 2\left\langle \partial_t u^\epsilon(t) - \partial_t u^\delta, u^\epsilon(t) - u^\delta(t)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Integrando la expresión anterior entre s y t, se obtiene que

$$||u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)||_{L^2}^2 = ||u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)||_{L^2}^2 + 2\int_s^t \left\langle \partial_t u^\epsilon - \partial_t u^\delta, u^\epsilon - u^\delta\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}(\tau)d\tau,$$

para cualquier $0 \le s,t \le T$. Para el producto escalar, vamos a utilizar que $2\langle a,b\rangle \le 2||a||_{H^{-1}}||b||_{H_0^1} \le ||a||_{H^{-1}}^2 + ||b||_{H_0^1}^2$. La ecuación anterior queda ahora como

$$\begin{aligned} ||u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)||_{L^2}^2 \le ||u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)||_{L^2}^2 &+ \int_s^t ||\partial_t u^\epsilon(\tau) - \partial_t u^\delta(\tau)||_{H^{-1}}^2 \\ &+ \int_s^t ||u^\epsilon(\tau) - u^\delta(\tau)||_{H_0^1}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Al ser esto cierto para cualquier $0 \le s,t \le T$, y ser los integrandos funciones positivas, la cota también es cierta si integramos en $(0,T)$. Por tener convergencia en casi todo, podemos fijar un s tal que $u^\varepsilon(s) \to u(s)$ en $L^2(U)$. Con esto, anularemos el primer sumando de la última ecuación al tomar límite. Al cumplirse lo anterior para cualquier $\delta, \varepsilon > 0$, obtenemos la cota uniforme

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon,\delta\to 0} \sup_{0\le t\le T} ||u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)||_{L^2(U)}^2 &\le \lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_0^T ||\partial_t u^\varepsilon(\tau) - \partial_t u^\delta(\tau)||_{H^{-1}(U)}^2 \\ &+ \lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_0^T ||u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)||_{H_0^1(U)}^2 d\tau = 0, \end{aligned}$$

ya que la regularización converge en casi todo el espacio, y también sus derivadas.

Esto muestra que $\{u^\varepsilon\} \subset C([0,T]; L^2(U))$ tiene un límite (cuando $\varepsilon \to 0$ que denotaremos $v \in C([0,T]; L^2(U))$. Dado que la regularización converge en casi todo, por unicidad de límite se deduce que $u = v \in C([0,T]; L^2(U))$ en casi todo. □

Nota 1.3. *En la proposición anterior, se entiende que L^2 es una clase de funciones y para obtener continuidad en tiempo estamos redefiniendo los valores de la función en un conjunto de medida nula.*

1.2.2. Existencia de soluciones débiles

Una vez determinados los espacios a los que pertenecen los elementos del problema y algunas propiedades, estamos en disposición de construir una solución al problema (1.2) utilizando el método de Galerkin, consistente en encontrar soluciones en espacios de dimensión finita y hacer un paso al límite. Vamos a comenzar por construir los espacios de dimensión finita.

Proposición 1.12. *Existe un conjunto de funciones $w_k = w_k(x), k \in \mathbb{N}$ tal que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ está contenido en $H_0^1(U)$ y además $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal de $L^2(U)$.*

Demostración: El espacio H_0^1 es separable por ser subespacio cerrado de L^2, que es separable. También es Hilbert, por lo que tiene una base numerable. Dado que H_0^1 es denso en L^2, por densidad dicha base es también base de L^2. Por el método de Gram-Schmidt, podemos ortonormalizar la base según la norma de L^2. □

La idea a desarrollar será buscar funciones $u_m : [0,T] \to H_0^1(U)$ de la forma

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{1.5}$$

donde los coeficientes $d_m^k(t)$ deberán cumplir

$$u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(0) w_k; \quad d_m^k(0) = (g, w_k)_{L^2} \tag{1.6}$$

$$\langle \partial_t u_m, w_k \rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u_m, w_k; t] = \langle f, w_k \rangle_{H^{-1},H_0^1}, \tag{1.7}$$

para todo $0 \leq t \leq T, k = 1, \ldots, m$. Se entiende por $(,)_{L^2}$ el producto en L^2.

Es decir, vamos a buscar soluciones que son solución del problema (1.2) en el subespacio de dimensión finita generado por $\{w_k\}_{k=1}^{m}$.

Teorema 1.13. *Para cada $m = 1, 2, \ldots$ existe una única función u_m de la forma* (1.5) *cumpliendo las condiciones* (1.6),(1.7).

Demostración: De la expresión (1.5) se tiene que $\partial_t u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \partial_t d_m^k(t) w_k$. Dado que hemos escogido las funciones w_k ortonormales para el producto en L^2, se cumple que

$$(\partial_t u_m(t), w_k)_{L^2} = \sum_{j=1}^{m} (\partial_t d_m^j(t) w_j, w_k)_{L^2} = \partial_t d_m^k(t). \tag{1.8}$$

Dado que B (ver ecuación (1.3)) es una forma bilineal, podemos calcular análogamente

$$B[u_m, w_k; t] = B\left[\sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) w_j, w_k; t\right] = \sum_{j=1}^{m} e^{kj}(t) d_m^j(t), \tag{1.9}$$

donde $e^{kj}(t) := B[w_l, w_k; t] \ \ (k, l = 1, \dots, m)$. De la expresión de B (1.3) se deduce que la regularidad de los $e^{kj}(t)$ es L^∞. Podemos expresar también $f^k(t) := \langle f(t), w_k \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$. Entonces $f^k(t) \in L_T^2$. Como d_m^k solo es función de t, la derivada parcial en tiempo es una derivada débil ordinaria en tiempo. De este modo, la ecuación (1.7) se escribe como

$$\frac{d}{dt} d_m^k(t) + \sum_{j=1}^m e^{kj}(t) d_m^j(t) = f^k(t) \ \ (k = 1, \dots, m), \tag{1.10}$$

que es un sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias en las variables d_m^k sujetos a las m condiciones iniciales $d_m^k(0) = (g, w_k)$. Por resultados de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ver [2]), sabemos que existe solución al sistema en un intervalo $[0, T]$. Vamos a probar que los $d_m^k(t)$ están acotados en $[0, T]$. Multiplicando la ecuación (1.10) por $d_m^k(t)$, obtenemos

$$\left(\frac{d}{dt} d_m^k \right) d_m^k = -d_m^k \sum_{j=1}^m e^{kj}(t) d_m^j(t) + d_m^k f^k(t).$$

Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |d_m^k|^2 \leq |d_m^k| \sum_{j=1}^m |e^{kj}(t)| |d_m^j(t)| + |d_m^k(t)| |f^k(t)|.$$

Utilizando el vector $d_m(t) = (d_m^1(t), d_m^2(t), \dots, d_m^m(t))$, podemos ver el sumatorio como un producto escalar. Acotando por el producto de las normas,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |d_m^k|^2 \leq |d_m^k| ||e^k(t)||_{\mathbb{R}^n} ||d_m(t)||_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} |d_m^k(t)|^2 + \frac{1}{2} |f^k(t)|^2.$$

Sumando para $k = 1, \dots, m$, y acotando los términos $||e^k||_{\mathbb{R}^n}$ por estar en L^∞, obtenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||d_m||_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C ||d_m||_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{1}{2} ||f^{m*}(t)||_{\mathbb{R}^n}^2,$$

donde hemos definido $f^{m*} = (f^1, f^2, \dots, f^m)$. Por la desigualdad de Gronwall, al ser todos los f^k de cuadrado integrable en $[0, T]$, se tiene que

$$||d_m||_{\mathbb{R}^n}^2(t) \leq e^{2Ct} \left(||d_m||_{\mathbb{R}^n}^2(0) + \int_0^t ||f^{m*}(t)||_{\mathbb{R}^n}^2 \right) \leq C'$$

en el intervalo $[0, T]$ para una constante C'.

Por tanto, los coeficientes d_m^k son acotados en $[0, T]$ y existe una función absolutamente continua $d_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ satisfaciendo el Sistema Diferencial Ordinario e.c.t. $0 \leq t \leq T$. Definiendo u_m como (1.5), se tiene (1.7) e.c.t. $0 \leq t \leq T$. $\square$

Recordamos que la continuidad absoluta significa ser derivable en casi todo, con función derivada integrable-Lebesgue. Es más débil que ser diferenciable pero suficiente para poder tomar derivadas.

Solo queda demostrar que podemos tomar límite en la expresión. Esto nos daría un candidato a solución. Probaremos que este candidato es realmente la solución a nuestro sistema de ecuaciones. Para tomar límite necesitamos alguna cota que no dependa de m. Antes de abordar el primer teorema demostraremos un par de resultados previos.

Proposición 1.14. *Sean* $a, b, \epsilon > 0$. *Entonces* $ab \leq \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon$.

Demostración: Se obtiene directamente de sustituir en $2xy \leq x^2 + y^2$ las expresiones $(2\epsilon)^{1/2}a$ y $\dfrac{b}{(2\epsilon)^{1/2}}$.

Proposición 1.15. *Existen constantes* $\beta, \gamma > 0$ *tales que*

$$\beta ||u||^2_{H^1_0(U)} \leq B[u, u, t] + \gamma ||u||^2_{L^2(U)}, \ \ \forall u, v \in H^1_0(U) \ \ e.c.t. \ \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.11}$$

Demostración: Por ser L un operador elíptico, y por la expresión de $B[u, u; t]$ (ver ecuación (1.3)), se tiene que existe $\theta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \theta \int_U |\nabla u|^2 dx &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx = B[u, u; t] - \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u - cu^2 dx \\ &\leq B[u, u; t] + \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty} \int_U |\nabla u||u| dx + ||c||_{L^\infty} \int_U u^2 dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Por la proposición 1.14, se tiene que

$$\int_U |\nabla u||u| dx \leq \epsilon \int_U |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_U u^2 dx \ \ (\epsilon > 0). \tag{1.13}$$

Escogiendo ϵ suficientemente pequeño para que $\epsilon \sum_{i=1}^{n} ||b^i||_{L^\infty} < \dfrac{\theta}{2}$ e insertando (1.13) en (1.12), se obtiene que

$$\frac{\theta}{2} \int_U |\nabla u|^2 dx \leq B[u, u; t] + \gamma \int_U u^2 dx$$

para una cierta constante γ y $\dfrac{\theta}{2} = \beta$. □

Teorema 1.16. *Existe una constante* $C > 0$ *que solo depende de* U, T *y los coeficientes de* L, *tal que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} ||u_m(t)||^2_{L^2(U)} + ||u_m||^2_{L^2_T(H^1_0(U))} + ||\partial_t u_m||^2_{L^2_T(H^{-1}(U))} \leq \\ \leq C(||f||^2_{L^2_T(H^{-1}(U))} + ||g||^2_{L^2(U)}) \ \ (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Demostración: Partiendo de la ecuación (1.7), gracias a la linealidad del producto escalar y de B, podemos multiplicar la ecuación k-ésima por $d_m^k(t)$, y gracias a la expresión (1.5), sumar para $k = 1, \dots, m$ y obtener

$$(\partial_t u_m, u_m)_{L^2} + B[u_m, u_m; t] = \langle f, u_m \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \;\; e.c.t. \;\; 0 \le t \le T. \tag{1.15}$$

En casi todo $t \in [0, T]$, podemos acotar el miembro de la derecha por

$$|\langle f, u_m \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| \le ||f||_{H^{-1}} ||u_m||_{H_0^1} \le C_\beta ||f||_{H^{-1}}^2 + \frac{\beta}{2} ||u_m||_{H_0^1}^2. \tag{1.16}$$

Reescribiendo el término $(\partial_t u_m, u_m)_{L^2}$ como la derivada distribucional

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||_{L^2(U)}^2\right) = (\partial_t u_m, u_m)_{L^2},$$

si sumamos la desigualdad (1.11) a la ecuación (1.15),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||_{L^2(U)}^2\right) + \beta ||u_m||_{H_0^1(U)}^2 \le \gamma ||u_m||_{L^2(U)}^2 + \langle f, u_m \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \tag{1.17}$$

Aplicando ahora la desigualdad (1.16), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||_{L^2(U)}^2\right) + \frac{\beta}{2} ||u_m||_{H_0^1(U)}^2 \le \gamma ||u_m||_{L^2(U)}^2 + C_\beta ||f||_{H^{-1}(U)}^2, \tag{1.18}$$

e.c.t. $0 \le t \le T$. Al ser la norma definida positiva, la desigualdad (1.18) implica entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u_m||_{L^2(U)}^2\right) \le \gamma ||u_m||_{L^2(U)}^2 + C_\beta ||f||_{H^{-1}(U)}^2.$$

Denotando ahora $\eta(t) := ||u_m(t)||_{L^2(U)}^2, \xi(t) := ||f(t)||_{H^{-1}(U)}^2$, la desigualdad anterior se transforma en

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \le \gamma \eta(t) + C_\beta \xi(t) \;\; e.c.t. \;\; 0 \le t \le T.$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$\eta(t) \le e^{\gamma t}\left(\eta(0) + C_\beta \int_0^t \xi(s) ds\right) \;\; (0 \le t \le T). \tag{1.19}$$

De la ecuación (1.6) y por ortonormalidad de las funciones w_k se deduce que

$$\eta(0) = ||u_m(0)||_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{m} (g, w_k)_{L^2}^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} (g, w_k)_{L^2}^2 = ||g||_{L^2(U)}^2.$$

Por esto y por la expresión de $\xi(t)$, se deduce de (1.19) que

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u_m(t)||^2_{L^2(U)} \leq C(||g||^2_{L^2(U)} + ||f||^2_{L^2_T(H^{-1}(U))}). \tag{1.20}$$

Aplicando este resultado al término derecho de la ecuación (1.18) e integrando entre 0 y T, obtenemos que

$$||u_m(T)||^2_{L^2} - ||u_m(0)||^2_{L^2} + 2\beta||u_m||^2_{L^2_T(H^1_0)} \leq C(||g||^2_{L^2} + ||f||^2_{L^2_T(H^{-1})}$$

de donde, agrupando el término negativo a la derecha y teniendo en cuenta que la norma es definida positiva se obtiene la cota

$$||u_m||^2_{L^2_T(H^1_0)} \leq C(||g||^2_{L^2(U)} + ||f||^2_{L^2_T(H^{-1})}) \tag{1.21}$$

para otra constante C. Aplicando el corolario 1.9 con u_m obtenemos que

$$||\partial_t u_m||_{H^{-1}(U)} \leq C(||f||_{H^{-1}(U)} + ||u_m||_{H^1_0(U)}).$$

Integrando esta expresión entre 0 y T y aplicando la desigualdad (1.21) y la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
||\partial_t u_m||^2_{L^2_T(H^{-1}(U))} &= \int_0^T ||\partial_t u_m||^2_{H^{-1}(U)} dt \leq C^2 \int_0^T (||f||_{H^{-1}(U)} + ||u_m||_{H^1_0(U)})^2 dt \\
&= C^2 \int_0^T ||f||^2_{H^{-1}(U)} + ||u_m||^2_{H^1_0(U)} + 2||f||_{H^{-1}(U)}||u_m||_{H^1_0(U)} dt \\
&\leq 2C^2 \int_0^T ||f||^2_{H^{-1}(U)} + ||u_m||^2_{H^1_0(U)} dt \\
&\leq C'(||g||^2_{L^2(U)} + ||f||^2_{L^2_T(H^{-1}(U))})
\end{aligned}$$

Sumando esta expresión a (1.20) y (1.21) y renombrando la constante C, obtenemos el resultado deseado. □

Para probar la existencia de solución débil, usaremos antes la siguiente proposición.

Proposición 1.17. *Sea $u_k \rightharpoonup u$ en $L^2(0,T;H^1_0(U))$ y $\partial_t u_k \rightharpoonup v$ en $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Entonces $v = \partial_t u$.*

Demostración: Por la definición de convergencia débil, se deduce que

$$\int_0^T \int_U u_k \phi \; dxdt = \langle u_k, \phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty} \Rightarrow \langle u, \phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty},$$

para cualquier $\phi \in C_c^\infty(U_T)$. Por propiedades de la derivada distribucional, podemos integrar por partes y obtener

$$\langle v, \phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty} \leftharpoondown \langle \partial_t u_k, \phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty} = -\langle u_k, \partial_t\phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty} \rightharpoonup -\langle u, \partial_t\phi\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty}.$$

Como el límite débil es único, y por definición de derivada distribucional, se tiene que $\partial_t u = v$ en $\mathcal{D}'$ y por tanto en $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. □

Teorema 1.18. *Existe al menos una solución débil al problema* (1.2).

Demostración: Por ser el espacio H_0^1 reflexivo, y también L^2, se tiene que el espacio $L^2(0,T;H_0^1(U))$ es reflexivo. De acuerdo con el teorema 1.16, la sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(U))$. Por el teorema 1.7 existe una subsucesión $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ que converge débilmente a un elemento $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$.

Análogamente, la sucesión $\{\partial_t u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ está acotada. Existe pues una subsucesión $\left\{\partial_t u_{m_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ que converge débilmente a un v en $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Como los índices $m_j \subset m_l$, se tiene que $m_j \to \infty \Rightarrow m_l \to \infty$ y se mantiene la convergencia débil de la sucesión $\left\{u_{m_j}\right\}$ a $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$. Aplicando la proposición 1.17, se tiene que

$$\begin{cases} u_{m_j} \rightharpoonup u \text{ en } L^2(0,T;H_0^1(U)), \\ \partial_t u_{m_j} \rightharpoonup \partial_t u \text{ en } L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases} \tag{1.22}$$

Por comodidad, de ahora en adelante denotaremos los índices $m_j \equiv m$. Fijemos un valor natural N y sea $v \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ de la forma $v(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha^k(t) w_k$, donde $\left\{\alpha^k(t)\right\}_{k=1}^{N}$ son funciones suaves $C^1([0,T])$. Escogemos ahora $m > N$. Por linealidad en la ecuación (1.7), de nuevo multiplicando por $\alpha^k(t)$ y sumando en $k = 1, \dots, N$, obtenemos que

$$\langle \partial_t u_m, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u_m, v; t] = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \tag{1.23}$$

Integrando ahora en la variable temporal y pasando a límite débil, encontramos que

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u, v; t] dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt. \tag{1.24}$$

Esta igualdad es cierta para $v \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ con la forma detallada anteriormente. Por densidad, este resultado se extiende a cualquier $v \in L^2([0,T];H_0^1(U))$. Por tanto, y dado que podemos escoger N arbitrariamente grande, se tiene que

$$\langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u, v; t] = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \tag{1.25}$$

para todo $v \in H_0^1(U)$ y e.c.t. $0 \leq t \leq T$. Por la proposición 1.11 se tiene que $u \in C([0,T];L^2(U))$, por lo que tiene sentido hablar de su valor en $t = 0$. Necesitamos probar $u(0) = g$. De (1.24) se tiene que, integrando por partes en el primer término,

$$\int_0^T -(\partial_t v, u)_{L^2} + B[u, v; t] dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + (u(0), v(0))_{L^2} \tag{1.26}$$

para cualquier $v \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ que cumpla $v(T) = 0$. Análogamente, integrando por partes (1.23) obtenemos que

$$\int_0^T -(\partial_t v, u_m)_{L^2} + B[u_m, v; t] dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + (u_m(0), v(0))_{L^2}. \tag{1.27}$$

Dado que $u_m(0) \to g$ en $L^2(U)$, tomando límite débil (recordando que convergencia fuerte implica convergencia débil) en (1.27) se tiene que

$$\int_0^T -(\partial_t v, u)_{L^2} + B[u,v;t]dt = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + (g, v(0))_{L^2}. \tag{1.28}$$

Como el valor de $v(0)$ es arbitrario, comparando (1.28) y (1.26) se concluye que $u(0) = g$. □

Esto concluye la existencia de soluciones débiles en este problema. Para este caso también es posible probar la unicidad de manera sencilla, lo cual se expone en este último teorema.

Teorema 1.19. *La solución débil de* (1.2) *es única.*

Demostración: Gracias a la linealidad es suficiente probar que, si $f \equiv g \equiv 0$, entonces la única solución es $u \equiv 0$. Para ello, tomamos $v = u$ en la ecuación (1.25) (con f=0). Resulta entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||_{L^2}^2\right) + B[u,u;t] = \langle \partial_t u, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[u,u;t] = 0. \tag{1.29}$$

De la proposición 1.15 se tiene que

$$\beta||u||_{H_0^1}^2 \leq B[u,u;t] + \gamma||u||_{L^2}^2,$$

que sumado a la ecuación (1.29) resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||_{L^2}^2\right) + B[u,u;t] + \beta||u||_{H_0^1}^2 \leq B[u,u;t] + \gamma||u||_{L^2}^2.$$

Al ser la norma positiva, se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||u||_{L^2}^2\right) \leq \gamma||u||_{L^2}^2.$$

Por la desigualdad de Gronwall, esto implica que $||u||_{L^2}^2 \equiv 0$ y por tanto $u \equiv 0$. □

Capítulo 2

Ecuaciones de Navier Stokes

El objetivo de este capítulo será, siguiendo pasos análogos a los dados en el capítulo anterior, demostrar la existencia de soluciones débiles para las ecuaciones de evolución de Navier Stokes. Estas ecuaciones modelan el movimiento de un fluido, por lo que son fundamentales para el estudio de corrientes atmosféricas, corrientes oceánicas o cualquier fenómeno que involucre fluidos newtonianos, que son fluidos con viscosidad constante.

Respecto al capítulo anterior, encontramos la dificultad de trabajar con una incógnita vectorial (velocidad) que antes era escalar (temperatura). Las ecuaciones de Navier Stokes son no lineales, lo que supone otra dificultad añadida. Tendremos una nueva incógnita, que es la presión. Además, el objetivo será demostrar la existencia en los espacios físicamente relevantes $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, mientras que en el capítulo anterior hemos considerado abiertos acotados de dimensión arbitraria. En general trabajaremos con abiertos acotados, con frontera regular y conexos $U \subset \mathbb{R}^n$, donde $n = 2, 3$, representará la dimensión.

Aprovechando la notación correspondiente a producto escalar, expresaremos el operador divergencia como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Análogamente, usaremos frecuentemente la notación

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

entendiéndose como un escalar que produce derivadas sobre el término que multiplique.

Nuestro objetivo, pues, será encontrar una función vectorial $\mathbf{u} : U \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ y una función escalar $p : U \times [0, T] \to \mathbb{R}$ que satisfagan

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(x,t) - \Delta \mathbf{u}(x,t) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) = \mathbf{f}(x,t), \quad (x,t) \in U \times (0,T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in U \times (0,T), \\ \mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial U \times (0,T), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in U, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde las funciones vectoriales $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{f}$ son dadas. La imposición $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ implica que el fluido es incompresible. Esta condición es equivalente a que dominios que evolucionan con la velocidad del fluido conservan el volumen en $\mathbb{R}^3$ o el área en $\mathbb{R}^2$ (ver [12]). Cuando una variable aparece en negrita, se entiende que es vectorial. El término del laplaciano puede venir multiplicado por una constante que representa la viscosidad del fluido. En nuestro caso tomamos viscosidad $\mu = 1$ por comodidad, siendo análogo el desarrollo para cualquier otro valor positivo. En general, seguiremos el desarrollo de los libros [14] y [4].

2.1. Planteamiento del problema

Vamos a comenzar por introducir los espacios involucrados en el problema. Dado que vamos a trabajar con vectores, haremos uso de los espacios $\mathbf{L}^2(U) \equiv (L^2(U))^n$ y $\mathbf{H}^1_0(U) \equiv (H^1_0(U))^n$. Como es habitual al trabajar con espacios de Sobolev, consideramos el espacio $\mathcal{D}(U)$, también denotado como $C^\infty_c(U)$, y denotaremos $\mathcal{D}'$ su espacio dual, el espacio de las distribuciones. Consideraremos $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in (\mathcal{D}(U))^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$. Denotaremos por H el cierre de $\mathcal{V}$ en $\mathbf{L}^2(U)$ y V como el cierre de $\mathcal{V}$ en $\mathbf{H}^1_0(U)$. Al ser por definición subespacios cerrados de espacios de Hilbert, se tiene que V, H son espacios de Hilbert. Los distintos espacios heredan sus normas (definidas en el capítulo anterior) de los espacios en los que tomamos cierre.

Dado que muchos de los resultados que vamos a presentar son ciertos en dimensión finita arbitraria, mientras no se especifique lo contrario se trabajará con $U \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, aunque los resultados estén orientados a los casos $n = 2, 3$. Al ser siempre el mismo espacio de trabajo muchas veces omitiremos el espacio U, entendiéndose que es el espacio de las x.

Un resultado fundamental en el estudio del problema variacional es la siguiente proposición. A partir de ahora, debido a la recurrente aparición de derivadas parciales junto a subíndices, denotaremos

$$D_i f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

es decir, D_i es el operador derivada parcial respecto a la i-ésima coordenada.

Proposición 2.1. *Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ con $f_i \in \mathcal{D}'(U), i = 1, \ldots, n$. Entonces $\boldsymbol{f} = \nabla p$ para algún $p \in \mathcal{D}'(U)$ si y sólo si $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.*

Demostración: $\Rightarrow$. Sea $\mathbf{f} = \nabla p$. Entonces, gracias a las propiedades de la derivada distribucional y a la divergencia nula de $\boldsymbol{v}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle \nabla p, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i p, v_i\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\sum_{i=1}^{n} \langle p, D_i v_i\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= -\langle p, \nabla\cdot \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$.El recíproco es un resultado mucho más profundo que no vamos a demostrar. Para más detalles, consultar el primer capítulo de [14] y [13]. $\square$

Los cálculos anteriores muestran que al estudiar el problema variacional el término correspondiente a la presión se anula, reduciéndose el problema a calcular únicamente $\mathbf{u}$. Gracias a la proposición anterior, dada una solución al problema variacional (que presentaremos a continuación) existe p que satisface el problema (2.1). Por densidad, podemos plantear el problema variacional conservando esta propiedad en el espacio V.

Para ilustrar estas ideas en forma matemática, veamos que reordenando la ecuación (2.1) se tiene que

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f} = -\nabla p, \quad (x,t) \in U \times (0,T).$$

Por lo que si conseguimos que

$$\langle \partial_t \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \ \ e.c.t. \ \ t \in (0,T), \tag{2.2}$$

con

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f} \in \mathcal{D}'(U),$$

gracias a la proposición 2.1 tendremos una solución al problema de Navier Stokes. Además, se puede demostrar que si los miembros de (2.2) pertenecen a $H^{-1}(U)$ o a $L^2_{loc}(U)$, entonces para la presión se cumple $p \in L^2_{loc}(U)$ (ver [14], página 15). Esta es la formulación variacional de las ecuaciones de Navier Stokes. La formulación rigurosa se dará posteriormente, cuando sepamos a qué espacio debe pertenecer cada término.

Nuestro próximo objetivo es, por tanto, probar que si $\mathbf{u} \in V$ entonces cada término que aparece en (2.2) pertenecen en casi todo t a V', espacio dual de V; o en $\mathcal{V}'$, el dual de $\mathcal{V}$.

A partir de ahora, denotaremos

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w})_{(L^2)^n}, \tag{2.3}$$

con lo que podemos expresar $((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(L^2)^n} \equiv b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Este término no lineal puede no tener sentido para cualquier $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, por lo que a continuación distinguiremos los casos $n = 2, 3$ y demostraremos que el término es continuo en ambas dimensiones.

Para demostrar la continuidad del operador b, demostraremos en primer lugar una generalización de la desigualdad de Hölder.

Proposición 2.2. *Sean $r \in [1, \infty]$ y $p_1, p_2, \dots, p_l \in [1, \infty]$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$$

Entonces, $|| \prod_{k=1}^{l} f_k ||_{L^r} \leq \prod_{k=1}^{l} ||f_k||_{L^{p_k}}$. *En particular, si* $f_k \in L^{p_k}$ $\forall k = 1, \dots, l \Rightarrow \prod_{k=1}^{l} f_k \in L^r$.

Demostración: Nos basaremos en la desigualdad de Hölder y la técnica de inducción. El caso base $l = 1$ es trivial. Supongamos el resultado cierto para $l - 1$. Sin pérdida de generalidad, tenemos $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_l$. Distinguiremos dos casos:

-Caso 1: $p_l = \infty$. Entonces el factor $p_l^{-1} = 0$. Acotando f_l por su supremo y aplicando la hipótesis de inducción, tenemos trivialmente

$$||f_1 f_2 \dots f_l||_{L^r} \leq ||f_1 f_2 \dots f_{l-1}||_{L^r} ||f_l||_{L^\infty} \leq \prod_{k=1}^{l} ||f_k||_{L^{p_k}}.$$

-Caso 2: Si $p_l \neq \infty$ necesariamente $r \neq \infty$, y los valores $p := \dfrac{p_l}{p_l - r}, q := \dfrac{p_l}{r}$ son conjugados en $(1, \infty)$. Por la desigualdad de Hölder,

$$|| \prod_{k=1}^{l} f_k ||_{L^r}^r = |||f_1 f_2 \dots f_{l-1}|^r |f_l|^r||_{L^1} \leq |||f_1 f_2 \dots f_{l-1}|^r||_{L^p} |||f_l|^r||_{L^q}.$$

Elevando a $1/r$, la expresión queda como $||f_1 f_2 \dots f_l||_{L^r} \leq ||f_1 f_2 \dots f_{l-1}||_{L^{pr}} ||f_l||_{L^{qr}}$. Como $qr = p_l$ y $\sum_{k=1}^{l-1} 1/p_k = 1/r - 1/p_l = (p_l - r)/rp_l = 1/pr$, utilizando la hipótesis de inducción queda probado el resultado. □

Con esta desigualdad y las siguientes proposiciónes sobre espacios de Sobolev, podremos demostrar la continuidad del operador b.

Proposición 2.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $u \in H_0^1(U)$, entonces para cualquier $n \geq 3$ se tiene*

$$||u||_{L^k(U)} \leq c(U) ||u||_{H_0^1},$$

para $k = 2n/(n - 2)$.

Proposición 2.4. *Sea $U \in \mathbb{R}^2$. Si $u \in H_0^1(U)$, entonces se tiene*

$$||u||_{L^k(U)} \leq c(U) ||u||_{H_0^1},$$

para cualquier $k \in [1, \infty)$.

Demostración: Puede verse en [1], página 85.

Para el caso $n = 3$, la proposición 2.4 nos da $k = 6$. Esta proposición implica que si $\mathbf{u} \in V \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{L}^6$. Al ser $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$, se tiene también $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2$ y por tanto, por interpolación $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q$ con $q \in [2, 6]$.

Proposición 2.5. *El operador $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ está bien definido y es trilineal y continuo en $\boldsymbol{H}_0^1 \times \boldsymbol{H}_0^1 \times \boldsymbol{H}_0^1$, para $n = 2, 3$.*

Demostración: Observemos que podemos escribir

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w})_{L^2} = \sum_{i,j=1}^{n}\int u_i(D_i v_j)w_j,$$

donde se tiene trivialmente que b es trilineal. Como $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$, por las proposiciones anteriores se tiene que para $n = 2, 3$, $u_i \in L^4$. Por ser $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$, se tiene que $D_i v_j \in L^2$. Por el mismo motivo que u_i, se tiene también que $w_j \in L^4$.

Dado que $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = 1$, la proposición 2.2 implica que $u_i(D_i v_j)w_j \in L^1$ y que

$$\left|\int u_i(D_i v_j)w_j\right| \leq ||u_i||_{L^4}||D_i v_j||_{L^2}||w_j||_{L^4} \leq c^2(U)||\mathbf{u}||_{\mathbf{H}_0^1}||\mathbf{v}||_{\mathbf{H}_0^1}||\mathbf{w}||_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Por lo que el operador $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ está bien definido, y al ser un sumatorio finito se tiene que

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left|\int u_i(D_i v_j)w_j\right| \leq c(n)c^2(U)||\mathbf{u}||_{\mathbf{H}_0^1}||\mathbf{v}||_{\mathbf{H}_0^1}||\mathbf{w}||_{\mathbf{H}_0^1},$$

lo que demuestra la continuidad del operador para dimensión 2 y 3. □

Corolario 2.6. *Para cualquier abierto medible $U \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ es una forma trilineal y continua en $V \times V \times V$.*

Demostración: Por definición, $V \subset \mathbf{H}_0^1$. □

Lema 2.7. $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$. *Además,* $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}), \ \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$

Demostración: Por densidad, será suficiente demostrarlo para $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. En este caso, se cumple que

$$\int u_i D_i v_j v_j = \int u_i D_i \frac{(v_j)^2}{2} = -\frac{1}{2}\int D_i u_i (v_j)^2.$$

Por tanto, el doble sumatorio de b resulta

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n}\int u_i(D_i v_j)v_j = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int D_i u_i(v_j)^2 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int (\overset{=0}{\nabla\cdot\mathbf{u}})(v_j)^2 = 0.$$

Para la otra afirmación, utilizando la linealidad de b y el resultado previo tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= b(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}) = b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\ &= b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{w}) \\ &= b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}). \quad \square \end{aligned}$$

Por último, introduciremos un resultado importante sobre la regularidad de b que será necesario al estudiar el problema completo.

Proposición 2.8. *Si $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$, entonces*

$$\langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{V',V} := b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2)^n} \tag{2.4}$$

$\forall \boldsymbol{v} \in V, e.c.t.\ t \in [0,T]$ satisface $B\boldsymbol{u} \in L^1(0,T;V')$.

Demostración: Por ser b trilineal y continuo, se tiene trivialmente que $B\mathbf{u} \in V'$ con $||B\mathbf{u}||_{V'} \leq c||u||_V^2 \ \ \forall u \in V, e.c.t.\ \ t$. Integrando esta desigualdad entre 0 y T, obtenemos

$$\int_0^T ||B\mathbf{u}(t)||_{V'}dt \leq c\int_0^T ||u(t)||_V^2 dt,$$

y por hipótesis el último término es acotado, lo que termina la demostración. $\square$

Una vez estudiado el término no lineal, queda comprobar que si $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ entonces los términos lineales pertenecen a $L^1(0,T;V')$. Para el dato $\mathbf{f}$, asumiremos que $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$ por analogía con el capítulo anterior. También se puede imponer $\mathbf{f} \in L^1(0,T;H)$ y tendríamos un desarrollo análogo. Este caso puede verse con detalle en [14].

Proposición 2.9. *Para cualquier $\boldsymbol{u} \in V$, se tiene que la forma $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) := \langle -\Delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{V',V}$ es lineal y continua en V.*

Demostración: La linealidad se tiene directamente por ser el producto de dualidad lineal. Para ver la continuidad, solo tenemos que acotar. Integrando por partes y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}((\mathbf{u},\mathbf{v})) = \langle -\Delta\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{V',V} &= -\sum_{i,j=1}^n \langle D_jD_ju_i, v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i,j=1}^n \int D_ju_iD_jv_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int |\nabla u_i|^2)\right)^{1/2}\left(\int |\nabla v_i|^2)\right)^{1/2} \leq ||\mathbf{u}||_V||\mathbf{v}||_V. \quad \square\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar que el elemento $-\Delta\mathbf{u} \in V'$. Por tanto, Δ representa una aplicación lineal y continua de V en V'. Ahora vamos a demostrar que el término $\Delta\mathbf{u}$ pertenece al espacio deseado.

Proposición 2.10. *Si $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ entonces $\Delta\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$.*

Demostración: El resultado es consecuencia de que Δ sea una aplicación lineal y continua de V en V'. Más explícitamente, usando el resultado anterior tenemos que

$$\int_0^T ||\Delta\mathbf{u}||_{V'}^2 \leq \int_0^T ||\mathbf{u}||_V^2 \leq C. \quad \square$$

Queda tratar el término temporal $\partial_t\mathbf{u}$. Gracias a haber tratado el resto de términos este se consigue de la ecuación 2.2

$$\langle \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} = 0 \Rightarrow \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} = \langle \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} ,$$

$\forall \mathbf{v} \in V, t \in (0,T)$. Es decir, que $\partial_t \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{f}$ y como cada sumando de la derecha pertenece a $L^1(0,T;V')$ o a $L^2(0,T;V') \subset L^1(0,T;V')$, se tiene que $\partial_t \mathbf{u} \in L^1(0,T;V')$. En la contención hemos usado que el intervalo $(0,T)$ es acotado. Una vez analizados todos los términos, presentamos el problema variacional completo. Como último detalle, observamos que

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} ,$$

(ambos términos son escalares). Ya podemos definir qué vamos a entender por solución débil al problema.

Definición 2.1. *Sea $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T,V')$ y sea $\boldsymbol{u}_0 \in H$. Diremos que una función $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \cap C([0,T];V')$, con $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^{4/3}(0,T;V')$ es solución débil del problema de Navier-Stokes si satisface*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{V',V} = \langle \boldsymbol{f} + \Delta \boldsymbol{u} - B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{V',V} , \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, e.c.t. \ t \in (0,T) \\ \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \\ \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{V',V} := b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{(L^2)^n}. \end{cases} \tag{2.5}$$

El operador B está definido como en la ecuación (2.4). Nótese que la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ viene implícita en el espacio al que pertenece $\mathbf{u}$. Para que la condición inicial tenga sentido necesitamos algún tipo de continuidad para la solución, lo cual se tratará en la siguiente sección.

2.2. Continuidad y compacidad

En esta sección abordaremos algunos resultados enfocados a demostrar la existencia de soluciones débiles, pero no trataremos el problema directamente hasta la siguiente sección. Empezaremos por demostrar que tenemos continuidad en la solución, lo cual es necesario si queremos que la condición inicial tenga sentido.

Teorema 2.11. *Sea X un espacio de Banach con dual X' y sean $g, u \in L^1(0,T;X)$. Entonces son equivalentes:*

1. *u es en casi todo igual a una primitiva de g. Es decir,*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \quad \xi \in X, e.c.t. \ t \in [0,T]$$

2. *Para cada función test $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$ se tiene que*

$$\int_0^T u(t)\phi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\phi(t)dt \quad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right)$$

3. *Para todo $\eta \in X'$ se tiene que $\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X',X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X',X}$ en $(0,T)$, en el sentido de las distribuciones.*

En particular, con estas condiciones se tiene que $u \in C([0,T];X)$.

Demostración: La continuidad se deduce, por ejemplo, de $1.$, ya que u es la primitiva de una función integrable. Como ϕ se anula en a y b, integrando por partes se obtiene que $1. \Rightarrow 2., 3.$. Demostraremos a continuación $3. \Rightarrow 2.$ y después $2. \Rightarrow 1.$.

$3. \Rightarrow 2.$ Suponiendo que $3.$ es cierto, $\langle u(t), \eta\rangle$ es función de t e integrando por partes se cumple que

$$\int_0^T \langle u(t), \eta\rangle \phi'(t)dt = -\int_0^T \langle g(t), \eta\rangle \phi(t)dt.$$

Podemos agrupar todo a la izquierda de la ecuación. Al ser ϕ, ϕ' escalares en cada instante de tiempo, podemos agruparlos respectivamente con g, u dentro del producto dual, obteniendo

$$\int_0^T \langle u(t)\phi'(t), \eta\rangle dt + \int_0^T \langle g(t)\phi(t), \eta\rangle dt = 0.$$

Dado que las integrales están bien definidas, por linealidad podemos intercambiar integrales con productos y obtener

$$\left\langle \int_0^T u(t)\phi'(t)dt + \int_0^T g(t)\phi(t), \eta \right\rangle dt = 0 \ \ \forall \eta \in X'.$$

Por tanto, se tiene

$$\int_0^T u(t)\phi'(t)dt + \int_0^T g(t)\phi(t) = 0,$$

satisfaciendo 2.

$2. \Rightarrow 1.$. Para probar la implicación restante, comenzamos por simplificar el enunciado con el cambio de variable

$$u_0(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad v(t) = u(t) - u_0(t).$$

Integrando por partes se comprueba que

$$\int_0^T v(t)\phi'(t)dt = \int_0^T \left(u(t) - \int_0^t g(s)\right)\phi'(t)dt = -\int_0^T (-g(t) + g(t))\phi(t)dt = 0 \tag{2.6}$$

para cualquier $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$, por lo que $g = 0$. El objetivo ahora es probar que v es un elemento constante de X. Para ello, tomamos $\phi_0 \in \mathcal{D}((0,T))$ tal que $\int_0^T \phi_0(t)dt = 1$. Con esta propiedad, cualquier función $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$ cumple que

$$\int_0^T (\phi(t) - \lambda\phi_0(t))dt = 0, \text{ con } \lambda = \int_0^T \phi(t)dt.$$

Por ser nula en un entorno de 0 y T, se tiene que la primitiva de $\phi(t) - \lambda\phi_0(t) \in \mathcal{D}((0,T))$, y la denotaremos por ψ. Se cumple entonces que $\phi - \lambda\phi_0 - \psi' = 0$ en $\mathcal{D}((0,T))$. Por tanto, gracias a la ecuación (2.6) se tiene que

$$\int_0^T (\phi(t)-\lambda\phi_0(t)-\psi'(t))v(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \phi(t)v(t)dt = \int_0^T \phi_0(t)v(t)dt \int_0^T \phi(t)dt.$$

Denotando ahora $\xi = \int_0^T \phi_0(t)v(t)dt$, agrupando términos se tiene que

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\phi(t)dt = 0, \ \forall \phi \in \mathcal{D}((0,T)).$$

La arbitrariedad de ϕ demuestra que $v(t) = \xi \ \ e.c.t. \ \ t \in (0,T)$. $\square$

Para nuestro problema, al ser V un espacio de Hilbert se tiene en particular que es Banach y reflexivo, y tomando $X \equiv V'$ se tiene que $X' \equiv V$ y se cumple que $\mathbf{u}$ satisface la condición 3. y las hipótesis del teorema, por lo que

$$\mathbf{u} \in C([0,T]; V').$$

El término no lineal dificulta el problema, ya que la convergencia débil no es suficiente para probar que, si tomamos una sucesión $\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$ entonces $B\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$ por no ser una aplicación lineal en $\mathbf{u}$. Por ello, abordaremos a continuación resultados que permitan probar la convergencia deseada. Empecemos por un lema previo.

Lema 2.12. *Consideremos tres espacios de Banach reflexivos X_1, su dual X_1' y X_0 tales que $X_1 \hookrightarrow X_0$ es una inclusión compacta y $X_0 \hookrightarrow X_1'$ es una inclusión continua. Denotaremos sus normas como $||\cdot||_{X_1}, ||\cdot||_{X_0}$ y $||\cdot||_{X_1'}$ respectivamente. Entonces, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists C_\epsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in X_1$ se cumple*

$$||x||_{X_0} \leq \varepsilon ||x||_{X_1} + C_\epsilon ||x||_{X_1'}.$$

Demostración: Supongamos que el resultado es falso, y lleguemos a un absurdo. En ese caso podemos encontrar $x \in X_1$ que cumplen la desigualdad inversa para cualquier valor fijo de C_ϵ, por lo que existe una sucesión $\{x_m\} \subset X_1$ tal que

$$||x_m||_0 \geq \varepsilon ||x_m||_{X_1} + m||x_m||_{X_1'}.$$

Definiendo ahora $y_m = \dfrac{x_m}{||x_m||_{X_1}} \in X_1$, la desigualdad anterior resulta

$$||y_m||_{X_0} \geq \varepsilon + m||y_m||_{X_1'}$$

con $||y_m||_{X_1} = 1$ por definición.

Al ser X_1 reflexivo, la bola unidad es débilmente compacta. Se tiene entonces que existe una subsucesión $y_{m'} \rightharpoonup y \in X_1$. Denotaremos $y_{m'} = y_m$ por comodidad. Al ser la inclusión $X_1 \hookrightarrow X_0$ compacta, existe una subscesión de $\{y_m\}$ que converge en X_0. De nuevo denotaremos dicha subsucesión como $\{y_m\}$. Dado que $y \in X_1 \subset X_0$ y la convergencia fuerte implica la débil, necesariamente se tiene que $y_m \to y$ fuerte en X_0. Como $||y_m||_{X_0} \geq m||y_m||_{X_1'}$ y $||y_m||_{X_0}$ es acotado se tiene que $||y_m||_{X_1'} \to 0$. Por tanto, $||y||_{X_1'} = 0$ y debe tenerse $y = 0$, pero $||y_m||_{X_0} \geq \varepsilon \Rightarrow ||y||_{X_0} \geq \varepsilon > 0$, lo cual es contradictorio. □

Con ayuda de este lema, podemos probar un resultado que nos aporta convergencia fuerte. Necesitaremos también el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Entonces, la inyección $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ es compacta, así como la inyección $L^2 \hookrightarrow H^{-1}$.*

Demostración: Este teorema es un caso particular del teorema de Rellich, cuya demostración puede verse en [7], página 200. □

Teorema 2.14. *Sea una sucesión $\{f^k\} \subset L^2(0,T;H_0^1) \cap C([0,T];L^2)$ cumpliendo las condiciones*

- $||f^k||_{L^2_T(H_0^1)} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N},$
- $||f^k||_{L^\infty_T(L^2)} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N},$
- $||f^k(t_2) - f^k(t_1)||_{H^{-1}} \leq L|t_2 - t_1|^\alpha,$

para algún $M, L > 0, 0 < \alpha \leq 1$. Entonces, existe una subsucesión $\{f^{k_j}\}$ y una función $f \in L^2(0,T;H_0^1) \cap L^\infty(0,T;L^2)$ con $f^{k_j} \to f$ en $L^2(0,T;L^2)$.

Demostración: Puede verse un resultado más general en [12] (teorema de Lions-Aubin). La prueba sigue una estrategia similar a un resultado del mismo tipo en [9].

Al ser el espacio $L^2(0,T;H_0^1)$ reflexivo, por ser la sucesión acotada en este espacio existe una subsucesión

$$f^{k_j} \rightharpoonup f \in L^2(0,T;H_0^1).$$

Por ser $L^\infty(0,T;L^2)$ el dual de $L^1(0,T;L^2)$, que es separable, existe una subsucesión de $\{f^{k_j}\}$ (que denotaremos igual por abuso de notación) que satisface

$$f^{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} f \in L^\infty(0,T;L^2).$$

Nótese que al ser $H_0^1 \subset L^2$, por unicidad de límite debe tenerse que las f son iguales, y por eso las denotamos igual. Ya tenemos un candidato para cumplir la convergencia fuerte. Vamos a demostrar que la norma de la diferencia tiende a 0.

Por el lema 2.12, $\forall \eta > 0, \;\; \exists C_\eta$ tal que

$$||f^{k_j} - f||_{L^2}(t) \leq \eta ||f^{k_j} - f||_{H_0^1}(t) + C_\eta ||f^{k_j} - f||_{H^{-1}}(t).$$

Tomando norma en $L^2(0,T)$, por la desigualdad triangular se tiene que

$$||f^{k_j} - f||_{L_T^2(L^2)} \leq \eta ||f^{k_j} - f||_{L_T^2(H_0^1)} + C_\eta ||f^{k_j} - f||_{L_T^2(H^{-1})}. \tag{2.7}$$

Por ser $||f^{k_j}||_{L_T^2(H_0^1)} \leq M$, y por ser la norma del límite menor o igual al supremo del límite de la norma, $||f||_{L_T^2(H_0^1)} \leq M$. Aplicando la desigualdad triangular, se tiene que $||f^{k_j} - f||_{L_T^2(H_0^1)} \leq 2M$. Para el otro sumando, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$||f^{k_j} - f||_{L_T^2(H^{-1})} \leq ||f^{k_j} - f||_{L_T^\infty(H^{-1})} ||1||_{L_T^2} = T^{1/2} ||f^{k_j} - f||_{L_T^\infty(H^{-1})}.$$

Con estas cotas, la desigualdad (2.7) proporciona

$$||f^{k_j} - f||_{L_T^2(L^2)} \leq 2M\eta + C_\eta T^{1/2} ||f^{k_j} - f||_{L_T^\infty(H^{-1})}.$$

Como η es arbitrario, si demostramos que $||f^{k_j} - f||_{L_T^\infty(H^{-1})} \to 0$, habremos terminado la demostración. Consideremos los tiempos $\mathbb{Q} \cap [0,T] = \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Este conjunto es denso en $[0,T]$ y numerable. Al ser $\{f^k\} \subset C([0,T]; L^2)$, la sucesión $\{f^{k_j}(t_1)\} \subset L^2$. Por el teorema 2.13, existe una subsucesión $f^{k_{j_1}}(t_1) \to f(t_1)$ en H^{-1}. Repitiendo el razonamiento, podemos tomar una subsucesión $\{f^{k_{j_2}}\} \subset \{f^{k_{j_1}}\}$ tal que $f^{k_{j_2}}(t_2) \to f(t_2)$ en H^{-1}. Continuando con el procedimiento, para cada i tomamos una subsucesión $\{f^{k_{j_i}}\} \subset \{f^{k_{j_{i-1}}}\}$ de forma que $f^{k_{j_i}}(t_i) \to f(t_i)$ en H^{-1}. Tomamos ahora la sucesión diagonal que toma el elemento i-ésimo de la sucesión i-ésima $\{f^{k_{j'}}\}$. Por comodidad, denotaremos esta sucesión como $\{f^{k_j}\}$. Esta sucesión cumple que

$$f^{k_j}(t_i) \to f(t_i) \;\text{ en } H^{-1} \;\; \forall i. \tag{2.8}$$

Por ser el intervalo $[0,T]$ compacto, de cualquier recubrimiento por abiertos podemos extraer un subrecubrimiento finito. Por ser $\{t_i\}$ denso, un conjunto de abiertos centrados en ellos cubre el intervalo entero. Por tanto, para cualquier $\delta > 0$ existe un recubrimiento finito de la forma

$$[0,T] \subset \bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \left(t_{i_l} - \frac{\delta^{1/\alpha}}{3^{1/\alpha} L^{1/\alpha}}, t_{i_l} + \frac{\delta^{1/\alpha}}{3^{1/\alpha} L^{1/\alpha}}\right). \tag{2.9}$$

Por la propiedad (2.8), existe K_l tal que $\forall k_{j_1}, k_{j_2} \geq K_l$ se tiene

$$||f^{k_{j_2}}(t_{i_l}) - f^{k_{j_1}}(t_{i_l})||_{H^{-1}} < \frac{\delta}{3}.$$

Tomando ahora $K = \text{máx}\{K_1, \dots, K_{\mathcal{L}}\}$, se tiene que $\forall k_{j_1}, k_{j_2} \geq K$,

$$\begin{aligned} ||f^{k_{j_1}}(t) - f^{k_{j_2}}(t)||_{H^{-1}} &\leq ||f^{k_{j_1}}(t) - f^{k_{j_1}}(t_{i_l})||_{H^{-1}} + ||f^{k_{j_1}}(t_{i_l}) - f^{k_{j_2}}(t_{i_l})||_{H^{-1}} \\ &\quad + ||f^{k_{j_2}}(t_{i_l}) - f^{k_{j_2}}(t)||_{H^{-1}} \\ &\leq L|t - t_{i_l}|^\alpha + \frac{\delta}{3} + L|t - t_{i_l}|^\alpha \end{aligned}$$

para cualquier t_{i_l} con $l = 1, \dots, \mathcal{L}$. De (2.9) se deduce que para cualquier t, podemos imponer $|t - t_{i_l}| < \dfrac{\delta^{1/\alpha}}{3^{1/\alpha} L^{1/\alpha}}$ tomando el índice i_l apropiado. Con esto, podemos acotar

$$||f^{k_{j_1}}(t) - f^{k_{j_2}}(t)||_{H^{-1}} \leq 3\frac{\delta}{3} = \delta,$$

para cualquier valor de t, por lo que la sucesión $\{f^{k_j}\}$ es de Cauchy en $L^\infty_T(H^{-1})$ y por ser un espacio de Banach se cumple que $f^{k_j} \to f$ en $L^\infty_T(H^{-1})$. $\square$

Nuestros siguientes pasos serán dar resultados que permitan aplicar este teorema. Construir una sucesión y demostrar que es acotada se hará con ayuda del método de Galerkin, por lo que se abordará en la siguiente sección.

En particular, ya vimos al principio del capítulo que los espacios V, H son Hilbert por ser subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. Esto implica que son Banach y reflexivos.

2.3. Existencia de soluciones débiles

Aplicaremos el método de Galerkin de forma análoga al capítulo anterior con la ecuación del calor, y veremos cómo resolver las dificultades añadidas. El comienzo es similar: al ser V un subespacio del espacio métrico separable $\mathbf{H}^1_0$ se tiene que V es separable. Al ser $\mathcal{V}$ denso en V, podemos tomar un conjunto de elementos $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots$ de $\mathcal{V}$ que forman una base de V. Por el algoritmo de Gram-Schmidt, podemos imponer que la base sea ortonormal en $\mathbf{L}^2$.

Pretendemos encontrar, para cada valor de $m \in \mathbb{N}$, una solución de la forma

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^m g^i_m(t)\mathbf{w}_i, \tag{2.10}$$

que satisfaga el sistema

$$\begin{cases} \langle \partial_t \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j \rangle_{V',V} + \langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j \rangle_{V',V} + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle_{V',V}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad e.c.t.\ \ t \in [0,T], j = 1, \dots, m. \\ \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \quad \mathbf{u}_{0m} = \displaystyle\sum_{i=1}^m g^i_m(0)\mathbf{w}_i; \end{cases} \tag{2.11}$$

por tanto $\mathbf{u}_{0m}$ es la proyección en H de $\mathbf{u}_0 \in H$ en el espacio generado por $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^m$. Ya hemos visto en la sección 1 de este capítulo que todos los términos tienen sentido y son lineales en sus componentes (nótese que en el término no lineal aparece $\mathbf{u}_m$ dos veces). Teniendo en cuenta la ecuación (2.10), la ecuación (2.11) se traduce en un sistema diferencial (no lineal) para los $\{g_m^i\}_{i=1}^m$. En concreto, la derivada se escribe como

$$\langle \partial_t \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^m \langle \partial_t g_m^i(t)\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)_{(L^2)^n} \partial_t g_m^i(t) = \partial_t g_m^j(t).$$

Para la derivada de segundo orden, por linealidad tenemos que

$$\langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^m \langle -\Delta\big(g_m^i(t)\mathbf{w}_i\big), \mathbf{w}_j\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^m \langle -\Delta \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle_{V',V}\, g_m^i(t).$$

El término no lineal también se puede expresar en función de la base, gracias a la linealidad en cada componente

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) &= b\Big(\sum_{i=1}^m g_m^i(t)\mathbf{w}_i, \sum_{l=1}^m g_m^l(t)\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j\Big) = \\ &= \sum_{i=1}^m b\Big(\mathbf{w}_i, \sum_{l=1}^m g_m^l(t)\mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j\Big) g_m^i(t) = \sum_{i,l=1}^m b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) g_m^i(t) g_m^l(t). \end{aligned}$$

Para el dato inicial, tendremos en cuenta que $\mathbf{u}_m(0) = \sum_{i=1}^m g_m^i(0)\mathbf{w}_i$, por lo que $g_m^i(0) = (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_i)_{L^2} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i)_{L^2}$. Con esto, el sistema (2.11) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \partial_t g_m^j(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^m \langle -\Delta \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle_{V',V}\, g_m^i(t) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i,l=1}^m b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) g_m^i(t) g_m^l(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle_{V',V}, \quad t \in [0,T] \\ g_m^j(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_j) \end{cases} \tag{2.12}$$

para $j = 1, \ldots, m$. Observamos que los coeficientes que acompañan a las g_m^i son constantes, y que el último término de cada ecuación tiene regularidad L^2, luego es integrable. Al ser la derivada una función integrable, se tiene que los coeficientes son continuos en su intervalo de definición. El sistema (2.12) tendrá solución en un intervalo temporal $[0, t_m]$. Para mayor detalle, mirar el libro [2]. Queremos que la solución esté definida en el intervalo $[0, T]$, pero podría pasar que al tomar $m \to \infty$ ocurra que $t_m \to 0$. Nuestro primer objetivo será probar que esto no ocurre, y podremos hablar de solución al sistema en $[0, T]$ para cada valor de m y T fijo, pero arbitrario. Después tendremos que probar que dicha solución resuelve el problema de Navier Stokes cuando $m \to \infty$.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior con la ecuación del calor, multiplicamos la ecuación j-ésima de (2.11) por $g_m^j(t)$ y sumamos para $j = 1, \dots, m$. Como $\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^m g_m^i \mathbf{w}_i$, gracias a la linealidad de los términos resulta que

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_{V',V} + \langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_{V',V} \\ + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_{V',V}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Al tenerse que $\mathbf{u}_m \in V$, por el lema 2.7 se tiene que $b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = 0, \ \ \forall t \in [0, t_m]$. Podemos reescribir

$$2\langle \partial_t \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_{V',V} = \frac{d}{dt} ||\mathbf{u}_m(t)||^2_{(L^2)^n}.$$

Por otro lado, podemos definir una nueva norma $[[\cdot]]$ para elementos de V como

$$\langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_{V',V} = (\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{u}_m(t))_{(L^2)^{n^2}} \equiv [[\mathbf{u}_m(t)]]^2 \quad \forall \mathbf{u}_m \in V. \tag{2.14}$$

Al trabajar con abiertos acotados, por la desigualdad de Poincaré se tiene equivalencia de normas entre $||\mathbf{u}_m||_V$ y $[[\mathbf{u}_m]]$ para los elementos de $\mathbf{H}_0^1$ y, en particular, de V. Con esta nueva definición, la norma en V se escribe como $||\cdot||_V^2 \equiv ||\cdot||^2_{(L^2)^n} + [[\cdot]]^2$. Por equivalencia de normas, fijado un abierto U acotado existe una constante C tal que $||h||_V \leq C[[h]]$. La razón de introducir esta nueva norma es que aparece de manera natural en los cálculos, como se verá próximamente. También introduciremos la notación $||\cdot||_H^2 = ||\cdot||_{(L^2)^n}$ la norma en $\mathbf{L}^2$. Con esto, la ecuación (2.13) se escribe como

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m||_H^2 + 2[[\mathbf{u}_m]]^2 = 2\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_m\rangle_{V',V} \leq 2||\mathbf{f}||_{V'}||\mathbf{u}_m||_V \leq C||\mathbf{f}||_{V'}[[\mathbf{u}_m]]. \tag{2.15}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy (proposición 1.14) con $\epsilon = 1/C$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + [[\mathbf{u}_m(t)]]^2 \leq C_\epsilon ||\mathbf{f}(t)||^2_{V'}. \tag{2.16}$$

Luego

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \leq C' ||\mathbf{f}(t)||^2_{V'},$$

para un cierto $C' > 0$.

Integrando entre 0 y s, obtenemos que

$$||\mathbf{u}_m(s)||_H^2 - ||\mathbf{u}_m(0)||_H^2 \leq C' \int_0^s ||\mathbf{f}(t)||^2_{V'} dt \leq C' \int_0^T ||\mathbf{f}(t)||^2_{V'} dt, \tag{2.17}$$

para cualquier valor de $s \in [0, T]$. Acotando $||\mathbf{u}_m(0)||_H^2 \leq ||\mathbf{u}_0||_H^2$ tenemos la siguiente cota uniforme

$$\sup_{s\in[0,T]} ||\mathbf{u}_m(s)||_H^2 \leq ||\mathbf{u}_0||_H^2 + C'||\mathbf{f}||^2_{L^2_T(V')}, \tag{2.18}$$

para cualquier valor de m. Por tanto, podemos afirmar que la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$ permanece acotada en $L^\infty(0,T;H)$. En particular, la desigualdad anterior acota la norma de la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$ en $L^2(0,T;H)$ por ser $[0,T]$ un intervalo acotado. Si acotamos también el término $[[\mathbf{u}_m(t)]]$, tendremos una cota en V. Para ello, tomamos de nuevo la desigualdad (2.16) e integramos en [0,T], obteniendo entonces

$$||\mathbf{u}_m(T)||_H^2 - ||\mathbf{u}_m(0)||_H^2 + \int_0^T [[\mathbf{u}_m(t)]]^2 dt \leq C'||\mathbf{f}||^2_{L^2_T(V')}. \tag{2.19}$$

Aplicando la desigualdad triangular y la cota que da la desigualdad (2.18), obtenemos que

$$\int_0^T [[\mathbf{u}_m(t)]]^2 dt \leq 2||\mathbf{u}_0||_H^2 + 2C'||\mathbf{f}||^2_{L^2_T(V')}. \tag{2.20}$$

Por ello, se tiene que la sucesión $\{\mathbf{u}_m(t)\}$ permanece acotada en $L^2(0,T;V)$. Como no existe divergencia de la solución para ningún m, el intervalo de definición de solución al sistema (2.12) es $[0,T]$.

Por la ecuación (2.10) y como los coeficientes g_m^i son continuos, y las funciones $\mathbf{w}_j$ pertenecen a $\mathcal{V}$ y en particular a H, se tiene que $\{\mathbf{u}_m(t)\} \subset C([0,T];H)$.

Para poder aplicar el teorema 2.14 necesitamos probar que la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$ satisface que $||\mathbf{u}_m(t_2) - \mathbf{u}_m(t_1)||_{H^{-1}} \leq L|t_2 - t_1|^\alpha$, para algún $L > 0, 0 < \alpha \leq 1$. Probaremos esto en dos pasos. En primer lugar, necesitaremos una desigualdad.

Proposición 2.15. *Si $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $D_i h \in L^2(\mathbb{R}^n), i = 1,\ldots,n$, entonces $h \in L^4(\mathbb{R}^n)$ y además*

$$||h||_{L^4} \leq C||\nabla h||_{L^2}^{3/4} ||h||_{L^2}^{1/4}.$$

Demostración: Es un caso particular de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg. (ver [10]). □

Esta propiedad la usaremos para probar la siguiente proposición en el caso tridimensional.

Proposición 2.16. *La sucesión $\{\partial_t \boldsymbol{u}_m\} \subset L^{4/3}(0,T;V')$ está uniformemente acotada.*

Demostración: Ya hemos visto anteriormente que $\partial_t\mathbf{u}_m = \Delta\mathbf{u}_m - B\mathbf{u}_m + \mathbf{f}$ y que $\Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{f}$ pertenecen a $L^2(0,T;V') \subset L^{4/3}(0,T;V')$. Solo tenemos que trabajar con el término no lineal. Para el caso $n = 2$ se demostrará mediante un método distinto que, de hecho, $\{\partial_t\mathbf{u}_m\} \subset L^2(0,T;V')$. Esto se verá en el apartado de unicidad y de momento demostraremos el caso $n = 3$, que es el más complicado. Vamos a repetir los cálculos efectuados en la proposición 2.5, mejorando la cota. Como vamos a hacer uso de subíndices por el carácter vectorial del espacio V, en vez de usar la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$

vamos a comenzar haciendo cuentas con **u**, y serán análogas para cada elemento de la sucesión.

Por el lema 2.7, se tiene que

$$\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{V',V} = b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}) = -\sum_{i,j=1}^{n} \int u_i(D_i v_j)u_j, \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V.$$

Repitiendo las cuentas realizadas en la proposición 2.5, llegamos a que

$$|\int u_i(D_i v_j)u_j| \leq ||u_i||_{L^4}||u_j||_{L^4}||D_i v_j||_{L^2}. \tag{2.21}$$

Las funciones en $C_c^\infty(U)$ pueden extenderse por 0 en $\mathbb{R}^3$, satisfaciendo las hipótesis de la proposición 2.15. Por densidad podemos aplicar este resultado también a $u_i \in H_0^1$, por lo que

$$||u_i||_{L^4} \leq C||\nabla u_i||_{L^2}^{3/4}||u_i||_{L^2}^{1/4}.$$

Podemos acotar un término por

$$||\nabla u_i||_{L^2}^{3/4} \leq ||\mathbf{u}||_V^{3/4},$$

y el otro término como

$$||u_i||_{L^2}^{1/4} \leq ||\mathbf{u}||_H^{1/4}.$$

Aplicando estas cotas a la desigualdad (2.21), obtenemos

$$|\int u_i(D_i v_j)u_j| \leq C(||\mathbf{u}||_V^{3/4})^2(||\mathbf{u}||_H^{1/4})^2||D_i v_j||_{L^2} \leq C||\mathbf{u}||_V^{3/2}||\mathbf{u}||_H^{1/2}||\mathbf{v}||_V. \tag{2.22}$$

Como ya no tenemos que volver a usar subíndices, trabajaremos a partir de ahora con la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$. Todas las cuentas realizadas son válidas para cualquier término de la sucesión, por pertenecer a V. Al ser $\{\mathbf{u}_m\}$ acotada en $L^\infty(0,T;H)$, existe una constante C' tal que $||\mathbf{u}_m||_H^{1/2} \leq C'$ para cualquier m. Por ello, podemos acotar la norma en H por una constante en la expresión (2.22). Por ser

$$\left|\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{V',V}\right| \leq C'||\mathbf{u}||_V^{3/2}||\mathbf{v}||_V,$$

se tiene entonces que

$$||B\mathbf{u}_m||_{V'} \leq C||\mathbf{u}_m||_V^{3/2}, \quad \forall m.$$

Redefiniendo la constante C, podemos terminar acotando

$$\int_0^T ||B\mathbf{u}_m||_{V'}^{4/3} \leq C\int_0^T ||\mathbf{u}_m||_V^2 < C',$$

para un cierto C', ya que la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$ permanece acotada en $L^2(0,T;V)$. $\square$

La conclusión de esta proposición será la hipótesis del siguiente enunciado, que nos permitirá probar finalmente la última hipótesis del teorema de compacidad 2.14.

Proposición 2.17. *Sea una sucesión* $\{f^k\}$ *tal que* $\{\partial_t f^k\} \subset L^p(0,T;H^{-1}(U))$ *está uniformemente acotada por L. Entonces*

$$||f^k(t_2) - f^k(t_1)||_{H^{-1}} \leq L|t_2 - t_1|^{1-1/p},$$

para una cierta constante $L > 0$.

Demostración: Tomamos $t_2, t_1 \in [0,T]$ con $t_2 > t_1$ sin pérdida de generalidad. De la expresión $f^k(t_2) - f^k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \partial_t f^k(s)ds$, podemos tomar norma en H^{-1}, teniendo entonces

$$||f^k(t_2) - f^k(t_1)||_{H^{-1}} = ||\int_{t_1}^{t_2} \partial_t f^k(s)ds||_{H^{-1}} \leq \int_{t_1}^{t_2} ||\partial_t f^k||_{H^{-1}}(s)ds.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} ||f^k(t_2) - f^k(t_1)||_{H^{-1}} &\leq \Big(\int_{t_1}^{t_2} ||\partial_t f^k||^p_{H^{-1}}(s)ds\Big)^{1/p}\Big(\int_{t_1}^{t_2} 1^{1-1/p}ds\Big)^{1-1/p} \\ &= ||\partial_t f^k||_{L^p_T(H^{-1})}|t_2 - t_1|^{1-1/p} \leq L|t_2 - t_1|^{1-1/p}. \quad \square \end{aligned}$$

Con esto, ya tenemos todas las hipótesis del teorema 2.14 para la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}$, ya que $H \subset \mathbf{L}^2$, $V \subset \mathbf{H}^1_0$ y $\mathbf{H}^{-1} \subset V'$. Aunque el teorema esté demostrado en la versión escalar por simplicidad, es igualmente válido cuando la sucesión es vectorial. Aplicando ahora el teorema 2.14, se tiene que existe una subsucesión de $\{\mathbf{u}_m(t)\}$ (que denotamos como la sucesión por abuso de notación) que converge fuerte en $L^2(0,T,H)$.

Con estos resultados, estamos listos para probar que la sucesión converge débilmente a una solución al problema de Navier Stokes. Comencemos por probar la convergencia del término no lineal.

Proposición 2.18. *Para cualquier* $\boldsymbol{v} \in V$ *se cumple que*

$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v})dt \to \int_0^T b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})dt.$$

Demostración: Tomamos inicialmente $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ y extenderemos el resultado por densidad. Escribiendo explícitamente el operador b, se tiene que

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \boldsymbol{v})dt = \int_0^T \int_U (\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt.$$

Por linealidad de la integral, podemos sumar y restar la misma cantidad sin alterar la ecuación

$$\int_0^T \int_U (\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt = \int_0^T \int_U ((\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt + \int_0^T \int_U (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt.$$

En el primer sumando, gracias a la regularidad de $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ podemos acotar por su supremo en U (que realmente es máximo) y obtener

$$\int_0^T \int_U ((\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt \leq ||\mathbf{u}_m - \mathbf{u}||_{L^2_T(L^2)} ||\nabla \mathbf{u}_m||_{L^2_T(L^2)} ||\boldsymbol{v}||_{L^\infty} \to 0,$$

ya que $||\mathbf{u}_m - \mathbf{u}||_{L^2_T(L^2)} \to 0$ por convergencia fuerte.

Podemos ver el otro sumando como una aplicación lineal y continua sobre $\mathbf{u}_m \in L^2(0,T;V)$, por lo que podemos tomar límite débil y

$$\int_0^T \int_U (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt \to \int_0^T \int_U (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \boldsymbol{v} dxdt.$$

De esta forma hemos demostrado que

$$\int_0^T \int_U (\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m \boldsymbol{v} dxdt \to \int_0^T \int_U (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \boldsymbol{v} dxdt = \int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \boldsymbol{v}) dt. \quad \square$$

Teorema 2.19. *Para dimensión $n = 2, 3$, existe al menos una solución al problema* (2.5).

Demostración: Sea $\psi(t)$ una función de clase $C^1[0,T]$ con $\psi(T) = 0$. Multiplicando la ecuación (2.5) por $\psi(t)$, e integrando en $(0,T)$ obtenemos que

$$\int_0^T (\partial_t \mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{v})_{(L^2)^n} dt + \int_0^T \langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt + \\ + \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{v}) dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt \qquad \forall v \in V.$$

Integrando por partes el primer término y teniendo en cuenta que $\psi(T) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} &- \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \partial_t \psi(t)\mathbf{v})_{(L^2)^n} dt + \int_0^T \langle -\Delta \mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt + \\ &\quad + \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \psi(t)\mathbf{v}) dt \\ &= (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{v})_{(L^2)^n} \psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En los términos lineales podemos tomar límite débil, y en el no lineal por la proposición 2.18 también, resultando

$$\begin{aligned} &- \int_0^T (\mathbf{u}(t), \partial_t \psi(t)\mathbf{v})_{(L^2)^n} dt + \int_0^T \langle -\Delta \mathbf{u}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt + \\ &\quad + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)\mathbf{v}) dt \\ &= (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{(L^2)^n} \psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.23}$$

En particular, tomando $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$, tenemos que $\mathbf{u}$ satisface la primera ecuación del problema (2.5). Falta ver que se satisface la condición inicial. Multiplicamos la ecuación (2.5) por $\psi(t) \in C^1 : \psi(T) = 0$ e integramos de nuevo (integrando también el primer término por partes), obteniendo

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}(t), \partial_t \psi(t)\mathbf{v})_{(L^2)^n} dt + \int_0^T \langle -\Delta \mathbf{u}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt + \\ + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \psi(t)\mathbf{v}) dt = \\ = (\mathbf{u}(0), \mathbf{v})_{(L^2)^n} \psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \psi(t)\mathbf{v}\rangle_{V',V} dt \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Comparando (2.23) con (2.24), se tiene que $(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v})\psi(0) = 0 \ \ \forall \psi \in C^1 : \psi(T) = 0$. En particular, podemos elegir una función que cumpla $\psi(0) \neq 0$ y obtenemos $(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in V$, por lo que se satisface el sistema (2.5). □

2.4. Unicidad de soluciones en dimensión 2

En este apartado demostraremos la unicidad en el caso $n = 2$. Para el caso $n = 3$ la unicidad sigue siendo un problema abierto según la regularidad del dato inicial que se imponga (ver [3]). Empezaremos por probar dos lemas previos.

Lema 2.20. *Para cualquier abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^2$, y cualquier $v \in H_0^1(U)$ se tiene que*

$$||v||_{L^4(U)} \leq 2^{1/4} ||v||^{1/2}_{L^2(U)} ||\nabla v||^{1/2}_{(L^2(U))^2}$$

Demostración: Trabajaremos con coordenadas $x = (x_1, x_2)$. Podemos tomar inicialmente $v \in \mathcal{D}(U)$, y extender el resultado por densidad a $H_0^1(U)$. Como v se anula cerca de la frontera y también todas sus derivadas, podemos extenderla por cero y suponerla definida en $\mathbb{R}^2$ por comodidad. Teniendo en cuenta que $D_1 v(x_1,x_2)^2 = 2v(x_1,x_2)D_1 v(x_1,x_2)$, podemos expresar

$$\begin{aligned} v^2(x) &= 2\int_{-\infty}^{x_1} v(\xi_1, x_2) D_1 v(\xi_1, x_2) d\xi_1 \\ &\leq 2\int_{-\infty}^{\infty} |v(\xi_1, x_2)||D_1 v(\xi_1, x_2)| d\xi_1 := 2v_1(x_2). \end{aligned}$$

De manera análoga se define $v_2(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x_1, \xi_2)||D_1 v(x_1, \xi_2)| d\xi_2$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v^4(x) dx \leq 4\int_{\mathbb{R}^2} v_1(x_2) v_2(x_1) dx = 4\left(\int_{-\infty}^{\infty} v_1(x_2) dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} v_2(x_1) dx_1\right) \leq \\ \leq 4||v||^2_{L^2(U)} ||D_1 v||_{L^2(U)} ||D_2 v||_{L^2(U)} \leq 2||v||^2_{L^2(U)} ||\nabla v||^2_{(L^2(U))^2}. \end{aligned}$$

Al ser cierto para cualquier $v \in \mathcal{D}(U)$ y por ser la norma una aplicación continua en este espacio, se tiene el mismo resultado para cualquier $v \in H_0^1(U)$. $\square$

Lema 2.21. *Si* $n = 2$,

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq 2^{1/2} ||\boldsymbol{u}||_{L^2}^{1/2} [[\boldsymbol{u}]]^{1/2} [[\boldsymbol{v}]] ||\boldsymbol{w}||_{L^2}^{1/2} [[\boldsymbol{w}]]^{1/2} \ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1. \tag{2.25}$$

Si $\boldsymbol{u}$ *pertenece a* $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$*, entonces* $B\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$ *y*

$$||B\boldsymbol{u}||_{L^2_T(V')} \leq 2^{1/2} ||\boldsymbol{u}||_{L^\infty_T(H)} ||\boldsymbol{u}||_{L^2_T(V)}$$

Demostración: Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada y Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int |\mathbf{u}_i (D_i \mathbf{v}_j) \mathbf{w}_j| dx \leq \sum_{i,j=1}^{2} ||\mathbf{u}_i||_{L^4} ||D_i \mathbf{v}_j||_{L^2} ||\mathbf{w}_j||_{L^4} \\ &\leq \left(\sum_{i,j=1}^{2} ||D_i \mathbf{v}_j||_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} ||\mathbf{u}_i||_{L^4}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} ||\mathbf{w}_j||_{L^4}^2 \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.20, $\sum_{i=1}^2 ||\mathbf{u}_i||_{L^4}^2 \leq 2^{1/2} \sum_{i=1}^2 (||\mathbf{u}_i||_{L^2} ||\nabla \mathbf{u}_i||_{L^2}) \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^2} [[\mathbf{u}]]$.

Aplicando el mismo resultado para $\mathbf{w}_j$, se tiene (2.25).

Si los vectores pertenecen a V, por tenerse $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$, se tiene aplicando la ecuación (2.25) que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^2}^{1/2} [[\mathbf{u}]]^{1/2} [[\mathbf{w}]] ||\mathbf{v}||_{L^2}^{1/2} [[\mathbf{v}]]^{1/2} \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

En particular, se tiene que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^2} [[\mathbf{u}]] [[\mathbf{v}]] \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

y por tanto que

$$||B\mathbf{u}||_{V'} \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^2} [[\mathbf{u}]] \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^2} ||\mathbf{u}||_V \ \ \forall \mathbf{u} \in V.$$

Como $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, se tiene que

$$||B\mathbf{u}||_{L^2_T(V')} \leq 2^{1/2} ||\mathbf{u}||_{L^\infty_T(H)} ||\mathbf{u}||_{L^2_T(V)}. \quad \square$$

Teorema 2.22. *La solución al problema* (2.5) *en el caso* $n = 2$ *es única.*

Demostración: Supongamos que tenemos dos soluciones $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Entonces, la diferencia $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{u}' - \Delta \mathbf{u} + B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}' - \Delta \mathbf{u} = -B\mathbf{u}_1 + B\mathbf{u}_2, \\ \mathbf{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\mathbf{u}$, llegamos a que

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)||_{L^2}^2 + 2[[\mathbf{u}(t)]]^2 = 2b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) - 2b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)). \tag{2.26}$$

Usando el lema 2.7 y la linealidad de b, vemos que podemos escribir

$$b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) = b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) + b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) = b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)).$$

Aplicando esto a la identidad (2.26), y usando el lema 2.21 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)||_{L^2}^2 + 2[[\mathbf{u}(t)]]^2 &= -2b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) \le 2^{3/2}||\mathbf{u}||_{L^2}[[\mathbf{u}]][[\mathbf{u}_2]] \\ &\le 2[[\mathbf{u}(t)]]^2 + ||\mathbf{u}||_{L^2}^2[[\mathbf{u}_2]]^2.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)||_{L^2}^2 \le ||\mathbf{u}||_{L^2}^2[[\mathbf{u}_2]]^2.$$

Como $[[\mathbf{u}_2]]^2$ es integrable, podemos multiplicar la desigualdad anterior por el factor integrante $exp\left(-\int_0^t[[\mathbf{u}_2(s)]]^2ds\right)$ y llegamos a que

$$\frac{d}{dt}\left(exp\left(-\int_0^t[[\mathbf{u}_2(s)]]^2ds\right)\cdot||\mathbf{u}(t)||_{L^2}^2\right) \le 0,$$

e integrando obtenemos que $||\mathbf{u}(t)||_{L^2}^2 = 0 \ \ \forall t \in [0,T]$, por lo que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. $\square$

Bibliografía

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*.

Academic Press (1987).

[2] L. BARREIRA AND C. VALLS, *Ordinary Differential Equations*.

American Mathematical Society (2012).

[3] T. BUCKMASTER AND V.VICOL, *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, arXiv:1709.10033 [math.AP].

[4] P. CONSTANTIN AND C. FOIAS, *Navier-Stokes Equations*. Chicago Lectures in Mathematics.

The University of Chicago Press (1988).

[5] J. B. CONWAY, *A course in Functional Analysis*. Second Edition.

Springer (1996).

[6] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*. Second Edition.

American Mathematical Society (2010).

[7] GERALD B. FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*. Second Edition.

Princeton University Press (1995).

[8] G. FRIEDLANDER AND M. JOSHI, *Introduction to the theory of distributions*. Second Edition.

Cambdirge University Press (1998).

[9] F. GANCEDO, P. CONSTANTIN, D. CÓRDOBA AND R.M. STRAIN, *On the global existence for the Muskat problem*. J. Eur. Math. Soc., 15, no. 1, 201-227, 2013.

[10] G. LEONI, *A First Course in Sobolev spaces*. Second Edition.

American Mathematical Society (2017).

[11] J. LERAY, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), no. 1, 193-248.

[12] A. J. MAJDA AND A. L. BERTOZZI, *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge Univeristy Press (2002).

[13] G. DE RHAM, *Variétés Différentiables*. Hermann (1960).

[14] R. TEMAM, *Navier Stokes Equations*. Volume 2. North Holland (1979).