Facultad de Matemáticas
Grado en Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Trabajo Fin de Grado

Teoremas límites para sumas ponderadas de elementos aleatorios en espacios de Banach

María del Carmen Hernández Santos

Tutor: Manuel Ordóñez Cabrera

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una serie de resultados sobre teoremas límites para sumas ponderadas de elementos aleatorios, aplicables en el contexto de espacios normados y completos (espacios de Banach).

Para la obtención de dichos resultados serán impuestas condiciones de diversa índole sobre los elementos aleatorios y sobre los pesos, de modo que aparecerán leyes de los grandes números como casos particulares en algunos de ellos.

Asimismo, se extenderán resultados ya conocidos para variables aleatorias a elementos aleatorios, exigiendo a dichos elementos algunas características específicas, que pueden venir relacionadas con los pesos correspondientes.

Abstract

The object of this work is to give some results about limit theorems for weighted sums of random elements in separable Banach spaces.

To obtain these results, we will impose diverse conditions on the random elements and on the weights, so that laws of large numbers will appear as particular cases in some of them.

Likewise, we will extend some known results for random variables to random elements, requiring specific characteristics from those random elements which can be related with their corresponding weights.

Introducción

La consideración de los procesos estocásticos como elementos aleatorios tomando sus valores en espacios de funciones por parte de Doob (1947), creó las condiciones que motivaron el estudio de los elementos aleatorios en espacios lineales normados, y especialmente en espacios de Banach.

Como parece natural, se inician los trabajos de investigación en el área de los teoremas límites de sumas de elementos aleatorios en tales espacios inquiriendo sobre la viabilidad de la generalización de resultados válidos para variables aleatorias, comenzando por las leyes de los grandes números, y ampliando el ámbito de investigación al caso de sumas ponderadas por una doble sucesión $\{a_{nk}\}$ de números reales, del que las leyes de los grandes números constituyen un caso especial, cuando

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases} \tag{1}$$

De este modo, la línea de investigación en este ámbito parte de la toma en consideración de los resultados más relevantes obtenidos, a partir de la década de los sesenta, en el estudio del comportamiento límite de sumas ponderadas de variables aleatorias.

Podemos destacar, entre otras, la contribución en este área de William Pruitt. Pruitt estudió la convergencia en probabilidad de sumas del tipo $S_n = \sum_k a_{nk}X_k$, bajo la hipótesis la independencia e idéntica distribución de las variables aleatorias y exigiendo que la doble sucesión $\{a_{nk}\}$ fuera una sucesión de Toeplitz.

Posteriormente, estos resultados de Pruitt serán extendidos por Vijay K. Rohatgi para el caso de variables aleatorias no idénticamente distribuidas, pero uniformemente dominadas por una variable aleatoria.

Por otra parte, Wang y Bhaskara Rao extenderán la ley débil de Rohatgi para sumas ponderadas al caso de variables aleatorias uniformemente integrables.

En este trabajo se pretende mostrar algunos de los resultados fundamentales de convergencia para sumas ponderadas de elementos aleatorios. Tales resultados se obtendrán imponiendo diferentes condiciones a los pesos, a los elementos aleatorios y/o a los espacios lineales, de modo que serán aplicables en contextos específicos.

También presentaremos algunos de los resultados de convergencia para variables aleatorias y veremos cómo es posible extender dichos resultados al caso de elementos aleatorios.

Así, en el Capítulo 1 presentaremos las leyes de los grandes números como teoremas límites para sumas ponderadas de variables aleatorias, y estudiaremos la convergencia de estas sumas tomando valores más generales para los pesos. Seguidamente, en el Capítulo 2 será de gran importancia la noción de separabilidad del espacio, y mostraremos los resultados más destacados de convergencia para sumas ponderadas de elementos aleatorios, imponiendo por un lado condiciones sobre los elementos aleatorios, y por otro, sobre los pesos. Finalmente, en el Capitulo 3, expondremos una serie de resultados obtenidos imponiendo a los elementos aleatorios condiciones relacionadas con sus respectivos pesos.

Asimismo, dispondremos de un Apéndice al final de estas notas, en el cual definimos qué es un elemento aleatorio y mostramos algunas de las propiedades y resultados más reseñables de este concepto.

Capítulo 1

Resultados sobre teoremas límites para sumas ponderadas de variables aleatorias

1.1. Introducción

Las leyes de los grandes números pueden ser vistas como teoremas límites para sumas de variables aleatorias ponderadas por una doble sucesión de constantes $\{a_{nk}\}$ tal como

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{1.1}$$

o, por ejemplo, $\{a_{nk}\}$ dada por

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{b_n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{1.2}$$

con $\{b_n\} \to +\infty$.

En la década de los 60, se comienza a estudiar la convergencia de sumas del tipo $S_n = \sum_k a_{nk} X_k$, donde $\{X_k\}$ es una sucesión de variables aleatorias y $\{a_{nk}\}$ es una doble sucesión de constantes no necesariamente sujetas a las condiciones (1.1) o (1.2). El objetivo será encontrar resultados que permitan estudiar la convergencia de sumas del tipo anteriormente citado, en las cuales los pesos puedan tomar valores más generales.

Así, los primeros resultados destacables aparecen en 1965 de la mano de Jamison, Orey y Pruitt (véase [1]), entre otros. Estos, se van a referir a sumas ponderadas del tipo $S_n = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, donde $\{a_k\}$ es una sucesión de números reales positivos, $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $\{b_n\} \to \infty$ y $\underset{1\leq k\leq n}{max} \frac{a_k}{b_n} \to 0$.

En este apartado se mostrarán algunos de los resultados más relevantes de este área.

1.2. Convergencia de sumas de variables aleatorias ponderadas por sucesiones de Toeplitz

Consideremos una sucesión de números reales $\{X_k\}$ y una matriz infinita de números reales $\{a_{nk}\}$. Enunciamos a continuación el lema de Toeplitz, que nos permitirá relacionar las propiedades de convergencia de la sucesión $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k\}$ con las de la sucesión $\{X_k\}$.

Lema 1.2.1. *Sea $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales tales que para cada k fijo, $\{a_{nk}\} \to 0$ cuando $n \to \infty$, y para todo n, se verifica que $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq C < \infty$ para algún $C >$ 0. Sea $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k$, donde $\{X_n\}$ es una sucesión acotada de números reales. Entonces:*

a) $X_n \to 0 \Longrightarrow y_n \to 0$.

b) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \to 1$, entonces $X_n \to X$ finito $\Longrightarrow y_n \to X$.

c) En particular, si $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \uparrow \infty$, entonces $X_n \to X$ finito $\Longrightarrow$

$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \to X$.

Definamos ahora el concepto de sucesión de Toeplitz:

Definición 1.2.1. Una doble sucesión $\{a_{nk}\}$ de números reales se dice que es una **sucesión de Toeplitz** cuando está en las condiciones del lema de Toeplitz, es decir, cuando:

1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo,

2) $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante positiva.

Nota 1.2.1. Si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\{a_{nk}\}$ es una doble sucesión de Toeplitz de números reales, se tiene que:
$\mathrm{E}[|\sum_k a_{nk}X_k|] \leq \mathrm{E}[|X_1|] \cdot \sum_k |a_{nk}| \leq C \cdot \mathrm{E}[|X_1|] < \infty$, por lo que la serie $\sum_k a_{nk}X_k$ converge absolutamente con probabilidad 1, y tiene pues sentido analizar las propiedades de convergencia de la sucesión $S_n = \sum_k a_{nk}X_k$ cuando $n \to \infty$.

En este esquema general, los primeros resultados fueron obtenidos por Pruitt ([4]) en 1966, destacando los dos teoremas que se enuncian a continuación:

Teorema 1.2.1. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[|X_1|] < \infty$ y $E[X_1] = \mu$. Sea $\{a_{nk}\}$ una sucesión de Toeplitz con*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = 1$$

(esta última condición se puede omitir si $\mu = 0$). Entonces,

$$S_n \xrightarrow{P} \mu \iff \sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.3}$$

El resultado más relevante es el siguiente:

Teorema 1.2.2. *Sean $\{X_n\}$ y $\{a_{nk}\}$ en las condiciones del teorema anterior. Si $\sup_k |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, entonces $E[|X_k|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$ implica que*

$$S_n \xrightarrow{c.s.} \mu \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.4}$$

En 1971, Rohatgi ([5]) estudió el caso de variables aleatorias independientes, pero no idénticamente distribuidas. En lugar de esto, impuso la condición de que estas fueran uniformemente dominadas por una variable aleatoria.

Definición 1.2.2. Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria. Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ está **uniformemente dominada** (ó uniformemente acotada en probabilidad) por la variable aleatoria X cuando

$$P[|X_n| \geq x] \leq P[|X| \geq x] \quad \forall x > 0 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Observación 1.2.1. Es claro que si $\{X_n\}$ son idénticamente distribuidas, están uniformemente dominadas por cualquiera de ellas, por ejemplo por X_1.

Mostramos ahora los resultados fundamentales aportados por Rohatgi:

Teorema 1.2.3. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, uniformemente dominadas por una variable aleatoria X con $E[|X|^r] < \infty$ para algún $0 < r \leq 1$. Sea $\{a_{nk}\}$ una doble sucesión de números reales verificando:*

1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^r \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *donde C es una constante positiva.*

Si $\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k \xrightarrow{P} 0. \tag{1.6}$$

Para el caso de la convergencia casi segura, se restringe la atención al caso $r = 1$.

Teorema 1.2.4. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[|X_n|] < \infty$ y $E[X_n] = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, uniformemente dominadas por una variable aleatoria X. Sea $\{a_{nk}\}$ una doble sucesión de números reales verificando:*

1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *donde C es una constante positiva.*

Si $\sup_k |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$ *para algún* $\alpha > 0$, *y* $E[|X|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$, *entonces*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k \xrightarrow{c.s.} 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.7}$$

Nota 1.2.2. Se puede comprobar que la convergencia no es solo casi segura, sino que es completa, es decir, que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k| \geq \varepsilon] < \infty$.

1.3. Integrabilidad uniforme

Posteriormente, se ha hecho especial hincapié en las condiciones de dominación uniforme, convergencia uniforme de momentos e integrabilidad uniforme de $\{X_n\}$, en detrimento de la idéntica distribución. Asimismo, se ha sustituido la condición de independencia por la independencia por pares de $\{X_n\}$.

En esta sección estudiaremos la convergencia en probabilidad de la sucesión $S_n = \sum_k a_{nk} X_k$ bajo la condición de integrabilidad uniforme de $\{X_n\}$.

Antes de mostrar la noción de integrabilidad uniforme, definamos el concepto de función indicador, el cual será empleado con frecuencia en estas notas.

Definición 1.3.1. Consideremos un conjunto X y un subconjunto $A \subset X$. Se denomina **función indicador** del conjunto A a la función $I_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$

dada por

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \tag{1.8}$$

Pasamos a introducir ahora el concepto de integrabilidad uniforme.

Definición 1.3.2. Una familia de variables aleatorias integrables $\{X_t\}_{t\in T}$, donde T es un conjunto de índices arbitrarios se dice que es **uniformemente integrable** si, y solo si,

$$\lim_{a\to\infty} E[|X_t|]I_{[|X_t|\geq a]} = 0 \text{ uniformemente en } t \in T. \tag{1.9}$$

Se verifica el siguiente teorema de equivalencia:

Teorema 1.3.1. *La familia $\{X_t\}$ es uniformemente integrable si, y solo si, se satisfacen las dos condiciones siguientes:*
1) *$E[|X_t|]$ son uniformemente acotadas en $t \in T$.*
2) *Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier suceso $A \in \mathbb{A}$ con P(A) $< \delta$ es $E[|X_t|]I_{[X_t\in A]} < \varepsilon \quad \forall\ t \in\ T$.*

En este contexto, destacan los siguientes resultados debidos a Wang y Bhaskara Rao ([9]):

Teorema 1.3.2. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes por pares tal que $\{X_n\}_{n\geq1}$ es uniformemente integrable. Sea $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales satisfaciendo:*
1) *$\sum_k |a_{nk}| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, para alguna constante positiva C.*
2) *$\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.*
Entonces,

$$\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k]) \xrightarrow{P} 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.10}$$

El teorema anterior generaliza el resultado débil de Rohatgi con una diferencia esencial en su demostración: aquí se trunca cada X_n en un punto fijo, mientras que Rohatgi truncaba cada X_n en a_{nk}, con a_{nk} variando con n y k.

Teorema 1.3.3. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $\{|X_n|^r\}_{n\in\mathbb{N}}$, es uniformemente integrable para algún $r \in (0,1)$. Sea $\{a_{nk}\}$, con $k,n \in \mathbb{N}$ una doble sucesión de números reales satisfaciendo:*
1) $\sum_k |a_{nk}|^r \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *para alguna constante positiva* C.
2) $\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ *cuando* $n \to \infty$.
Entonces,

$$\sum_k a_{nk} X_k \longrightarrow 0 \tag{1.11}$$

en la r-media (y por tanto, también en probabilidad) cuando $n \to \infty$.

En comparación con el Teorema 1.3.2, este último resultado permite establecer un resultado de convergencia débil para sumas ponderadas, sin suponer la independencia de las variables aleatorias, pero imponiendo una condición ligeramente más fuerte sobre los pesos.

Capítulo 2

Sumas ponderadas de elementos aleatorios en espacios de Banach (I)

En esta sección nos centraremos en el estudio de la convergencia de sumas ponderadas de elementos aleatorios, a los cuales les impondremos condiciones de diversa índole.

Antes de mostrar los resultados más relevantes, haremos especial hincapié en la noción de separabilidad de un espacio, la cual será de gran importancia en el desarrollo de este capítulo.

Un espacio normado se dice **separable** si contiene un subconjunto denso numerable. En este sentido, la suma de dos elementos aleatorios en espacios separables es un elemento aleatorio. Sin embargo, en un espacio lineal normado no separable, la suma de dos elementos aleatorios no tiene por qué serlo ([7]).

Una condición suficiente para tener la hipótesis de separabilidad es que el espacio posea una base de Schauder.

Definición 2.0.1. Sea X un espacio lineal topológico. Se dice que una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **base de Schauder** para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{t_n\}$ tal que:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k b_k \tag{2.1}$$

Una base de Schauder para un espacio lineal normado se dice **monótona** si la sucesión de números reales $\{\| \sum_{k=1}^{n} t_k b_k \|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente para cada sucesión de escalares $\{t_n\}$.

Cuando un espacio lineal topológico X tiene base de Schauder $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se puede definir una sucesión de funcionales lineales $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, llamados **funcionales coordenada** para la base $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, del siguiente modo: para cada $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k b_k \in X$ se define

$$\begin{aligned} f_k : X &\longrightarrow \mathbb{R} && (2.2)\\ x &\longmapsto f_k(x) = t_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} && (2.3) \end{aligned}$$

Los funcionales coordenada dependen de la base y **no son necesariamente continuos.** Sin embargo, se tiene que en un espacio de Banach los funcionales coordenada sí son continuos.

Definición 2.0.2. Se llama **sucesión de operadores suma parcial** para la base $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de funciones lineales $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$\begin{aligned} U_n : X &\longrightarrow X && (2.4)\\ x &\longmapsto U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) b_k \quad \text{para cada } x \in X && (2.5) \end{aligned}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.0.1. *a) Si X es un espacio lineal normado que tiene una base monótona $\{b_n\}$, entonces $\|U_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\|U_n(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*
*b) Si X es un espacio de Banach que tiene una base de Schauder $\{b_n\}$, entonces existe una constante positiva m, denominada **constante base**, tal que $\|U_n\| \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\|U_n(x)\| \leq m\|x\|$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 2.0.1. Nótese que en la definición de base de Schauder interviene el concepto de límite, que es un concepto topológico. Esto determina la importancia de considerar las bases de Schauder en lugar de las bases de Hamel (conjunto maximal de vectores linealmente independientes), que es un concepto únicamente algebraico.

Teorema 2.0.2. *Sea X un espacio normado con base de Schauder. Entonces X es separable.*

Pasemos ahora a estudiar los resultados de convergencia fundamentales de esta sección.

2.1. Condiciones distribucionales

Consideremos sumas ponderadas del tipo $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k$, o sucesiones de sumas parciales, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k$. Vamos a estudiar la convergencia de estas sumas imponiendo varias condiciones sobre los pesos $\{a_{nk}\}$ y los elementos aleatorios $\{V_n\}$. En algunos de los resultados que enunciaremos aparecerán leyes de los grandes números como casos particulares.

El siguiente resultado muestra que la convergencia en probabilidad en cada coordenada de una base de Schauder para un espacio de Banach es una condición necesaria y suficiente para que una suma ponderada de elementos aleatorios idénticamente distribuidos converja en probabilidad en la topología de la norma.

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach que tiene una base de Schauder $\{b_i\}$, sea $\{a_{nk}\}$ una sucesión de Toeplitz, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X tal que $E[\|V_1\|] < \infty$. Para cada funcional coordenada $\{f_i\}$ se sigue que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f_i(V_k - E[V_1]) \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilidad} \tag{2.6}$$

si, y solo si,

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}(V_k - E[V_1])\| \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilidad.} \tag{2.7}$$

Demostración. Lo probamos por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Inmediato. La convergencia en la topología de la norma implica la convergencia en la topología lineal débil, y, por ser X un espacio de Banach, cada funcional coordenada es continuo, luego se sigue la convergencia en cada coordenada.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que para cada f_i se tiene (2.6). Como $\mathrm{E}[\|V_1\|] < \infty$ y X es completo y separable (por tener una base de Schauder), existe $\mathrm{E}[V_1]$; podemos suponer $\mathrm{E}[V_1] = 0$, ya que si no, consideraríamos la sucesión $\{V_n - E[V_1]\}$ en lugar de la sucesión $\{V_n\}$.

Para demostrar que

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k\| \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilidad} \tag{2.8}$$

hay que probar que, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k\| > \varepsilon] < \delta \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon, \delta). \tag{2.9}$$

Sea $m > 0$ la constante base, tal que $\|U_t\| \leq m \quad \forall\ t \in \mathbb{N}$, donde $U_t(x)$ está dado por $U_t(x) = \sum_{k=1}^{t} f_k(x) b_k$. Denotemos $Q_t(x) = x - U_t(x), \quad \forall\ x \in X$. Entonces, $\forall\ x \in X$ se tiene que:

$$\|Q_t(x)\| \leq \|x\| + \|U_t(x)\| \leq (1 + \|U_t\|)\|x\| \leq (m+1)\|x\|. \tag{2.10}$$

Luego $\|Q_t\| \leq m + 1 \quad \forall\ t \in \mathbb{N}$.

Escribamos para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} U_t(V_k) + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} Q_t(V_k). \tag{2.11}$$

Aplicando ahora la desigualdad de Markov,

$$\begin{aligned} P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} Q_t(V_k)\| > \varepsilon/2] &\leq P[\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \|Q_t(V_k)\| > \varepsilon/2] \leq \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| E[\|Q_t(V_k)\|]}{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| E[\|Q_t(V_1)\|]}{\frac{\varepsilon}{2}} = \\ &= \frac{E[\|Q_t(V_1)\|] \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|}{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{2}{\varepsilon} C E[\|Q_t(V_1)\|], \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde C es una constante positiva, pues $\{a_{nk}\}$ es una sucesión de Toeplitz.

Ahora bien, $\|Q_t(V_1)\| \longrightarrow 0$ puntualmente cuando $t \to \infty$, según la definición de los funcionales Q_t, y $\|Q_t(V_1)\| \leq (m+1)\|V_1\|$, con $\mathrm{E}[\|V_1\|] < \infty$. Por tanto, si usamos ahora el teorema de la convergencia dominada llegamos a que $\mathrm{E}[\|Q_t(V_1)\|] \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$.
Por consiguiente, escojamos t tal que $P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} Q_t(V_k)\| > \varepsilon/2] < \delta/2$.

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} U_t(V_k)\| > \varepsilon/2] = P[\|\sum_{i=1}^{t} f_i(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k) b_i\| > \varepsilon/2] \leq \\
P[\sum_{i=1}^{t} |f_i(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k)| \|b_i\| > \varepsilon/2] \leq \\
\sum_{i=1}^{t} P[|f_i(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k)| \|b_i\| > \varepsilon/(2t)] = \\
\sum_{i=1}^{t} P[|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f_i(V_k)| > \varepsilon/(2t\|b_i\|)] \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Pero, puesto que para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_i(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica (2.6) y puesto que $\mathrm{E}[f_i(V_1)] = f_i(\mathrm{E}[V_1]) = f_i(0) = 0$, se tiene que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}[|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f_i(V_k)| > \varepsilon/(2t\|b_i\|)] \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

Por tanto, existe $N(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$
P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} U_t(V_k)\| > \varepsilon/2] < \delta/2 \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon, \delta). \qquad (2.14)
$$

Por consiguiente, $\forall\ n \geq N(\varepsilon, \delta)$ es

$$
\begin{aligned}
P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k\| > \varepsilon] \leq P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} U_t(V_k)\| > \varepsilon/2] + \\
P[\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} Q_t(V_k)\| > \varepsilon/2] < \delta/2 + \delta/2 = \delta. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Luego $\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k\| \longrightarrow 0$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$.

□

Observación 2.1.1. Si consideramos un espacio lineal normado separable, podemos obtener un resultado similar usando el espacio dual en lugar de los funcionales coordenada. Esto se puede probar por inmersión del espacio lineal normado separable en C[0,1] isomórficamente, (pues C[0,1] tiene una base de Schauder) y aplicando el teorema anterior.

Teorema 2.1.2. *Sea X un espacio lineal normado separable, sea $\{a_{nk}\}$ una sucesión de Toeplitz, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X tal que $E[\|V_1\|] < \infty$ y $E[V_1]$ existe. Para cada funcional lineal continuo f se sigue que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(V_k - E[V_1]) \longrightarrow 0 \quad \textit{en probabilidad,} \tag{2.16}$$

si, y solo si,

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}(V_k - E[V_1])\| \longrightarrow 0 \quad \textit{en probabilidad.} \tag{2.17}$$

El teorema que enunciamos a continuación puede verse como la extensión del teorema fuerte de Pruitt para sumas ponderadas de variables aleatorias (Teorema 1.2.2) a sumas ponderadas de elementos aleatorios en un espacio lineal normado separable.

Teorema 2.1.3. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en un espacio lineal normado separable X con $E[V_1] = 0$, y sea $\{a_{nk}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 1\le k\le n}}$ una sucesión de Toeplitz que satisface también que $\max\limits_{1\le k\le n} |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$.*
Entonces, si $E[\|V_1\|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$ se tiene que:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k \xrightarrow{c.s.} 0 \tag{2.18}$$

Demostración. Sea $h\colon X \longrightarrow$ C[0,1] una función lineal uno a uno y bicontinua, y sea $\{b_i\}$ una base de Schauder para C[0,1]. Sea $h(V_k) = V_{hk}$ elementos aleatorios sobre C[0,1]. Para cada funcional coordenada f_i de la base, la sucesión $\{f_i(V_{hk})\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (ver Apéndice).

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fijado, se tiene:

$$\|U_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_{hk})\| = \|\sum_{i=1}^{m} f_i(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_{hk})b_i\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m}|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}f_i(V_{hk})|\|b_i\| \longrightarrow 0 \quad \text{c.s. cuando } n \to \infty, \tag{2.19}$$

puesto que por el teorema de Pruitt (Teorema 1.2.2) y el hecho de que:

$$E[|f_i(V_{h1})|^{1+\frac{1}{\alpha}}] = E[|(f_i \circ h)(V_1)|^{1+\frac{1}{\alpha}}] \leq$$

$$E[(\|f_i \circ h\|\|V_1\|)^{1+\frac{1}{\alpha}}] \leq \|f_i \circ h\|^{1+\frac{1}{\alpha}}E[\|V_1\|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty \tag{2.20}$$

y que:

$$E[(f_i \circ h)V_k] = (f_i \circ h)E[V_1] = (f_i \circ h)(0) = f_i(h(0)) = f_i(0) = 0, \tag{2.21}$$

se sigue que

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{nk}f_i(V_{hk})| \longrightarrow 0 \quad \text{c.s.} \tag{2.22}$$

Por otro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\|Q_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_{hk})\| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|\|Q_m(V_{hk})\| =$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|[\|Q_m(V_{hk})\| - E[\|Q_m(V_{h1})\|]] + \sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|E[\|Q_m(V_{h1})\|] \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|[\|Q_m(V_{hk})\| - E[\|Q_m(V_{h1})\|]] + CE[\|Q_m(V_{h1})\|] \tag{2.23}$$

Pero $\{\|Q_m(V_{hk})\| - E[\|Q_m(V_{h1})\|]\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero para cada m, y por hipótesis:

$$E[\|Q_m(V_{h1})\|^{1+\frac{1}{\alpha}}] \leq E[\|(Q_m \circ h)(V_1)\|^{1+\frac{1}{\alpha}}] \leq$$

$$((M+1)\|h\|)^{1+\frac{1}{\alpha}}E[\|V_1\|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty, \tag{2.24}$$

donde M es la constante base. El teorema de Pruitt implica, pues, que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|[\|Q_m(V_{hk})\| - E[\|Q_m(V_{h1})\|]] \longrightarrow 0 \quad \text{c.s. cuando } n \to \infty. \tag{2.25}$$

Sea Ω_0 el conjunto de probabilidad cero para el cual (2.22) y (2.25) no siguen $\forall\, m \geq 1$. Como $\|Q_m(V_{h1})\| \longrightarrow 0$ puntualmente, aplicando el teorema de la convergencia dominada, dado $\varepsilon > 0$ se puede escoger m que verifique $\mathrm{E}[\|Q_m(V_{h1})\|] < \frac{\varepsilon}{3C}$.
Entonces, sobre el conjunto $\Omega \setminus \Omega_0$ existe un entero positivo $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$ tal que $\forall\; n \geq n_0$ se tiene que

$$\|h(S_n(\omega))\| \leq \|U_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_{hk}(\omega))\| + \|Q_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_{hk}(\omega))\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + CE[\|Q_m(V_{h1})\|] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + C\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon \tag{2.26}$$

Es decir, $h(S_n)$ converge c.s. al elemento cero de C[0,1] y como h: $X \longrightarrow$ C[0,1] es una función lineal y uno a uno, se tiene que $S_n = h^{-1}[h(S_n)]$ converge c.s. al elemento cero de X, $S_n \xrightarrow{c.s} 0$.

□

Asimismo, si consideramos el teorema fuerte de Rohatgi (Teorema 1.2.4) para variables aleatorias y exigimos unas condiciones de dominación uniforme un poco más elaboradas como las que señalamos a continuación, es posible extender este resultado al caso de elementos aleatorios no necesariamente idénticamente distribuidos en un espacio de Banach con base de Schauder.

Supongamos que existen variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tales que:
A) Las variables aleatorias $\{f_i(V_k)\}$ son uniformemente dominadas en probabilidad, en el sentido de que:

$$P[|f_i(V_k)| \geq a] \leq P[|X_i| \geq a] \quad \forall\; a > 0 \text{ y para cada } k \in \mathbb{N} \tag{2.27}$$

y tales que :

B) $E[|X_i|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$ y $E[|Y_m|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$ para algún $\alpha > 0$ y cada i y cada m, y para cada $m \geq 1$:

$$P[|\|Q_m(V_k)\| - E[\|Q_m(V_k)\|]| \geq a] \leq P[|Y_m| \geq a] \quad \forall\ a > 0 \text{ y para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Con estas condiciones obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en un espacio de Banach X que tiene una base de Schauder $\{b_i\}$, y sea $E[V_k] = 0$ para cada k. Sea $\{a_{nk}\}_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1\leq k\leq n}}$ una sucesión de Toeplitz tal que $\max\limits_{1\leq k\leq n} |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$.*
Si existen variables aleatorias $\{X_i\}$ e $\{Y_m\}$ satisfaciendo A) y B) y tales que $\sup\limits_k E[\|Q_m(V_k)\|] \longrightarrow 0$ cuando $m \to \infty$, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k \xrightarrow{c.s.} 0. \tag{2.29}$$

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema anterior, para cada $m \in \mathbb{N}$ fijado, se tendría:

$$\|U_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k)\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f_i(V_k)| \|b_i\| \xrightarrow{c.s.} 0 \ \text{ cuando } n \to \infty, \tag{2.30}$$

pues para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, la sucesión $\{f_i(V_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, que por el teorema de Rohatgi (consultar Teorema 1.2.4) verifica

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{nk} f_i(V_k)| \xrightarrow{c.s.} 0, \tag{2.31}$$

ya que se verifican las condiciones *A*) y *B*).

Por otro lado, para cada m se tiene:

$$\|Q_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} V_k)\| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| [\|Q_m(V_k)\| - E[\|Q_m(V_k)\|]] + \sup_k CE[\|Q_m(V_k)\|]. \tag{2.32}$$

Pero $\{\|Q_m(V_k)\| - E[\|Q_m(V_k)\|]\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con media cero para cada $m \geq 1$, y la condición $B)$ y el teorema de Rohatgi implican que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|[\|Q_m(V_k)\| - E[\|Q_m(V_k)\|] \xrightarrow{c.s} 0. \tag{2.33}$$

Sea Ω_0 el conjunto de probabilidad cero donde (2.30) y (2.33) no siguen para todo $m \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos m tal que $\underset{k}{sup}\ E[\|Q_m(V_k)\|] < \frac{\varepsilon}{3C}$. Por tanto, sobre el conjunto $\Omega \setminus \Omega_0$ existe un entero positivo $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ es

$$\|S_n\| \leq \|U_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k)\| + \|Q_m(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}V_k)\| <$$
$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + C\, \underset{k}{sup}\ E[\|Q_m(V_k)\|] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + C\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon \tag{2.34}$$

Luego $S_n \xrightarrow{c.s.} 0$. □

Nota 2.1.1. Si consideramos el espacio $X = \mathbb{R}$, las condiciones $A)$ y $B)$ se reducen a la condición de dominación uniforme en probabilidad de Rohatgi y a la condición de que $\mathrm{E}[|V|^{1+\frac{1}{\alpha}}] < \infty$ siendo V la variable aleatoria que domina a las $\{V_n\}$.

2.2. Integrabilidad uniforme

En el capítulo anterior, mostramos la integrabilidad uniforme como una propiedad considerablemente fructífera para la obtención de resultados de convergencia en el caso de sumas ponderadas de variables aleatorias, relajando la condición de idéntica distribución.

Así, en esta sección intentaremos extender los resultados ya señalados para variables aleatorias al contexto de elementos aleatorios en un espacio de

Banach separable.

El resultado de Wang-Bhaskara Rao que mostramos en el capítulo anterior (Teorema 1.3.3), es válido en este contexto y podemos enunciarlo del siguiente modo:

Teorema 2.2.1. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable X, tal que $\{\|V_n\|^r\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable para algún $r \in(0,1)$. Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales satisfaciendo:*
1) $\sum_k |a_{nk}|^r \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *para alguna constante positiva* C,
2) $\sup_k \ |a_{nk}| \longrightarrow 0$ *cuando* $n \to \infty$.
Entonces,

$$S_n = \sum_k a_{nk}V_k \longrightarrow 0 \tag{2.35}$$

en la r-media (y por tanto, también en probabilidad) cuando $n \to \infty$.

Demostración. Como $\{\|V_n\|^r\}$ es uniformemente integrable, se tiene que

$$\sup_n \ E[\|V_n\|^r] \leq M \quad \text{para algún } M > 0. \tag{2.36}$$

Luego,

$$E[\|\sum_k a_{nk}V_k\|^r] \leq E[\sum_k |a_{nk}|^r \|V_k\|^r] = \sum_k |a_{nk}|^r E[\|V_k\|^r] \leq MC < \infty. \tag{2.37}$$

Por tanto,

$$\|\sum_k a_{nk}V_k\| \quad \text{converge c.s. } \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Además, por la integrabilidad uniforme de $\{\|V_n\|^r\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall A$ con $\mathrm{P}(A) < \delta$ es

$$\sup_n \int_A \|V_n\|^r dP = \sup_n \ E[\|V_n\|^r]I_A < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{2.39}$$

Además, $\forall\ m > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es

$$P[\|V_n\| > m] \leq \frac{1}{m^r} E[\|V_n\|^r] \leq \frac{1}{m^r} \underset{n}{sup}\ E[\|V_n\|^r] \leq \frac{M}{m^r} \longrightarrow 0 \qquad (2.40)$$

cuando $m \to \infty$.

Luego se puede escoger $a > 0$ tal que $P[\|V_n\| > a] < \delta$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$Y_k = V_k I_{[\|V_k\| \leq a]}$$
$$Z_k = V_k - Y_k = V_k I_{[\|V_k\| > a]}.$$

Tenemos,

$$E[\|\sum_k a_{nk} Z_k\|^r] \leq \sum_k |a_{nk}|^r E[\|Z_k\|^r] = \sum_k |a_{nk}|^r \int_{[\|V_n\|>a]} \|V_n\|^r dP < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon \qquad (2.41)$$

Luego $\sum_k a_{nk} Z_k \longrightarrow 0$ en media $r-$ésima.

Por otro lado,

$$E[\|\sum_k a_{nk} Y_k\|] \leq \sum_k |a_{nk}| E[\|Y_k\|] \leq a(\underset{k}{sup}\ |a_{nk}|)^{1-r} \sum_k |a_{nk}|^r \leq$$
$$\leq C \cdot a(\underset{k}{sup}\ |a_{nk}|)^{1-r} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty. \qquad (2.42)$$

Luego $\sum_k a_{nk} Y_k \longrightarrow 0$ en media y, por tanto, $\sum_k a_{nk} Y_k \longrightarrow 0$ en media $r-$ésima $(0 < r < 1)$.

Asimismo,

$$E[\|S_n\|^r] = E[\|\sum_k a_{nk} Y_k + \sum_k a_{nk} Z_k\|^r] \leq$$
$$\leq E[\|\sum_k a_{nk} Y_k\|^r] + E[\|\sum_k a_{nk} Z_k\|^r] \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } n \to \infty. \qquad (2.43)$$

Luego $S_n \to 0$ en la $r-$media. □

Sin embargo, el teorema de Wang-Bhaskara Rao que generaliza el resultado débil de Rohatgi (Teorema 1.3.2) no es válido para elementos aleatorios en un espacio de Banach.

Aportamos el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 2.2.1. Consideramos el espacio

$$l^1 = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\} \tag{2.44}$$

y sea $\{e_n\}$ la base estándar de l^1. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes con $V_n = \pm\, e_n$ con probabilidad $1/2$ respectivamente. Entonces $\mathrm{E}[V_n] = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\|V_n\| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\{\|V_n\|\}$ es uniformemente integrable pues $\mathrm{E}[\|V_n\|] \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\int_A \|V_n\| dP = P(A) < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ si $P(A) < \delta$ (tomando $\delta = \varepsilon$).
Sea la doble sucesión $\{a_{nk}\}$ dada por

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{2.45}$$

Se verifica:
1) $\sum_k |a_{nk}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
2) $\lim_{n\to\infty} \underset{k}{max}\ |a_{nk}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sin embargo, $\|\sum_k a_{nk} V_k\| = \|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V_k\| = 1 \not\to 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ ni en probabilidad ni de ninguna otra manera.

En la siguiente sección introduciremos el concepto de elemento aleatorio tight y veremos que es posible obtener un resultado análogo al Teorema 1.3.2 imponiendo dicha condición a la sucesión $\{X_n\}$. Asimismo, se abordarán otros resultados de convergencia concernientes a sucesiones de elementos aleatorios de este tipo.

2.3. Elementos aleatorios tight

2.3.1. Convergencia débil

Definición 2.3.1. Un elemento aleatorio V en un espacio topológico X es **tight** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $P[V \in K_\varepsilon] > 1$ - ε.
Una **sucesión** de elementos aleatorios $\{V_n\}$ se dice que es **tight** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $P[V_n \in K_\varepsilon] > 1$ - ε para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tras estas definiciones, enunciamos ahora el resultado de Wang y Bhaskara Rao ([8]) que extiende en cierta medida el Teorema 1.3.2, bajo la hipótesis de que la sucesión de elementos aleatorios sea tight.

Teorema 2.3.1. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable X. Sea X_1 un subconjunto total de X^*. Supongamos que:*
1) $\{\|V_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente absolutamente continua.
2) $\{V_n\}$ es tight.
3) $\{g(V_n)\}$ es independiente por pares para cada $g \in X_1$.
Sea $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando:
4) $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante positiva.
5) $\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.
Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(V_k - E[V_k]) \longrightarrow 0$ en media, y por tanto, en probabilidad.

Nota 2.3.1. X_1 es un subconjunto total de $X^* \Longleftrightarrow$ si para algún $x \in X$ es $g(x) = 0 \quad \forall\ g \in X_1$, entonces ha de ser $x = 0$.

El siguiente lema ([7]) nos permite suponer que, bajo ciertas condiciones, en un espacio de Banach separable los elementos aleatorios tight están centrados en sus respectivas medias.

Lema 2.3.1. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en un espacio de Banach separable X. Si $\sup_n E[\|V_n\|^p] < \infty$ para algún $p > 1$, entonces $\{V_n - E[V_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tight.*

Ahora destacamos el siguiente lema, que va a permitir caracterizar a los conjuntos compactos en un espacio de Banach con base de Schauder, como casi finito-dimensionales.

Lema 2.3.2. *Sea K un conjunto compacto en un espacio de Banach que tiene una base de Schauder. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\|x - U_n(x)\| < \varepsilon \;\; \forall x \in K$ y $\forall n \geq n_0$.*

Demostración. Sea $g_n(x) = \sup_{k\geq n} \|x - U_k(x)\|$. Entonces,

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq \sup_{k\geq n} |\|x - U_k(x)\| - \|y - U_k(y)\|| \leq \sup_{k\geq n} \|(x-y) - U_k(x-y)\| \leq (m+1)\|x-y\| \tag{2.46}$$

donde m es la constante base.
Por consiguiente, g_n es uniformemente continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $\{g_n\}$ decrece monótonamente (puntualmente) hacia 0, y, por tanto, aplicando el teorema de Dini, $\{g_n\}$ converge uniformemente a 0. □

Nota 2.3.2. Teorema de Dini. Sea E un espacio métrico compacto. Si una sucesión monótona (creciente o decreciente) $\{f_n\}$ de funciones continuas a valores reales converge puntualmente a una función continua g, entonces converge uniformemente a g.

En el siguiente teorema vamos a probar que si consideramos sumas ponderadas de elementos aleatorios tight con cierta condición de momentos, la convergencia en probabilidad en la topología débil equivale a la convergencia en probabilidad en la topología de la norma.

Teorema 2.3.2. *Sea X un espacio de Banach separable, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en X con medias cero verificando que*

$E[\|V_n\|^r] \leq \Gamma \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, para algún $r > 1$ y $\Gamma > 0$. Sea $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante positiva.
Entonces $|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(V_k)| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada $f \in X^*$ si, y solo si, $\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Demostración. Como X puede ser inmerso isométricamente en un espacio de Banach con base de Schauder, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que X tiene una base de Schauder $\{b_t\}$.
También podemos suponer $\Gamma = 1$.

Probamos el resultado por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Inmediato. La convergencia en la topología de la norma implica la convergencia en la topología débil.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Sea m la constante base tal que $\|U_t\| \leq m$ y $\|Q_t\| \leq m + 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{N}$, con Q_t dada por $Q_t(x) = x$ - $U_t(x) = x$ - $\sum_{k=1}^{t} f_k(x) b_k$.
Para cada n y t , escribimos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_t(V_k) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} Q_t(V_k). \tag{2.47}$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $t \in \mathbb{N}$ fijado se tiene:

$$\begin{aligned} P[\|U_t(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] = P[\|\sum_{i=1}^{t} f_i(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k) b_i\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq \\ P[\sum_{i=1}^{t} |f_i(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k)| \|b_i\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq \\ \sum_{i=1}^{t} P[|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_i(V_k)| > \frac{\varepsilon}{2t\|b_i\|}] \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

cuando $n \to \infty$, puesto que por hipótesis $|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_i(V_k)| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada $i \in \mathbb{N}$, pues $f_i \in X^* \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$, por ser X espacio de Banach. Como $\{V_n\}$ es tight, existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$P[V_n \in K] \geq 1 - \left(\frac{\varepsilon^2}{8C(m+1)}\right)^{\frac{r}{r-1}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.49}$$

Entonces, por el Lema 2.3.2, se puede escoger $t \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|Q_t(x)\| = \|x - U_t(x)\| < \frac{\varepsilon^2}{8C} \qquad \forall\, x \in K. \tag{2.50}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene:

$$\begin{aligned} & E[\|Q_t(V_k)\|] \leq \\ E[\|Q_t(V_k)\|]I_{[\|Q_t(V_k)\| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C}]} + {} & E[\|Q_t(V_k)\|]I_{[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}]} \leq \\ \frac{\varepsilon^2}{8C} + {} & (E[\|Q_t(V_k)\|^r])^{\frac{1}{r}} (E[I_{[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}]}])^{\frac{r-1}{r}} \leq \\ \frac{\varepsilon^2}{8C} + (m+1)(E[\|V_k\|^r])^{\frac{1}{r}} & \left(P\left[\|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon^2}{8C}\right]\right)^{\frac{r-1}{r}} < \\ \frac{\varepsilon^2}{8C} + {} & (m+1)(E[\|V_k\|^r])^{\frac{1}{r}} (P[V_k \notin K])^{\frac{r-1}{r}} \leq \\ \frac{\varepsilon^2}{8C} + {} & (m+1)\frac{\varepsilon^2}{8C(m+1)} = \frac{\varepsilon^2}{4C} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P[\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq P[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \|Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] \leq \\ \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| E[\|Q_t(V_k)\|] \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot C \cdot \frac{\varepsilon^2}{4C} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Para este $t \in \mathbb{N}$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$ se verifique

$$P[\|U_t(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.53}$$

Entonces, $\forall\ n \geq n_0$ se tiene que:

$$P[\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k\| > \varepsilon] \leq P[\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}U_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] +$$
$$P[\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}Q_t(V_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.54}$$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k \longrightarrow 0$ en probabilidad. □

Nota 2.3.3. La acotación de momentos que se efectúa en el teorema anterior trae consigo el siguiente resultado (ver [7]):

Lema 2.3.3. *Sea* $\{X_n\}$ *una sucesión de variables aleatorias tales que* $E[|X_n|^r] \leq \Gamma$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *para algún* $r > 1$ *y* $\Gamma > 0$. *Entonces existe una variable aleatoria* V *tal que:*

1) $P[|X_n| \geq a] \leq P[|V| \geq a] \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ *y* $a \geq 0$.

2) $E[|V|^p] < \infty \quad \forall\ p$ *con* $0 < p < r$.

Esto quiere decir que en las condiciones del Teorema 2.3.2, la sucesión $\{\|V_n\|\}$ está uniformemente dominada por una variable aleatoria V tal que $\mathrm{E}[|V|] < \infty$. Entonces,

$$E[\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k\|] \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|E[\|V_k\|] \leq$$
$$E[|V|] \cdot \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq CE[|V|] < \infty. \tag{2.55}$$

Luego la serie $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}V_k$ converge absolutamente c.s. para cada $n \in \mathbb{N}$, y como X es un espacio completo, la serie S_n converge con probabilidad 1.

Concluimos esta subsección con un resultado que es consecuencia inmediata del teorema que acabamos de probar:

Corolario 2.3.1. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder, y sea $\{V_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en X con medias 0 tales que $E[\|V_n\|^r] \leq \Gamma \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, para algún $r > 1$ y $\Gamma > 0$.*
Sea $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales tal que $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq C$, donde C es una constante positiva.
Entonces $|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f_i(V_k)| \longrightarrow 0$ en probabilidad para cada funcional coordenada f_i si, y solo si, $\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k\| \longrightarrow 0$ en probabilidad.

Es decir, si consideramos un espacio de Banach con base de Schauder, la convergencia débil de las sumas ponderadas en la topología de la norma es equivalente a la convergencia débil para todos los funcionales coordenada.

2.3.2. Convergencia fuerte

En esta subsección expondremos algunos resultados básicos sobre convergencia casi segura de sumas ponderadas de elementos aleatorios independientes y tight en espacios de Banach separables.

Comenzamos enunciando un resultado para elementos aleatorios con momentos r-ésimos ($r > 1$) uniformemente acotados, que toman sus valores en un subconjunto compacto.

Teorema 2.3.3. *Sean K un subconjunto compacto de un espacio de Banach separable X, y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes en X que toman sus valores en K, con $E[V_n] = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Consideremos una sucesión de Toeplitz $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ verificando que $\sup_k |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. Entonces, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k \xrightarrow{c.s.} 0$.*

Demostración. Se puede suponer que K es convexo y simétrico, $0 \in K$ ([6]), y que $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
En el espacio dual X^* existe un conjunto numerable S que separa puntos de

K. Sea τ_s la topología más débil sobre K que hace continuos los elementos de S. Entonces, para $\{X_n\} \subset K$, $X_n \to 0$ en τ_s si, y solo si, $\|X_n\| \to 0$. Para cada $f \in S$, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(V_k) \xrightarrow{c.s.} 0$ por el Teorema 1.2.4, ya que $\{f(V_k)\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes uniformemente acotadas con medias cero.
Puesto que K es convexo y simétrico, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k(\omega) \in K \quad \forall\ \omega \in \Omega$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, y puesto que S es numerable, $\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k\| \xrightarrow{c.s.} 0$, pues el conjunto de $\omega \in \Omega$ para los que no se cumple esto, es unión numerable de conjuntos nulos (uno para cada $f \in S$). $\square$

A continuación, obtendremos un resultado general truncando los elementos aleatorios en un compacto y aplicando el teorema anterior.

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio de Banach separable, y sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una sucesión de elementos aleatorios independientes y tight en X con $E[\|V_n\|^r] \leq \Gamma$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, para algún $r > 1$ y $\Gamma > 0$. Sea $\{a_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Toeplitz tal que $\sup\limits_k |a_{nk}| = O(n^{-\alpha})$ para algún $0 < \frac{1}{\alpha} < r - 1$. Entonces,*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(V_k - E[V_k]) \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Demostración. Por el Lema 2.3.1 podemos suponer que $\mathrm{E}[V_n] = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Supongamos también que $\Gamma = 1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq 1$.
Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = (\varepsilon/4)^{\frac{r}{r-1}}$.
Sea K compacto (podemos suponer, como en la prueba del teorema anterior, que es convexo, simétrico y que $0 \in K$) tal que $\mathrm{P}[V_n \in K] > 1$ - $\delta \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Definamos $Y_n = V_n I_{[V_n \in K]}$ y $Z_n = V_n - Y_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{Y_n - E[Y_n]\}$ toma sus valores en K y, por consiguiente, aplicando el teorema anterior, se tiene que

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(Y_k - E[Y_k])\| \xrightarrow{c.s} 0 \tag{2.56}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$E[\|Z_n\|] = E[\|V_n\| I_{[V_n \notin K]}] \leq E[\|V_n\|^r]^{\frac{1}{r}} (P[V_n \notin K])^{\frac{r-1}{r}} \leq$$
$$\leq 1 \cdot (\delta)^{\frac{r-1}{r}} = \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.57}$$

También se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$E[|\|Z_n\| - E[\|Z_n\|]|^r] \leq 2^{r-1}(E[\|Z_n\|^r] + (E[\|Z_n\|])^r]) \leq 2^r \tag{2.58}$$

Aplicando ahora el Lema 2.3.3 y el teorema fuerte de Rohatgi (Teorema 1.2.4, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|(\|Z_k\| - E[\|Z_k\|]) \xrightarrow{c.s} 0 \tag{2.59}$$

Se puede tomar una sucesión de $\varepsilon_n \to 0$, $S_n \to 0$ y correspondientes compactos K_n tales que pueden ser excluidos de (2.56) y (2.59) un número numerable de conjuntos nulos. Por tanto, para casi todo $\omega \in \Omega$ existe $n_0 = n_0(\omega, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se tiene que:

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(Y_k(\omega) - E[Y_k])\| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ y} \tag{2.60}$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|(\|Z_k(\omega)\| - E[\|Z_k\|])| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.61}$$

Luego $\forall\ n \geq n_0$:

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} Z_k(\omega)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|(\|Z_k(\omega)\| - E[\|Z_k\|]) +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| E[\|Z_k\|] \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.62}$$

Análogamente, como E[Y_k] = -E[Z_k], se tiene que:

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} Y_k(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ n \geq n_0 \tag{2.63}$$

ya que

$$\|\sum_{k} a_{nk} Y_k(\omega)\| \leq \|\sum_{k} a_{nk}(Y_k(\omega) - E[Y_k])\| + \|\sum_{k} a_{nk} E[Y_k]\| \tag{2.64}$$

Por tanto,

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_k(\omega)\| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.65}$$

□

Observación 2.3.1. Este teorema proporciona una ley fuerte de los grandes números pues la doble sucesión

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{2.66}$$

satisface las hipótesis con $\underset{k}{sup}\, |a_{nk}| = \mathrm{O}(n^{-1})$ y $r > 2$. La condición de momento es necesaria para la acotación uniforme de $\{\|Z_n\| - E[\|Z_n\|]\}$ por una variable aleatoria, y así poder aplicar el teorema de Rohatgi.

Capítulo 3

Sumas ponderadas de elementos aleatorios en espacios de Banach (II)

En los resultados obtenidos en el capítulo anterior, se han impuesto condiciones sobre los elementos aleatorios por un lado, y sobre los pesos por otro. En este capítulo pretendemos estudiar resultados de convergencia imponiendo a los elementos aleatorios condiciones relacionadas con los pesos o $\{a_{nk}\}$-condiciones: la integrabilidad uniforme con respecto a los pesos o la integrabilidad compactamente uniforme con respecto a los pesos.

3.1. Sucesiones $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrables

Definición 3.1.1. Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando

$$\sum_k |a_{nk}| \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

para alguna constante positiva C. Una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias integrables se dice $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrable (o uniformemente integrable respecto a la doble sucesión $\{a_{nk}\}$) si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \sum_k |a_{nk}| E[|X_k|] I_{[|X_k|>a]} = 0. \tag{3.2}$$

El resultado que enunciamos a continuación es una caracterización de la $\{a_{nk}\}$-integrabilidad uniforme:

Teorema 3.1.1. *Una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias es $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrable si y solo si:*
1) $\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| E[|X_k|]\right) = M < \infty$.
2) *para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sucesión de sucesos $\{A_k\}$ verificando*

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| P(A_k)\right)$$

se tiene

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{A_k} |X_k| dP\right) < \varepsilon.$$

En [2] se prueba que este concepto es más débil que el de integrabilidad uniforme. Bajo esta condición de $\{a_{nk}\}$-integrabilidad uniforme se obtiene el siguiente resultado de convergencia en L_1:

Teorema 3.1.2. *Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando:*
1) $\sum_k |a_{nk}| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, *para alguna constante positiva C.*
2) $\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ *cuando $n \to \infty$.*
Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes por pares y $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrable. Entonces,

$$S_n = \sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k]) \longrightarrow 0 \quad \text{en } L_1. \tag{3.3}$$

Este teorema no es extensible al caso de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable. Veamos un contraejemplo:

Ejemplo 3.1.1. Sea $l^1 = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| = \sum_n |x_n| < \infty\}$.
$(l^1, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach real separable.
Sea $\{e_n\}$ la base estándar de l^1. Sea $\{X_n\}$ la sucesión de elementos aleatorios en l^1 dada por:

$$X_n = \begin{cases} e_n & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ -e_n & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.4}$$

Entonces $\|X_n\| = 1$ con probabilidad uno y $\mathrm{E}[X_n] = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por tanto, para cada $a \geq 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{[\|X_n\|>a]} \|X_n\| dP = 0. \tag{3.5}$$

Entonces, $\{X_n\}$ es uniformemente integrable, y también $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrable para toda sucesión $\{a_{nk}\}$ tal que $\sum_k |a_{nk}| \leq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante positiva.
Pero $\mathrm{E}[\|S_n\|] = \mathrm{E}[\|\sum_k a_{nk} X_k\|] = \sum_k |a_{nk}|$, y la sucesión $\{E[\|S_n\|]\}$ no converge necesariamente a cero. Por ejemplo, si consideramos

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{3.6}$$

se tiene que $\mathrm{E}[\|\sum_k a_{nk} X_k\|] = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, sí es posible obtener un resultado de convergencia similar en L_r $(0 < r < 1)$ en este contexto:

Teorema 3.1.3. *Sea $\{a_{nk}\}_{k,n \in \mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando:*
1) $\sum_k |a_{nk}|^r \leq C$ para algún $r \in (0,1)$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante positiva.
2) $\sup_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable X, tal que $\{\|X_n\|^r\}$ es $\{|a_{nk}|^r\}$-uniformemente integrable. Entonces,

$$E[\|\sum_k a_{nk}X_k\|^r] \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando } n \to \infty. \tag{3.7}$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que:

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}|^r E[\|X_k\|^r] I_{[|X_t| \geq a]} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos:

$$W_k = X_k I(|X_k| \leq a)$$
$$Y_k = X_k - W_k.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} E[\|\sum_k a_{nk}W_k\|] &\leq \sum_k |a_{nk}| E[\|W_k\|] \\ &\leq a \left(\sup_k |a_{nk}|^{1-r} \right) \sum_k |a_{nk}|^r \\ &\leq aC \left(\sup_k |a_{nk}|^{1-r} \right) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por tanto, $\mathrm{E}[\|\sum_k a_{nk}W_k\|^r] < \frac{\varepsilon}{2}$ para n suficientemente grande.
Asimismo,

$$E[\|\sum_k a_{nk}Y_k\|^r] \leq \sum_k |a_{nk}|^r E[\|Y_k\|^r]$$
$$= \sum_k |a_{nk}|^r E[\|X_k\|^r] I_{[|X_t| \geq a]} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Luego $E[\|\sum_k a_{nk}X_k\|^r] \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ en L_r. □

Este último teorema extiende a elementos aleatorios en un espacio de Banach separable un resultado análogo obtenido para variables aleatorias en [2].

3.2. Sucesiones $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrables

Definición 3.2.1. Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales satisfaciendo $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$. Sea $p > 0$. Una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos aleatorios en un espacio de Banach separable X es $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable con orden p-ésimo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| E[\|X_k\|^p] I_{[X_k \notin K]} < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Nota 3.2.1. Si $p = 1$ se dice que $\{X_n\}$ es $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable.

El siguiente teorema, en [3], proporciona una condición suficiente (aunque no necesaria) para que $\{X_n\}$ sea $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable con orden p-ésimo.

Teorema 3.2.1. *Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales con $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$, y sea $p > 0$. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios tight en un espacio de Banach separable X, tal que la sucesión $\{\|X_n\|^p\}$ es $\{a_{nk}\}$-uniformemente integrable.*
Entonces, $\{X_n\}$ es $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable con orden p-ésimo.

En la sección anterior, aportamos un contraejemplo para mostrar que el Teorema 3.1.2 no era válido para espacios de Banach separables. Veamos ahora que sí es posible obtener una extensión de dicho teorema imponiendo que la sucesión de elementos aleatorios $\{X_n\}$ sea $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable.

Para ello, introducimos primero el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{b_n\}$. Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable con orden p-ésimo para algún $p \geq 1$ en X. Entonces,*

$$\lim_t \sup_n \sum_k |a_{nk}| E[\|Q_t(X_k - E[X_k])\|^p] = 0. \tag{3.12}$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| E[\|X_k\|^p I_{[X_k \notin K]}] < \varepsilon 2^{-2p}(M+1)^{-p}. \tag{3.13}$$

donde M es la constante base de la base de Schauder $\{b_n\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$W_n = X_n I_{[X_n \in K]}$$
$$Y_n = X_n I_{[X_n \notin K]} = X_n - W_n.$$

Como K es compacto, existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Q_t(W_k)\| < \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{1}{p}} C^{-\frac{1}{p}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $t \geq t_0$, donde $C > 0$ es una constante tal que $\sup_n \sum_k |a_{nk}| \leq C$.

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} E[\|Q_t(W_k - E[W_k])\|^p] &= E[\|Q_t(W_k) - E[Q_t(W_k)]\|^p] \\ &\leq 2^{p-1}(E[\|Q_t(W_k)\|^p] + E[\|Q_t(W_k)\|]^p) \\ &\leq 2^p E[\|Q_t(W_k)\|^p] < \varepsilon 2^{-p} C^{-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{nk}| E[\|Q_t(Y_k - E[Y_k])\|^p] &\leq 2^{p-1}(M+1)^p \sum_k |a_{nk}| (E[\|Y_k\|^p] + (E[\|Y_k\|])^p) \\ &\leq 2^p (M+1)^p \sum_k |a_{nk}| E[\|Y_k\|^p] < \varepsilon 2^{-p}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por tanto, para cada $t \geq t_0$:

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| E[\|Q_t(X_k - E[X_k])\|^p] \leq 2^{p-1}(\varepsilon 2^{-p} + \varepsilon 2^{-p}) = \varepsilon \qquad (3.16)$$

□

Análogamente, se prueba el siguiente lema:

Lema 3.2.2. *Sean X, $\{a_{nk}\}$ y $\{X_n\}$ como en el Lema 3.2.1, con $p > 0$. Entonces,*

$$\lim_t \sup_n \sum_k |a_{nk}| E[\|Q_t(X_k)\|^p] = 0. \qquad (3.17)$$

Enunciemos ahora el resultado que extiende el Teorema 3.1.2:

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach separable. Sea $\{a_{nk}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ una doble sucesión de números reales verificando:*

1) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

2) $\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$.

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes por pares y $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable en X. Entonces,

$$E[\|\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\|] \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Usando que $\{X_n\}$ es $\{a_{nk}\}$-compactamente uniformemente integrable, la acotación del correspondiente compacto K y 1), se deduce que $\sum_k |a_{nk}| E[\|X_k - E[X_k]\|] < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así como la convergencia casi segura de $S_n = \sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como X puede ser isométricamente inmerso en un espacio de Banach con base de Schauder, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X tiene una base de Schauder $\{b_n\}$. Sea M la constante base.

Para cada $t \in \mathbb{N}$ fijo, y para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$E[\|\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\|] \leq E[\|\sum_{i=1}^{t} f_i \left(\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\right) b_i\|] + E[\|Q_t \left(\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\right)\|]. \quad (3.18)$$

Por el Lema 3.2.1, dado $\varepsilon > 0$, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$E[\|Q_t \left(\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\right)\|] < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Fijamos un $t \in \mathbb{N}$. Sea $m = \underset{1\leq i\leq t}{max}\|f_i\|\|b_i\|$.
Existe un subconjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\underset{n}{sup} \sum_k |a_{nk}| E[\|X_k\| I_{[X_k \notin K]}] < \frac{\varepsilon}{4mt}. \quad (3.20)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$W_n = X_n I_{[X_n \in K]}$$
$$Y_n = X_n I_{[X_n \notin K]} = X_n - W_n.$$

Tenemos:

$$E[\|\sum_{i=1}^{t} f_i \left(\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\right) b_i\|]$$
$$\leq \sum_{i=1}^{t} \left(E[|f_i \left(\sum_k a_{nk}(W_k - E[W_k])\right)|] + E[|f_i \left(\sum_k a_{nk}(Y_k - E[Y_k])\right)|] \right) \|b_i\|. \quad (3.21)$$

$\{f_i(W_k - E[W_k])\}_{k\in\mathbb{N}}$ es, para cada $i \in \mathbb{N}$, una sucesión de variables aleatorias independientes por pares con media cero. Por tanto,

$$E[|f_i \left(\sum_k a_{nk}(W_k - E[W_k])\right)|]\|b_i\| \leq \left[E[\left(\sum_k a_{nk} f_i(W_k - E[W_k])\right)^2] \right]^{\frac{1}{2}} \|b_i\|$$
$$\leq m \left(\sum_k |a_{nk}|^2 E[\|W_k - E[W_k]\|^2]\right)^{\frac{1}{2}} \leq A \left(\sum_k |a_{nk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

siendo A una constante.

Como $\sum_k |a_{nk}|^2 \leq (\underset{k}{sup}\,|a_{nk}|)\sum_k |a_{nk}| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ y $1 \leq i \leq t$:

$$E[|f_i\left(\sum_k a_{nk}(W_k - E[W_k])\right)|]\|b_i\| < \frac{\varepsilon}{4t}. \tag{3.23}$$

Por otra parte,

$$E[|f_i\left(\sum_k a_{nk}(Y_k - E[Y_k])\right)|]\|b_i\| \leq 2m\sum_k |a_{nk}|E[\|Y_k\|]. \tag{3.24}$$

Por tanto,

$$E[\|\sum_k a_{nk}(X_k - E[X_k])\| < t\frac{\varepsilon}{4t} + 2mt\frac{\varepsilon}{4mt} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \tag{3.25}$$

para cada $n \geq n_0$. $\square$

Apéndice
Elementos Aleatorios

En esta sección mostraremos algunas nociones básicas necesarias para la correcta comprensión de estas notas. Detallaremos qué es un elemento aleatorio, mencionando sus propiedades esenciales, y también establereceremos resultados relacionados con dicho concepto.

Consideramos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ y el espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|)$.

Definición. Una función $V : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es un **elemento aleatorio** en X si V es $\mathbb{B}(X)$-medible, es decir, si para cada $B \in \mathbb{B}(X)$ se tiene

$$V^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : V(\omega) \in B\} \in \mathbb{A} \tag{3.26}$$

Nota. Un elemento aleatorio es una generalización de una variable aleatoria. De este modo, V es un elemento aleatorio en $\mathbb{R}$ si, y solo si, V es una variable aleatoria. Asimismo, elementos aleatorios en $\mathbb{R}^n$ son vectores aleatorios o variables aleatorias n-dimensionales.

Lema. Sea V un elemento aleatorio (e.a.) en un espacio lineal normado (e.l.n.) X y sea $T : X \longrightarrow Y$ una función medible-Borel, siendo Y otro e.l.n. Entonces, $T(V) \equiv T \circ V$ es un e.a. en Y.

Proposición. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de e.a. en un e.l.n. X de forma que $V_n(\omega) \longrightarrow V(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. Entonces V es un elemento aleatorio en X.

Proposición. Sea V un elemento aleatorio en un espacio lineal normado X y sea A una variable aleatoria. Entonces, AV es un elemento aleatorio en X.

Aunque es posible generalizar muchas características de las variables aleatorias a los elementos aleatorios, no todas las propiedades pueden ser extendidas. Por ejemplo, sumas de variables aleatorias son variables aleatorias, pero sumas de elementos aleatorios en un espacio topológico X pueden no estar definidas (si X no es lineal). Asimismo, en espacios lineales normados es necesario exigir en algunas ocasiones la separabilidad para extender propiedades básicas de variables aleatorias a elementos aleatorios.

A continuación, mostramos algunas propiedades topológicas de los elementos aleatorios.

Teorema. Sea X un espacio lineal normado. Sea V un elemento aleatorio en X. Entonces, se tiene que:
a) $\|V\|$ es una variable aleatoria.
b) Si $f \in X^*$, $f(V)$ es una variable aleatoria.

El siguiente teorema prueba que el recíproco es también cierto si consideramos un e.l.n. separable.

Teorema. Sea X un espacio lineal normado separable. Entonces, una función $V : \Omega \longrightarrow X$ es un elemento aleatorio si, y solo si $f(V)$ es una variable aleatoria para cada $f \in X^*$.

Nota. Este teorema implica que en un e.l.n separable, la suma de dos elementos aleatorios es un elemento aleatorio. Sin embargo, la suma de dos e.a. en un e.l.n. no separable no es necesariamente un e.a., como se pone de manifiesto en [7].

Un elemento aleatorio en un espacio topológico induce una medida de probabilidad en el espacio de sus subconjuntos de Borel. De este modo, introducimos, a continuación, los conceptos de idéntica distribución e independencia, extendiendo los resultados de variables aleatorias a elementos aleatorios en espacios lineales normados.

Definición. Sean V y Z dos elementos aleatorios sobre X. Diremos que V y Z están **idénticamente distribuidos** si $P[V \in B] = P[Z \in B]$ para todo $B \in \mathbb{B}(X)$. Es decir, si inducen la misma medida de probabilidad.
Una familia de elementos aleatorios está idénticamente distribuida si cada par de elementos aleatorios que la forman está idénticamente distribuido.

Definición. Un conjunto finito de elementos aleatorios $\{V_1, ..., V_n\}$ en X se dice que es **independiente** si $P\bigcap_{i=1}^{n}[V_i \in B_i] = \prod_{i=1}^{n} P[V_i \in B_i]$ para cada $B_1, ..., B_n \in \mathbb{B}(X)$.
Una familia de elementos aleatorios en X es independiente si cada subconjunto finito de ella lo es.

Lema. a) Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos aleatorios independientes en X y $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones medibles-Borel del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Entonces, $\{T_\alpha(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una familia de elementos aleatorios independientes en Y.
b) Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en X y $T : X \longrightarrow Y$ una función medible-Borel de X en otro espacio topológico Y. Entonces $\{T(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una familia de elementos aleatorios idénticamente distribuidos en Y.

Enunciamos ahora dos resultados que nos proporcionan una caracterización de la idéntica distribución y de la independencia de elementos aleatorios en términos del espacio dual, y que son fácilmente extensibles a familias de elementos aleatorios.

Proposición. Sea X un espacio lineal normado separable. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z en X son idénticamente distribuidos si, y solo si, $f(V)$ y $f(Z)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas para cada $f \in X^*$.

Proposición. Sea X un espacio lineal normado separable. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z en X son independientes si, y solo si, $f(V)$ y $g(Z)$ son variables aleatorias independientes para cada $f, g \in X^*$.

Nota. El hecho de que $f(V)$ y $f(Z)$ sean independientes para cada $f \in X^*$ no es suficiente para que V y Z sean independientes.

Si consideramos ahora que X es un e.l.n con base de Schauder, es posible conseguir una caracterización de la independencia en términos de los funcionales coordenada $\{f_k\}$.

Proposición. Sea X un espacio lineal normado con una base de Schauder $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y funcionales coordenada medibles-Borel $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se tiene que los elementos aleatorios V y Z son independientes en X si, y solo si, los vectores aleatorios $(f_1(V), ..., f_n(V))$ y $(f_1(Z), ..., f_n(Z))$ son independientes para cada $n = 1, 2, ...$

A continuación vamos a usar la integral de Pettis para definir un valor esperado para elementos aleatorios.

Definición. Sea V un elemento aleatorio en un espacio lineal topológico X. Diremos que V tiene **esperanza** o **valor esperado** $E[V]$ si existe un elemento $E[V] \in X$ que cumple que:

$$f(E[V]) = E[f(V)] = \int_\Omega f(V)dP \; < \infty \tag{3.27}$$

para cada función $f \in X^*$.

Lema. Sea X un espacio topológico de forma que X^* separa puntos de X. Entonces, el valor esperado es único.

El valor esperado no siempre está definido. El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente para su existencia.

Teorema. Sean X un espacio de Banach separable y V un elemento aleatorio en X. Si $E[\|V\|] < \infty$, entonces existe $E[V]$.

Mostramos ahora algunas propiedades de la esperanza de un elemento aleatorio que son consecuencia de la definición de la integral de Pettis.

Teorema. Sean V, V_1 y V_2 elementos aleatorios en un espacio lineal normado X. Sea $x \in X$. Se tiene:
1) Si existen $E[V_1]$ y $E[V_2]$ y $V_1 + V_2$ es un elemento aleatorio en X, entonces $E[V_1 + V_2] = E[V_1] + E[V_2]$.
2) Si $E[V]$ existe y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $E[\lambda V] = \lambda E[V]$.
3) Si $P[V = x] = 1$, entonces $E[V] = x$. Además, si A es una variable aleatoria y existe $E[A]$, entonces $E[AV] = (E[A])x$.
4) Sea $h : X \longrightarrow Y$ una función lineal continua, siendo Y un espacio lineal topológico. Si existe $E[V]$, entonces $E[h(V)] = h(E[V])$.
5) Si existe $E[V]$, entonces $\|E[V]\| \leq E[\|V\|]$, donde el segundo miembro puede ser $+\infty$.

Bibliografía

[1] Jamison, B., Orey, S. and Puitt, W., *Convergence of weighted averages of independent random variables.* Z. Wahr. Verw. Geb. **4** (1965), 40-44.

[2] Ordóñez Cabrera, M., *Convergence of weighted sums of random variables and uniform integrability concerning the weights.* Collect. Math. **45**, 2 (1994), 121-132.

[3] Ordóñez Cabrera, M., *Convergence in mean of weighted sums of* $\{a_{nk}\}$*-compactly uniformly integrable random elements in Banach spaces.* Internat. J. Math. & Math. Sci. **20**, 3 (1997), 443-450.

[4] Pruitt, W., *Summability of independent random variables.* J. Math. Mech. **15** (1966), 769-776.

[5] Rohatgi, V. K., *Convergence of weighted sums of independent random variables.* Proc. Camb. Phil. Soc. **69** (1971), 305-307.

[6] Rudin, W., Functional Analysis. McGraw-Hill, New York (1973).

[7] Taylor, R. L., Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 672, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[8] Wang, X. C. and Bhaskara Rao, M., *Convergence in the p-th mean and some WLLN for weighted sums of random elements in separable normed linear spaces.* J. Mult. Anal. **15** (1984), 124-134.

[9] Wang, X. C. and Bhaskara Rao, M., *A note on convergence of weighted sums of random variables.* Internat. J. Math. & Math. Sci. **8**, 4 (1985), 805-812.