FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático

OPERADORES DE COMPOSICIÓN Y CLASES DE SCHATTEN

Trabajo de fin de Grado para el Grado en Matemáticas.

Francisco Javier González Doña

Supervisado por los profesores:
Luis Rodríguez Piazza
Miguel Lacruz Martín

Índice general

Abstract

The main goal of this work is to characterize the membership of composition operators on the Hardy space H^2 of the unit disk to the Schatten classes.
Firstly, we will study the basic results for compact operators between Banach and Hilbert spaces, and based on the spectral theorem for compact operators we will introduce the operators ideal known as the Schatten classes and we will prove its more important properties.
Secondly, we will introduce the Hardy space H^2, focusing on composition operators defined on this space. We will prove Littlewood's theorem, that shows that these operators are continuous, and we will study some basic results about compactness. Moreover, using the pull-back measure we will see that our main problem is equivalent to characterize the membership to Schatten classes of the embeddings from H^2 to $L^2(\mu)$, where μ is a Borel finite measure defined on the unit disc.
Finally, we will study the continuity and compactness properties of these embeddings and we will present an alternative, new proof for Luecking's theorem, that will solve our problem in the general framework and will give us the desired characterization of membership for composition operators to Schatten classes.

Resumen

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es caracterizar la pertenencia a las clases de Schatten de los operadores de composición en el espacio de Hardy H^2.
Para ello, introduciremos y estudiaremos las propiedades básicas de los operadores compactos entre espacios de Banach y de Hilbert, y gracias al teorema espectral para operadores compactos entre espacios de Hilbert presentaremos los ideales de operadores conocidos como clases de Schatten y demostraremos sus características más importantes.
A continuación, introduciremos el espacio de Hardy H^2, centrándonos en los operadores de composición definidos sobre este espacio. Probaremos su continuidad gracias al teorema de Littlewood y estudiaremos sus propiedades más básicas de compacidad. Además, gracias al concepto de medida imagen, probaremos que nuestro problema inicial es equivalente a caracterizar la pertenencia a las clases de Schatten de las inyecciones de H^2 en $L^2(\mu)$, donde μ es una medida boreliana finita en el disco.
Finalmente, estudiaremos las propiedades de continuidad y de compacidad de estas inyecciones mediante el concepto de medida de Carleson y presentaremos una prueba novedosa del teorema de Luecking, que resolverá nuestro problema en el marco general y nos dará la caracterización buscada de pertenencia a las clases de Schatten para los operadores de composición.

Introducción

En 1987, Daniel H. Luecking probaba en su artículo 'Trace Ideal Criteria for Toeplitz Operators' [9] una condición necesaria y suficiente para que las inyecciones

$$j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu)$$

pertenezcan a las clases de Schatten $S_p(H^2, L^2(\mu))$, donde μ es una medida boreliana finita en el disco unidad del plano complejo $\mathbb{D}$.
Este resultado probaba, en particular, una caracterización para la pertenencia a las clases de Schatten de los operadores de composición definidos sobre H^2.
La meta final de este trabajo es probar con unas herramientas esencialmente diferentes el teorema de Luecking, para poder así ofrecer demostración novedosa con métodos más elementales de la caracterización que mencionamos anteriormente.
Este texto se estructura en tres capítulos, a lo largo de los cuales presentaremos y estudiaremos detenidamente los conceptos involucrados en el teorema de Luecking, como son las clases de Schatten, el espacio de Hardy H^2 y los operadores de composición.

En el capítulo 1 comenzamos hablando sobre operadores compactos definidos sobre espacios de Banach. Probaremos que conforman un subespacio vectorial cerrado de los operadores continuos, y en particular veremos que conforman un ideal de Banach.
Acto seguido, nos restringiremos a los operadores compactos definidos entre espacios de Hilbert y demostraremos el teorema espectral para operadores compactos, el cual asegura que podremos escribir nuestro operador $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ como

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes f_n,$$

donde (e_n) y (f_n) son sistemas ortonormales en H_1 y H_2 respectivamente y $a_n(T)$ denota a los números de aproximación de T.
Gracias a esta caracterización, definiremos entonces las clases de Schatten $S_p(H_1, H_2)$ para $0 < p < \infty$ como los operadores compactos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p < \infty.$$

Así, definiremos la aplicación $\sigma_p : S_p(H_1, H_2) \to \mathbb{R}$ como

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p \right)^{1/p}.$$

Veremos entonces que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ conforma un espacio cuasi-normado para $0 < p < 1$ y un espacio normado para $1 \leq p < \infty$. Además, caracterizaremos los casos $p = 1$ y $p = 2$ como los operadores de clase de traza y los operadores de Hilbert-Schmidt respectivamente y veremos que las clases de Schatten conforman un ideal de operadores.
Cerraremos el capítulo probando mediante el teorema de clase de traza que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ conforman un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$ y obtendremos también sus espacios duales.

En el capítulo 2, definiremos el espacio de Hardy H^2, que es el espacio de funciones analíticas en el disco unidad del plano complejo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

tales que la aplicación

$$\|f\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}$$

es finita, el cual conforma un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_2$. Tomando $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ para todo $0 \leq r < 1$ y $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ (donde $\mathbb{T}$ denota la circunferencia unidad) caracterizaremos la norma $\|\cdot\|_2$ como

$$\|f\|_2 = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2},$$

lo que probará que todas las funciones holomorfas acotadas en el disco están en H^2.
Podremos presentar entonces el concepto de operador de composición. Dada $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ definiremos el operador de composición de símbolo φ como la aplicación

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2 &\to H^2 \\ f &\mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Comprobaremos que todos los operadores de composición son operadores lineales y continuos gracias al teorema de Littlewood, que será consecuencia del principio de subordinación, el cual también probó Littlewood.
Acto seguido, gracias a algunas nociones básicas de análisis armónico como la integral de Poisson, dada $f \in H^2$ introduciremos su límite radial $f^* \in L^2(\mathbb{T})$, que cumplirá que

$$\lim_{r \to 1^-} f_r(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$$

en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, lo que probará que podemos identificar el espacio de Hardy H^2 con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ de las funciones con coeficientes de Fourier nulos para $n < 0$.
Gracias a este limite radial, podremos presentar algunos resultados parciales sobre compacidad para los operadores de composición, que junto con el concepto de medida imagen nos ayudarán a probar que la pertenencia a cualquier ideal de operadores del operador de composición C_φ es equivalente a la pertenencia de la inyección

$$j_{m_{\varphi^*}} : H^2 \hookrightarrow L^2(m_{\varphi^*}),$$

donde m_{φ^*} es la medida imagen inducida por φ^*, que será una medida boreliana finita en el disco.
Así, para conseguir caracterizar la compacidad y la pertenencia a las clases de Schatten de los operadores de composición, nos enfrentaremos al problema más general de caracterizar estas propiedades para las inyecciones

$$j_\mu : H^2 \to L^2(\mu),$$

donde μ denotará una medida boreliana finita en el disco.

Resolveremos este problema en el capítulo 3. Para ello, introduciremos el concepto de medida de Carleson y probabremos el teorema de Carleson, que mostrará que las inyecciones continuas son precisamente aquellas asociadas a medidas de Carleson. A continuación, veremos que la compacidad de la inyección es equivalente a que la medida de Carleson sea una medida vanishing.
Finalmente, probaremos el teorema de Luecking. Introduciremos primero algunos resultados técnicos sobre sumas directas de espacios de Hilbert que serán necesarios en la prueba. Nuestro método consistirá en escribir H^2 y $L^2(\mu)$ como sumas directas infinitas de ciertos espacios, obteniendo así una forma matricial para nuestra inyección. Estimaremos la norma de Schatten de los elementos diagonales y mayoraremos la norma del resto de elementos por los diagonales ya estimados.
Así, aplicando uno de los resultados sobre sumas directas, obtendremos la siguiente estimación:

$$\sigma_p(j_\mu) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p},$$

donde

$$R_{n,j} := \{z \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{2^n} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \arg(z) \in (\frac{2\pi j}{2^n}, \frac{2\pi(j+1)}{2^n}]\}.$$

Así, obtendremos nuestra caracterización de pertenencia a las clases de Schatten de los operadores de composición, y obtendremos la siguiente estimación:

$$\sigma_p(C_\varphi) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n m_{\varphi^*}(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Además, hemos añadido un apéndice en el que introduciremos la topología débil de un espacio de Hilbert. Caracterizaremos la convergencia débil y probaremos que todo operador compacto es completamente continuo, propiedad que usaremos repetidamente a lo largo de todo el trabajo.

Capítulo 1

Clases de Schatten

El objetivo de este capitulo es presentar los ideales de operadores conocidos como clases de Schatten o clases de Schatten-von Neumann y estudiar sus propiedades más interesantes.
En la primera sección introduciremos el concepto de operador compacto para probar a continuación el teorema espectral para operadores compactos. Este resultado proporcionará una sencilla y muy útil caracterización que nos llevará de forma natural a la definición de las clases de Schatten.
Más adelante, diseccionaremos las propiedades de estas clases, y finalizaremos el capítulo caracterizando los casos más interesantes de estos operadores y probando que conforman un espacio de Banach.

1.1. Operadores compactos

Comenzaremos definiendo el concepto de operador compacto y estudiando sus propiedades más elementales.
Denotaremos por X e Y a espacios de Banach complejos y separables.
Merece la pena recordar ciertos aspectos topológicos involucrados en el concepto de compacidad.

Dado un espacio topológico T, diremos que un conjunto $A \subseteq T$ es *relativamente compacto* si $\overline{A}$ es compacto en T. En espacios métricos, esta propiedad es equivalente a que toda sucesión en A tenga una subsucesión convergente en T.
Además, si esta subsucesión converge en A, diremos que A es *secuencialmente compacto.*
Diremos que A es *totalmente acotado* si para todo $r > 0$ existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

Cabe recordar que en los espacios métricos las propiedades de ser *compacto* y *secuencialmente compacto* son equivalentes, que a su vez son equivalentes a ser completo y totalmente acotado.

Ya tenemos lo suficiente para poder dar la definición de *operador compacto* y estudiar sus propiedades elementales.

Definición 1.1.1. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Diremos que T es **compacto** si para cualquier conjunto acotado $A \subseteq X$ se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto en Y. Lo denotaremos por $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Si $X = Y$, escribiremos $T \in \mathcal{K}(X)$.

Proposición 1.1.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ si y solo si $T(B_X)$ es relativamente compacto.*

Demostración.
Supongamos primero que T es compacto. Entonces, como claramente B_X es acotado, se tiene que $T(B_X)$ es relativamente compacto.
Veamos la otra implicación. Supongamos que $T(B_X)$ es relativamente compacto, y tomemos $A \subseteq X$ conjunto acotado.
Dada una sucesión $\{w_n\}$ en B_X, la sucesión $\{Tw_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente $\{Tw_{n_k}\}$, ya que $T(B_X)$ es relativamente compacto.
Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión en A. Recordemos que dado $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la sucesión $\{x_n\}$ es convergente si y solo si lo es $\{\alpha x_n\}$.
Como A es acotado, existe $r > 0$ tal que $A \subseteq \overline{B(0, r)}$. Entonces, la sucesión $\{r^{-1}x_n\}$ está contenida en B_X, y podemos extraer una subsucesión tal que $\{T(r^{-1}x_{n_k})\}$ es convergente, por lo tanto $\{Tx_{n_k}\}$ es convergente y $T(A)$ es relativamente compacto, tal y como queríamos probar. □

Proposición 1.1.3. *$\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración.
Veamos que $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio vectorial. Tomemos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $T, S \in \mathcal{K}(X, Y)$.
Sea x_n una sucesión acotada en X. Entonces, podemos extraer una subsucesión x_{n_k} de forma que Tx_{n_k} es convergente. Ahora, está claro que esta subsucesión es acotada, así que podemos extraer otra subsucesión $(x_{n_{k_j}})$ de forma que $Sx_{n_{k_j}}$ es convergente.
Además, está claro que $\alpha Tx_{n_{k_j}}$ y $\beta Sx_{n_{k_j}}$ son convergentes, por lo tanto

$$(\alpha T + \beta S)x_{n_{k_j}}$$

converge y esto prueba que $\alpha T + \beta S$ es compacto, por lo que $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio vectorial.
Veamos ahora que $\mathcal{K}(X, Y)$ es cerrado.
Sea $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{K}(X, Y)$ y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $\|T_n - T\| \to 0$. Veamos que

$T \in \mathcal{K}(X, Y)$.
Como Y es completo, basta comprobar que para todo $\varepsilon > 0, T(B_X)$ puede recubrirse con un número finito de bolas $B(y_i, \epsilon)$, con $y_i \in Y$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que
$\|T_n - T\| < \varepsilon/2$.
Ahora, como $T_n(B_X)$ es relativamente compacto, $T_n(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon/2)$, con $y_i \in Y$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$
Por tanto, $T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$, y tenemos que T es compacto. □

Vemos ahora un resultado que usaremos repetidamente a lo largo de todo el trabajo y que en la práctica proporciona la herramienta más potente para probar la compacidad de cualquier operador compacto:

Teorema 1.1.4 (Aproximación por operadores de rango finito)**.** *Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores de rango finito en $\mathcal{L}(X, Y)$ y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$. Entonces T es compacto.*

Demostración.
Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n es un operador compacto. Como es de rango finito, $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto cerrado y acotado en un espacio vectorial de dimensión finita, por tanto es compacto.
Además, T es límite de sucesión de operadores compactos, por tanto T es compacto. □

Gracias a este teorema podemos proporcionar los primeros ejemplos no triviales de operadores compactos:

Ejemplo 1.1.5. (a) Está claro que cualquier operador $T : X \to Y$ de rango finito es compacto, como vimos en la prueba del resultado anterior.

(b) Tomemos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\lambda_n \to 0$ y definamos el operador

$$\begin{aligned} T : \ell_2 &\to \ell_2 \\ (x_n) &\mapsto (\lambda_n x_n). \end{aligned}$$

Vamos a ver que $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$ probando que puede ser aproximado por operadores de rango finito.
Basta considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ los operadores

$$T_n : \ell_2 \to \ell_2$$

de forma que $T_n(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n, 0, ...)$. Entonces, está claro que cada T_n tiene a lo más rango n y para cada $x \in \ell_2$

$$\|T_n x - Tx\|_2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \cdot \|x\|_2$$

por tanto

$$\|T_n - T\| \leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \to 0.$$

Por tanto, T es límite de una sucesión de operadores de rango finito y por el teorema anterior es compacto.

Cabe destacar que el recíproco del teorema no es cierto en espacios de Banach en general (Per Enflo construyó un contraejemplo en 1973 en el que presentaba un operador compacto que no era límite de operadores de rango finito, ver [5]). No obstante, es cierto en algunos casos particulares, por ejemplo si Y es un espacio de Hilbert, como vemos en el siguiente resultado:

Teorema 1.1.6. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, los operadores de rango finito de $\mathcal{L}(X, H)$ son densos en $\mathcal{K}(X, H)$.*

Demostración.
Sea $T \in \mathcal{K}(X, H)$ y sea $\varepsilon > 0$.
Veamos que existe un operador $T_\varepsilon \in \mathcal{L}(X, H)$ de rango finito con $\|T_\varepsilon - T\| < \varepsilon$.
Sea $K := \overline{T(B_X)}$. Ahora, existen $y_1, ..., y_n \in Y$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$, ya que T es compacto.
Tomamos $M := \text{span}\{y_1, ..., y_n\}$ (que es un espacio vectorial cerrado al ser de dimensión finita) y definimos $T_\varepsilon := P \circ T$, donde P es la proyección de H sobre M. Observamos que P es de rango finito, y por tanto T_ε también tiene rango finito.
Comprobemos que $\|T_\varepsilon - T\| < \varepsilon$. Si $x \in B_X$, entonces existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\|Tx - y_{i_0}\| < \varepsilon/2$$

Por tanto,

$$\|P \circ Tx - Py_{i_0}\| < \varepsilon/2 \Rightarrow \|P \circ Tx - y_{i_0}\| < \varepsilon/2$$

Por tanto, dado $x \in B_X$ tenemos

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| = \|P \circ Tx - Tx\| \leq \|P \circ Tx - y_{i_0}\| + \|Tx - y_{i_0}\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Así que

$$\|T_\varepsilon - T\| < \varepsilon,$$

tal y como queríamos probar. $\square$

Finalmente, introducimos el concepto de *ideal de Banach de operadores*:

Definición 1.1.7. Un **ideal de operadores** $\mathcal{A}$ es un método que asigna a cada par de espacios de Banach (X, Y) un subespacio vectorial $\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$, que cumple las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{A}(X, Y)$ contiene a todos los operadores de rango finito de X en Y.

(b) Si X_0 y Y_0 son espacios de Banach y $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $W \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, entonces, para todo $T \in \mathcal{A}(X, Y)$
$$WTS \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$$

Además, si para cada X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ está provisto de una norma α que cumple

(c) $[\mathcal{A}(X, Y), \alpha]$ es un espacio de Banach.

(d) Si X_0 y Y_0 son espacios de Banach y $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $W \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, entonces, para todo $T \in \mathcal{A}(X, Y)$
$$\alpha(WTS) \leq \|W\| \, \alpha(T) \, \|S\|$$

Diremos que $[\mathcal{A}, \alpha]$ es un **ideal de Banach de operadores**.

Nota 1.1.8. En la anterior definición hemos exigido que los ideales de operadores puedan ser definidos entre espacios de Banach cualesquiera. También existen ideales que solo pueden ser definidos sobre espacios de Hilbert.
De hecho, estos son los ideales que manejaremos en este texto. La definición es exactamente la misma, y salvo que haya lugar a confusión usaremos la misma nomenclatura para referirnos a ellos.

Teorema 1.1.9. $[\mathcal{K}, \|\cdot\|]$ *es un ideal de Banach de operadores.*

Demostración.
Ya hemos probado que dados X, Y espacios de Banach, $\mathcal{K}(X, Y)$ es un espacio vectorial. Además, como $\mathcal{K}$ es cerrado, $[\mathcal{K}, \|\cdot\|]$ es un espacio de Banach.
Sean $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$, $W \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$. Tomemos $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ y veamos que WTS es un operador compacto.
Para ello, tenemos que $S(B_{X_0})$ es acotado en X, pues S es continuo. Por tanto, $TS(B_{X_0})$ es relativamente compacto, y por continuidad $WTS(B_{X_0})$ también lo es. Esto prueba lo que queríamos.
Finalmente, está claro que
$$\|WTS\| \leq \|W\| \, \|T\| \, \|S\| \, ,$$
pues los tres operadores son continuos.
Por tanto se cumplen las propiedades anteriormente enunciadas y se tiene el resultado. □

1.2. El Teorema Espectral

En esta sección nuestro objetivo será enunciar y probar el teorema espectral de operadores compactos entre espacios de Hilbert, el cual nos conducirá a la definición natural de las clases de Schatten. De ahora en adelante trabajaremos con espacios de Hilbert complejos y separables, los cuales denotaremos por H_1 y H_2.

Comenzamos recordando el concepto de *operador adjunto*. Dado $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, definimos el **operador adjunto** de T como el único operador $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tal que $(Tx, y) = (x, T^*y)$ para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$ (donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto escalar). Además, se verifica que $\|T^*\| = \|T\|$.

Veamos que en efecto T^* está bien definido, que es consecuencia directa del teorema de representación de Riesz:
Tomemos $y \in H_2$. La aplicación $x \mapsto (Tx, y)$ claramente es un funcional lineal y continuo. Por el teorema de Riesz, existe un único elemento en H_1 que representa al funcional. Denotamos a este elemento por T^*y. De esta forma, definimos la aplicación $T : H_2 \to H_1$ que cumple para todo $x \in H_1, y \in H_2$ $(Tx, y) = (x, T^*y)$ y es trivialmente lineal.
Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\|T^*\| = \sup\{\|T^*y\| : y \in B_{H_2}\} &= \sup\{|(x, T^*y)| : x \in B_{H_1}, y \in B_{H_2}\} \\ &= \sup\{|(Tx, y)| : x \in B_{H_1}, y \in B_{H_2}\} \\ &= \|T\|\end{aligned}$$

Lo que prueba la igualdad de normas y la continuidad de T^*. □

Enunciamos ahora algunas propiedades inmediatas de los operadores adjuntos.

Proposición 1.2.1. *Sean $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $U \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Se tiene*

(a) $T^{**} = T$.

(b) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(c) $(T + S)^* = T^* + S^*$.

(d) $(UT)^* = T^*U^*$.

(e) $\|T^*\| = \|T\|$. *Es más,* $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Pasamos a enunciar el teorema espectral:

Teorema 1.2.2 (Teorema espectral para operadores compactos)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Entonces T es compacto si y solo si puede ser representado de la forma*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(\cdot, e_n) f_n, \tag{1.1}$$

donde $\{e_n\}$ es un sistema ortonormal en H_1, $\{f_n\}$ es un sistema ortonormal en H_2 y $\{\tau_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge a 0.

Nota 1.2.3. De ahora en adelante usaremos la notación $x \otimes y$ para referirnos a la aplicación $(\cdot, x)y$.
Así, tenemos que la igualdad en (1.1) puede escribirse de la forma

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n \tag{1.2}$$

Cabe destacar que si T es de rango finito, entonces (1.2) es una suma finita ($\{\tau_n\}$ es nula a partir de cierto término.) Si T no es de rango finito, entonces (1.2) representa una serie que es convergente respecto a la norma usual de operadores en $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.
Llamaremos a (1.2) la *representación ortonormal (o representación ON)* del operador compacto T.
Observamos además que la representación ortonormal de T^* se obtiene fácilmente:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\tau_n} f_n \otimes e_n$$

lo que prueba que $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ si y solo si $T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$.
También nos será conveniente el siguiente criterio de notación: si $\{\tau_1, ..., \tau_N\}$ es un conjunto finito, lo denotaremos por (τ_n), donde entenderemos que es una sucesión en la que todos lo términos a partir del $(N+1)$-ésimo son nulos.

Antes de ver la prueba del teorema espectral, enunciamos un lema que nos será de mucha ayuda en la demostración:

Lema 1.2.4. *Sea $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Entonces existe un vector unitario $x_0 \in H_1$ tal que $T^*Tx_0 = \|T\|^2 x_0$.*
Es decir, $\|T\|^2$ es un autovalor del operador T^*T asociado al autovector x_0.

Demostración.
Supongamos $T \neq 0$, ya que el caso $T = 0$ es trivial.
Como T es compacto, veamos que podemos tomar una sucesión $\{x_n\}$ en B_{H_1} de forma que $\{Tx_n\}$ converge a cierto $z_0 \in H_2$ y tal que $\|Tx_n\|$ converge a $\|T\|$.
Como $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_{H_1}\}$, por la definición de supremo existe una sucesión (y_k) en B_{H_1} tal que $\|Ty_k\| \to \|T\|$.
Además, como (y_k) es una sucesión acotada y T es compacto, existe una subsucesión (y_{k_n}) tal que Ty_{k_n} es convergente a un cierto y_0 en H_2, y que cumple $\|Ty_{k_n}\| \to \|T\|$.
Por tanto, basta tomar $(x_n) = (y_{k_n})$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|T^*Tx_n - \|T\|^2 x_n\|^2 &= (T^*Tx_n - \|T\|^2 x_n, T^*Tx_n - \|T\|^2 x_n) \\
&= \|T^*Tx_n\|^2 - 2\|T\|^2\|Tx_n\|^2 + \|T\|^4\|x_n\|^2 \\
&\leq \|T\|^4 - \|T\|^2\|Tx_n\|^2,
\end{aligned}$$

De donde deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}(T^*Tx_n - \|T\|^2 x_n) = 0.$$

Por tanto, x_n converge a $x_0 := \|T\|^{-2}T^*z_0$. Este es el vector que buscamos. Claramente $\|x_0\| \leq 1$, y $T^*Tx_0 = \|T\|^2 x_0$, y además tenemos

$$\|T\| = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| = \|Tx_0\| \leq \|T\|\|x_0\|,$$

de donde se sigue que $\|x_0\| = 1$. □

Antes de la prueba, es conveniente probar que podemos reducirnos sin pérdida de generalidad al caso en el que T es inyectivo. Veamos por qué.
Sea $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ y sean $K := T^{-1}(0)$ su núcleo y $R := \overline{T(H_1)}$ la clausura de su rango. Observemos ahora que T induce un operador $T_0 : K^{\perp} \to R$ que es claramente inyectivo con rango denso, y que lo mismo es válido para su adjunto T^*.
Además, si consideramos $P : H_1 \to K^{\perp}$ la proyección ortogonal canónica y $j : R \to H_2$ la inyección natural, obtenemos la descomposición

$$T : H_1 \xrightarrow{P} K^{\perp} \xrightarrow{T_0} R \xrightarrow{j} H_2,$$

lo que prueba que podemos aplicar la reducción anunciada.

Ya tenemos todo lo necesario para probar el teorema espectral.

Demostración del teorema 1.2.2.
Supongamos que T puede ser representado como en (1.2). Entonces T es aproximable por operadores de rango finito de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k e_k \otimes f_k$$

y por tanto es compacto.
Supongamos ahora que T es compacto, inyectivo y no nulo.
Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal. Se tiene para todo $x \in H_1$ $Tx = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)Te_n$. Como T es inyectivo, tenemos además que $Te_n \neq 0$ para todo n, y por tanto

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|(x, e_n)\frac{Te_n}{\|Te_n\|}.$$

Además, tenemos que $\{e_n\}$ converge débilmente a 0 por el corolario A.0.3 y que T, por ser compacto, es completamente continuo gracias al teorema A.0.6. Por tanto, $\|Te_n\| \to 0$. Así que si pudiéramos elegir la base $\{e_n\}$ de forma que la sucesión $\{Te_n\}$ fuera ortogonal, tomando $f_n = \frac{Te_n}{\|Te_n\|}$ y $\lambda_n = \|Te_n\|$ tendríamos el resultado.

Veamos que podemos construir $\{e_n\}$ de la forma descrita y conseguir además que $\{\tau_n\}$ sea una sucesión decreciente.
Construiremos los $\{e_n\}$ de forma recursiva. Para comenzar, supongamos que H_1 tiene dimensión finita $N \in \mathbb{N}$. Usando el lema anterior, existe un autovector de T^*T unitario $e_1 \in H_1$ que cumple $T^*Te_1 = \|T\|^2 e_1$ y $\|T\| = \|Te_1\|$.
Ahora sea $1 \leq n < N$ y supongamos que hemos encontrado autovectores de T^*T ortonormales $e_1, ..., e_n$ en H_1 que cumplen

$$T^*Te_k = \|Te_k\|^2 e_k \quad \textit{para cada} \quad 1 \leq k \leq n$$

y tomando $T_0 := T$ y $T_k := T|_{\{e_1,...,e_k\}^\perp}(1 \leq k \leq n)$,

$$\|T_k\| = \|Te_{k+1}\| \quad \textit{para cada} \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{1.3}$$

Cabe destacar que (1.3) implica que $\|Te_1\| \geq ... \geq \|Te_n\|$.
Observemos que T_n lleva $\{e_1, ..., e_n\}^\perp \neq \{0\}$ en $\{Te_1, ..., Te_n\}^\perp$: si $x \in \{e_1, ..., e_n\}^\perp$ y $1 \leq k \leq n$, entonces $(Tx, Te_k) = (x, T^*Te_k) = \|Te_k\|^2(x, e_k) = 0$.
Como T_n es compacto, podemos aplicar de nuevo el lema para conseguir un autovector unitario $e_{n+1} \in \{e_1, ..., e_n\}^\perp$ satisfaciendo $T_n^*T_n e_{n+1} = \|T_n\|^2 e_{n+1}$, y por tanto $\|Te_{n+1}\| = \|T_n\| \leq \|T_{n-1}\| = \|Te_n\|$.
De esta forma, podemos construir una base ortonormal $e_1, ..., e_N$ de H_1 tal que $\|Te_1\| \geq \cdots \geq \|Te_N\|$. Además, $(Te_k, Te_m) = (T^*Te_k, e_m) = \|Te_k\|^2(e_k, e_m)$ para todo $1 \leq k, m \leq n$, y por tanto los vectores $Te_1, \cdots Te_N$ son ortogonales en H_2.
Esto completa la prueba en el caso en el que H_1 es finito dimensional. Si H_1 tiene dimensión infinita, podemos aplicar el mismo proceso recursivo que acabamos de describir, obteniendo un sistema ortonormal (e_n) tal que (Te_n) es un sistema ortogonal y $(\|Te_n\|)$ es una sucesión decreciente que tiende a 0, por lo que obtendríamos que $f_n = \frac{Te_n}{\|Te_n\|}$ es un sistema ortonormal en H_2 y que $\tau_n = \|Te_n\|$ converge a 0 de forma decreciente, como queríamos. Solo nos falta probar comprobar que (e_n) es de hecho una base ortonormal de H_1.
Razonamos por reducción al absurdo.
Si (e_n) no fuera base, repitiendo los argumentos antes usados podríamos aplicar el lema una vez más a la aplicación $\hat{T} := T_{|\{e_n:n\in\mathbb{N}\}^\perp} : \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp \to \{Te_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp$, que es un operador compacto y no nulo. Pero entonces $0 < \|\hat{T}\| \leq \|T_n\| = \|Te_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $(\|Te_n\|)$ no puede converger a 0, lo cual es una contradicción, ya que contradice el hecho de que T es completamente continuo. □

Nota 1.2.5. Cabe destacar que la demostración no solo prueba el Teorema Espectral, si no que nos dice que podemos tomar la representación ortonormal

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n$$

de forma que (e_n) conformen una **base ortonormal** de autovectores de T^*T, donde los τ_n^2 son los autovalores asociados y que además satisfacen

$$0 \leq \tau_{n+1} \leq \tau_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Esta última propiedad nos lleva a definir los *números de aproximación*:

Definición 1.2.6. Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n-ésimo **número de aproximación (o número singular)** como

$$a_n(T) := \text{ínf}\{\|T - S\| : S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \text{rg}(S) < n\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Es decir, $a_n(T)$ mide la distancia del operador T a los operadores de rango $< n$.

La importancia de este concepto queda clara en el siguiente teorema, pues siempre podremos representar cualquier operador compacto en función de sus números de aproximación:

Teorema 1.2.7. *Sea $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ representado como en (1.2) de forma que la sucesión τ_n verifica (1.4). Entonces*

$$\tau_n = a_n(T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.
Sea $n \in \mathbb{N}$.
Como $S := \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k e_k \otimes f_k \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tiene rango menor que n,

$$\begin{aligned} a_n(T) \leq \|T - S\| &= \sup\{\|\sum_{k \geq n} \tau_k (x, e_k) f_k\| : x \in B_{H_1}\} \\ &= \sup\{(\sum_{k \geq n} \tau_k^2 |(x, e_k)|^2)^{1/2} : x \in B_{H_1}\} \leq \tau_n \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad contraria, sea $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ cualquier operador de rango $< n$. Como la dimensión de $\text{span}\{f_1, ..., f_n\}$ es estrictamente mayor que el rango de S, su núcleo es no nulo, y así podemos tomar $x_0 := \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ un vector unitario del núcleo de S. Como $T x_0 = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \xi_k f_k$ tenemos por hipótesis

$$\|T - S\| \geq \|T x_0 - S x_0\| = \|T x_0\| = (\sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 |\xi_k|^2)^{1/2} \geq \tau_n.$$

y por tanto $a_n(T) \geq \tau_n$. $\square$

Se tiene además que $\|T\| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq a_3(T) \geq \cdots$ para todo $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Veamos con los siguientes lemas algunas propiedades muy útiles de los números de aproximación:

Lema 1.2.8. *Sean m y n números naturales. Se tiene:*

(a) Dados $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

$$a_{m+n-1}(T+S) \leq a_m(T) + a_n(S)$$

(b) Dados $T \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

$$a_{m+n-1}(TS) \leq a_m(T) \cdot a_n(S) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Demostración.

(a) Sean $T_0, S_0 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tales que $\operatorname{rg}(T) < m$ y $\operatorname{rg}(S) < n$. Entonces $\operatorname{rg}(T+S) \leq \operatorname{rg}(T) + \operatorname{rg}(S) < m+n-1$ y se tiene

$$a_{m+n-1}(T+S) \leq \|T+S-(T_0+S_0)\| \leq \|T-T_0\| + \|S-S_0\|$$

Basta tomar ínfimo en el último miembro de la desigualdad y obtenemos lo enunciado.

(b) Si $T_0 \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ tiene rango $< n$ y $S_0 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tiene rango $< m$, entonces $U := T_0 S + (T-T_0)S_0 \in \mathcal{L}(H_1, H_3)$, tiene rango $< m+n-1$ y se tiene

$$a_{m+n-1}(TS) \leq \|TS-U\| = \|(T-T_0)(S-S_0)\| \leq \|T-T_0\| \cdot \|S-S_0\|$$

y otra vez tomando ínfimo completamos la prueba. □

Lema 1.2.9. *Sean $S \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $W \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Se tiene que*

$$a_n(WTS) \leq \|W\| \, a_n(T) \, \|S\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que si U es de rango finito, entonces UA y AU son de rango finito para cualquier operador A. Con esto en mente, tenemos que

$$\begin{aligned} a_n(WTS) &= \inf\{\|WTS-U\| : U \in \mathcal{L}(H_0, H_3), \operatorname{rg}(U) < n\} \\ &\leq \inf\{\|WTS-WVS\| : V \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \operatorname{rg}(V) < n\} \\ &\leq \|W\| \inf\{\|T-V\| : V \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \operatorname{rg}(V) < n\} \, \|S\| \\ &= \|W\| \, a_n(T) \, \|S\| \end{aligned}$$

□

1.3. Clases de Schatten

Una vez que hemos probado el teorema espectral y hemos estudiado su relación con los números de aproximación, podemos ya introducir las clases de Schatten, que serán el objeto principal de estudio el resto de este capítulo.

Definición 1.3.1. Sea $0 < p < \infty$. Se define la p-ésima **clase de Schatten**

$$S_p(H_1, H_2)$$

como el conjunto de todos los operadores $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ que admiten una representación ortonormal (1.2) tal que

$$(\tau_n) \in \ell_p.$$

Ello motiva la definición de la siguiente aplicación, denominada **p-norma de Schatten**:

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\tau_n|^p\right)^{1/p}$$

que no depende de la representación escogida. Es más, se tiene

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p\right)^{1/p}$$

para cualquier operador $T \in S_p(H_1, H_2)$, pues basta reordenar nuestra serie y remitirnos al teorema 1.2.7. Cabe destacar que podemos caracterizar la pertenencia de un operador T a las clases de Schatten calculando $\sigma_p(T)$.
Veamos un ejemplo de un operador que pertenezca a las clases de Schatten;

Ejemplo 1.3.2. Como ya vimos en el ejemplo 1.1.5, dada una sucesión (λ_n) que converge a 0, el operador

$$T : \ell_2 \to \ell_2$$

definido como

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

es compacto.
Es muy sencillo obtener una representación ortonormal de este operador. Si denotamos $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \ell_2$ al vector con todas las entradas nulas salvo un 1 en la posición n, está claro que (e_n) conforma una base ortonormal en ℓ_2 y que podemos representar T como

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n.$$

Así, tenemos que

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \right)^{1/p}.$$

Es decir, $T \in S_p(\ell_2)$ si y solo si $(\lambda_n) \in \ell_p$, para cualquier $0 < p < \infty$.

Proposición 1.3.3. *Sea $0 < p < \infty$ y sean $T, S \in S_p(H_1, H_2)$. Entonces:*

(a) $\sigma_p(T) = 0$ *si y solo si* $T = 0$.

(b) $\sigma_p(\alpha T) = |\alpha|\sigma_p(T)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(c) $\sigma_p(T + S) \leq 4^{1/p}(\sigma_p(T) + \sigma_p(S))$

Es decir, σ_p es una ***cuasinorma*** *y $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ conforma un* ***espacio vectorial cuasi-normado.***

Demostración.

(a) Trivial.

(b) Tenemos que $\alpha T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n(T) e_n \otimes f_n$. Por tanto,

$$\sigma_p(\alpha T)^p = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha a_n(T)|^p = |\alpha|^p \sigma_p(T)^p.$$

(c) si $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T+S) &= (\sum_n a_n(T+S))^{1/p} = (\sum_n a_{2n-1}(T+S)^p + \sum_n a_{2n}(T+S)^p)^{1/p} \\
&\leq 2^{1/p}(\sum_n a_{2n-1}(T+S)^p)^{1/p} \leq 2^{1/p}(\sum_n (a_n(T) + a_n(S))^p)^{1/p} \\
&\leq 2^{1/p}(\sigma_p(T) + \sigma_p(S)).
\end{aligned}$$

Ahora, si $0 < p < 1$ no podemos utilizar la desigualdad triangular que usamos en el último paso de la anterior cadena de desigualdades, pero sí podemos deducir aplicando que $(xy)^p \leq x^p + y^p$ que $\sigma_p(T + S)^p \leq 2(\sigma_p(T)^p + \sigma_p(S)^p)$.
Tomemos ahora $r = 1/p$ y denotemos por r^* a su conjugado. Aplicando la desigualdad de Hölder en la última desigualdad, tenemos

$$\sigma_p(T + S)^p \leq 2 \cdot 2^{1/r^*}(\sigma_p(T) + \sigma_p(S))^p,$$

de donde obtenemos que

$$\sigma_p(T + S) \leq 4^{1/p}(\sigma_p(T) + \sigma_p(S)),$$

como queríamos.

Finalmente, gracias a c), deducimos que $S_p(H_1, H_2)$ es un espacio vectorial, y gracias a las propiedades obtenidas deducimos que es un espacio cuasi-normado. □

Más adelante probaremos que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es, de hecho, un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$. En cambio, para $0 < p < 1$ no es cierta la desigualdad triangular, y por lo tanto, $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ no será un espacio normado.

Veamos un sencillo contraejemplo en dimensión finita.
Tomaremos $H_1 = H_2 = \mathbb{C}^2$, $p = 1/2$ y consideraremos las aplicaciones lineales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Claramente, si tomamos e_1 y e_2 como la base canónica de $\mathbb{C}^2$, obtenemos una representación ortonormal directa de cada operador de la forma

$$A = e_1 \otimes e_1, \quad B = 4e_2 \otimes e_2.$$

Así,

$$\sigma_p(T + S) = (1 + \sqrt{4})^2 = 9 > 5 = \sigma_p(T) + \sigma_p(S).$$

□

A continuación, estudiaremos algunas de las propiedades más importantes de este espacio y probaremos que σ_p es una norma para $1 \leq p < \infty$. Además, finalizaremos la sección caracterizando el caso $p = 2$ como los operadores de Hilbert-Schmidt.

Proposición 1.3.4. *(a) Si $0 < p < \infty$, los operadores de rango finito son densos en $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$.*

(b) Si $0 < p < q < \infty$, $S_p(H_1, H_2)$ es un subespacio denso de $[S_q(H_1, H_2), \sigma_q]$, y $\sigma_q(T) \leq \sigma_p(T)$ para todo $T \in S_p(H_1, H_2)$.

(c) Sea $0 < p < \infty$ y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Entonces $T \in S_p(H_1, H_2)$ si y solo si $T^* \in S_p(H_2, H_1)$ y en este caso, $\sigma_p(T) = \sigma_p(T^*)$.

Demostración.

(a) Sea $T \in S_p(H_1, H_2)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n$ una representación ortonormal de T.
Sea $\varepsilon > 0$ Como $(\tau_n) \in \ell_p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} |\tau_n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Basta entonces tomar $S = \sum_{n=1}^{N-1} \tau_n e_n \otimes f_n$, que obviamente es de rango finito y

$$\sigma_p(T - S) = \left(\sum_{n=N}^{\infty} |\tau_n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

(b) Este resultado se sigue del hecho de que $\ell_p \subset \ell_q$, así $S_p(H_1, H_2) \subset S_q(H_1, H_2)$ y $\sigma_p(T) \leq \sigma_q(T)$ para todo $T \in S_p(H_1, H_2)$. Además, como los operadores de rango finito son densos en ambos espacios, se sigue que $S_p(H_1, H_2)$ es denso en $S_q(H_1, H_2)$.

(c) Basta observar que si $T = \sum_n \tau_n e_n \otimes f_n$ entonces $\sum_n \overline{\tau_n} f_n \otimes e_n$ es una representación ortonormal de T^* y se sigue fácilmente el resultado. □

A continuación, veamos un resultado que será crucial en el desarrollo del trabajo:

Teorema 1.3.5. $[S_p, \sigma_p]$ *es un ideal de operadores con* $0 < p < \infty$. *Además,*

$$\sigma_p(WTS) \leq \|W\| \, \sigma_p(T) \, \|S\| \, ,$$

para todos $W \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, $T \in S_p(H_1, H_2)$ *y* $S \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$.

Demostración.
Dados H_1 y H_2 espacios de Hilbert, ya hemos probado que $S_p(H_1, H_2)$ es un espacio vectorial. Por la proposición anterior, es claro que contiene a todos los operadores de rango finito.
Sean ahora H_0 y H_3 espacios de Hilbert, y sean $W \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, $S \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$.
Tomemos $T \in S_p(H_1, H_2)$. Ahora, si usamos el lema obtenemos 1.2.9

$$\sigma_p(WTS) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(WTS)^p \right)^{1/p} \leq \|W\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(T)^p \right)^{1/p} \|S\| = \|W\| \, \sigma_p(T) \, \|S\| \, ,$$

lo que prueba que $WTS \in S_p(H_1, H_2)$ □

Nota 1.3.6. Gracias a la desigualdad que acabamos de demostrar, quedará claro que $[S_p, \sigma_p]$ es, de hecho, un ideal de Banach de operadores para $1 \leq p < \infty$ cuando probemos que es un espacio de Banach.

Con el siguiente teorema caracterizaremos de forma sencilla la pertenencia de cualquier operador a $S_p(H_1, H_2)$ para $p \geq 1$:

Teorema 1.3.7. *Sea* $1 \leq p < \infty$.

(a) Un operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *es compacto si y solo si dadas* $(e_n) \in H_1$ *y* $(f_n) \in H_2$ *sistemas ortonormales cualesquiera, la sucesión* $((Te_n, f_n))$ *converge a* 0.

(b) Un operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ pertenece a $S_p(H_1, H_2)$ si y solo si dadas $(e_n) \in H_1$ y $(f_n) \in H_2$ sistemas ortonormales cualesquiera, la sucesión $((Te_n, f_n))$ pertenece a ℓ_p.

Demostración.

(a) Supongamos primero que T es compacto, y sean (e_n) y (f_n) sistemas ortonormales en H_1 y H_2 respectivamente.
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $|(Te_n, f_n)| \leq \|Te_n\|$, que tiende a 0, ya que T es absolutamente continuo por ser compacto y (e_n) converge débilmente a 0 (ver Apéndice A).
Para la otra implicación, razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que T no es compacto pero que
$$(Te_n, f_n) \to 0$$
para todos los sistemas ortonormales (e_n) en H_1, (f_n) en H_2.
Ahora, como T no es compacto, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ de forma que $a_n(T) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir,
$$\|T - R\| > \varepsilon$$
para todo $R \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $\mathrm{rg}(R) < \infty$.
Vamos a construir dos sistemas ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2 de forma que $|(Te_n, f_n)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y llegaremos a contradicción. Para ello, vamos a realizar una construcción recursiva.
Supongamos que tenemos $e_1, ..., e_n \in H_1$ y $f_1, ..., f_n \in H_2$ de forma que $|(Te_n, f_n)| > \varepsilon$. Tomamos los conjuntos
$$E := \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n\} \qquad F := \mathrm{span}\{f_1, ..., f_n\}$$
y tomamos $P_{E^\perp}$, $P_{F^\perp}$ las proyecciones ortogonales sobre $E^\perp$ y $F^\perp$ respectivamente.
Vamos a ver que
$$\|P_{F^\perp} \circ T \circ P_{E^\perp}\| > \varepsilon.$$
Basta ver que
$$\begin{aligned} P_{F^\perp} \circ T \circ P_{E^\perp} &= (id - P_F) \circ T \circ (id - P_E) \\ &= T - P_F \circ T - T \circ P_E + P_F \circ T \circ P_E \\ &= T - R, \end{aligned}$$
donde $R = P_F \circ T + T \circ P_E - P_F \circ T \circ P_E$ es claramente de rango finito por ser suma de operadores de rango finito. Por tanto, se tiene que $\|P_{F^\perp} \circ T \circ P_{E^\perp}\| > \varepsilon$, por lo que existe $x \in E^\perp$ con $\|x\| = 1$ y $\|P_{F^\perp} \circ Tx\| > \varepsilon$. Ahora, existe $y \in F^\perp$ tal que $\|y\| = 1$ de forma que
$$\|P_{F^\perp}(Tx)\| = (y, P_{F^\perp}(Tx)) = (y, Tx).$$

Así, hemos obtenido vectores unitarios $x \in E^{\perp}$, $y \in F^{\perp}$ tales que $|(Tx, y)| > \varepsilon$. Por tanto, si tomamos $e_{n+1} = x$, $f_{n+1} = y$ tenemos que $e_1, ..., e_{n+1} \in H_1$ y $f_1, ..., f_{n+1} \in H_2$ son sistemas ortonormales. Repitiendo el proceso por recurrencia como ya dijimos, obtenemos dos sistemas ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2 tales que

$$|(Te_n, f_n)| > \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es contradictorio y prueba que T es compacto.

(b) Sea $T = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T) x_m \otimes y_m \in S_p(H_1, H_2)$. Si tomamos $p > 1$ y p^* tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ tenemos que para cualquier sistema ortonormal (e_n) en H_1

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)|(e_n, x_m)|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)|(e_n, x_m)|^{2/p}|(e_n, x_m)|^{2/p^*} \\ &\leq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)^p|(e_n, x_m)|^2)^{1/p} \cdot (\sum_{m=1}^{\infty} |(e_n, x_m)|^2)^{1/p^*} \\ &\leq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)^p|(e_n, x_m)|^2)^{1/p}.\end{aligned}$$

De igual forma, para cualquier sistema ortonormal (f_n) en H_2

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)|(y_m, f_n)|^2 \leq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)^p|(y_m, f_n)|^2)^{1/p}$$

Para $p = 1$ se tiene trivialmente.
Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}|(Te_n, f_n)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)^{1/2}|(e_n, x_m)|a_m(T)^{1/2}|(y_m, f_n)| \\ &\leq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)|(e_n, x_m)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)|(y_m, f_n)|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Y finalmente tenemos usando Cauchy-Schwarz en la suma exterior que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_n, f_n)|^p &\leq \sum_n (\sum_m a_m(T)^p|(e_n, x_m)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_m a_m(T)^p|(y_m, f_n)|^2)^{1/2} \\ &\leq (\sum_{n,m} a_m(T)^p|(e_n, x_m)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{n,m} a_m(T)^p|(y_m, f_n)|^2)^{1/2} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T)^p < \infty\end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.
Veamos la otra implicación. Sea $1 \leq p < \infty$ y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que dados dos sistemas ortonormales cualesquiera (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2, la sucesión (Te_n, f_n) pertenece a ℓ_p.
Ahora, sabemos por (a) que T es compacto, y por tanto admite una representación ON $T = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n$. Además, como

$$(Te_n, f_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m (e_n, e_m)(f_n, f_m) = \tau_n,$$

se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} (Te_n, f_n)^p < \infty$$

y por tanto $T \in S_p(H_1, H_2)$. □

Si revisamos la prueba, hemos probado que dados dos sistemas ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2 y $T \in S_p(H_1, H_2)$ se tiene que

$$\sum_n |(Te_n, f_n)|^p \leq \sum_n a_n(T)^p \tag{1.5}$$

gracias a esta desigualdad, podremos probar el siguiente resultado que nos caracterizará σ_p:

Teorema 1.3.8. *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $T \in S_p(H_1, H_2)$. Entonces*

$$\sigma_p(T) = max\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_n, f_n)|^p)^{1/p} : (e_n)\ SON\ en\ H_1,\ (f_n)\ SON\ en\ H_2\}$$

Demostración.
Por la desigualdad (1.5) está claro que

$$\sup\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_n, f_n)|^p)^{1/p} : (e_n)\ SON\ en\ H_1,\ (f_n)\ SON\ en\ H_2\} \leq \sigma_p(T)$$

Además, como T es compacto, tiene una representación ON $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) x_n \otimes y_n$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Tx_n, y_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p = \sigma(T)^p,$$

y se tiene lo enunciado. □

Corolario 1.3.9. *$[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio normado para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración.
Ya sabemos que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio cuasi-normado para $0 < p < \infty$. Nos valdremos del resultado anterior para probar la desigualdad triangular cuando $p \geq 1$.
En efecto, dado $1 \leq p < \infty$ y $T, S \in S_p(H_1, H_2)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T+S) &= \max\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(T+S)e_n, f_n)|^p)^{1/p} : (e_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_1, \text{ } (f_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_2\} \\
&\leq \max\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_n, f_n)|^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^{\infty} |(Se_n, f_n)|^p)^{1/p} : \\
&(e_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_1, \text{ } (f_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_2\} \\
&\leq \max\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_n, f_n)|^p)^{1/p} : (e_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_1, \text{ } (f_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_2\} \\
&+ \max\{(\sum_{n=1}^{\infty} |(Se_n, f_n)|^p)^{1/p} : (e_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_1, \text{ } (f_n) \text{ } SON \text{ } en \text{ } H_2\} \\
&= \sigma_p(T) + \sigma_p(S).
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica la desigualdad triangular y en consecuencia σ_p es una norma si $1 \leq p < \infty$. □

Finalmente, veamos un resultado que nos dará una forma de estimar σ_p en función de cualquier base ortonormal de H_1, pero antes será necesario el siguiente lema para asegurarnos de la numerabilidad de las bases ortonormales en un espacio de Hilbert separable.

Lema 1.3.10. *Si H es un espacio de Hilbert separable y $(e_i)_{i\in I}$ es una familia ortonormal, entonces I es a lo sumo numerable.*

Demostración.
Sea $(e_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal en H. Está claro que

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}, \quad i \neq j.$$

Ahora, como H es separable, podemos tomar un conjunto $\{x_j \in H : j \in J\}$ denso en H, donde J es a lo sumo numerable. Ahora, para cada $i \in I$ tenemos por densidad que existe x_i de forma que $\|e_i - x_i\| \leq \sqrt{2}/4$. Por tanto, para $i \neq j$ tenemos

$$\|x_i - e_j\| = \|x_i - e_i + e_i - e_j\| \geq \|e_i - e_j\| - \|x_i - e_i\| \geq 3\sqrt{2}/4.$$

Entonces, cada x_i pertenece a la bola $B(e_i, \sqrt{2}/2)$, pero

$$B(e_i, \sqrt{2}/2) \cap B(e_j, \sqrt{2}/2) = \emptyset.$$

Por tanto, si $i \neq j$ deducimos que $x_i \neq x_j$, así que podemos establecer una biyección de forma que a cada e_i le corresponde el elemento x_i, lo que prueba que I es a lo sumo numerable. $\square$

Teorema 1.3.11. *Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y sea (g_n) una base ortonormal cualquiera de H_1.*

(a) Si $0 < p \leq 2$ y $(\|Tg_n\|) \in \ell_p$, entonces $T \in S_p(H_1, H_2)$ y

$$\sigma_p(T) \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^p)^{1/p}$$

Es más, existe una base ortonormal (e_n) de H_1 tal que

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\right)^{1/p}$$

.

(b) Si $2 \leq p < \infty$ y $T \in S_p(H_1, H_2)$, entonces $(\|Tg_n\|) \in \ell_p$ y

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^p)^{1/p} \leq \sigma_p(T)$$

Es más, existe una base ortonormal (e_n) de H_1 tal que

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\right)^{1/p}.$$

Demostración.

(a) Comencemos viendo que T es compacto.
Fijemos $\varepsilon > 0$ y busquemos un operador de rango finito $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tal que $\|T - S\| \leq \varepsilon$.
Ahora, como $(\|Tg_n\|)_n \in \ell_p$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\sum_{n=N}^{\infty} \|Tg_n\|^p)^{1/p} < \varepsilon$$

Definimos entonces $S = \sum_{n=1}^{N-1} g_n \otimes Tg_n$, que claramente es de rango finito. Falta probar que $\|T - S\| \leq \varepsilon$. Para ello, sea $x \in H_1$. Tenemos

$$\begin{aligned}\|(T-S)x\| = \| \sum_{n=N}^{\infty} (x, g_n)Tg_n\| &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} |(x, g_n)|^2)^{1/2} (\sum_{n=N}^{\infty} \|Tg_n\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|x\| \, (\sum_{n=N}^{\infty} \|Tg_n\|^p)^{1/p} \leq \varepsilon \, \|x\| \, ,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\|T - S\| \leq \varepsilon$. Por tanto, T es compacto.
Ahora, tomemos $T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes f_n$ una representación ortonormal. Para todo $x \in H_1$, tenemos

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(T)^2 |(x, e_n)|^2,$$

y aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes $2/p$ y $2/(2-p)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p \sum_{k=1}^{\infty} |(g_k, e_n)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p |(g_k, e_n)|^p |(g_k, e_n)|^{2-p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^2 |(g_k, e_n)|^2)^{p/2} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} |(g_k, e_n)|^2)^{(2-p)/2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^2 |(g_k, e_n)|^2)^{p/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \|Tg_k\|^p,
\end{aligned}$$

lo que prueba que $T \in S_p(H_1, H_2)$, con $\sigma_p(T) \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^p)^{1/p}$.
Finalmente, observemos que si tomamos (e_n) la base de autovectores de T^*T como describimos en la nota 1.2.5 entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, Te_n)^{p/2} = \sum_{n=1}^{\infty} (T^*Te_n, e_n)^{p/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^p = \sigma_p(T)^p.$$

(b) Tomemos ahora $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes f_n \in S_p(H_1, H_2)$, donde $2 \leq p < \infty$. Ahora, aplicamos de nuevo la desigualdad de Hölder, pero con exponentes $p/2$ y $p/(p-2)$ y obtenemos, para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|Tg_m\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^2 |(g_m, e_n)|^{4/p} |(g_m, e_n)|^{2(p-2)/p} \\
&\leq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p |(g_m, e_n)|^2)^{2/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |(g_m, e_n)|^2)^{(p-2)/2} \\
&\leq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p |(g_m, e_n)|^2)^{2/p},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\sum_{m=1} \|Tg_m\|^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p |(g_m, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p = \sigma_p(T)^p,$$

tal y como queríamos probar.
Finalmente, basta razonar igual que en (a) para obtener una base ortonormal (e_n)

de H_1 de forma que

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\right)^{1/p},$$

lo que finaliza la prueba. □

Es inmediato ver gracias a este teorema que σ_p es *monótona*. Esto es

Corolario 1.3.12. *Sean $T, S \in S_p(H_1, H_2)$, y supongamos que*

$$\|Sx\| \leq \|Tx\| \quad \forall\ x \in H_1.$$

Entonces

$$\sigma_p(S) \leq \sigma_p(T)$$

para todo $0 < p < \infty$.

Demostración.
Tomemos primero $0 < p < 2$. Elijamos (e_n) la base de autovectores de T^*T. Entonces

$$\sigma_p(T)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^p \geq \sigma_p(S)^p.$$

En cambio, si $p \geq 2$ elegimos (f_n) la base de autovectores de S^*S. Obtenemos

$$\sigma_p(S)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|Sf_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^p \leq \sigma_p(T)^p,$$

y obtenemos el resultado. □

Obervemos que en el teorema 1.3.11 tanto (a) como (b) son válidos para $p = 2$. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado:

Corolario 1.3.13. *Un operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ pertenece a $S_2(H_1, H_2)$ si y solo si existe una base ortonormal (e_n) en H_1 tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

En ese caso, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ no depende de la base ortonormal escogida; y de hecho, para cualquier base ortonormal (f_n) de H_1 tenemos

$$\sigma_2(T) = (\sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2)^{1/2}.$$

Estos operadores reciben el nombre de **operadores de Hilbert-Schmidt**, que constituyen un espacio de operadores clásico con una útil caracterización para su norma. Veamos cuál.
Es claro que dada (e_n) base ortonormal en H_1, la aplicación

$$(T, S) = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, Se_n)$$

define un producto escalar en $S_2(H_1, H_2)$, que genera la norma

$$\|T\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2)^{1/2}.$$

Por el corolario anterior, tenemos que esta norma coincide con σ_2, lo que prueba que $[S_2(H_1, H_2), \sigma_2]$ es un espacio normado (de hecho, prehilbertiano). Más adelante, cuando probemos que, en efecto, $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es completo para $1 \leq p < \infty$, quedará patente que $S_2(H_1, H_2)$ es un espacio de Hilbert.
Merece la pena destacar también que, por polarización, el producto escalar anteriormente definido no depende de la base (e_n) escogida, ya que σ_2 es independiente de dicha elección.

1.4. Dualidad de traza de las clases de Schatten

El trabajo de esta sección girará en torno al objetivo de demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1. *Si p y p^* son exponentes conjugados, se tiene:*

(a) Si $1 < p < \infty$, $[S_{p^*}(H_2, H_1), \sigma_{p^*}]$ es isométricamente isomorfo al dual de $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$.

(b) $[S_1(H_1, H_2), \sigma_1]$ es isométricamente isomorfo al dual de $[\mathcal{K}(H_2, H_1), \|\cdot\|]$.

¿Por qué es importante este resultado?
Sabemos que el dual de cualquier espacio normado es espacio de Banach. Como vimos en la sección anterior, $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio normado, así que con este teorema probaremos que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es isométricamente isomorfo a un espacio de Banach para cualquier $1 \leq p < \infty$; y por tanto, será espacio de Banach. Además obtendremos de una manera elegante los duales de estos espacios.

Nuestro próximo esfuerzo irá en la dirección de encontrar el isomorfismo isométrico que nos dé el teorema antes enunciado. Como el título de la sección indica, este isomorfismo estará directamente relacionado con el concepto de **traza** de un operador, el cual definiremos y daremos sentido a continuación.

Para ello, nos detenemos a estudiar las propiedades del espacio $[S_1(H_1,H_2),\sigma_1]$, que nos serán muy útiles para dicho fin.
Al igual que vimos con $[S_2(H_1,H_2),\sigma_2]$, este es un espacio de operadores clásico que podremos caracterizar con otra norma, que será más manejable a la hora de definir y caracterizar el concepto de traza. Estos operadores se conocen por el nombre de **operadores nucleares** o **operadores de clase de traza.**

Definición 1.4.2. Definimos los **operadores de clase de traza** como el conjunto

$$\mathcal{N}(H_1,H_2) := \{T \in \mathcal{K}(H_1,H_2) : T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, \sum \|x_n\| \, \|y_n\| < \infty\}$$

donde (x_n) y (y_n) son sucesiones en H_1 y H_2, respectivamente.
Definimos también la **norma nuclear** $\nu : \mathcal{N}(H_1,H_2) \to \mathbb{R}$ como

$$\nu(T) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| : T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n\}$$

Está claro que la norma nuclear caracteriza a los operadores nucleares. Es decir, $T \in \mathcal{N}(H_1,H_2)$ si y solo si $\nu(T) < \infty$. Aunque pueda parecer precipitado llamar 'norma' a la aplicación ν, veremos pronto que esta denominación está justificada.
El próximo resultado ilustra la caracterización antes enunciada:

Teorema 1.4.3. *$S_1(H_1,H_2) = \mathcal{N}(H_1,H_2)$ y $\sigma_1 = \nu$.*

Demostración. Tomemos $T \in \mathcal{N}(H_1,H_2)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos una representación $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| < (1+\varepsilon)\nu(T).$$

Además, como T es compacto, tiene una representación ortonormal de la forma $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes f_n$. Calculemos $\sigma_1(T)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) = \sum (Te_n, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e_n, x_m)(y_m, f_n) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x_m)|^2)^{1/2} (\sum_{n=1}^{\infty} |(y_m, f_n)|^2)^{1/2} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \, \|y_m\| \\
&< (1+\varepsilon)\nu(T),
\end{aligned}$$

donde hemos usado las desigualdades de Hölder y de Cauchy-Schwarz. Por tanto, se sigue que $\sigma_1(T) \leq \nu(T)$ y $T \in S_1(H_1,H_2)$.

Sea ahora $T \in S_1(H_1, H_2)$. Basta tomar $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes f_n$. Es claro que

$$\nu(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n(T)e_n\| \, \|f_n\| = \sigma_1(T)$$

Por tanto, $T \in \mathcal{N}(H_1, H_2)$ y $\sigma_1(T) = \nu(T)$. □

Ahora explotaremos esta caracterización de σ_1 para obtener algunos resultados interesantes.

Por ejemplo, veamos un resultado análogo a la desigualdad de Hölder para operadores de $S_1(H_1, H_2)$.

Proposición 1.4.4. *Sean p y p^* exponentes conjugados, $T \in S_p(H_1, H_2)$ y $S \in S_{p^*}(H_2, H_1)$. Entonces, $ST \in S_1(H_1)$ y*

$$\sigma_1(ST) \leq \sigma_{p^*}(S)\sigma_p(T)$$

Demostración.

Supongamos primero $p \leq 2$, y por tanto $p^* \geq 2$.

Tomamos $T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n$ una representación ortonormal. Si (f_n) no fuera base ortonormal, la ampliamos a una y definimos $\tau_n = 0$ en los términos añadidos a la sucesión. Está claro entonces que $ST = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) e_n \otimes Sf_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\sigma_1(ST) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_n e_n\| \, \|Sf_n\| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} \|Sf_n\|^{p^*})^{1/p^*} \\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^p)^{1/p} \sigma_{p^*}(S) = \sigma_p(T)\sigma_{p^*}(S),\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder y el teorema 1.3.11.

Supongamos ahora $p \geq 2$. Tomemos $S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes f_n$ representación ortonormal y ampliemos (e_n) a una base como hicimos anteriormente. Tenemos para cualquier $x \in H_1$

$$S(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (Tx, e_n) f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, T^* e_n) f_n.$$

Se sigue entonces que $ST = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n T^* e_n \otimes f_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\sigma_1(ST) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\| \, \|\mu_n f_n\| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{p^*})^{1/p^*} \\ &\leq \sigma_p(T^*)(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{p^*})^{1/p^*} = \sigma_p(T)\sigma_{p^*}(S)\end{aligned}$$

razonando como el caso anterior y usando $\sigma_p(T^*) = \sigma_p(T)$. □

Como ya avanzamos antes, es indispensable para construir nuestro isomorfismo el concepto de **traza** de un operador.

Definición 1.4.5. Dado $T \in S_1(H_1)$, definimos su **traza** como

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n),$$

donde (e_n) es una base ortonormal de H_1.

Veamos que, en efecto, la traza está bien definida.

Proposición 1.4.6. *Dado $T \in S_1(H_1)$, $tr(T)$ está bien definida, no depende de la base ortonormal escogida y*

$$|tr(T)| \leq \sigma_1(T).$$

Demostración.
Veamos que $|tr(T)| < \infty$.
Tomemos $T = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \otimes y_m$. Se tiene

$$\begin{aligned}
|tr(T)| &= |\sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e_n, x_m)(y_m, e_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(e_n, x_m)||(y_m, e_n)| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x_m)||(y_m, e_n)| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x_m)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(y_m, e_n)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \, \|y_m\| < \infty
\end{aligned}$$

Lo que prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e_n, x_m)(y_m, e_n)$ es absolutamente convergente y que podemos intercambiar el orden de sumación. Por tanto

$$\begin{aligned}
tr(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e_n, x_m)(y_m, e_n) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, x_m)(y_m, e_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (y_m, x_m),
\end{aligned}$$

que no depende de la base elegida.
Finalmente, gracias al teorema 1.3.8, tenemos, dada (e_n) base en H_1,

$$|tr(T)| = |\sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n)| \leq \sigma_1(T)$$

y se tiene el resultado. □

Cabe destacar también que la traza es un operador lineal, y que se cumple

$$tr(x \otimes y) = (y, x)$$

Ya podemos enunciar y probar el teorema de la clase de traza.

Teorema 1.4.7 (Teorema de la clase de traza). *(a) Si $1 < p < \infty$ y p^* es su exponente conjugado, entonces la aplicación*

$$\phi : S_{p^*}(H_2, H_1) \to S_p(H_1, H_2)^*$$

definida por

$$\phi(S)(T) := tr(TS) \quad T \in S_p(H_1, H_2),\ S \in S_{p^*}(H_2, H_1)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Análogamente, la aplicación

$$\phi : S_1(H_2, H_1) \to \mathcal{K}(H_1, H_2)^*$$

definida como en (a), es un isomorfismo isométrico.

Demostración.

(a) Veamos que ϕ está bien definida.
Para ello, sea $S \in S_{p^*}(H_2, H_1)$. Probemos que $\phi(S) \in S_p(H_1, H_2)^*$.
Claramente es lineal por la linealidad de la traza. Veamos la continuidad.
Tenemos por la proposición 1.4.4 que, para todo $T \in S_p(H_1, H_2)$, $TS \in S_1(H_2)$, y que se cumple la desigualdad

$$\sigma_1(TS) \leq \sigma_p(T)\sigma_{p^*}(S)$$

Por tanto,

$$|\phi(S)(T)| = |tr(TS)| \leq \sigma_1(TS) \leq \sigma_p(T)\sigma_{p^*}(S)$$

Se sigue por tanto que $\phi(S)$ es continua y $\|\phi(S)\| \leq \sigma_{p^*}(S)$.
Ahora, observamos con facilidad que ϕ es lineal.
Para la continuidad, tenemos, dado $S \in S_{p^*}(H_2, H_1)$,

$$\begin{aligned}\|\phi(S)\| &= \sup\{|\phi(S)(T)| : \sigma_p(T) = 1\} = \sup\{|tr(TS)| : \sigma_p(T) = 1\} \\ &\leq \sup\{\sigma_1(TS) : \sigma_p(T) = 1\} \leq \sigma_{p^*}(S)\end{aligned}$$

lo que prueba que $\|\phi\| \leq 1$.
Veamos que, de hecho, ϕ es una isometría. Basta construir un operador $T \in S_p(H_1, H_2)$, tal que $\sigma_p(T) = 1$ y $tr(TS) = \sigma_{p^*}(S)$.
Así tendremos

$$\|\phi(S)\| = \sup\{|tr(TS)| : \sigma_p(T) = 1\} = \sigma_{p^*}(S).$$

Para ello, tomamos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S) f_n \otimes e_n$ una representación ortonormal.
Si (e_n) no es base, realizamos el procedimiento de ampliación que ya hemos llevado a cabo anteriormente.
Como $(a_n(S))_n \in \ell_{p^*}$, existe $(\beta_n) \in \ell_p$ tal que$\|(\beta_n)\|_p = 1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(S)\beta_n = \|(a_n(S))_n\|_{p^*}.$$

Definimos entonces $T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \otimes f_n$, que claramente está en $S_p(H_1, H_2)$ y $\sigma_p(T) = \|(\beta_n)\|_p = 1$.
Ahora, tenemos que

$$STe_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S) \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m f_m, f_n) e_n$$

Y por tanto

$$tr(ST) = \sum_{n=1}^{\infty} (STe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S)\beta_n = \|a_n(S)\|_{p^*} = \sigma_{p^*}(S),$$

lo que prueba que ϕ es isometría.
Falta probar que ϕ es sobreyectiva para terminar la demostración.
Para ello, sea $\varphi \in S_p(H_1, H_2)^*$. Definimos la aplicación

$$\beta : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \overline{< \varphi, x \otimes y >}$$

Está claro que β es sesquilineal. Además es continua, ya que

$$|\beta(x, y)| \leq \|\varphi\| \, \sigma_p(x \otimes y) = \|\varphi\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

para todo $x \in H_1, y \in H_2$. Por tanto, existe un único operador $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tal que

$$\beta(x, y) = (x, Sy) \quad \forall (x, y) \in H_1 \times H_2$$

Veamos que $S \in S_{p^*}(H_2, H_1)$. Basta tomar (e_n) y (f_n) bases ortonormales en H_1 y H_2 y probar que $((e_n, Sf_n)) \in \ell_{p^*}$, gracias al teorema 1.3.7.
Ahora, cada $(\tau_n) \in \ell_p$ define un operador $T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n \in S_p(H_1, H_2)$, y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (e_n, Sf_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \overline{< \varphi, e_n \otimes f_n >} = \overline{< \varphi, T >} \in \mathbb{C}.$$

Además, como $(\tau_n) \in \ell_p$ era arbitrario, se sigue que $((e_n, Sf_n)) \in \ell_{p^*}$, como queríamos. Finalmente, si $W = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n g_n \otimes h_n$ es una representación ortonormal de un operador cualquiera de $S_p(H_1, H_2)$, tenemos

$$\begin{aligned}\phi(S)(W) = tr(WS) &= tr(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n S^* g_n \otimes h_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (S^* g_n, h_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \overline{(g_n, Sh_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \varphi, g_n \otimes h_n >=< \varphi, W >,\end{aligned}$$

lo que prueba la sobreyectividad.

(b) La prueba de este apartado es similar a la anterior, pero tiene algunas diferencias que hay que tener en cuenta para ejecutarla correctamente.
Para ver que ϕ está bien definida, tomamos $S \in S_1(H_2, H_1)$.
La linealidad se sigue como en el caso anterior.
Para la continuidad, observamos que para todo $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, $TS \in S_1(H_2)$ y

$$\sigma_1(TS) \leq \|T\| \, \sigma_1(S),$$

usando el teorema 1.3.5, y se obtiene lo que queríamos.
Ahora, está claro que ϕ es lineal.
Veamos que ϕ es continua. Se tiene

$$\begin{aligned}\|\phi(S)\| &= \sup\{|tr(TS)| : T \in \mathcal{K}(H_1, H_2), \|T\| = 1\} \\ &\leq \sup\{| \, \|T\| \, \sigma_1(S)| : T \in \mathcal{K}(H_1, H_2), \|T\| = 1\} = \sigma_1(S),\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\|\phi\| \leq 1$.
Ahora, queremos probar que ϕ es isometría. Cabe destacar que no podemos usar el mismo argumento que en (a), ya que en este caso ℓ_1^* es isométrico a ℓ_∞ y el operador que se construye no es compacto.
Vamos a tomar otro operador que sí nos de la igualdad de normas.
Tomemos una representación ON $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S) f_n \otimes e_n$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes f_n$$

que claramente es compacto y $\|T_N\| = 1$, pues dado $x \in H_1$

$$\|T_N x\| = \|\sum_{n=1}^{N} (x, e_n) f_n\| = \left(\sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|$$

y $\|T_N e_1\| = 1$.
Además, está claro que dado $y \in H_2$, tenemos

$$T_N S y = \sum_{n=1}^{N} a_n(S)(y, e_n)e_n.$$

Por tanto,

$$tr(T_N S) = \sum_{n=1}^{\infty}(T_N S e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n(S) \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

de donde deducimos por tanto que $\|\phi(S)\| \geq \sum_{n=1}^{N} a_n(S)$, lo que implica que $\|\phi(S)\| \geq \sigma_1(S)$ y por tanto ϕ es isometría, como queríamos probar.
Finalmente, la sobreyectividad se razona prácticamente igual en en (a). Simplemente, para ver que $S \in S_1(H_2, H_1)$, basta tomar $(\tau_n) \in c_0$, definir $T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n \otimes f_n \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ y actuar como en el apartado anterior. □

Como enunciamos al comienzo de esta sección obtenemos como consecuencia los dos siguientes resultados, que cierran el estudio de las clases de Schatten:

Corolario 1.4.8. $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p < \infty$. *En particular, los operadores de Hilbert-Schmidt* $[S_2(H_1, H_2), \sigma_2]$ *conforman un espacio de Hilbert.*

Corolario 1.4.9. $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$.

Nota 1.4.10. Como $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio de Banach, dada una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_p(H_1, H_2)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n) < \infty$$

se tiene que el operador

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

está bien definido y $T \in S_p(H_1, H_2)$, donde además se cumple que

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n).$$

En cambio, si $0 < p < 1$, tenemos que $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio cuasi-normado. Más adelante, concretamente en el capítulo 3, necesitaremos manejar series de operadores en estos espacios. Veamos un resultado que nos ayudará a manejar y a dar sentido a estas series.

Proposición 1.4.11. *Sea* $0 < p < 1$ *y sea* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_p(H_1, H_2)$*. Supongamos además que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4^{1/p})^n \sigma_p(T_n) < \infty.$$

Entonces el operador

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

está bien definido, pertenece a $S_p(H_1, H_2)$ *y*

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (4^{1/p})^n \sigma_p(T_n).$$

Para ver la prueba, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.4.12. *Sea* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *tal que* $T_k \to T$ *en la norma de* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$*. Supongamos además que existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\sigma_p(T_k) \leq C$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Entonces* $T \in S_p(H_1, H_2)$ *y* $\sigma_p(T) \leq C$*.*

Demostración.
Vamos a probar que si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$a_n(T_k) \to a_n(T)$$

cuando $k \to \infty$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Para ello, basta ver que

$$|a_n(T_k) - a_n(T)| \leq \|T - T_k\|.$$

Si aplicamos el lema 1.2.8 (a), tenemos que

$$a_n(T_k) \leq a_n(T) + a_1(T_k - T) = a_n(T) + \|T - T_k\|.$$

Basta entonces despejar la ecuación para obtener lo que queremos. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_p(T)^p = \sum_{n=1}^{N} a_n(T)^p &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(T_k)^p = \lim_{k\to\infty} \sigma_p(T_k)^p \\ &\leq C^p,\end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.
Así, $\sigma_p(T) \leq C$ y $T \in S_p(H_1, H_2)$, como queríamos. □

Pasamos entonces a probar la proposición anterior:

Demostración de la proposición 1.4.11:
Comencemos viendo que

$$T = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} T_n$$

está bien definido. Basta observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n) < \infty.$$

Ahora, veamos que cada suma parcial de la forma $\sum_{n=1}^{N} T_n$ está acotada en σ_p. Recordemos que si $T, S \in S_p(H_1, H_2)$, se tiene que

$$\sigma_p(T + S) \leq 4^{1/p}(\sigma_p(T) + \sigma_p(S)).$$

Recordando esta propiedad, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_p\Big(\sum_{n=1}^{N} T_n\Big) &\leq (4^{1/p})\left(\sigma_p(T_1) + \sigma_p\Big(\sum_{n=2}^{N} T_n\Big)\right) \\
&\leq (4^{1/p})\sigma_p(T_1) + (4^{1/p})^2\left(\sigma_p(T_2) + \sigma_p(\Big(\sum_{n=3}^{N} T_n\Big)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} (4^{1/p})^n \sigma_p(T_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (4^{1/p})^n \sigma_p(T_n) \\
&= C < \infty,
\end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.
Así, por el lema anterior se sigue que $T \in S_p(H_1, H_2)$ y

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (4^{1/p})^n \sigma_p(T_n),$$

ya que la sucesión $\sum_{n=1}^{N} T_n$ converge en $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ a T y $\sigma_p\Big(\sum_{n=1}^{N} T_n\Big) \leq C$. $\square$

Capítulo 2

Operadores de Composición en H^2

Una vez que estamos familiarizados con los operadores compactos y las clases de Schatten, el siguiente paso es tratar de caracterizar la pertenencia de los operadores de composición en H^2 a dichos espacios.
Para ello, en este capítulo presentaremos el espacio de Hardy H^2, un espacio clásico de funciones holomorfas en el disco unidad del plano complejo, y definiremos el concepto de **operador de composición**, que será el protagonista más destacado de este capítulo.
Nos centraremos en mostrar sus características más básicas: probaremos su continuidad con el teorema de Littlewood y estableceremos algunos resultados interesantes que nos hablarán de su compacidad.
Finalmente, gracias a las propiedades que presentaremos caracterizaremos nuestro operador de composición como una inyección en un espacio L^2 sobre una medida de Borel finita y positiva, lo cual nos llevará a afrontar un problema más general, que será resuelto en el siguiente capítulo.

En cuanto a la notación, denotaremos por $\mathbb{D}$ al disco unidad abierto del plano complejo, por $\mathbb{T}$ al borde del disco (al que denominaremos toro) y por $\mathcal{H}(U)$ al conjunto de las funciones holomorfas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$.

2.1. El Espacio de Hardy H^2

Recordemos que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

donde $\hat{f}(n)$ denota el n-ésimo coeficiente de Taylor-MacLaurin de f.

Definición 2.1.1. Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ pertenece al **espacio de Hardy** H^2 si $(\hat{f}(n)) \in \ell_2$. Es decir, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Si definimos la aplicación $\|\cdot\|_2 : H^2 \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_2 = (\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2},$$

observamos claramente está bien definida por la unicidad de coeficientes de series de potencias. Cuando no haya pie a la confusión, denotaremos $\|\cdot\|_2$ simplemente como $\|\cdot\|$. Veamos que el espacio de Hardy es, en efecto, un espacio de Hilbert:

Teorema 2.1.2. $[H^2, \|\cdot\|]$ *es isométricamente isomorfo a* $[\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2}]$*. Por tanto,* H^2 *es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}, \quad f, g \in H^2.$$

Demostración.
Definamos la aplicación $T : H^2 \to \ell_2$ de forma que para cada $f \in H^2$

$$Tf = (\hat{f}(n))_{n\geq 0}.$$

Esta aplicación está bien definida por la unicidad de series de potencias. Además, es claramente lineal e isometría. Tenemos que probar entonces que T es sobreyectiva para deducir que es un isomorfismo isométrico.
Para ello, tomemos $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell_2$. Basta entonces tomar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Como la sucesión (a_n) pertenece a ℓ_2 está acotada, define una función analítica en $\mathbb{D}$. Así, T es sobreyectiva, y por tanto $[H^2, \|\cdot\|]$ es isométricamente isomorfo a $[\ell_2, \|\cdot\|_2]$, como queríamos probar. $\square$

Podemos obtener algunas propiedades muy interesantes de H^2 directamente de la definición.
Veamos que siempre podemos dominar el crecimiento de las funciones del espacio de Hardy si no estamos demasiado próximos a la frontera:

Proposición 2.1.3 (Estimación de crecimiento)**.** *Para cada* $f \in H^2$*, se tiene*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostración.
Tenemos

$$|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||z|^n \leq (\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2}(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n})^{1/2}$$
$$= \|f\| \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y hemos sumado la serie geométrica, ya que $|z| < 1$. $\square$

Esta desigualdad nos muestra que la topología de H^2 es una topología natural o compatible para funciones analíticas, ya que implicará la convergencia uniforme en compactos:

Corolario 2.1.4. *Sea (f_n) una sucesión en H^2 que converge en norma a f. Entonces, para cada $K \subseteq \mathbb{D}$ compacto, (f_n) converge uniformemente a f en K.*

Demostración.
En efecto, supongamos que (f_n) converge a f en norma, es decir, $\|f_n - f\| \to 0$. Ahora, para cada $0 < R < 1$, tenemos gracias a la estimación de crecimiento que

$$\sup_{|z|\leq R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|}{\sqrt{1-R^2}},$$

por tanto $(f_n) \to f$ uniformemente en el disco cerrado $\overline{B(0;R)}$.
Además, dado $K \subseteq \mathbb{D}$ compacto cualquiera, existe $0 < R < 1$ tal que $K \subseteq \overline{B(0;R)}$, así que f_n converge uniformemente a f en K, como queríamos probar. $\square$

Antes de proseguir estudiando el espacio de Hardy, es conveniente proporcionar algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.5. (a) Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polinomio cualquiera. Tenemos que

$$\|p\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 < \infty,$$

por ser un número finito de sumandos. Por tanto, está claro que H^2 contiene a todos los polinomios.

(b) Tomemos $f(z) = e^z$. Está claro que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^2 < \infty,$$

Por tanto la exponencial también está en el espacio de Hardy.

(c) No todas las funciones de H^2 son funciones acotadas en el disco. Es también muy fácil comprobar que $f(z) = \log \frac{1}{1-z} \in H^2$:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A pesar de la manejabilidad de la definición de norma que usamos ahora, y a lo sencillo que es comprobar la pertenencia a H^2 de funciones cuyo desarrollos de potencias son conocidos como acabamos de ver, existe otra caracterización de la norma que enfatiza el comportamiento de la función cerca de la frontera del disco.

Definición 2.1.6. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Dado $0 \le r < 1$, definimos

$$M_2(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

Merece la pena comentar algunos aspectos de esta definición.
Consideraremos de ahora en adelante la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$ normalizada de forma que $m(\mathbb{T}) = 1$, y dada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, definimos la familia de funciones

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}, \quad 0 \le r < 1,$$

está claro que cada f_r define una función de cuadrado integrable en $\mathbb{T}$ que cumple

$$M_2(f,r) = \|f_r\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Es decir, las cantidades $M_2(f,r)$ miden la norma en $L^2(\mathbb{T})$ de cada función f_r para $0 \le r < 1$, o lo que es lo mismo, la norma de f en $L^2(r\mathbb{T})$.
Más adelante será conveniente recordar la definición de esta familia f_r, pues en la próxima sección estudiaremos el límite radial de f, un concepto que será de vital importancia en la teoría que desarrollaremos posteriormente.
De momento, nos conformamos con caracterizar la norma en H^2 en términos de $M_2(f,r)$:

Proposición 2.1.7. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces*

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Por tanto, $f \in H^2$ si y solo si $M_2(f,r)$ está acotado para $0 \le r < 1$.

Demostración.
Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Observemos que si escribimos $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ y tenemos en cuenta la ortogonalidad de las funciones $(e^{in\theta})$ en $L^2(\mathbb{T})$, tenemos para cualquier $0 \le r < 1$

$$M_2^2(f,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}$$

gracias a la identidad de Parseval. Esta igualdad prueba que $M_2(f,r)$ es una función creciente en r, y que si $f \in H^2$, entonces $M_2(f,r) \leq \|f\|$.
Ahora, supongamos que

$$\lim_{r\to 1^-} M_2(f,r) = M < \infty,$$

entonces para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leq M^2.$$

Si tomamos límite cuando $r \nearrow 1$, observamos que cada suma parcial de la serie de $\|f\|^2$ está acotada por M^2, por tanto, $\|f\|^2 \leq M^2$.
Así obtenemos que $f \in H^2$, y la prueba está completa. □

Corolario 2.1.8. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ acotada. Entonces, $f \in H^2$.*

Demostración.
Como f está acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, se tiene

$$M_2(f,r)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2.$$

Por tanto, $M_2(f,r)$ está acotado, $f \in H^2$ y $\|f\| \leq M$. □

Nota 2.1.9. Es necesario remarcar el hecho de que el espacio de Hardy H^2 no es el único espacio de Hardy que puede definirse sobre $\mathbb{D}$. En general, se define el espacio de Hardy H^p con $0 < p < \infty$ como

$$H^p = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty\},$$

donde $M_p(f,r)$ se define de forma análoga que $M_2(f,r)$. Es decir:

$$M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}$$

y se define la norma $\|f\|_p = \sup_{r\to 1^-} M_p(f,r)$.
Se tiene que $[H^p, \|\cdot\|_p]$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$ y un espacio cuasi-normado si $0 < p < 1$.
Aunque son unos espacios muy interesantes, en este trabajo nos centraremos tan solo en H^2, pues es un espacio de Hilbert y las clases de Schatten solo están definidas para operadores entre estos espacios.

2.2. El Teorema de Littlewood

En esta sección vamos a estudiar qué se entiende por operador de multiplicación y operador de composición, y vamos a estudiar su linealidad y continuidad.
Comencemos viendo qué se entiende por *operador de multiplicación.*
Denotaremos por H^∞ al espacio de funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}$.

Si definimos la aplicación $\|\cdot\|_\infty : H^\infty \to \mathbb{R}$ como

$$\|b\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |b(z)|,$$

es inmediato comprobar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma sobre H^∞.
Ya sabemos por el corolario 2.1.8 que $H^\infty \subset H^2$. Además, la contención es estricta, porque como ya vimos, existen funciones no acotadas en H^2.
Cabe preguntarse ahora si dados $f \in H^2$, $b \in H^\infty$, la función bf está bien definida y representa un elemento de H^2.
Formulemos este problema en términos de operadores:

Definición 2.2.1. Sea $b \in H^\infty$. Llamaremos **operador de multiplicación** con símbolo b a la aplicación

$$M_b : H^2 \to H^2$$

definida como

$$M_b f = bf.$$

Nuestro problema ahora radica en preguntarnos si el operador M_b está bien definido. Con el siguiente resultado damos una respuesta afirmativa:

Proposición 2.2.2. *Dado $b \in H^\infty$, el operador M_b es lineal y continuo. Es decir, $M_b \in \mathcal{L}(H^2)$.*

Demostración.
Claramente, el operador M_b es lineal. Dada $f \in H^2$, veamos que $bf \in H^2$.
Para ello, tenemos que

$$\begin{aligned} M_2(bf,r)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |bf(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|b\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \|b\|_\infty^2 M_2(f,r)^2, \end{aligned}$$

y por tanto, $\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2$, lo que prueba que M_b está bien definida, que es un operador continuo y que $\|M_b\| \leq \|b\|_\infty$. □

Después de estudiar la multiplicación, podemos plantearnos si $f \circ b \in H^2$, donde $b \in H^\infty$. Rápidamente observamos que para que esta composición esté bien definida, debe ocurrir que $b(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.
Podemos estudiar la composición de funciones en términos de operadores:

Definición 2.2.3. Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ de forma que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Definimos el **operador de composición** de símbolo φ

$$C_\varphi : H^2 \to H^2$$

como

$$C_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Está claro que C_φ es lineal. La primera cuestión que cabe preguntarse es si C_φ define un operador acotado.
La respuesta es afirmativa, pero no se seguirá de una forma tan sencilla como en el caso anterior. Este resultado es el teorema de Littlewood.
Comencemos primero suponiendo que 0 es un punto fijo de φ, y con la ayuda de los automorfismos conformes se seguirá el resultado general.

Teorema 2.2.4 (Principio de subordinación de Littlewood)**.** *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, de forma que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, y tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces, $C_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ y $\|C_\varphi\| = 1$.*

Demostración.

Consideramos el operador de 'paso atrás' o backward shift B definido en H^2 como

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n+1) z^n \quad (f \in H^2)$$

Está claro que B está bien definido y es lineal.
Además, como

$$\|Bf\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n+1)|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2 ,$$

se sigue que B es una contracción en H^2.
Necesitaremos un par de características especiales de B para la prueba. Dada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ se tiene:

$$f(z) = f(0) + zBf(z) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

$$B^n f(0) = \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Ya tenemos lo necesario para probar el teorema.
Supongamos primero que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ es un polinomio.
Entonces, $f \circ \varphi$ está acotada en $\mathbb{D}$ y gracias al teorema 2.1.8, $f \circ \varphi \in H^2$.
Nos centramos ahora en estimar la norma de C_φ. Tenemos, usando (2.1), que

$$f \circ \varphi(z) = f(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z)) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

Si reescribimos esta identidad en términos de operadores, tenemos

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi B f.$$

Ahora, recordemos que $\varphi(0) = 0$. Por tanto, la serie de potencias centrada en 0 de φ no tiene término constante. Es decir, z es factor común de todos los sumandos del desarrollo. Así, observamos que la función $M_\varphi C_\varphi B f$ tiene la misma propiedad, ya que aparece el operador de multiplicación por φ.
Deducimos entonces que esta función es ortogonal en H^2 a la función constante $f(0)$.
Luego se tiene

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi B f\|^2 \leq |f(0)|^2 + \|C_\varphi B f\|^2,$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1$.
Ahora, si sustituimos en la desigualdad f por $Bf, B^2 f, \cdots$, obtenemos:

$$\|C_\varphi B f\|^2 \leq |Bf(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^2 f\right\|^2$$

$$\left\|C_\varphi B^2 f\right\|^2 \leq |B^2 f(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^3 f\right\|^2.$$

En general:

$$\|C_\varphi B^n f\|^2 \leq |B^n f(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Combinando estas desigualdades obtenemos

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |(B^k f)(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, recordemos que f es un polinomio. Si tomamos n como el grado de f, tenemos $B^{n+1} f = 0$ y reduce la última desigualdad a

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |(B^k f)(0)|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2,$$

usando (2.1) en la primera igualdad.
Esto prueba que C_φ es una contracción en el espacio vectorial de los polinomios.
Para finalizar, tomemos ahora $f \in H^2$ cualquiera, y denotemos por f_n a la enésima suma parcial de su desarrollo de Taylor centrado en 0.
Está claro que $f_n \to f$ en la norma de H^2, y por tanto, $f_n \to f$ uniformemente en cualquier compacto contenido en $\mathbb{D}$, así que $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ también converge uniformemente en cualquier compacto.

Por supuesto, se tiene que $\|f_n\| \leq \|f\|$, y acabamos de probar que $\|f_n \circ \varphi\| \leq \|f_n\|$.
Así, para cada $0 < r < 1$ fijo, tenemos

$$\begin{aligned} M_2(f \circ \varphi, r) &= \lim_{n\to\infty} M_2(f_n \circ \varphi, r) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \|f_n \circ \varphi\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \|f_n\| \leq \|f\|. \end{aligned}$$

Basta tomar límite $r \nearrow 1$ para obtener que $\|f \circ \varphi\| \leq \|f\|$.
Es decir, C_φ es continua y $\|C_\varphi\| \leq 1$.
Para ver que $\|C_\varphi\| = 1$, basta tomar $f = 1$ para obtener $\|C_\varphi f\| = \|f\|$ y obtenemos lo que queríamos probar. □

Como ya comentamos, para probar el caso general en el que φ no fija necesariamente el origen, nos apoyaremos en los automorfismos conformes.
Para cada $p \in \mathbb{D}$, definimos

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p}z},$$

que es claramente una función meromorfa en todo el plano complejo, con un polo simple en $z = 1/\overline{p}$.
Como $p \in \mathbb{D}$, está claro que $|1/\overline{p}| > 1$. por tanto, $\alpha_p \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.
Además, $\alpha_p(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\alpha_p(0) = p, \alpha_p(p) = 0$ y $\alpha_p \circ \alpha_p = id$.
Es decir, α_p es un automorfismo del disco en sí mismo que intercambia al punto p con el origen y que es su propia inversa.
Vamos a usar estas funciones para mover $\varphi(0)$ al origen.
Dada $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, denotamos $p = \varphi(0)$. Entonces, la función holomorfa $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ lleva al disco unidad en sí mismo y fija el origen.
Gracias a la propiedad de la inversa que comentamos antes, tenemos que $\varphi = \alpha_p \circ \psi$. Así, obtenemos la ecuación en términos de operadores

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}.$$

Ya sabemos que C_ψ es continua (de hecho, hemos visto que es una contracción), y sabemos que la composición de operadores continuos es continua.
Necesitamos probar entonces la continuidad de C_{α_p}:

Lema 2.2.5. *Para cada $p \in \mathbb{D}$, $C_{\alpha_p} \in \mathcal{L}(H^2)$. Es más,*

$$\|C_{\alpha_p}\| \leq \left(\frac{1 + |p|}{1 - |p|}\right)^{1/2}.$$

Demostración.
Comencemos tomando $R > 1$ y supongamos primero que $f \in \mathcal{H}(R\mathbb{D})$. Entonces tenemos que

$$\|f\|^2 = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Ahora, simplemente haciendo un cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}\|f\circ\alpha_p\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\alpha_p(e^{i\theta}))|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|^2|\alpha_p'(e^{it})|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|^2\frac{1-|p|^2}{|1-\overline{p}e^{it}|^2}dt \le \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|^2 dt\right)\\ &= \frac{1+|p|}{1-|p|}\,\|f\|^2\,.\end{aligned}$$

Hemos probado esta desigualdad para funciones holomorfas en $R\mathbb{D}$. En particular, se tiene para los polinomios.
Ahora, basta con repetir el mismo razonamiento que usamos en el principio de subordinación de Littlewood para transferir esta propiedad a cualquier función de H^2, y obtenemos lo que queríamos probar. □

Ya tenemos todo lo necesario para probar la continuidad de cualquier operador de composición, fije o no el 0.

Teorema 2.2.6 (Teorema de Littlewood)**.** *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces, $C_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ y*

$$\|C_\varphi\| \le \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

Demostración.
Como ya expusimos anteriormente, si tomamos $p = \varphi(0)$, tenemos que

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p},$$

donde $\psi(0) = 0$.
Gracias al principio de subordinación y al último lema, se tiene que C_ψ y $C_{\alpha_p} \in \mathcal{L}(H^2)$, por tanto, $C_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$.
Es más, usando el hecho de que $\|C_\psi\| = 1$ se sigue que

$$\|C_\varphi\| \le \|C_\psi\|\,\|C_{\alpha_p}\| \le \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}},$$

como queríamos. □

2.3. El límite radial. La integral de Poisson

Recordemos que para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, definimos la familia de funciones

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}, \quad 0 \le r < 1.$$

Hemos visto además que la pertenencia de una función holomorfa en $\mathbb{D}$ al espacio de Hardy depende directamente de su comportamiento cerca del borde.
Sería interesante poder caracterizar de alguna forma los valores límite de estas f_r mediante alguna función $f^* \in L_2(\mathbb{T})$, que llamaremos **límite radial.**
Para ello, recordemos que dada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in H^2,$$

definimos para cada $0 \leq r < 1$,

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta}, \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Parece entonces evidente que la definición apropiada para f^* debe ser

$$f^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad e^{i\theta} \in \mathbb{T}. \tag{2.2}$$

El siguiente teorema prueba, que, en efecto, dicha elección es la correcta para obtener la identificación enunciada:

Teorema 2.3.1 (Teorema del límite radial)**.** *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in H^2$, *y definamos* f^* *como en (2.2). Entonces se tiene:*

(a) $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ *y* $\|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|$.

(b) $\|f_r - f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0$ *si* $r \to 1^-$.

(c) $f_r \to f^*$ *en casi todo* $\mathbb{T}$.

Demostración.

(a) Basta con aplicar la identidad de Parseval:

$$\|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_{H^2}.$$

(b) Tomemos $\varepsilon > 0$. Gracias a la identidad de Parseval se tiene

$$\begin{aligned} \|f_r - f^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \|\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)(1 - r^n) e^{in\theta}\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 (1 - r^n)^2. \end{aligned}$$

Ahora, como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ es convergente, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ de forma que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \varepsilon/2$. Además, al ser una suma finita de términos, tenemos también que

$$\sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2(1-r^n)^2 \to 0$$

cuando $r \to 1^-$. Así, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que para todo $r_0 \leq r < 1$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2(1-r^n)^2 < \varepsilon/2.$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \|f_r - f^*\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2(1-r^n)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2(1-r^n)^2 \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue el resultado. □

Falta por probar el apartado (c). Aunque a priori parezca un resultado sencillo de probar, para poder justificar la convergencia en casi todo de f_r a f^*, vamos a necesitar introducir algunos conceptos clásicos de análisis armónico, como por ejemplo la integral de Poisson.

A pesar de que es una teoría muy interesante y ampliamente estudiada, vamos a limitarnos a desarrollar los conceptos más básicos y los resultados indispensables para la prueba de este resultado.

Será conveniente identificar la frontera del disco $\mathbb{T}$ con el intervalo $[-\pi, \pi]$.
Comencemos introduciendo el concepto de *núcleo de Poisson:*

Definición 2.3.2. Se define el **núcleo de Poisson** como

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta},$$

para $\theta \in [-\pi, \pi]$, $0 \leq r < 1$.

Será útil extender el núcleo de Poisson a todo $\mathbb{R}$ de forma periódica cuando sea conveniente.
Es fácil ver la siguiente caracterización:

Lema 2.3.3.

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi], 0 \leq r < 1.$$

Demostración.
Podemos escribir, tomando $z = re^{i\theta}$

$$P_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}}$$
$$= \frac{1-|z|^2}{|1-z^2|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

como queríamos. □
Este lema prueba además que P_r está bien definida y es no negativa.

Definición 2.3.4. Dada $f \in L^1([-\pi,\pi])$, definimos su **integral de Poisson** como

$$P[f](re^{i\theta}) = (f * P_r)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)dt.$$

Es muy sencillo comprobar que si f tiene desarrollo de Fourier de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, entonces

$$P[f](re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

En efecto, tenemos que

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{-in(t-\theta)} \right) dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \right) e^{in\theta}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

como queríamos.
Esta igualdad nos ayuda a relacionar la integral de Poisson con nuestro problema original. Notemos que

$$P[f^*](re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)(re^{i\theta})^n.$$

Si tomamos ahora $re^{i\theta} = z \in \mathbb{D}$, obtenemos claramente que $P[f^*] = f$. Es decir, la integral de Poisson del límite radial que definimos anteriormente es la función original en el disco. Es más, se tiene

$$(P_r * f^*)(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta} = f_r(e^{i\theta}).$$

Por tanto, para probar la convergencia en casi todo enunciada en el teorema del límite radial, basta probar entonces que si $f \in L^1([-\pi, \pi])$

$$(P_r * f)(\theta) \to f(\theta) \quad si \quad r \to 1^-,$$

en casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.
Para ello, probaremos un teorema más general, que enunciamos próximamente.
Antes, necesitamos introducir algunos conceptos como el de *aproximación a la identidad.*

Definición 2.3.5. Sea una familia de funciones $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ definidas en $\mathbb{R}^d$. Diremos que es una **aproximación a la identidad** si cumple las siguientes propiedades:

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$.

(b) $|K_\delta(x)| \leq c/\delta^d$ para todo $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) $|K_\delta(x)| \leq c\delta/|x|^{d+1}$ para todo $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$.

Recordemos ahora la definición de *punto de Lebesgue*. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, y $x \in \mathbb{R}^d$. Diremos que es un punto de Lebesgue para f si

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Además, gracias al teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que casi todo punto en $\mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue (ver [13], corolario 1.6.)

Teorema 2.3.6. *Si $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ es una aproximación a la identidad y $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$(f * K_\delta)(x) \to f(x) \quad \delta \to 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ punto de Lebesgue. En particular, el límite se tiene en casi todo R^d.

Para poder poner en pie la prueba, necesitaremos el siguiente lema técnico:

Lema 2.3.7. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y sea x punto de Lebesgue de f. Definamos*

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^d} \int_{|y|\leq r} |f(x-y) - f(x)|dy, \quad r > 0.$$

Entonces $\mathcal{A}(r)$ es continua para $r > 0$, y

$$\mathcal{A}(r) \to 0 \quad r \to 0$$

Además, $\mathcal{A}$ está acotada.

Demostración.
Tenemos la continuidad gracias a la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue.
Para ver que $\mathcal{A}(r)$ tiende a 0 cuando $r \to 0$, basta observar que la medida de la bola de radio r es $C_d r^d$, donde C_d es una constante dependiente de la dimensión del espacio.
Así, gracias a que x es un punto de Lebesgue, tenemos

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{C_d} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy \to 0,$$

donde tomamos el límite $m(B) \to 0$, con $x \in B$ Por tanto, tenemos que $\mathcal{A}(r)$ está acotado para $0 < r \leq 1$.
Para terminar la prueba, basta ver entonces que si $r > 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &\leq \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy + \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{r^d} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + C_d |f(x)|,\end{aligned}$$

y por tanto, $\mathcal{A}$ está acotada. □

Ya podemos probar el teorema anterior:
Demostración del teorema 2.3.6.
Como la integral de cada K_δ es 1, tenemos

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) K_\delta(y) dy.$$

Así,

$$|(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy.$$

Por tanto, basta ver que el término derecho de la igualdad tiende a 0 en casi todo.
Para ello, escribimos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy = \\ &= \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta < |y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy\end{aligned}$$

Tratemos de acotar cada sumando.
Para el primero, si usamos la propiedad (b) de las aproximaciones a la identidad, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy &\leq \frac{c}{\delta^d} \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq c\mathcal{A}(\delta).\end{aligned}$$

Ahora, para cada sumando restante tenemos, usando la propiedad (c):

$$\begin{aligned}
&\int_{2^k\delta<|y|\leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy \\
&\leq \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{d+1}}\int_{|y|\leq 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|dy \\
&\leq \frac{c'}{2^k(2^{k+1}\delta)^d}\int_{|y|\leq 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|dy \\
&\leq c'2^{-k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta).
\end{aligned}$$

Así, si combinamos ambas desigualdades, obtenemos que

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\leq c\mathcal{A}(\delta)+c'\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta).$$

Ahora, dado $\varepsilon>0$, tomamos $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k\geq N}2^{-k}<\varepsilon$. Por tanto, tomando δ suficientemente pequeño, tenemos por el lema anterior que

$$\mathcal{A}(2^k\delta)<\varepsilon/N,\quad k\in 0,1,...,N-1.$$

Así, ya que $\mathcal{A}(r)$ está acotado, deducimos

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\leq C\varepsilon,$$

y esto concluye la prueba. □

Ahora nos falta comprobar que el núcleo de Poisson es una aproximación de la identidad considerando $\delta=1-r$, $0\leq r<1$ y extendiéndolo a toda la recta real asignándole el valor 0 fuera del intervalo $[-\pi,\pi]$.

Proposición 2.3.8. *El núcleo de Poisson es una aproximación a la identidad.*

Demostración.

Tenemos que comprobar cada una de las propiedades de la definición:

(a) Si intercambiamos suma e integral gracias a la convergencia absoluta de la serie que define el núcleo de Poisson obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}r^{|n|}e^{in\theta}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}d\theta=1$$

(b) Tenemos

$$|P_r(\theta)|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}=\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1+r}{1-r}\leq\frac{2}{1-r},$$

como queríamos probar.

(c) Tenemos

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1-r^2)^2 + 2r(1-\cos\theta) \geq 2r(1-\cos\theta) \geq C\theta^2$$

con $C > 0$. Entonces, obtenemos

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \leq C\frac{1-r}{\theta^2}$$

y por tanto el núcleo de Poisson es una aproximación a la indentidad. □

Con esto, podemos enunciar este resultado:

Corolario 2.3.9. *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$, con serie de Fourier*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Entonces, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$ converge a $f(x)$ para casi todo x, cuando $r \to 1^-$.

Demostración.
Como ya comentamos anteriormente, tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)dy.$$

Basta entonces extender f a toda la recta real definiéndola como 0 fuera del intervalo $[-\pi,\pi]$ y aplicar el teorema 2.3.6. Como acabamos de ver, el núcleo de Poisson es una aproximación a la identidad, y así se tiene el resultado. □

Volvamos a nuestro teorema del límite radial.
Con el trabajo que hemos desarrollado en las últimas páginas, ya podemos justificar la convergencia en casi todo del límite radial.
Vemos entonces la prueba.

Demostración del teorema 2.3.1 (c):
Como ya hemos visto, tenemos que para cada $0 \leq r < 1$

$$f_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta}.$$

Además, sabemos que f^* tiene como serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}$.
Así, por el corolario anterior, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta} \to \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta},$$

en casi todo $e^{i\theta}$ cuando $r \nearrow 1$. Es decir,

$$f_r(e^{i\theta}) \to f^*(e^{i\theta})$$

en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ si $r \nearrow 1$, tal y como queríamos probar. $\square$

Cabe recordar que hemos probado que dada cualquier $f \in H^2$ f_r convergerá en casi todo a la función con serie de Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Es decir, podemos identificar el espacio de Hardy con el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ de funciones con coeficientes de Fourier nulos para $n < 0$.
A partir de ahora y cuando no haya lugar a confusión, dada $f \in H^2$ la identificaremos en $\mathbb{T}$ con su límite radial escribiendo

$$f(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}), \quad e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

2.4. Compacidad de operadores de composición

Vamos a estudiar en esta sección las propiedades elementales de compacidad de los operadores de composición en H^2.

Aunque veremos algunos resultados muy útiles, el objetivo de esta sección no es caracterizar la compacidad en general, si no construir una base de resultados que nos ayudarán a transformar el problema de estudiar la compacidad y la pertenencia a las clases de Schatten de operadores de composición en el problema más general de estudiar estas propiedades para las inyecciones de Carleson, el cual resolveremos en el próximo capítulo.

Comencemos viendo un claro ejemplo de un operador de composición compacto. Basta tomar $\alpha \in \mathbb{D}$ y definir

$$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : \varphi(z) = \alpha \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, tenemos que dada $f \in H^2$, se tiene $C_\varphi f(z) = f(\alpha)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
Es decir, la imagen de H^2 por C_φ es el espacio de las funciones constantes, que constituyen un espacio vectorial de dimensión 1.
Así, C_φ tiene rango finito y por tanto es compacto.
Observemos que φ contrae de manera drástica el disco unidad, ya que lo lleva a un solo punto.
En cambio,si tomamos $\psi(z) = z$, claramente $\psi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y C_ψ está bien definido. Se tiene que $C_\psi(B_{H^2}) = B_{H^2}$, que no es un compacto.

Por tanto, nuestro operador C_ψ no es compacto.
Cabe preguntarse hasta qué punto tiene que comprimir una función $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ el disco para que induzca un operador compacto.
Con el siguiente resultado vemos que basta pedir que $\varphi(\mathbb{D})$ sea relativamente compacto en $\mathbb{D}$.

Teorema 2.4.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Si $\|\varphi\|_\infty < 1$, entonces $C_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$.*

Demostración.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el operador

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)\varphi^k \quad (f \in H^2).$$

Cada T_n es un operador lineal y continuo tal que lleva H^2 en el espacio vectorial engendrado por las primeras n potencias de φ.
Veamos que $\|C_\varphi - T_n\| \to 0$. Como los T_n son operadores de rango finito, tendremos que C_φ es compacto.
En efecto,

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - T_n)f\| &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi^k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)| \left\|\varphi^k\right\| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|\, \|\varphi\|_\infty^k \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi\|_\infty^{2k}\right)^{1/2} \\ &\le \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - \|\varphi\|_\infty^2}} \|f\| \to 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis para sumar la serie geométrica. □

Podemos refinar algo más el razonamiento usado en esta prueba para obtener un resultado más fuerte.
Recordemos que dado $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es un operador de Hilbert-Schmidt (es decir, $T \in S_2(H_1, H_2)$) si y solo si existe una base ortonormal (e_n) de H_1 tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$$

Se tiene:

Teorema 2.4.2. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces C_φ es un operador de Hilbert-Schmidt si y solo si*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta < \infty.$$

Demostración.
Observemos que $\{1, z, z^2, ...\}$ forma una base ortonormal de H^2. Está claro que dado $z^n, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $C_\varphi z^n = z^n \circ \varphi = \varphi^n$.
Entonces, C_φ es Hilbert-Schmidt si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|^2 < \infty.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \infty > \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \|(\varphi^n)^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|^2, \end{aligned}$$

tal y como queríamos probar. □

Veamos ahora un resultado que caracterizará la compacidad de un operador de composición en términos de convergencia débil.
Antes de enunciarlo, recordemos algunos conceptos de análisis complejos que serán fundamentales en la prueba.
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en Ω es **normal** si cada sucesión de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada compacto de Ω.
Si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \forall\ z \in K,\ f \in \mathcal{F},$$

diremos que la familia $\mathcal{F}$ está **uniformemente acotada** en los compactos de Ω.
Además, diremos que la familia $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en un compacto $K \subset \Omega$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in K$ con $|z - w| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

El siguiente teorema, conocido como **teorema de Montel**, relaciona los anteriores conceptos:

Teorema 2.4.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω uniformemente acotada en los compactos de Ω.*
Entonces:

(i) $\mathcal{F}$ *es equicontinua en cada compacto de* Ω*.*

(ii) $\mathcal{F}$ *es una familia normal.*

Ya podemos enunciar el resultado prometido anteriormente. Se tiene

Teorema 2.4.4. *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *tal que* $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $C_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$.

(b) Si (f_n) *es una sucesión acotada en* H^2 *y converge a 0 uniformemente en cada compacto de* $\mathbb{D}$*, entonces* $\|C_\varphi f_n\| \to 0$.

Demostración.
Será conveniente recordar que gracias al corolario 2.1.4 la convergencia en H^2 implica la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.
Denotemos por B a la bola unidad cerrada de H^2.
Veamos primero (a) $\Rightarrow$ (b).
Supongamos que C_φ es compacto. Es decir, $C_\varphi(B)$ es relativamente compacto en H^2.
Sea ahora (f_n) una sucesión acotada en H^2 que converge uniformemente a 0 en cada compacto de $\mathbb{D}$. Basta probar que la función nula es el límite en la topología de la norma de la sucesión $(C_\varphi f_n)$.
Tenemos entonces que $C_\varphi f_n \to 0$ uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$. Entonces, si $C_\varphi f_n$ converge en H^2, debe hacerlo a 0, ya que la convergencia en H^2 implica la convergencia puntual en $\mathbb{D}$. Además, como C_φ es compacto, el conjunto $\{C_\varphi f_n\}$ es relativamente compacto, así que la sucesión es convergente y tiende a 0, como queríamos probar.
Veamos ahora (b) $\Rightarrow$ (a).
Sea (f_n) una sucesión acotada en H^2. No hay pérdida de generalidad si asumimos que la sucesión está contenida en B.
Para ver que C_φ es compacto, basta encontrar una subsucesión convergente de $(C_\varphi f_n)$.
Ahora, como las funciones de B están acotadas uniformemente en los compactos de $\mathbb{D}$, gracias al teorema de Montel podemos extraer una subsucesión $\{g_k = f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$ a una función holomorfa g.
Veamos que $g \in H^2$.
En efecto, para cada $0 < r < 1$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_k(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_k \|g_k\|^2 \leq 1.$$

Por tanto, obtenemos que $g \in H^2$, y de hecho $\|g\| \leq 1$.
Así, la sucesión $(g_k - g)$ está acotada en H^2, y $g_k - g \to 0$ en cada compacto de $\mathbb{D}$.
Por tanto, gracias a la hipótesis, tenemos que

$$\|C_\varphi g_k - C_\varphi g\| = \|C_\varphi(g_n - g)\| \to 0,$$

lo que prueba que $(C_\varphi g_k)$ es convergente, como queríamos. $\square$

Veamos ahora que la inyectividad o **univalencia** de φ nos permitirá caracterizar la compacidad del operador de composición que induce:

Teorema 2.4.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ univalente tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces, $C_\varphi \in H^2$ si y solo si*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty.$$

La prueba de este resultado no es inmediata.
Debemos introducir para ello algunos conceptos vitales de la teoría de espacios de Hardy que nos ayudará a dar una demostración.

Primero, daremos una estimación de la norma en H^2 en función de la integral de área en $\mathbb{D}$. Denotaremos por $dA = \frac{1}{\pi}dxdy$ a la medida de área en el plano complejo, normalizada de forma que $A(\mathbb{D}) = 1$.

Proposición 2.4.6. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Se tiene*

$$\frac{1}{2}\left\|f - f(0)\right\|^2 \leq \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) \leq \left\|f - f(0)\right\|^2.$$

Demostración.
Basta escribir la integral en coordenadas polares y usar el teorema de Fubini para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) &= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)(1-r^2)rdr \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 r^{2n-2}\right)(1-r^2)rdr \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 \int_0^1 r^{2n-2}(1-r^2)rdr \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}|\hat{f}(n)|^2.
\end{aligned}$$

Además, como se tiene que $f(z) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$, se sigue que

$$\frac{1}{2}\left\|f - f(0)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}|\hat{f}(n)|^2 \leq \left\|f - f(0)\right\|^2,$$

y gracias a la igualdad anterior se tiene el resultado. $\square$

El siguiente concepto que necesitaremos en la prueba es el de *núcleo reproductor*.

Definición 2.4.7. Para cada punto $p \in \mathbb{D}$, llamamos **núcleo reproductor** para p a la función

$$k_p(z) := \frac{1}{1-\overline{p}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}^n z^n.$$

Esta familia de funciones cumple unas propiedades muy interesantes que vemos a continuación:

Proposición 2.4.8. *Sea $p \in \mathbb{D}$. Se cumple*

(a) $k_p \in H^2$.

(b) Para cada $f \in H^2$ se tiene

$$(f, k_p) = f(p)$$

(c) Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Entonces

$$C_\varphi^* k_p = k_{\varphi(p)}$$

Demostración.
Las propiedades (a) y (b) son triviales.
Veamos (c). Si tomamos $f \in H^2$ se tiene

$$(f, C_\varphi^* k_p) = (C_\varphi f, k_p) = C_\varphi f(p) = f(\varphi(p)) = (f, k_{\varphi(p)}),$$

lo que prueba el resultado. □

Con esta proposición hemos probado que la evaluación en un punto de $\mathbb{D}$ es un funcional lineal y continuo sobre H^2, cuyo representante que se obtiene en el teorema de Riesz es precisamente el núcleo reproductor.
Además, aunque no existe ninguna buena caracterización para el adjunto de un operador de composición, obtenemos un buen resultado para esta familia de funciones.

Vayamos entonces a la prueba.
Demostración del teorema 2.4.5.
Supongamos primero que φ es univalente y que verifica

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty.$$

Para probar que C_φ es compacto, vamos a usar la caracterización que nos da el teorema 2.4.4.
Supongamos pues que (f_n) es una sucesión acotada en H^2, y que converge a 0 uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Queremos probar que $\|C_\varphi f_n\| \to 0$.

De nuevo, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|f_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $0 < r < 1$ tal que

$$1 - |z|^2 \leq \varepsilon(1 - |\varphi(z)|^2) \qquad \text{para} \quad r < |z| < 1. \tag{2.3}$$

Ahora, gracias a la estimación de la norma con la integral de área obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|^2 \leq & \int_{r\mathbb{D}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1 - |z|^2)dA(z) \\ & + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1 - |z|^2)dA(z) \end{aligned}$$

Como $f_n \circ \varphi \to 0$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, lo mismo ocurre para sus derivadas (ver [14], teorema 5.3.)
Así, la primera integral converge a 0, y lo denotaremos por $o(1)$. Para tratar de estimar la segunda integral, usaremos la desigualdad (2.3), cambiaremos el anillo $\mathbb{D} \smallsetminus r\mathbb{D}$ por el disco completo y haremos el cambio de variables $\varphi(z) = w$, el cual es válido por la inyectividad de φ.
Obtenemos

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|^2 &\leq o(1) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}\smallsetminus r\mathbb{D}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1 - |\varphi(z)|^2)dA(z) \\ &\leq o(1) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))|^2(1 - |\varphi(z)|^2)|\varphi'(z)|^2 dA(z) \\ &\leq o(1) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2(1 - |w|^2)dA(w) \\ &\leq o(1) + 2\varepsilon\,\|f_n - f(0)\|^2 \\ &\leq o(1) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado el hecho de que $\|f_n - f(0)\| \leq \|f_n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, como $f_n(\varphi(0)) \to 0$, obtenemos que

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \|C_\varphi f_n\| \leq 2\varepsilon.$$

Como ε era arbitrario, se sigue que $\|C_\varphi f_n\| \to 0$, y esto prueba que C_φ es compacto.
Veamos ahora la otra implicación.
En esta prueba no usaremos el hecho de que φ sea univalente, así que obtendremos un resultado más general:
Si C_φ es compacto con φ cualquiera, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \infty.$$

Para cada $p \in \mathbb{D}$ definimos

$$f_p(z) = \frac{k_p(z)}{\|k_p\|} = \frac{\sqrt{1-|p|^2}}{1-\overline{p}z},$$

es decir, f_p es el nucleo reproductor de p normalizado.
Vamos a probar que

$$\left\|C_\varphi^* f_p\right\| \to 0 \quad \text{si} \quad |p| \to 1^-.$$

Una vez demostrado, aplicando las propiedades de los núcleos reproductores tendremos

$$\left\|C_\varphi^* f_p\right\|^2 = (1-|p|^2)\|k_{\varphi(p)}\|^2 = \frac{1-|p|^2}{1-|\varphi(p)|^2},$$

lo que finalizará la prueba.
Recordemos que el adjunto de todo operador compacto es compacto, como vimos en el capítulo anterior, por tanto $\mathbb{C}_\psi^*$ también es compacto. Así, el conjunto

$$\{C_\varphi^* f_p : p \in \mathbb{D}\}$$

es relativamente compacto en H^2, así que cada sucesión tendrá una subsucesión convergente. Basta entonces probar que la función nula es el único límite posible para cualquier subsucesión.
Sea entonces (p_n) sucesión en $\mathbb{D}$ tal que $|p_n| \to 1^-$, y $C_\varphi^* f_{p_n} \to g$ en la norma de H^2. Vamos a probar que $g = 0$.
Para ello, tomemos h un polinomio cualquiera. Tenemos

$$\begin{aligned}
(g,h) &= \lim_{n\to\infty} (C_\varphi^* f_{p_n}, h) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|p_n|^2}(C_\varphi^* k_{p_n}, h) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|p_n|^2}(k_{\varphi(p_n)}, h) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|p_n|^2}\ \overline{h(\varphi(p_n))} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por ser h acotado en $\mathbb{D}$. Por tanto, se tiene que g es ortogonal a todos los polinomios. Como estos son densos en H^2, se sigue que g es la función nula, y esto acaba la prueba. $\square$

Finalizamos la sección con un resultado que será crucial para introducir las inyecciones que estudiaremos en el próximo capítulo:

Proposición 2.4.9. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Si C_φ es compacto, entonces*

$$|\varphi(e^{i\theta})| < 1$$

en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Demostración.
Razonamos por reducción al absurdo.
Supongamos que el conjunto

$$E := \{\theta \in [-\pi, \pi] : |\varphi(e^{i\theta})| = 1\}$$

tiene medida de Lebesgue positiva. Está claro además que cada monomio z^n con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pertenece a la bola unidad cerrada de H^2, y que la sucesión (z^n) converge uniformemente a 0 en cada compacto de $\mathbb{D}$.
Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(z^n)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_E |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} m(E) > 0,\end{aligned}$$

donde $m(E)$ denota la medida de E. Así, la sucesión $(C_\varphi z^n)$ no converge a 0 en norma, lo que contradice el hecho de que C_φ es un operador compacto. $\square$

Con esta proposición vemos que la compacidad de C_φ está intimamente relacionada con los valores de φ en $\mathbb{T}$. Es más, observamos que es fundamental la disposición geométrica de $\varphi(\mathbb{T})$ en $\overline{\mathbb{D}}$: si $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T}$ tiene medida positiva, entonces C_φ no será compacto.
Estudiaremos estas características geométricas mediante el concepto de *medida imagen.*

2.5. Medidas Imagen

El objetivo en esta sección es traducir nuestro problema sobre operadores de composición al lenguaje de la teoría de la medida.
Para ello, comenzamos extendiendo el concepto de *función medible* a aplicaciones que toman valores en un espacio medible cualquiera:

Definición 2.5.1. Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{A})$ espacios medibles, y sea $T : X \to Y$. Diremos que T es medible si

$$T^{-1}(A) \in \mathcal{M}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Observemos que esta definición incluye la noción clásica de función medible en la que T toma valores en un espacio euclídeo: basta considerar el $\sigma-$álgebra de Borel en dicho espacio.

Definición 2.5.2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $(Y, \mathcal{A})$ un espacio medible y $T : X \to Y$ una función medible.
Se define la **medida imagen** μ_T como

$$\mu_T(A) = \mu(T^{-1}(A))$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Veamos que efectivamente μ_T define una medida sobre $(Y, \mathcal{A})$.
Tenemos

$$\mu_T(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Además, si tomamos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medbiles disjuntos en $\mathcal{A}$ se obtiene

$$\mu_T(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(T^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A_n)),$$

como queríamos probar.
Podemos dar una caracterización interesante de las integrales respecto a la medida imagen:

Proposición 2.5.3. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $(Y, \mathcal{A})$ un espacio medible, y $T : X \to Y$ y $g : Y \to \mathbb{C}$ funciones medibles.*
Entonces, g es integrable respecto μ_T si y solo si $g \circ T$ lo es respecto μ. Además,

$$\int_Y g \; d\mu_T = \int_X g \circ T d\mu$$

Demostración.
Claramente $g \circ T$ es medible por ser composición de medibles. Veamos la integrabilidad.
Supongamos primero $g = \chi_B$, con $B \subseteq Y$ medible. Así, tenemos que $g \circ T = \chi_{T^{-1}(B)}$ y por tanto

$$\int_Y g \; d\mu_T = \mu_T(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \int_X g \circ T d\mu,$$

y por tanto se tiene la igualdad para funciones características.
Por la linealidad de la integral se tiene también para funciones simples medibles positivas.
Así, se extiende la igualdad a funciones positivas gracias a la aproximación por funciones simples, y finalmente a funciones con valores complejos por la definición de integral. □

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, denotaremos por $L^2(\mu)$ al conjunto de funciones de cuadrado integrable respecto μ. Es decir:

$$L^2(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$$

Veamos ahora un resultado que será fundamental a la hora de relacionar las medidas imagen con los operadores de composición:

Proposición 2.5.4. *Sean $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, y supongamos que $|\varphi(e^{i\theta})| < 1$ en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Entonces*

$$(f \circ \varphi)^* = f \circ \varphi^*$$

para toda $f \in H^2$.

Demostración.
Por hipótesis, tenemos que $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ en casi todo $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Tomemos $E \subseteq \mathbb{T}$ de medida 1 tal que φ tiene límite radial en E y que $|\varphi^*| < 1$ en E. Entonces, como f es continua en $\mathbb{D}$, tenemos

$$(f \circ \varphi)^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(\varphi(re^{i\theta})) = f(\varphi^*(e^{i\theta}))$$

para cualquier $e^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Como $m(E) = m(\mathbb{T})$, se tiene la igualdad en casi todo. □

Observemos ahora que dada $\varphi \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y tal que $|\varphi| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, su límite radial asociada φ^* induce una medida imagen en $\mathbb{D}$, que denotamos por m_{φ^*}. Esta medida será una medida boreliana de probabilidad en $\mathbb{D}$. Nos interesará estudiar la inyección formal

$$j_{m_{\varphi^*}} : H^2 \hookrightarrow L^2(m_{\varphi^*}).$$

Proposición 2.5.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y supongamos que $|\varphi(e^{i\theta})| < 1$ en casi todo $e^{i\theta}$. Definamos*

$$T : C_\varphi(H^2) \to j_{m_{\varphi^*}}(H^2)$$

de forma que

$$T(f \circ \varphi) = f \in L^2(m_{\varphi^*}).$$

Entonces, T es un isomorfismo isométrico y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^2 \arrow[r, "C_\varphi"] \arrow[dr, "j_{m_{\varphi^*}}"'] & H^2 \arrow[d, "T"] \\ & L^2(m_{\varphi^*}) \end{tikzcd}$$

Demostración.
Primero observemos que T está bien definida y es lineal. Para probar que es isometría, se tiene para cualquier $f \in H^2$

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2 = \|(f \circ \varphi)^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} |(f \circ \varphi)^*|^2 dm = \int_{\mathbb{T}} |f \circ \varphi^*|^2 dm \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f|^2 dm_{\varphi^*}. \end{aligned}$$

Ahora, para ver que T es isomorfismo, basta probar que es sobreyectiva, lo cual es trivial, pues dada $f \in j_{m_{\varphi^*}}(H^2)$ basta tomar $f \circ \varphi \in C_\varphi(H^2)$.

Finalmente, la conmutatividad del diagrama se sigue fácilmente de la definición de T. $\square$

Gracias al diagrama anterior podemos enunciar entonces el siguiente resultado:

Corolario 2.5.6. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores sobre espacios de Hilbert, y sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $|\varphi| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Entonces, $C_\varphi \in \mathcal{A}(H^2)$ si y solo si $j_{m_{\varphi^*}} \in \mathcal{A}(H^2, L^2(m_{\varphi^*}))$.*

Demostración.
Supongamos primero que $C_\varphi \in \mathcal{A}(H^2)$. Por el diagrama conmutativo de 2.5.5, tenemos que $j_{m_\varphi^*} = T \circ C_\varphi$. Por tanto, gracias a la propiedades de los ideales de operadores, $j_{m_\varphi^*} \in \mathcal{A}(H^2, L^2(m_{\varphi^*}))$.
Ahora, si $j_{m_\varphi^*} \in \mathcal{A}(H^2, L^2(m_{\varphi^*}))$ basta observar que $C_\varphi = T^{-1} \circ j_{m_{\varphi^*}}$. Aplicando de nuevo las propiedades de ideales, obtenemos el resultado. $\square$

Gracias a este corolario, hemos conseguido trasladar nuestro problema de estudiar la compacidad y la pertenencia a las clases de Schatten de cualquier operador de composición a estudiar estas propiedades para las inyecciones

$$j_{m_{\varphi^*}} : H^2 \hookrightarrow L^2(m_{\varphi^*}),$$

ya que, como vimos, si $C_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$ entonces $|\varphi| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, por lo que podemos restringir nuestro estudio a estos símbolos.
En el siguiente capítulo generalizaremos nuestro problema. No nos contentaremos con estudiar las inyecciones que provengan de la medida imagen de un símbolo, si no que estudiaremos las propiedades de las inyecciones

$$j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu),$$

con μ medida boreliana finita y positiva en $\mathbb{D}$.

Capítulo 3

Inyecciones de Carleson

Como ya expusimos en el capítulo anterior, nuestro objetivo es caracterizar las propiedades de compacidad y pertenencia a las clases de Schatten de las inyecciones

$$j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu),$$

pues así obtendremos en particular caracterizaciones de estas propiedades para los operadores de composición.
A lo largo del capítulo usaremos la notación $A \approx B$ para denotar que existen constantes $c, C > 0$ tales que

$$cA \leq B \leq CA.$$

Cuando solo se de unas de las desigualdades denotaremos por $A \lesssim B$ ó $A \gtrsim B$, respectivamente. Además, a lo largo de todo el capítulo denotaremos por μ a cualquier medida boreliana finita en $\mathbb{D}$.
Caracterizaremos la continuidad y la compacidad de la inyección en la siguiente sección.

3.1. Medidas de Carleson

Comencemos introduciendo el concepto de *medida de Carleson*, que jugará un papel central en el trabajo a desarrollar.

Definición 3.1.1. Diremos una medida boreliana finita μ en $\mathbb{D}$ es una **medida de Carleson** si existe $K > 0$ tal que

$$\mu(S(b,h)) \leq Kh \tag{3.1}$$

para todo $b \in \mathbb{T}$, $0 < h \leq 1$, donde

$$S(b,h) := \{z \in \mathbb{D} : |z - b| \leq h\}.$$

Nota 3.1.2. Puesto que

$$\mathbb{D} \subseteq \bigcup_{k=0}^{3} S(e^{\pi ik/2}, 1)$$

si μ es una medida de Carleson tendremos que

$$\mu(\mathbb{D}) \leq \sum_{k=0}^{3} \mu(S(e^{\pi ik/2}, 1)) \leq \sum_{k=0}^{3} K = 4K,$$

es decir, $\mu(\mathbb{D}) \leq 4K$.

A veces puede resultar conveniente reemplazar los conjuntos $S(b,h)$ por otros conjuntos equivalentes más sencillos de manejar. Nosotros usaremos principalmente las **ventanas de Carleson**, definidas para $b \in \mathbb{T}$ y $0 < h \leq 1$ como

$$W(b,h) := \{z \in \mathbb{D} : 1 - h < |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in S(b,h)\}.$$

Está claro que existe $c > 1$ tal que para h suficientemente pequeño

$$W(b, h/c) \subseteq S(b,h) \subseteq W(b, ch),$$

por tanto, la condición (3.1) se tendrá para los conjuntos $S(b,h)$ si y solo si se tiene para las ventanas, aunque la constante K puede cambiar.

Podemos entonces enunciar el teorema principal de esta sección:

Teorema 3.1.3 (Teorema de Carleson)**.** *Dada μ medida boreliana finita en $\mathbb{D}$, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) μ es medida de Carleson.

(b) j_μ es continua. Es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu \leq C \|f\|^2$$

para todo $f \in H^2$.

(c) j_μ es continua para los núcleos reproductores. Es decir, existe $C' > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |k_p|^2 d\mu \leq C' \|k_p\|^2$$

para todo $p \in \mathbb{D}$.

Llamaremos **inyección de Carleson** a cualquier inyección que cumpla las condiciones del teorema.
Está claro entonces que

Corolario 3.1.4. *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *tal que* $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ *y* $|\varphi^*| < 1$ *en casi todo* $\mathbb{T}$. *Entonces* $j_{m_{\varphi^*}}$ *es inyección de Carleson.*

Demostración. Se tiene gracias al teorema de Littlewood que

$$\|f\|^2_{L^2(m_{\varphi^*})} = \|f \circ \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|C_\varphi f\|^2_{H^2} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \|f\|^2_{H^2},$$

así que se cumple la propiedad b) del teorema de Carleson y por tanto m_{φ^*} es medida de Carleson. □

Para poder presentar la prueba del teorema de Carleson debemos introducir primero las nociones básicas de las *funciones de distribución:*

Definición 3.1.5. Sea ν una medida σ-finita sobre un espacio medible $(X, \mathcal{A})$, y sea $f : X \to [0, +\infty)$ medible. Llamamos **función de distribución** de f a la aplicación que a cada $\lambda > 0$ le asigna

$$\nu(\{f > \lambda\}) = \nu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}.$$

Está claro que es una función monótona no-creciente en λ, y por tanto es boreliana.

Estas funciones son útiles para reemplazar integrales sobre un espacio de medida cualquiera por integrales reales en $[0, +\infty)$. Aunque podríamos enunciar un resultado más general, nos contentaremos con mostrar el caso particular que nosostros utilizaremos:

Proposición 3.1.6. *Sea* ν *una medida* σ*-finita sobre un espacio medible* $(X, \mathcal{A})$, *y sea* $f \in L^2(\nu)$. *Entonces*

$$\int_X |f|^2 d\nu = \int_0^\infty 2\lambda\nu(\{|f| > \lambda\})d\lambda$$

Demostración.
Tomemos

$$E := \{(x,t) \in X \times [0, +\infty) : |f(x)| > t\}$$

Si f es una función simple, entonces E es la unión finita de rectángulos medibles, y por tanto es medible. Si f es una función medible, la medibilidad de E se sigue por la aproximación por funciones simples.
Ahora, definimos

$$E^t := \{x \in X : (x,t) \in E\} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Así, la función de distribución de $|f|$ es

$$\nu(E^t) = \int_X \chi_E(x,t) d\nu(x).$$

Ahora, aplicando el teorema de Fubini obtenemos que

$$\int_0^\infty 2\lambda\nu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda = \int_0^\infty 2\lambda\nu(E^t) d\lambda$$
$$= \int_X d\nu(x) \int_0^\infty \chi_E(x,t) dt.$$

Ahora, si $|f(x)| > t$, entonces $\chi_E(x,t) = 1$ y 0 en otro caso. Por tanto, la segunda integral del último miembro de la igualdad anterior queda

$$\int_0^{|f(x)|} 2\lambda d\lambda = |f(x)|^2,$$

y obtenemos el resultado. $\square$

Además, necesitaremos desarrollar algunas nociones sobre funciones maximales para la prueba.
Comencemos recordando la definición de la **función maximal de Hardy-Littlewood:**

Definición 3.1.7. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos su función maximal como

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(t)| dt,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x.

Nota 3.1.8. En general, nosotros manejaremos funciones $f \in H^2$, de las cuales ya sabemos que existe el límite radial f^* en $L^2(\mathbb{T})$. Aunque estemos cometiendo un abuso de notación, utilizaremos la expresión $Mf(e^{i\theta})$ para referirnos a la función maximal de la función radial. Es decir,

$$Mf(e^{i\theta}) = \sup_{e^{i\theta} \in I} \frac{1}{m(I)} \int_I |f^*(e^{it})| dt,$$

donde el supremo está tomado sobre todos los intervalos del toro que contienen a $e^{i\theta}$.

Se tienen las siguientes propiedades:

Teorema 3.1.9. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces:*

(a) Mf es medible.

(b) Mf es finita en casi todo.

(c) Mf verifica la desigualdad:

$$m(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \textit{para todo} \quad \lambda > 0, \tag{3.2}$$

*donde m denota la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Por la desigualdad 3.2 se dice que M es de tipo **1-débil**.*

Será determinante la siguiente desigualdad:

Teorema 3.1.10. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\|Mf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Demostración.
Dado $\lambda > 0$, consideramos la función $b(x) = f(x)$ si $|f(x)| > \lambda/2$ y 0 en otro caso.
Es fácil comprobar que

$$Mf \leq Mb + M(f-b) \leq Mb + \frac{\lambda}{2},$$

lo que implica que $\{Mf > \lambda\} \subset \{Mb \geq \lambda/2\}$. Si aplicamos la desigualdad de 3.2 para b, obtenemos

$$m(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{6}{\lambda} \int_{|f|>\lambda/2} |f| dx.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Mf|^2 dx &= \int_0^{\infty} 2\lambda m(\{Mf > \lambda\}) d\lambda \leq \int_0^{\infty} 12 \int_{|f|>\lambda/2} |f(x)| dx d\lambda \\ &= 12 \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2|f(x)|} d\lambda |f(x)| dx = 12 \int_{\mathbb{R}} 2|f(x)| \cdot |f(x)| dx \\ &= 24 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = C^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

tal y como queríamos probar. □

Será indispensable para la prueba la siguiente función maximal:

Definición 3.1.11. Consideremos el conjunto

$$G_\theta := \{z \in \mathbb{D} : |z - e^{i\theta}| < 3(1 - |z|)\}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi),$$

que llamaremos **región de aproximación no tangencial.** Dada f continua en $\mathbb{D}$ tomaremos $M_f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por

$$M_f(e^{i\theta}) = \sup\{|f(z)| : z \in G_\theta\},$$

que denominaremos **función maximal no tangencial**.

El papel clave que jugará esta función viene determinado por la siguiente desigualdad, que como veremos es el paso fundamental para probar nuestro teorema.

Teorema 3.1.12. *Existe $C > 0$ tal que para toda $f \in H^2$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |M_f(e^{i\theta})|^2 \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Necesitaremos el siguiente lema para poder presentar la prueba:

Lema 3.1.13. *Dada $g \in L^1([-\pi, \pi])$ tal que $g \geq 0$ existe $C > 0$ tal que*

$$M_{P[g]}(e^{i\theta}) \leq C \sup\{P[g](re^{i\theta}) : 0 \leq r < 1\} \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Demostración.
Primero observemos que podemos reducirnos al caso particular $\theta = 0$ y aplicar una rotación para obtener el resultado general.
Recordemos que la integral de Poisson se define como

$$P[g](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt.$$

Ahora, observemos que si consideramos el núcleo de Poisson como una función de $z = re^{i\theta}$ y de e^{it}, podemos escribirlo como

$$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

Entonces bastará probar que existe $C > 0$ de forma que

$$P(z, e^{it}) \leq CP(|z|, e^{it})$$

para todo $z \in G_0$ y $e^{it} \in \mathbb{T}$. Ahora, tomando $r = |z|$ nuestra desigualdad es equivalente a probar que

$$|e^{it} - r|^2 \leq C|e^{it} - z|^2.$$

Recordemos que $G_0 = \{z \in \mathbb{D} : |z - 1| \leq 3(1 - |z|)\}$. Por tanto, si $z \in G_0$ se tiene que

$$|z - r| \leq |z - 1| + |1 - r| \leq 4|1 - r|.$$

Además, $1 - r = |e^{it}| - |re^{i\theta}| \leq |e^{it} - z|$. Por tanto, gracias a estas dos desigualdades tenemos

$$\begin{aligned} |e^{it} - r| &\leq |e^{it} - z| + |z - r| \leq |e^{it} - z| + 4|1 - r| \\ &\leq 5|e^{it} - z|. \end{aligned}$$

Así, tomando $C = 25$ se tiene el resultado. $\square$

Demostración del teorema 3.1.12.
Comencemos destacando que será suficiente probar que existe $C > 0$ tal que

$$M_f(e^{i\theta}) \leq CMf(e^{i\theta}) \quad \text{para todo } \theta \in [-\pi, \pi],$$

ya que bastará entonces con extender nuestras funciones a toda la recta real por 0 y remitirnos al teorema 3.1.10.
Recordemos que podemos recuperar cualquier función $f \in H^2$ a través de la integral de Poisson de su función radial: $f(re^{i\theta}) = P[f^*](re^{i\theta}) \quad \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Además, como el núcleo de Poisson es positivo, tenemos la siguiente desigualdad:

$$|P[f^*](re^{i\theta})| \leq |P[|f^*|](re^{i\theta}) \quad \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

Gracias al lema anterior aplicado a $g = |f^*|$, será entonces suficiente probar que

$$\sup\{|P[|f^*|](re^{i\theta})| : 0 \leq r < 1\} \leq Mf(e^{i\theta}) \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}$$

Ahora, al igual que en el caso anterior, bastará remitirnos al caso $\theta = 0$ y luego aplicar un giro para obtener el caso general. por lo que podemos reducirnos a probar

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)|f^*(e^{it})|dt \leq (Mf)(1) \quad (0 \leq r < 1)$$

Para ello, fijemos $r \in [0, 1)$. Tomamos arcos abiertos $I_j \subset \mathbb{T}$ centrados en 1, de tal forma que $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_{n-1}$, y pongamos $I_n = \mathbb{T}$.
Ahora, para cada $1 \leq j \leq n$, denotemos por h_j el mayor número positivo tal que $h_j\chi_{I_j} \leq P_r$ en T. Definimos

$$K = \sum_{j=1}^{n}(h_j - h_{j+1})\chi_{I_j},$$

donde tomamos $h_{n+1} = 0$. Como $P_r(t)$ es una función par en t que decrece cuanto $t \nearrow \pi$, está claro que $h_j - h_{j+1} \geq 0$, $K = h_j$ en $I_j \setminus I_{j-1}$ (con $(I_0 = \emptyset)$ y $K \leq P_r$.
Por la definición de Mf tenemos claramente que

$$\int_{I_j} |f^*|dm \leq (Mf)(1)m(I_j).$$

Por tanto, si tomamos $M = (Mf)(1)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} K|f^*|dm = \sum_{j=1}^{n}(h_j - h_{j+1})\int_{I_j}|f^*|dm \leq M\sum_{j=1}^{n}(h_j - h_{j+1})m(I_j) \\ = M\int_{\mathbb{T}} Kdm \leq M\int_{\mathbb{T}} P_r dm = M.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Finalmente, puesto que P_r es uniformemente continua, dado $n \in \mathbb{N}$, si elegimos los arcos I_j de forma que sus puntos extremos formen una partición suficientemente fina de $\mathbb{T}$ obtenemos una función simple K_n tal que

$$K_n \leq P_r \leq K_n + 1/n.$$

Así, obtenemos una sucesión de funciones simples medibles K_n que converge uniformemente a P_r, por tanto gracias a (3.3) se sigue que

$$\int_{\mathbb{T}} P_r |f^*| dm \leq (Mf)(1),$$

como queríamos probar. □

Ya podemos dar la prueba del teorema de Carleson:

Demostración del teorema 3.1.3
Primero, observemos que (b) ⇒ (c), ya que todo núcleo reproductor está en H^2.
Veamos que (c) ⇒ (a).
Fijemos $b \in \mathbb{T}$, $0 < h < 1$ y tomemos $p = (1-h)b$, $z \in S(b,h)$. Se tiene

$$\begin{aligned}|1 - \overline{p}z| &= |1 - (1-h)\overline{b}z||b| = |b - (1-h)z| \\ &\leq |z - b| + h|z| \leq 2h.\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\left| \frac{1}{1 - \overline{p}z} \right|^2 \geq \frac{1}{4h^2}.$$

Usando esta desigualdad deducimos que

$$\int_{\mathbb{D}} |k_p|^2 d\mu \geq \int_{S(b,h)} |k_p|^2 d\mu \geq \frac{\mu(S(b,h))}{4h^2}.$$

Finalmente, usando (c), tenemos

$$\mu(S(b,h)) \leq 4h^2 \int_{\mathbb{D}} |k_p|^2 d\mu \leq C' \frac{4h^2}{1 - |p|^2} = C' \frac{4h^2}{2h - h^2} \leq 4C'h,$$

y obtenemos que μ es medida de Carleson, como queríamos.
Veamos finalmente que $(a) \Rightarrow (b)$.
Tomemos $f \in H^2$, y sea $\lambda > 0$. Como la función maximal no tangencial M_f es semicontinua inferiormente, se tiene que el conjunto

$$\{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}$$

es abierto, por tanto es la unión finita o numerable de sus componentes conexas, que son ciertos arcos abiertos I_j, $j \in J$ contenidos en $\mathbb{T}$.
Ahora, tomemos λ suficientemente grande tal que $m(\{e^{i\theta} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}) < \frac{1}{\pi}$ y sea $S_j := S(b, h)$, donde b es el punto medio del arco I_j y y h es tal que la circunferencia

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - b| = h\}$$

corta a I_j en sus extremos.
Pongamos $z = re^{i\theta_0}$ y $|f(z)| > \lambda$, y sea J_z el arco $\{e^{i\theta} : z \in G_\theta\}$. Está claro que $e^{i\theta_0}$ es el punto medio de J_z, y si ζ es un extremo del arco J_z, tenemos por definición de G_θ que

$$|z - \zeta| = 3(1 - |z|) = 3|e^{i\theta_0} - z|.$$

Por tanto,

$$|e^{i\theta_0} - \zeta| \geq |z - \zeta| - |e^{i\theta_0} - z| = 2|e^{i\theta_0} - z|,$$

de donde deducimos que $z \in S(e^{i\theta_0}, |e^{i\theta_0 - \zeta}|)$.
Ahora, si $z \in G_\theta$ entonces $M_f(e^{i\theta}) > \lambda$ para $e^{i\theta} \in J_z$. Así, J_z está contenido en I_j para algún j, y por tanto $S(e^{i\theta_0}, |e^{i\theta_0 - \zeta}|) \subseteq S_j$, lo que lleva a que $z \in S_j$.
Si aplicamos ahora la hipótesis (a) obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > \lambda\}) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) \\ &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = Km(\{e^{i\theta} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}). \end{aligned}$$

Además, en el caso en el que $m(\{e^{i\theta} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}) \geq 1/\pi$ tenemos gracias a la nota 3.1.2 que

$$\mu(\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > \lambda\}) \leq \mu(\mathbb{D}) \leq 4K \leq 4\pi Km(\{e^{i\theta} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}).$$

Así, uniendo ambos casos tenemos que

$$\mu(\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > \lambda\}) \leq 4\pi Km(\{e^{i\theta} : M_f(e^{i\theta}) > \lambda\}).$$

Ahora, tenemos con el teorema 3.1.6 que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu &= \int_0^{\infty} 2\lambda\mu(\{z \in \mathbb{D} : |f(z)| > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq 4\pi K \int_0^{\infty} 2\lambda m(\{e^{i\theta} : |M_f(e^{i\theta})| > \lambda\}) d\lambda \\ &= 4\pi K \int_{-\pi}^{\pi} |M_f(e^{i\theta})|^2 d\theta. \end{aligned}$$

y finalmente gracias al teorema 3.1.12 obtenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu \leq 4\pi K \int_{-\pi}^{\pi} |M_f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq c4\pi K \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta, \tag{3.4}$$

como queríamos probar. □

Nota 3.1.14. Denotemos por $\|\mu\|$ al ínfimo de las constantes K que cumplen la desigualdad de la definición de medida de Carleson. Observemos que hemos probado en(3.4) que $\|j_\mu\|$ es menor o igual que una constante multiplicativa de $\|\mu\|^{1/2}$. Así, cuanto más pequeña sea la constante que podamos escoger en (3.1), más pequeña será la norma de nuestra inyección.

Ya podemos entonces caracterizar la compacidad. Necesitamos introducir un concepto sobre medidas que tratará de formalizar la idea de que un operador compacto 'se acerca poco' al borde del disco unidad.

Definición 3.1.15. Diremos que una medida boreliana finita en $\mathbb{D}$ μ es una **medida de Carleson evanescente** o una medida de Carleson **vanishing** si para todo $b \in \mathbb{T}$ se tiene que $\mu(S(b,h)) = o(h)$. Es decir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(S(b,h))}{h} = 0$$

uniformemente en b.

Claramente cualquier medida de Carleson vanishing es una medida de Carleson. Insistimos en que en esta definición también podemos intercambiar los conjuntos $S(b,h)$ por las ventanas de Carleson definidas anteriormente.

Gracias a este concepto podemos caracterizar la compacidad de las inyecciones de Carleson:

Teorema 3.1.16. *Dada μ una medida de Borel finita en $\mathbb{D}$, la inyección $j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu)$ es compacta si y solo si μ es una medida de Carleson vanishing.*

Demostración.
Supongamos primero que μ es una medida de Carleson vanishing.
Para ver que la inyección es compacta, la aproximaremos por operadores compactos.
Tomemos $0 < r < 1$ y definamos

$$\begin{aligned} \mu_r : \mathcal{B}(\mathbb{D}) &\to [0,\infty) & \nu_r : \mathcal{B}(\mathbb{D}) &\to [0,\infty) \\ B &\mapsto \mu(B \cap r\mathbb{D}) & B &\mapsto \mu(B \cap (\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D})). \end{aligned}$$

Claramente μ_r y ν_r son medidas sobre los borelianos de $\mathbb{D}$. Es más, μ_r está soportada por el disco $r\mathbb{D}$ y ν_r por la corona $\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$.
Está claro que podemos escribir nuestra inyección como

$$j_\mu = j_{\mu_r} + j_{\nu_r}.$$

Veamos que la inyección $j_{\mu_r} : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu_r)$ es compacta. De hecho, probaremos que es un operador nuclear.
Sea $f \in H^2$, con desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$. Está claro que

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| r^n < \infty \quad \forall\, z \in r\mathbb{D}.$$

Así, si definimos los operadores

$$\begin{aligned} T_n : H^2 &\to L^2(\mu_r) \\ f &\mapsto \hat{f}(n) z^n \end{aligned}$$

obtenemos una sucesión de operadores lineales y continuos de rango uno tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\| < \infty$ que cumple

$$j_{\mu_r} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n,$$

lo que prueba que j_{μ_r} es nuclear y por tanto compacto.
Finalmente, basta ver que $\|j_{\nu_r}\| \to 0$ cuando $r \to 1$ y tendremos la compacidad de j_μ.
Recordemos que existe $C > 0$ tal que $\|j_{\nu_r}\| \leq C \|\nu_r\|$, donde

$$\|\nu_r\| = \sup\{K > 0 : \frac{\nu_r(W(b,h))}{h} \leq K, 0 \leq h < 1, b \in \mathbb{T}\},$$

así que bastará ver que $\|\nu_r\| \to 0$.
Para ello, tomemos $\varepsilon > 0$. Como μ es vanishing, existe $h_0 \in [0,1)$ tal que si $h \leq h_0$ se tiene que $\mu(W(b,h)) \leq h\varepsilon$ para todo $b \in \mathbb{T}$.
Ahora, tomemos $r = 1 - h_0$ y veamos que $\nu_r(W(b,h)) \leq 2\varepsilon h$, para todo $0 \leq h < 1$, $b \in \mathbb{T}$, lo que terminará la demostración.
Notemos que si $h \leq h_0$ la desigualdad es trivial.
Supongamos $h > h_0$. Si elegimos correctamente los puntos $\eta_j \in \mathbb{T}$, podemos cubrir el conjunto

$$W(b,h) \cap (\mathbb{D} \setminus (1-h_0)\mathbb{D})$$

con a lo sumo $[h/h_0]+1 \leq 2h/h_0$ ventanas de Carleson de la forma $W(\eta_j, h_0)$. Así se tiene

$$\begin{aligned}\nu_r(W(b,h)) &\leq \nu_r(\cup_j W(\eta_j, h_0)) \leq \sum_j \mu(W(\eta_j, h_0)) \\ &\leq \varepsilon h_0(2h/h_0) = 2\varepsilon h,\end{aligned}$$

como queríamos probar.
Supongamos ahora que j_μ es compacta.
Razonamos por reducción al absurdo. Asumimos

$$\frac{\mu(S(b,h))}{h} \neq o(h),$$

así que existe una sucesión (b_n) en $\mathbb{T}$, h_n números reales positivos tendiendo a cero y $\beta > 0$ tal que $\mu(S(b_n, h_n)) \geq \beta h_n$. Pongamos $a_n = (1-h_n)b_n$ y consideremos las funciones

$$f_n(z) = \frac{1}{(1-\overline{a_n}z)^2} = k_{a_n}(z)^2.$$

Como

$$\frac{1}{(1-\overline{a_n}z)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m(\overline{a_n}z)^{m-1},$$

Es sencillo ver que

$$\|f_n\|_2^2 \approx \frac{1}{(1-|a_n|^2)^3} \approx \frac{1}{h_n^3}$$

Por tanto, si tomamos $g_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|_2}$ tenemos que $g_n \to 0$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.
Además,

$$\|j_\mu(g_n)\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{\mathbb{D}} |g_n|^2 d\mu \geq \frac{1}{\|f_n\|_2^2} \int_{S(b_n,h_n)} |f_n|^2 d\mu.$$

Ahora, si $z \in S(b_n, h_n)$,

$$|1-\overline{a_n}z| = |1-(1-h_n)\overline{b_n}z| \leq |\overline{b_n}(b_n - z)| + |h_n\overline{b_n}z| \leq 2h_n,$$

por lo que tenemos que $|f_n|^2 \geq \frac{1}{(2h_n)^4}$ en $S(b_n, h_n)$, así que deducimos que existe una constante $C > 0$ tal que $\|j_\mu(g_n)\|_2^2 > C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que va en contra de la compacidad de j_μ, ya que al converger g_n uniformemente a 0, tenemos que $j_\mu(g_n)$ converge en casi todo a 0, y por tanto cada subsucesión convergente de $j_\mu(g_n)$ deberá converger a 0 en $L^2(\mu)$, lo que nos lleva a contradicción. $\square$

Gracias a la propiedad de ideal de operadores de los operadores compactos y del diagrama conmutativo que vimos en el corolario 2.5.5, deducimos la caracterización de compacidad de los operadores compactos:

Corolario 3.1.17. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $|\varphi^*| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Entonces $C_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$ si y solo si m_{φ^*} es medida de Carleson vanishing.*

3.2. Suma directa de Espacios de Hilbert

En esta sección vamos a introducir una herramienta muy útil que nos servirá para 'pegar' espacios de Hilbert y conservar su estructura, lo cual será indispensable para presentar y demostrar la caracterización buscada.

Definición 3.2.1. Dada $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Hilbert, definimos su **suma directa** $\bigoplus\limits_{\ell_2} H_n$ como

$$\bigoplus_{\ell_2} H_n := \{(x_1, x_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty} H_n : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\}$$

La clave de este concpeto es que nuestra suma directa es, a su vez, un espacio de Hilbert separable, como veremos en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2. *Sea (H_n) una sucesión de espacios de Hilbert separables. Entonces, $\bigoplus\limits_{\ell_2} H_n$ es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar*

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n),$$

donde $x = (x_n), y = (y_n) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$.

Demostración.
Comencemos observando que $\bigoplus_{\ell_2} H_n$ es claramente un espacio vectorial. Además, el producto está bien definido, ya que

$$|(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, y_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Es obvio también que nuestro producto escalar satisface las propiedades exigidas en la definición habitual, por lo que $\bigoplus_{\ell_2} H_n$ es prehilbertiano.
Veamos ahora que es completo.
Para ello, sea $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)$ una sucesión de Cauchy en $\bigoplus_{\ell_2} H_n$. Es fácil ver que para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H_k, y por lo tanto converge a un cierto $x_k \in H_k$. Tomemos $x = (x_1, x_2, \cdots)$ y veamos que $x^{(n)} \to x$ en $\bigoplus_{\ell_2} H_n$.
Primero veamos que $x \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| \leq \varepsilon$. Así, para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{N} \left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Si tomamos $n \to \infty$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| x_i - x_i^{(m)} \right\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

luego $x - x^{(m)} \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$ para todo $m \geq n_0$. Por tanto, si tomamos cualquier $m \geq n_0$, $x = (x - x^{(m)}) + x^{(m)} \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$.
Finalmente, tomando $N \to \infty$ obtenemos

$$\left\| x - x^{(m)} \right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| x_n - x_n^{(m)} \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon,$$

lo que prueba que $x^{(n)} \to x$, como queríamos demostrar.
Para ver la separabilidad, basta tomar sucesiones densas $(x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ en cada H_n y consideramos el conjunto formado por las $n-$uplas finitas de elementos de los $(x_k^{(n)})$ seguidas de ceros, que claramente podemos identificar con elementos de $\bigoplus_{\ell_2} H_n$. Además, es un conjunto numerable. Ahora, dado $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|x_n\|^2 < \varepsilon^2 / 2N.$$

Ahora, basta tomar $x_j^{(n)}$ de forma que $\left\| x_n - x_j^{(n)} \right\|^2 < \varepsilon^2/2N$ para $n \leq N$. Así, tomando $y = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \cdots, x_j^{(N)}, 0, \cdots) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$ tenemos que

$$\|x - y\| < \varepsilon,$$

por lo tanto nuestro conjunto es denso y $\bigoplus_{\ell_2} H_n$ es separable. □

Gracias a este teorema, podremos discutir sobre la pertenencia a las clases de Schatten de operadores donde una suma directa de espacios de Hilbert constituye su dominio o codominio.
Veamos ahora algunos resultados de carácter técnico que necesitaremos más adelante:

Proposición 3.2.3. *Sean $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de espacios de Hilbert y sean $T_n \in \mathcal{L}(H_n, K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de forma que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Entonces, el operador

$$T : \bigoplus_{\ell_2} H_n \to \bigoplus_{\ell_2} K_n$$
$$(x_n) \mapsto (T_n x_n)$$

es lineal y continuo y se tiene que

$$\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n)^p \right)^{1/p}$$

para todo $0 < p < \infty$*.*

Demostración.
La linealidad es trivial.
Para la continuidad, tomemos $x = (x_n) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$ de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = 1$. Tenemos

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x_n\|^2 \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \right)^2,$$

lo que prueba que T es acotado.
Ahora, para cada T_n tomemos su representación ortonormal

$$T_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T_n) e_m^{(n)} \otimes f_m^{(n)}.$$

Ahora, basta considerar

$$e_{n,m} = (0, ..., 0, e_m^{(n)}, 0, ...) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n,$$

donde $e_m^{(n)}$ ocupa la n-ésima posición. De forma análoga, definimos $(f_{n,m}) \in \bigoplus_{\ell_2} K_n$.
Está claro que $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ y $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ definen sistemas ortonormales en $\bigoplus_{\ell_2} H_n$ y $\bigoplus_{\ell_2} K_n$ respectivamente.
Por último, dado $x = (x_n) \in \bigoplus_{\ell_2} H_n$ tenemos

$$Tx = (T_n x_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(T_n)(x_n, e_m^{(n)}) f_m^{(n)} \right)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_m(T_n)(x, e_{n,m}) f_{n,m},$$

de forma que obtenemos una representación ortonormal para T.
Por tanto,

$$\sigma_p(T)^p = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_m(T_n)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(T_n)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n)^p,$$

como queríamos probar. □

Proposición 3.2.4. *Sea* $T \in \mathcal{L}\left(H, \bigoplus_{\ell_2} K_n\right)$ *donde* H *y* K_n *son espacios de Hilbert. Tomemos* $T_n = \pi_n \circ T$*, donde* $\pi_m : \bigoplus_{\ell_2} K_n \to K_m$ *las proyecciones canónicas. Se tiene* *(a) Si $0 < p \leq 2$, entonces*

$$\sigma_p(T) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n)^p \right)^{1/p}.$$

(b) Si $p \geq 2$, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_n)^p \right)^{1/p} \leq \sigma_p(T).$$

Demostración.
Recordemos que para cualquier operador S entre espacios de Hilbert se tiene que $\sigma_p(S^*) = \sigma_p(S)$ para todo $0 < p < \infty$, así que por conveniencia trabajaremos con los adjuntos. Primero, observemos que dado $y = (y_n) \in \bigoplus_{\ell_2} K_n$, tenemos la siguiente igualdad:

$$T^* y = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* y_n.$$

Veamos por qué. Sea $x \in H$:

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n x, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, T_n^* y_n) = (x, \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* y_n)$$

Entonces $(x, T^* y - \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* y_n) = 0$ para todo $x \in H$ y obtenemos la igualdad buscada.
Ahora, como vimos en el teorema (1.3.11) podemos tomar bases ortonormales $(e_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ en K_n de forma que

$$\sigma_p(T_n^*)^p = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| T_n^* e_m^{(n)} \right\|^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, partiendo de estas bases $(e_m^{(n)})$ de K_n podemos formar una base ortonormal en $\bigoplus_{\ell_2} K_n$ tomando los elementos de la forma $e_{n,m} = (0, \cdots, 0, e_m^{(n)}, 0, \cdots)$, donde $e_m^{(n)}$ ocupa la enésima posición.
Finalmente, si usamos el teorema (1.3.11) tenemos para cada caso:

(a)
$$\sigma_p(T^*)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* e_{n,m}\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| T_n^* e_m^{(n)} \right\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T^*)^p.$$

(b)
$$\sigma_p(T^*)^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* e_{n,m}\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| T_n^* e_m^{(n)} \right\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T^*)^p,$$

lo que termina la prueba. □

Proposición 3.2.5. *Sean* (H_n) *y* (K_n) *sucesiones de espacios de Hilbert, y tomemos* $H = \bigoplus_{\ell_2} H_n$ *y* $K = \bigoplus_{\ell_2} K_n$*. Sea* $T \in \mathcal{L}(H, K)$*. Definimos*

$$T_{n,j} : H_n \to K_j$$

como $T_{n,j} = \pi_j \circ T \circ i_n$*, donde* i_n *denota la inclusión canónica. Supongamos que dado* $0 < p < \infty$ *existen* $a \in (0,1)$*,* $C > 0$ *tales que*

$$\sigma_p(T_{n,j}) \leq C a^{|n-j|} \sigma_p(T_{j,j}) \tag{3.5}$$

para todos $n, j \in \mathbb{N}$*. Entonces*

$$\sigma_p(T) \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p},$$

donde las constantes solo dependen de C, a *y* p*.*

Demostración.
Comencemos viendo que

$$\sigma_p(T) \lesssim \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n}) \right)^{1/p}.$$

Para ello, definimos

$$T_j : H \to K$$

como

$$T_j(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (T_{(n+j),n} x_{n+j})_{n\in\mathbb{N}}$$

si $j \geq 0$ y

$$T_j(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} (i_{n-j} \circ T_{n,(n-j)}) x_n$$

si $j < 0$.
Observemos que T_0 es la diagonal de la matriz $(T_{n,j})$ mientras que T_j representa las súper-diagonales para $j > 0$ y las subdiagonales para $j < 0$. Entonces, aplicando la proposición 3.2.3 y la hipótesis (3.5) obtenemos, si $j \geq 0$, que

$$\sigma_p(T_j) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{(n+j),n})^p \right)^{1/p} \leq C a^{|j|} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p}.$$

De forma equivalente obtenemos la misma desigualdad para $j < 0$.
Ahora, observemos que

$$T = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j.$$

Si $p \geq 1$, obtenemos usando la suma de la serie geométrica y la desigualdad triangular

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_p(T_j) \leq \frac{2C}{1-a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p\right)^{1/p}.$$

Tomemos ahora $0 < p < 1$. Debemos trabajar algo más para obtener la desigualdad, ya que σ_p es una cuasinorma y no disponemos de la desigualdad triangular.
Primero, notemos que existe un j_0 de forma que $4^{1/p}a^{j_0} \leq 1/2$. Definimos entonces los operadores

$$U_k = \sum_{|j|=j_0 k}^{j_0(k+1)-1} T_j$$

para $k \geq 0$. Observemos que cada U_k representa dos bloques de la matriz: uno de súper-diagonales y otro de subdiagonales, de forma que cada bloque está constituido por j_0 elementos. Así, $T = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$. Vamos a estimar $\sigma_p(T)$ calculando primero $\sigma_p(U_k)$.Si aplicamos la proposición 1.4.11 obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_p(U_k) &\leq 4^{1/p} \sum_{|j|=j_0 k}^{j_0(k+1)-1} (4^{1/p})^{|j|-j_0 k+1} \sigma_p(T_j) \\
&\leq 4^{1/p} \sum_{|j|=j_0 k}^{j_0(k+1)-1} (4^{1/p})^{|j|-j_0 k+1} C a^{|j|} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p\right)^{1/p} \\
&= 4^{1/p} C \sum_{|j|=1}^{j_0} (4^{1/p})^{|j|} a^{|j|+j_0 k-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $(4^{1/p}) \geq 1$ y $a \in (0,1)$, tenemos que $(4^{1/p})^{|j|} \leq (4^{1/p})^{j_0}$ y $a^{|j|+j_0 k-1} \leq a^{j_0 k}$ para todo $|j|$. Por tanto,

$$\sigma_p(U_k) \leq C(4^{1/p})^{j_0+1}(2j_0+1)a^{j_0 k}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p\right)^{1/p}.$$

Ahora, aplicando de nuevo la proposición 1.4.11 deducimos que

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &\leq (4^{1/p}) \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1/p})^k \sigma_p(U_k) \\ &\leq C(4^{1/p})^{j_0+2}(2j_0+1) \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1/p})^k a^{j_0 k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p} \\ &= C(4^{1/p})^{j_0+2}(2j_0+1) \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1/p} a^{j_0})^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p} \\ &\leq C(4^{1/p})^{j_0+2}(2j_0+1) \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p} \\ &= C(4^{1/p})^{j_0+2}(2j_0+1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(T_{n,n})^p \right)^{1/p},\end{aligned}$$

como queríamos.
Veamos ahora la desigualdad contraria. Sea $0 < p < \infty$.
Tomemos $\delta > 0$ tal que $4^{1/p}\delta < 1$. Ahora, está claro que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}(4C4^{2/p})a^M &< \delta \\ 4^{1/p}a^M &\leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En breve veremos el por qué de estas elecciones para δ y M.
Vamos a descomponer nuestros espacios como las siguientes sumas directas:

$$\begin{aligned}H &= A_1 \oplus \cdots \oplus A_M \\ K &= B_1 \oplus \cdots \oplus B_M,\end{aligned}$$

donde $A_j = \bigoplus_{\ell_2,\ l=0}^{\infty} H_{Ml+j}$ y $B_j = \bigoplus_{\ell_2,\ l=0}^{\infty} K_{Ml+j}$. Ahora, tenemos que

$$\sigma_p(T) \geq \sigma_p(\pi_{B_j} \circ T \circ i_{A_j}).$$

Si llamamos $S^j := \pi_{B_j} T i_{A_j}$, se tiene que $\sigma_p(S^j) \leq \sigma_p(T)$. Observemos que las entradas matriciales de $S^j = (S^j_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ son $S^j_{n,k} = T_{j+(n-1)M,\ j+(k-1)M}$, por tanto se sigue que

$$\begin{aligned}\sigma_p(S^j_{n,k}) &= \sigma_p(T_{j+(n-1)M,\ j+(k-1)M}) \\ &\leq Ca^{M|n-k|}\sigma_p(T_{j+(k-1)M,\ j+(k-1)M}) \\ &= Ca^{M|n-k|}\sigma_p(S^j_{k,k}).\end{aligned}$$

Por simplificar notación, llamemos momentáneamente S a nuestro operador S^j, con $j \in \{1, ..., M\}$ fijo. Al igual que hicimos en la prueba de la otra desigualdad, escribimos $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ donde S_n están definidos de forma análoga a los T_n. Ahora, escribimos $D = S - S_0$. Recordemos que

$$\sigma_p(S_0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(S_{n,n})^p\right)^{1/p}.$$

Observemos que por nuestra elección de M y δ, para todo $0 < p < \infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_p(D) &\leq \sigma_p\Big(\sum_{j\neq 0} S^j\Big) \leq 4^{1/p} \sum_{j\neq 0} (4^{1/p})^{|j|} \sigma_p(S^j) \\
&\leq 4^{1/p} 2 \sum_{j=1}^{\infty} (4^{1/p})^j C a^{Mj} \sigma_p(S_0) \\
&= C 4^{1/p} 2 \sum_{j=1}^{\infty} (4^{1/p} a^M)^j \sigma_p(S_0) \\
&= C 4^{1/p} 2 \frac{4^{1/p} a^M}{1 - 4^{1/p} a^M} \sigma_p(S_0) \\
&\leq (4C 4^{2/p}) a^M \sigma_p(S_0) \\
&\leq \delta \sigma_p(S_0)
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\sigma_p(S_0) \leq 4^{1/p}(\sigma_p(D) + \sigma_p(S)) \leq 4^{1/p} \delta \sigma_p(S_0) + 4^{1/p} \sigma_p(S),$$

por lo que deducimos que

$$4^{1/p}(1 - \delta) \sigma_p(S_0) \leq \sigma_p(S).$$

Observemos que la constante $4^{1/p}(1 - \delta) > 0$.
Con esto, hemos probado que

$$K \sigma_p(S^j) \geq \sigma_p(S_0^j) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(S_{n,n})\right)^{1/p} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sigma_p(T_{lM+j,\ lM+j})^p\right)^{1/p}$$

para cada $j = 1, ..., M$, con K constante positiva.

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_p(T_{n,n})^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_p(T_{lM+j,\ lM+j})^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_p(S_0^j)^p\right)^{1/p}\\
&\leq K\left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_p(S^j)^p\right)^{1/p}\\
&\leq K\left(\sum_{j=1}^{M}\sigma_p(T)^p\right)^{1/p}\\
&= KM^{1/p}\sigma_p(T),
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

3.3. El Teorema de Luecking

En esta sección enunciaremos y proporcionaremos una prueba original del teorema de Luecking, que caracterizará la pertenencia de la inyección de Carleson a la clases de Schatten. A lo largo de la sección denotaremos por μ a cualquier medida de Carleson en el disco. Es decir, cualquier medida boreliana finita en $\mathbb{D}$ de forma que la inyección

$$j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu)$$

sea continua.
Comencemos considerando los siguientes **anillos diádicos**:

$$\Gamma_n := \{z\in\mathbb{D} : 1-\frac{1}{2^n}\leq |z| < 1-\frac{1}{2^{n+1}}\},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Está claro que

$$\mathbb{D} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\Gamma_n,$$

así que podemos escribir nuestro espacio $L^2(\mu)$ como una suma directa de espacios de Hilbert de la siguiente forma:

$$L^2(\mu) = \bigoplus_{\ell_2} L^2(\mu_{|\Gamma_n}),$$

donde $\mu_{|\Gamma_n}$ denota nuestra medida finita en el disco restringida al n-ésimo anillo.
A continuación, nos convendrá dividir cada anillo Γ_n en 2^n piezas, que llamaremos **cajas de Luecking** y que definimos como

$$R_{n,j} := \{z \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{2^n} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{n+1}},\ \arg(z) \in (\frac{2\pi j}{2^n}, \frac{2\pi(j+1)}{2^n}]\},$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq j < 2^n$.

Así, obtenemos que

$$\Gamma_n = \bigsqcup_{j=0}^{2^n-1} R_{n,j}$$

y por tanto las cajas de Luecking forman una partición del disco unidad.
Ya podemos enunciar nuestro teorema:

Teorema 3.3.1 (Teorema de Luecking)**.** *Sea $0 < p < \infty$. Entonces $j_\mu \in S_p(H^2, L^2(\mu))$ si y solo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} < \infty.$$

Es más,

$$\sigma_p(j_\mu) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Inmediatamente podemos formular entonces la caracterización de pertenencia a las clases de Schatten de los operadores de composición:

Corolario 3.3.2. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $|\varphi^*| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Entonces $C_\varphi \in S_p(H^2)$ si y solo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n m_{\varphi^*}(R_{n,j}))^{p/2} < \infty.$$

Es más,

$$\sigma_p(C_\varphi) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n m_{\varphi^*}(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Demostración.
Retomando la notación que usamos en el corolario 2.5.5, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^2 \arrow[r, "C_\varphi"] \arrow[dr, "j_{m_{\varphi^*}}"'] & H^2 \arrow[d, "T"] \\ & L^2(m_{\varphi^*}) \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces $j_{m_{\varphi^*}} = T \circ C_\varphi$, donde T es un isomorfismo isométrico. Por tanto,

$$\sigma_p(j_{m_{\varphi^*}}) \leq \|T\| \, \sigma_p(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi).$$

Además, $C_\varphi = T^{-1} \circ j_{m_{\varphi^*}}$, con T^{-1} isomorfismo isométrico definido sobre $\mathrm{Im}(j_{m_{\varphi^*}})$. Entonces

$$\sigma_p(C_{\varphi^*}) \leq \left\|T^{-1}\right\| \sigma_p(j_{m_{\varphi^*}}) = \sigma_p(j_{m_{\varphi^*}}).$$

Así, $\sigma_p(C_\varphi) = \sigma_p(j_{m_{\varphi^*}})$ y por el teorema de Luecking deducimos que

$$\sigma_p(C_\varphi) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n m_{\varphi^*}(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p},$$

lo que prueba el resultado. $\square$

A veces será más sencillo trabajar con conjuntos equivalentes a las cajas de Luecking. Será necesario en nuestro desarrollo tratar tambien con las **ventanas de Carleson diádicas**:

$$W_{n,j} := \{z \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{2^n} \leq |z| < 1, \arg(z) \in (\frac{2\pi j}{2^n}, \frac{2\pi(j+1)}{2} 2^n]\},$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq j < 2^n$.
Puede demostrarse la siguiente equivalencia para ventanas de Carleson diádicas y cajas de Luecking:

Proposición 3.3.3. *Sea $0 < \alpha < \infty$. Entonces para cualquier medida boreliana finita μ en $\mathbb{D}$ se tiene*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{\alpha} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(W_{n,j}))^{\alpha}.$$

Demostración.
Primero, observemos que $R_{n,j} \subseteq W_{n,j}$ para todos n y j, por lo tanto es claro que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{\alpha} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(W_{n,j}))^{\alpha}.$$

Para la desigualdad contraria, debemos considerar los siguientes conjuntos:

$$H_{l,n,j} := \{k \in \{0, 1, ..., 2^l - 1\}; \frac{j}{2^n} \leq \frac{k}{2^l} < \frac{j+1}{2^n}\}.$$

definidos para $l \geq n$ y $j \in \{0, 1, ..., 2^{n-1}\}$.
Comencemos observando que para todos n y j

$$W_{n,j} = \bigcup_{l \geq n} \bigcup_{k \in H_{l,n,j}} R_{l,k},$$

y que, por tanto, como las cajas de Luecking son dos a dos disjuntas se tiene

$$\mu(W_{n,j}) = \sum_{l\geq n} \sum_{k\in H_{l,n,j}} \mu(R_{l,k}).$$

Trataremos primero el caso $0 < \alpha \leq 1$. Para ello, usaremos la conocida desigualdad que para $x_1, ..., x_N \geq 0$ afirma que

$$(x_1 + ... + x_N)^\alpha \leq x_1^\alpha + \cdots + x_N^\alpha. \tag{3.6}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha} \mu(W_{n,j})^\alpha &= \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha} \left(\sum_{l\geq n} \sum_{k\in H_{l,n,j}} \mu(R_{l,k}) \right)^\alpha \\
&\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha} \left(\sum_{l\geq n} \sum_{k\in H_{l,n,j}} \mu(R_{l,k})^\alpha \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^l-1} \mu(R_{l,k})^\alpha \sum_{(n,j):n\geq l;k\in H_{l,n,j}} 2^{n\alpha}.
\end{aligned}$$

Observemos que para cada $n \geq l$ existe un único j tal que $k \in H_{l,n,j}$. Como se tiene

$$\sum_{n=1}^{l} 2^{n\alpha} \leq C_\alpha 2^{l\alpha},$$

con C_α una constante que depende de α, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha} \mu(W_{n,j})^\alpha \leq C_\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^l-1} 2^{l\alpha} \mu(R_{l,k})^\alpha,$$

y obtenemos la desigualdad buscada.
Tomemos ahora $\alpha > 1$. Ahora podemos usar la desigualdad de Hölder. Llamemos β al exponente conjugado de α. Elegimos a de forma que $1 < a < 2 < a^\beta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu(W_{n,j}) &= \sum_{l\geq n:k\in H_{l,n,j}} \mu(R_{l,k}) \\
&\leq \left(\sum_{l\geq n:k\in H_{l,n,j}} a^{-l\beta} \right)^{1/\beta} \left(\sum_{l\geq n:k\in H_{l,n,j}} a^{l\alpha} \mu(R_{l,k})^\alpha \right)^{1/\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora, si notamos el hecho de que $|H_{l,n,j}| = 2^{l-n}$, obtenemos

$$\left[\sum_{l\geq n:k\in H_{l,n,j}} a^{-l\beta} \right]^{1/\beta} = \left[\sum_{l\geq n} 2^{l-n} a^{-l\beta} \right]^{1/\beta} = \left(2^{-n} \frac{(2a^{-\beta})^n}{1 - 2a^{-\beta}} \right)^{1/\beta} = C_\beta a^{-n},$$

donde de nuevo C_β es una constante que depende de β. Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha}\mu(W_{n,j})^\alpha &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{n\alpha}C_\beta^\alpha a^{-n\alpha}\sum_{l\geq n: k\in H_{l,n,j}} a^{l\alpha}\mu(R_{l,k})^\alpha \\ &= C_\beta^\alpha\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^l-1}\mu(R_{l,k})^\alpha a^{l\alpha}\sum_{(n,j):n\geq l; k\in H_{l,n,j}}(2/a)^{n\alpha} \\ &\lesssim \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^l-1}\mu(R_{l,k})^\alpha a^{l\alpha}(2/a)^{l\alpha} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^l-1} 2^{l\alpha}\mu(R_{l,k})^\alpha,\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado para $\alpha > 1$. □

Gracias a esta proposición, la caracterización enunciada en el teorema de Luecking puede entonces reescribirse como

$$\sigma_p(j_\mu) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}(2^n\mu(W_{n,j}))^{p/2}\right)^{1/p}.$$

Vamos a plantear un esquema de la prueba que desarrollaremos a continuación.

- Primero, definimos los siguientes espacios:

  $$\begin{aligned} H_2^N &:= \operatorname{span}\{z^k : k = 0, ..., z^{N-1}\} \subset H^2 \\ X_n &:= z^{2^n-1}H_2^{2^n-1} = \operatorname{span}\{z^k : k = 2^n-1, ..., 2^{n+1}-2\} \subset H^2 \end{aligned}$$

  Tomaremos el convenio de denotar $N = 2^n$, con n natural fijado.

- A continuación, escribimos nuestros espacios H^2 y $L^2(\mu)$ como las siguientes sumas directas

  $$H^2 = \bigoplus_{\ell_2} X_n$$

  $$L^2(\mu) = \bigoplus_{\ell_2} L^2(\mu_{|\Gamma_n}).$$

  Así, nuestra inyección

  $$j_\mu : H^2 \hookrightarrow L^2(\mu)$$

  tendrá una forma matricial $j_\mu = (j_{n,m})_{n,m\geq 0}$, donde

  $$j_{n,m} : X_n \hookrightarrow L^2(\mu_{|\Gamma_m}).$$

- El siguiente paso será probar que las entradas diagonales $j_{n,n} : X_n \hookrightarrow L^2(\mu_{|\Gamma_n})$ cumplen que
$$\sigma_p(j_{n,n}) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}$$
para todo $0 < p < \infty$, lo cual obtendremos en el corolario 3.3.7 tras probar algunos resultados auxiliares.

- Finalmente, en la proposición 3.3.8 probaremos que existen $C > 0$, $a \in (0,1)$ tales que
$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq Ca^{|n-m|}\sigma_p(j_{m,m})$$
y gracias a la proposición 3.2.5, obtendremos que
$$\sigma_p(j_\mu) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p},$$
como queremos probar.

Comencemos entonces. Denotaremos por $\theta_j = exp\left(\frac{2\pi ij}{N}\right)$ $j = 0, ..., N-1$ a las raíces N-ésimas de la unidad. Será conveniente, dado $N = 2^n$, definir los conjuntos
$$G_N := \{z \in \mathbb{D} : 1 - \frac{1}{N} \leq |z| < 1\}.$$
Necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 3.3.4. *Sea $0 < p < \infty$ y consideremos $N \geq 2$. Sea $z_0 \in G_N$ y tomemos $0 < \delta < 1$ tal que $4^{2/p}\delta \leq \frac{1}{8e}$ y de forma que las bolas $B_j := B(z_0\theta_j, \delta/N)$ sean disjuntas. Supongamos que μ está soportada por*
$$\bigcup_{j=0}^{N-1} B(z_0\theta_j, \delta/N) \cap G_N$$
y consideremos la inyección
$$T : H_2^N \hookrightarrow L^2(\mu).$$
Se tiene que
$$\sigma_p(T) \approx \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p},$$

Demostración.
Observemos que para cada $f \in H_2^N$ podemos escribir
$$Tf(z) = \sum_{j=0}^{N-1} f(z)\chi_{B_j}(z).$$

Ahora, desarrollamos nuestra función, que es un polinomio de grado $N-1$, en su serie de Taylor centrada en cada bola para obtener

$$\begin{aligned} Tf(z) &= \sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1}(z-z_0\theta_j)^l\frac{f^{l)}(z_0\theta_j)}{l!}\right)\chi_{B_j}(z) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1}\left[\sum_{j=0}^{N-1}(z-z_0\theta_j)^l\frac{f^{l)}(z_0\theta_j)}{l!}\chi_{B_j}(z)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} T_l f(z), \end{aligned}$$

donde $T_l : H_2^N \to L^2(\mu)$ está definida como

$$T_l f(z) = \sum_{j=0}^{N-1}(z-z_0\theta_j)^l\frac{f^{l)}(z_0\theta_j)}{l!}\chi_{B_j}(z).$$

Así, hemos escrito nuestra inyección como

$$T = \sum_{l=0}^{N-1} T_l.$$

Vamos a calcular σ_p para cada T_l. Para ello, definimos los operadores $A_l : H_2^N \mapsto H_2^N$, $B_l : H_2^N \to \ell_2^N$ y $S_l : \ell_2^N \mapsto L^2(\mu)$ de forma que

$$\begin{aligned} A_l f &= f^{l)} \\ B_l g &= \left(\frac{g(\theta_j z_0)}{\sqrt{N}}\right)_{j=0}^{N-1} \\ S_l(a_j)_{j=0}^{N-1} &= \sum_{j=0}^{N-1}\sqrt{N}a_j\frac{(z-\theta_j z_0)^l}{l!}\chi_{B_j}(z). \end{aligned}$$

Con estas definiciones, está claro que $T_l = S_l \circ B_l \circ A_l$:

$$\begin{tikzcd} H_2^N \arrow[r, "T_l"] \arrow[d, "A_l"] & L^2(\mu) \\ H_2^N \arrow[r, "B_l"] & \ell_2^N \arrow[u, "S_l"'] \end{tikzcd}$$

Vamos a aplicar las propiedades de ideales de operadores para estimar $\sigma_p(T_l)$. Primero, calculemos las normas de A_l y B_l.

Para A_l, dada $f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{f}(n)z^n$ tenemos $A_lf(z)=\sum_{n=l}^{N-1}n\cdots(n-l+1)\hat{f}(n)z^{n-l}$, por tanto

$$\left\|A^{l)}f\right\|^2=\sum_{n=l}^{N-1}n^2\cdots(n-l+1)^2|\hat{f}(n)|^2\leq N^{2l}\left\|f\right\|^2,$$

así que $\|A_l\|\leq N^l$.
Para B_l tenemos

$$\begin{aligned}\|B_lg\|^2&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|g(\theta_jz_0)|^2=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\hat{g}(n)\theta_j^nz_0^n\right|^2\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n,k=0}^{N-1}\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(k)}\theta_j^n\theta_j^{-k}z_0^n\overline{z_0^k}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n,k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(k)}\theta_j^{n-k}z_0^n\overline{z_0^k}.\end{aligned}$$

Ahora, observemos que como θ_j son las N-ésimas raíces de la unidad se tiene que

$$\sum_{j=0}^{N-1}\theta_j^{n-k}=\begin{cases}N & \text{si } n=k,\\ 0 & \text{si } n\neq k.\end{cases}$$

Por tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}\|B_0g\|^2&=\frac{1}{N}\sum_{n,k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(k)}\theta_j^{n-k}z_0^n\overline{z_0^k}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n,k=0}^{N-1}\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(k)}z_0^n\overline{z_0^k}\sum_{j=0}^{N-1}\theta_j^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{g}(k)|^2|z_0|^{2n}\leq\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{g}(k)|^2\\&=\left\|g\right\|^2,\end{aligned}$$

así que B_l es una contracción.
Finalmente, calculemos $\sigma_p(S_l)$. Observemos que si definimos

$$u_j(z)=\frac{(z-\theta_jz_0)^l}{l!}\chi_{B_j}(z),$$

nuestra S_l queda como $S_l(a_j)=\sum_{j=0}^{N-1}\sqrt{N}a_ju_j(z)$. Ahora, como las bolas B_j son disjuntas, está claro que conforman un sistema ortogonal en $L^2(\mu)$, así que obtenemos la siguiente representación ortonormal para nuestro operador:

$$S_l = \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{N} \left\| u_j \right\|_{L^2(\mu)} e_j \otimes \frac{u_j}{\left\| u_j \right\|_{L^2(\mu)}},$$

donde (e_j) denota la base canónica en ℓ_2.
Ahora, si $z \in B_j$ entonces $|z - \theta_j z_0| \leq \frac{\delta}{N}$, así que $\left\| u_j \right\|_{L^2(\mu)} \leq \frac{\delta^l}{N^l l!} \sqrt{\mu(B_j)}$. Con esto en mente, tenemos gracias a la representación ortonormal obtenida para S_l que

$$\sigma_p(S_l) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} N^{p/2} \left\| u_j \right\|_{L^2(\mu)}^p \right)^{1/p} \leq \frac{\delta^l}{N^l l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\sigma_p(T_l) \leq \sigma_p(S_l) \left\| B_l \right\| \left\| A_l \right\| \leq \frac{\delta^l}{N^l l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p} N^l = \frac{\delta^l}{l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Finalmente, si $p \geq 1$ podemos aplicar la desigualdad triangular para obtener que

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{l=0}^{N-1} \sigma_p(T_l) \leq \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\delta^l}{l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p} \leq e^{\delta} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Ahora, si $0 < p < 1$ gracias a la proposición 1.4.11 y la suposición de que $4^{1/p}\delta \leq 1$ deducimos que

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{l=0}^{N-1} (4^{1/p})^{l+1} \frac{\delta^l}{l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p} \leq (4^{1/p}) e \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p},$$

lo que prueba una de las dos desigualdades que queremos demostrar.
Para la desigualdad contraria, observemos primero que $A_0 = id$, por lo que $T_0 = S_0 \circ B_0$. Ahora, veamos que B_0 es invertible.
Para ello, notemos primero que las dimensiones de H_2^N y de ℓ_2^N coinciden, por lo que bastará probar que B_0 es inyectiva.
Para ello, sean $f, g \in H_2^N$ tales que $B_0 f = B_0 g$. Tomemos $h = f - g \in H_2^N$. Entonces, $\theta_j z_0$ son ceros de h para todo $j = 0, ..., N-1$, pero h es un polinomio de grado $N-1$, por lo que $h = 0$ y por tanto B es inyectiva.
Tratemos de estimar la norma de B_0^{-1}. Como consideramos $N \geq 2$, obtenemos $(1 - \frac{1}{N})^{2N} \geq \frac{1}{16}$. Ahora, observemos que el operador B_l no depende de l. Por tanto, tenemos gracias al

cálculo anterior que

$$\begin{aligned}\|B_0 g\|^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} |\hat{g}(k)|^2 |z_0|^{2n} \geq \|g\|^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2N} \\ &\geq \frac{1}{16} \|g\|^2\end{aligned}$$

Así, deducimos que $\left\| B_0^{-1} \right\| \leq 4$ para todo $N \in \mathbb{N}$.
Así, como $S_0 = T_0 \circ B_0^{-1}$, tenemos que $\sigma_p(S_0) \leq \left\| B_0^{-1} \right\| \sigma_p(T_0) \leq 4\sigma_p(T_0)$, por lo que

$$\sigma_p(T_0) \geq \frac{1}{4}\sigma_p(S_0)).$$

Ahora, recordemos que

$$\sigma_p(S_0) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} N^{p/2} \|u_j\|_{L^2(\mu)}^p \right)^{1/p}.$$

Como $l = 0$, tenemos que $u_j = \chi_{B_j}$ para todo $j \in \{0, ..., N-1\}$. Así, $\|u_j\|_{L^2(\mu)} = \sqrt{\mu(B_j)}$ y por tanto

$$\sigma_p(S_0) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p},$$

por lo que deducimos que

$$\sigma_p(T_0) \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Ahora, si $p \geq 1$, tenemos al igual que en el caso anterior

$$\begin{aligned}\sigma_p(\sum_{l=1}^{N-1} T_l) &\leq e^{\delta} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\delta^l}{l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{8} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\delta^l}{l!} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Basta entonces poner $T_0 = T - \sum_{l=1}^{N-1} T_l$ para obtener

$$\frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p} \leq \sigma_p(T_0) \leq \sigma_p(T) + \sigma_p(\sum_{j=0}^{N-1} T_l) \leq \sigma_p(T) + \frac{1}{8} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Así, simplemente despejando la ecuación obtenemos

$$\frac{1}{8}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p} \leq \sigma_p(T).$$

Veamos el caso cuasi-normado. Notemos que para cada $0 < p < 1$ gracias a la proposición 1.4.11 se tiene

$$\sigma_p(\sum_{l=1}^{n-1} T_l) \leq \sum_{l=1}^{N-1}(4^{1/p})^l \frac{\delta^l}{l!}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{8e\cdot 4^{1/p}}e\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p}$$
$$= \frac{1}{8\cdot 4^{1/p}}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p}.$$

Razonando igualmente obtenemos

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{j=}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p} \leq 4^{1/p}(\sigma_p(T) + \frac{1}{8\cdot 4^{1/p}}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p}),$$

así que despejando de nuevo queda

$$\frac{1}{8\cdot 4^{1/p}}\left(\sum_{j=0}^{N-1}(N\mu(B_j))^{p/2}\right)^{1/p} \leq \sigma_p(T),$$

lo que concluye la prueba. □

Proposición 3.3.5. *Sea $N = 2^n \in \mathbb{N}$ y supongamos que μ está soportada por G_N. Sea $T : H_2^N \hookrightarrow L^2(\mu)$ la inyección. Entonces*

$$\sigma_p(T) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1}(2^n\mu(W_{n,j}))^{p/2}\right)^{1/p}$$

Demostración.
Tomemos primero $N = 1$. Este caso es trivial, ya que $G_1 = W_{0,0} = \mathbb{D}$ y H_2^1 es el espacio vectorial de las funciones constantes. Es trivial que

$$T = \left(\sqrt{\mu(\mathbb{D})}\right)\ 1 \otimes \frac{\chi_{\mathbb{D}}}{\sqrt{\mu(\mathbb{D})}},$$

donde $\|1\|_2 = 1$ y $\|\chi_{\mathbb{D}}\|_{L^2(\mu)} = \sqrt{\mu(\mathbb{D})}$, por lo que tenemos una representación ortonormal para T.

Así, se sigue que

$$\sigma_p(T) = \sqrt{\mu(\mathbb{D})} = \sqrt{\mu(W_{0,0})} = \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Estudiemos el caso $N \geq 2$. Notemos que

$$G_N = \bigcup_{j=0}^{n-1} W_{n,j}.$$

Fijemos ahora $0 < p < \infty$ y sea $\delta > 0$ cumpliendo las hipótesis del lema anterior. Queremos probar que existe $M \in \mathbb{N}$ que depende solo de δ (y no de N), de forma que existan $z_1, ..., z_M \in W_{n,0}$ con

$$W_{n,0} \subseteq \bigcup_{l=1}^{M} B(z_l, \delta/N),$$

y por consiguiente

$$W_{n,j} \subseteq \bigcup_{l=1}^{M} B(z_l\theta_j, \delta/N).$$

Para ello, basta con cuadricular la ventana $W_{n,0}$ de la siguiente forma: Dividimos el recorrido del ángulo en M_1 segmentos iguales y la longitud de la ventana en otros M_2 segmentos. Bastará tomar $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{2\pi/N}{M_1} < \frac{\delta}{N}$ y $\frac{1/N}{M_2} < \frac{\delta}{N}$, por lo que quedará $M_1 > \frac{2\pi}{\delta}$ y $M_2 > \frac{1}{\delta}$.
Entonces tomamos $M = M_1 \cdot M_2$, por lo que no dependerá de N y elegimos z_k como los centros de cada cuadrilátero, los cuales llamaremos Q^l. Así, está claro que conseguimos un recubrimiento por bolas $B(z_l, \delta/N)$ de la ventana $W_{n,0}$.
Para simplificar la notación, llamaremos B^l a cada bola $B(z_l, \delta/N)$ y $B^l_j = \theta_j B^l$ y $Q^l_j = \theta_j B^l$.
Definamos $A_l = \bigcup_{j=0}^{N-1} B^l_j$. Entonces, $G_N \subseteq \bigcup_{l=1}^{M} A_l$. Además, si cogemos los rectángulos Q^l cerrados por dos de sus lados y abiertos por los dos restantes, está claro que forman una partición de $W_{n,0}$, y por tanto los rectángulos Q^l_j forman una partición de $W_{n,j}$. Escribimos entonces

$$\mu = \mu_1 + \cdots \mu_M,$$

con μ_l soportada por $\bigcup_{j=0}^{N-1} Q_l\theta_j \subseteq A_l$.
Ahora, para cada l definamos el operador

$$T_l : H_2^N \hookrightarrow L^2(\mu_l).$$

Como $A_l \subseteq G_N$, se tiene que $\|Tf\| \geq \|T_l f\|$ para toda $f \in H_2^N$, por lo que $\sigma_p(T) \geq \sigma_p(T_l)$ para todo $l = 1, ..., M$. Elijamos $l_0 \in \{1, ..., M\}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^{l_0}))^{p/2} = \text{máx} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^{l}))^{p/2} : l = 1, ..., M \right\}.$$

Está claro que podemos aplicar el lema anterior a T_{l_0}. Notemos también que para todo $j \in \{0, ..., N-1\}$

$$W_{n,j} \subseteq \bigcup_{l=1}^{M} B_j^l,$$

así que $\mu(W_{n,j}) \leq \sum_{l=1}^{M} \mu(B_j^l)$. Por tanto, gracias a la desigualdad (3.6) tenemos, si $0 < p < 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} &\leq \sum_{j=0}^{N-1} (N \sum_{l=1}^{M} \mu(B_j^l))^{p/2} \leq \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{M} (N\mu(B_j^l))^{p/2} \\ &= \sum_{l=1}^{M} \sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^l))^{p/2} \leq M \sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^{l_0}))^{p/2}. \end{aligned}$$

En cambio, si $2 \leq p < \infty$ usamos la desigualdad triangular. Tomemos $x = (N\mu(W_{n,j}))_{j=0}^{N-1} \in \ell_{p/2}^N$ y $x_l = (N\mu(Q_j^l))_{j=0}^{N-1} \in \ell_{p/2}^N$. Así, está claro que $x = \sum_{l=1}^{M} x_l$. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} = \|x\|_{p/2}^{p/2} = \|\sum_{l=1}^{M} x_l\|_{p/2}^{p/2} &\leq \left(\sum_{l=1}^{M} \|x_l\|_{p/2} \right)^{p/2} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{M} (\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^l))^{p/2})^{2/p} \right)^{p/2} \\ &\leq M^{p/2} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(B_j^{l_0})^{p/2}. \end{aligned}$$

Así, deducimos que para todo $0 < p < \infty$ existe una constante $C_p > 0$ tal que

$$\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} \leq C_p \sum_{j=0}^{N-1} \mu(B_j^{l_0})^{p/2}.$$

Si unimos esta desigualdad con el hecho de que $\sigma_p(T) \geq \sigma_p(T_{l_0})$ y el lema anterior, obtenemos

$$\sigma_p(T) \geq \sigma_p(T_{l_0}) \gtrsim \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^{l_0}))^{p/2} \right)^{1/p} \geq \frac{1}{C_p^{1/p}} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Para la desigualdad contraria, observemos que como $G_N \subseteq \bigcup_{l=1}^{M} A_l$, entonces $T = \sum_{l=1}^{M} T_l$ y tenemos, usando el lema 3.3.4 para cada $l = 1, ..., M$ que si $p \geq 1$

$$\sigma_p(T) \leq \sum_{l=1}^{M} \sigma_p(T_l) \lesssim \sum_{l=1}^{M} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(B_j^l))^{p/2} \right)^{1/p} \leq \sum_{l=1}^{M} \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}$$
$$= M \left(\sum_{j=0}^{N-1} (N\mu(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Ahora, si $0 < p < 1$ basta hacer el mismo razonamiento pero sacando $(4^{1/p})^M$ de factor común en la primera desigualdad, y así obtenemos el resultado para $0 < p < \infty$. ☐

Corolario 3.3.6. *Tomemos $n \leq m$ y sea $j_{n,m} : X_n \hookrightarrow L^2(\mu_{|\Gamma_m})$. Se tiene que*

$$\sigma_p(j_{n,m}) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Demostración.
Comencemos con el caso $n = 0$. Está claro que $H_2^1 = X_0$, y que la medida $\mu_{|\Gamma_m}$ está soportada por G_1.
Así, gracias a la proposición anterior tenemos que

$$\sigma_p(j_{0,m}) = \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Si $n \geq 1$, observemos de nuevo que $\mu_{|\Gamma_m}$ es una medida soportada por $\Gamma_m \subset G_{2^n}$, por lo tanto sabemos por la proposición 3.3.5 que la inyección $T : H_2^N \to L^2(\mu_{|\Gamma_m})$ cumple que

$$\sigma_p(T) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Ahora, definamos los operadores $V : X_n \to H_2^N$ y $W : L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \to L^2(\mu_{|\Gamma_m})$ de forma que $Vf = z^{-2^n+1}f$ y $Wf = z^{2^n-1}f$.

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{j_{n,m}} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \\ \downarrow V & & W \uparrow \\ H_2^N & \xrightarrow{T} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \end{array}$$

Es fácil ver que V es una isometría, ya que dada $f(z) = \sum_{k=2^n-1}^{2^{n+1}-2} a_k z^k \in X_n$, tenemos que $Vf(z) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k z^k$, de donde se sigue que $\|f\|_{H^2} = \|Vf\|_{H^2}$.
Veamos que además W es acotado. Si tomamos $f \in L^2(\mu_{|\Gamma_m})$ se tiene

$$\|Wf\|^2_{L^2(\mu_{|\Gamma_m})} = \int_{\Gamma_m} (|z|^2)^{2n-1} |f(z)|^2 d\mu \leq \int_{\Gamma_m} |f(z)|^2 d\mu = \|f\|^2_{L^2(\mu_{|\Gamma_m})}.$$

Está claro que $j_{n,m} = W \circ T \circ V$.
Así, obtenemos que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq \|W\| \, \sigma_p(T) \, \|V\| \leq \sigma_p(T)$$

.
Para la desigualdad contraria, definimos las aplicaciones $\hat{V} : H_2^N \to X_n$ y $\hat{W} : L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \to L^2(\mu_{|\Gamma_m})$, de forma que $\hat{V}f = z^{2^n-1}f$ y $\hat{W}f = z^{-2^n+1}f$.

$$\begin{array}{ccc} H_2^N & \xrightarrow{T} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \hat{V}} & & {\scriptstyle \hat{W}}\Big\uparrow \\ X_n & \xrightarrow{j_{n,m}} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \end{array}$$

Es inmediato que $\hat{V}$ es la inversa de V y que también es una isometría. Análogamente, $\hat{W}$ es la inversa de W, y por el teorema de la aplicación abierta será acotada, pero debemos comprobar que podemos dominar la norma de $\hat{W}$ con una constante que no dependa de N.
Para ello, observemos que si $z \in \Gamma_m$, entonces $|z|^{2^n} \geq \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^{2^n}$. Como $m \geq n \geq 1$, tenemos que $|z|^{2^n} \geq \frac{1}{4}$ para todo $m \geq 1$.
Así, dada $f \in L^2(\mu_{|\Gamma_m})$

$$\left\|\hat{W}f\right\|^2_{L^2(\mu_{|\Gamma_m})} = \int_{\Gamma_m} (|z|^{-2^n})^2 |f(z)|^2 d\mu \leq 16 \int_{\Gamma_m} |f(z)|^2 d\mu = 16 \, \|f\|^2_{L^2(\mu_{|\Gamma_m})}.$$

Gracias a esta desigualdad, y al hecho de que $T = \hat{V} \circ j_{n,m} \circ \hat{W}$, obtenemos entonces que

$$\sigma_p(T) \leq 4\sigma_p(j_{n,m}),$$

lo que finalmente prueba que

$$\sigma_p(T) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p},$$

como queríamos. $\square$

Corolario 3.3.7. *Sea* $j_{n,n} : X_n \hookrightarrow L^2(\mu_{|\Gamma_n})$*. Entonces*

$$\sigma_p(j_{n,n}) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Demostración.
Tenemos por el corolario anterior que

$$\sigma_p(j_{n,n}) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_n}(W_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Está claro que

$$W_{n,j} \cap \Gamma_n = R_{n,j}$$

para todo $j = 0, ..., 2^n - 1$, de donde se sigue el resultado. □

Proposición 3.3.8. *Dado* $0 < p < \infty$*, existen* $C > 0$*,* $a \in (0,1)$ *tales que*

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq C a^{|n-m|} \sigma_p(j_{m,m}).$$

Demostración.
Vamos a distinguir dos casos:

(i) Supongamos primero que $n < m$. Entonces, sabemos por el corolario 3.3.6 que

$$\sigma_p(j_{n,m})^p \approx \sum_{l=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,l}))^{p/2}.$$

Además, por el corolario 3.3.7

$$\sigma_p(j_{m,m})^p \approx \sum_{l=0}^{2^m-1} (2^m \mu(R_{m,l}))^{p/2}.$$

Ahora, observemos que para cada $l = 0, ..., 2^n - 1$ se tiene que

$$W_{n,l} \cap \Gamma_m = \bigsqcup_{k \in A_l} R_{m,k},$$

donde

$$A_l = \{2^{m-n} \cdot l, \cdots, 2^{m-n} \cdot (l+1) - 1\}$$

es un conjunto de 2^{m-n} índices que depende de l. Se tiene por tanto que

$$\mu_{|\Gamma_m}(W_{n,l}) = \sum_{k \in A_l} \mu(R_{m,k}).$$

Además, notemos que

$$\sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{k\in A_l} \mu(R_{m,k}) = \sum_{l=0}^{2^m-1} \mu(R_{m,l}).$$

Así, si tomamos $0 < p < 2$, tenemos usando la desigualdad (3.6) de la página 96 que

$$\begin{aligned}
\sigma_p(j_{n,m})^p &\approx \sum_{l=0}^{2^n-1} (2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,l}))^{p/2} = \sum_{l=0}^{2^n-1} (2^n \sum_{k\in A_l} \mu(R_{m,k}))^{p/2} \\
&\leq \sum_{l=0}^{2^n-1} 2^{np/2} \sum_{k\in A_l} \mu(R_{m,k})^{p/2} \leq \left(\frac{2^n}{2^m}\right)^{p/2} \sum_{l=0}^{2^m-1} (2^m \mu(R_{m,l}))^{p/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(m-n)p} \sigma_p(j_{m,m})^p,
\end{aligned}$$

y tomando raíz p-ésima obtenemos que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \lesssim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-n} \sigma_p(j_{m,m}).$$

Si $2 \leq p < \infty$ debemos dar otro razonamiento para obtener lo que buscamos, pues no contamos con la desigualdad (3.6). Como $p/2 \geq 1$, tenemos que dada una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre un espacio medible X se tiene que

$$\left(\int_X f d\mathbb{P}\right)^{p/2} \leq \int_X f^{p/2} d\mathbb{P} \tag{3.7}$$

para toda función $f \in L^1(\mathbb{P})$. Ahora, para cada $l = 0, ..., 2^n - 1$ definimos la medida $\mathbb{P}_l$ en A_l como $\mathbb{P}_l(B) = \frac{1}{2^{m-n}}|B|$, para todo $B \subseteq A_l$. Está claro que cada $\mathbb{P}_l$ es medida de probabilidad, ya que $|A_l| = 2^{m-n}$.
Además, dada $f : A_l \to \mathbb{C}$ medible, se tiene que

$$\int_{A_l} f d\mathbb{P}_l = \frac{1}{2^{m-n}} \sum_{k\in A_l} f(k).$$

Por tanto, si definimos $f(k) = \mu(R_{n,k})$ para todo $k \in A_l$, tenemos usando la desigualdad (3.7) que

$$\left(\frac{1}{2^{m-n}} \sum_{k\in A_l} \mu(R_{n,k})\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2^{m-n}} \sum_{k\in A_l} \mu(R_{n,k})^{p/2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}(2^n \mu_{|\Gamma_m}(W_{n,l}))^{p/2} &= 2^{mp/2}\left(\frac{1}{2^{m-n}}\sum_{k\in A_l}\mu(R_{n,k})\right)^{p/2}\\ &\leq 2^{mp/2}\frac{1}{2^{m-n}}\sum_{k\in A_l}\mu(R_{n,k})^{p/2}.\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_p(j_{n,m})^p \approx \sum_{l=0}^{2^n-1}(2^n\mu_{|\Gamma_m}(W_{n,l}))^{p/2} &\leq \frac{1}{2^{m-n}}\sum_{k=0}^{2^m-1}(2^m\mu(R_{m,k}))^{p/2}\\ \lesssim \frac{1}{2^{m-n}}\sigma_p(j_{m,m})^p.\end{aligned}$$

Basta entonces tomar raíz p-ésima para deducir que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \lesssim \left(\frac{1}{2^{1/p}}\right)^{m-n}\sigma_p(j_m, m),$$

como queríamos probar.

(ii) Supongamos ahora que $n > m$. La idea consiste en escribir nuestro espacio X_n como suma directa de espacios de la misma dimensión que X_m:

$$X_n = \bigoplus_{k=0}^{2^{n-m}-1} z^{l_k} X_m,$$

donde $l_k = 2^n + (k-1)2^m$, para $k \in \{0, ..., 2^{n-m}-1\}$.
Si llamamos $Y_k = z^{l_k} X_m$, entonces podemos escribir nuestro operador $j_{n,m}$ como la suma

$$j_{n,m} = \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} j_{n,m|Y_k}.$$

El siguiente paso es estimar $\sigma_p(j_{n,m|Y_k})$ para cada k. Fijemos entonces $k \in \{0, ..., 2^{n-m}-1\}$. Definimos los operadores $A : Y_k \to X_m$ y $B : L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \to L^2(\mu_{|\Gamma_m})$ de forma que $Af = z^{-l_k} f$ y $Bf = z^{l_k} f$. Observemos que por nuestra definición de Y_k A está bien definida y es una isometría. Es más, se tiene que $j_{n,m|Y_k} = B \circ j_{m,m} \circ A$:

$$\begin{array}{ccc} Y_k & \xrightarrow{j_{n,m|Y_k}} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \\ \Big\downarrow A & & B\Big\uparrow \\ X_m & \xrightarrow{j_{m,m}} & L^2(\mu_{|\Gamma_m}) \end{array}$$

Veamos que B es acotado. Para ello, observemos que si $z \in \Gamma_m$ entonces

$$|z|^{l_k} \leq \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)^{l_k} = \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1} l_k/2^{m+1}}.$$

Ahora, basta observar que la sucesión $\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}}$ converge a e^{-1} y es estrictamente creciente, por lo tanto todos los miembros de la sucesión estarán acotados por e^{-1}. Así, obtenemos dada $f \in L^2(\mu_{|\Gamma_m})$

$$\int_{\Gamma_m} |z|^{2l_k} |f(z)|^2 d\mu \leq (1/e)^{\frac{2l}{2^{m+1}}} \|f\|^2_{L^2(\mu_{|\Gamma_m})}.$$

Por tanto, deducimos que

$$\sigma_p(j_{n,m_{|Y_k}}) \leq \|A\| \, \sigma_p(j_{m,m}) \, \|B\| \leq (1/e)^{\frac{l_k}{2^{m+1}}} \sigma_p(j_{m,m}).$$

Ahora, si recordamos que $l_k = 2^n + (k-1)2^m$ obtenemos que

$$\sigma_p(j_{n,m_{|Y_k}}) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}(2^{n-m}+(k-1))} \sigma_p(j_{m,m}) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+(k-1))} \sigma_p(j_{m,m})$$

Usaremos esta acotación para obtener la desigualdad que queremos probar.
Si $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_p(j_{n,m}) &= \sigma_p\left(\sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} j_{n,m_{|Y_k}}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \sigma_p(j_{n,m_{|Y_k}}) \leq \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+(k-1))} \sigma_p(j_{m,m}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}\Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{2^{n-m}-1} \Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^k \sigma_p(j_{m,m}) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{e}}\Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{2^{n-m}} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^k \sigma_p(j_{m,m}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{2^{n-m}} \sigma_p(j_{m,m}).
\end{aligned}$$

Basta observar ahora que

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{2^{n-m}} \leq \Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{n-m}$$

y obtenemos que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq \frac{1}{\sqrt{e}-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{e}}\Big)^{n-m}\sigma_p(j_{m,m}),$$

como queríamos.
Tomemos ahora $0 < p < 1$. Como ya ha ocurrido otras veces, debemos afinar más el razonamiento en el caso de la cuasinorma, ya que no disponemos de la desigualdad triangular.
Primero, observemos que existe $N > 0$ de forma que $\frac{4^{1/p}}{\sqrt{e^N}} \leq \frac{1}{2}$. Vamos a intentar dividir nuestra suma en bloques como hicimos en la prueba de la proposición 3.2.5. Tomemos

$$\alpha = \left\lfloor \frac{2^{n-m}-1}{N} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor\cdot\rfloor$ denota la parte entera. Entonces está claro que podemos escribir

$$j_{n,m} = \sum_{r=0}^{\alpha-1}\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1} j_{n,m|Y_k} + \sum_{k=\alpha N}^{2^{n-m}-1} j_{n,m|Y_k}.$$

Por tanto, gracias a la proposición 1.4.11 se tiene que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq \sum_{r=0}^{\alpha-1}(4^{1/p})^{r+1}\sigma_p\left(\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1} j_{n,m|Y_k}\right) + (4^{1/p})^{\alpha+1}\sigma_p\left(\sum_{k=\alpha N}^{2^{n-m}-1} j_{n,m|Y_k}\right).$$

Ahora, dada $r = 0, ..., \alpha - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_p\left(\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1} j_{n,m|Y_k}\right) &\leq (4^{1/p})\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1}(4^{1/p})^{k-rN}\sigma_p(j_{n,m|Y_k}) \\
&\leq (4^{1/p})\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1}(4^{1/p})^{k-rN}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+(k-1))}\sigma_p(j_{m,m}) \\
&\leq \frac{(4^{1/p})^{N+1}}{\sqrt{e}}N\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+rN)}\sigma_p(j_{m,m}),
\end{aligned}$$

donde usamos que $(4^{1/p})^{k-rN} \leq (4^{1/p})^N$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+k)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+rN)}$ para todo k.

Además,

$$\begin{aligned}
\sigma_p\left(\sum_{k=\alpha N}^{2^{n-m}-1} j_{n,m|Y_k}\right) &\leq (4^{1/p}) \sum_{k=\alpha N}^{2^{n-m}-1} (4^{1/p})^{k-rN} \sigma_p(j_{n,m|Y_k}) \\
&\leq (4^{1/p}) \sum_{k=\alpha N}^{(\alpha+1)N-1} (4^{1/p})^{k-rN} \sigma_p(j_{n,m|Y_k}) \\
&\leq \frac{(4^{1/p})^{N+1}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+\alpha N)} \sigma_p(j_{m,m})
\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_p(j_{n,m}) &\leq \sum_{r=0}^{\alpha-1} (4^{1/p})^{r+1} \sigma_p\left(\sum_{k=rN}^{(r+1)N-1} j_{n,m|Y_k}\right) + (4^{1/p})^{\alpha+1} \sigma_p\left(\sum_{k=\alpha N}^{2^{n-m}-1} j_{n,m|Y_k}\right) \\
&\leq (4^{1/p}) \sum_{r=0}^{\alpha} (4^{1/p})^r \frac{(4^{1/p})^{N+1}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{(2^{n-m}+rN)} \sigma_p(j_{m,m}) \\
&= \frac{(4^{1/p})^{N+2}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2^{n-m}} \sum_{r=0}^{\alpha} \left(\frac{4^{1/p}}{\sqrt{e}^N}\right)^r \sigma_p(j_{m,m}) \\
&\leq \frac{(4^{1/p})^{N+2}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2^{n-m}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{4^{1/p}}{\sqrt{e}^N}\right)^r \sigma_p(j_{m,m}) \\
&\leq \frac{(4^{1/p})^{N+2}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2^{n-m}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r \sigma_p(j_{m,m}) \\
&= \frac{(4^{1/p})^{N+2}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2^{n-m}} \sigma_p(j_{m,m}).
\end{aligned}$$

De nuevo, usando que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{2^{n-m}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n-m}$$

deducimos

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq \frac{(4^{1/p})^{N+2}}{\sqrt{e}} N \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n-m} \sigma_p(j_{m,m}).$$

y obtenemos lo que buscábamos.

Hemos conseguido así para cada $0 < p < \infty$ dos cotas de la forma

$$\begin{aligned}
\sigma_p(j_{n,m}) &\leq \alpha b^{m-n} \sigma_p(j_{m,m}), \quad (n < m) \\
\sigma_p(j_{n,m}) &\leq \alpha' (b')^{n-m} \sigma_p(j_{m,m}), \quad (n > m)
\end{aligned}$$

donde $\alpha, \alpha' > 0$ y $b, b' \in (0,1)$. Por tanto, basta tomar $C = \text{máx}\{\alpha, \alpha'\}$ y $a = \text{máx}\{b, b'\}$ para obtener
$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq C a^{|n-m|} \sigma_p(j_{m,m}),$$
lo que concluye la prueba. □

Con esto ya podemos finalizar la prueba del teorema de Luecking:

Demostración del teorema 3.3.1
Tenemos por el corolario 3.3.7 que

$$\sigma_p(j_{n,n}) \approx \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Además, por el corolario anterior existen $C > 0$, $a \in (0,1)$ de forma que

$$\sigma_p(j_{n,m}) \leq C a^{|n-m|} \sigma_p(j_{m,m}).$$

Finalmente, gracias a la proposición 3.2.5 se tiene que

$$\sigma_p(j_\mu) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_p(j_{n,n})^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2^n \mu(R_{n,j}))^{p/2} \right)^{1/p},$$

como queríamos probar. □

Finalizamos el capítulo exponiendo una aplicación del teorema de Luecking. Necesitamos introducir el siguiente concepto:

Definición 3.3.9. Sea μ una medida boreliana finita en $\mathbb{D}$. Dado $\alpha \geq 1$, diremos que μ es una **medida α-Carleson** si existe $K > 0$ tal que

$$\mu(W(b,h)) \leq K h^\alpha$$

para todo $b \in \mathbb{T}$, $0 < h \leq 1$.

Notemos que si $\alpha = 1$ entonces μ es una medida de Carleson.
Se tiene

Corolario 3.3.10. *Sea μ medida boreliana finita en $\mathbb{D}$ y supongamos que μ es α-Carleson, con $\alpha > 1$. Entonces $j_\mu \in S_p(H^2, L^2(\mu))$ para todo $p > \frac{2}{\alpha-1}$.*

Demostración.
Observemos primero que
$$R_{n,j} \subseteq W(e^{2^{-n}(2j+1)i\pi}, 2^{-n}),$$

para todo n, j. Por tanto, está claro que

$$\mu(R_{n,j}) \leq \mu(W(e^{2^{-n}(2j+1)i\pi}, 2^{-n})) \leq K 2^{-n\alpha},$$

usando que μ es α-Carleson. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}(2^n\mu(R_{n,j}))^{p/2} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}(2^n K\Big(\frac{1}{2^n}\Big)^{\alpha})^{p/2} = K^{p/2}\sum_{n=0}^{\infty}2^n(2^n)^{p/2}(2^{-n\alpha})^{p/2}\\ &= K^{p/2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{n[1-(\alpha-1)p/2]}.\end{aligned}$$

Además, como $1-(\alpha-1)\frac{p}{2} < 0$, se tiene que la última serie es convergente. Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^n-1}(2^n\mu(R_{n,j}))^{p/2} < \infty$$

y por tanto $j_\mu \in S_p(H^2, L^2(\mu))$, como queríamos probar. $\square$

Si traducimos este resultado para operadores de composición, obtenemos

Corolario 3.3.11. *Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ y $|\varphi^*| < 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Supongamos además que m_{φ^*} es α-Carleson para $\alpha > 1$. Entonces $C_\varphi \in S_p(H^2)$ para todo $p > \frac{2}{\alpha-1}$.*

Apéndice A

Convergencia débil

A lo largo del trabajo hemos usado en repetidas ocasiones el concepto de convergencia débil de sucesiones.
El objetivo de este apéndice es presentar y describir la topología débil de los espacios de Hilbert y la convergencia asociada a dicha topología.

Definición A.0.1. Dado un espacio de Hilbert complejo y separable H, definimos su **topología débil** $\sigma(H)$ como la topología inicial de H^*.

Es decir, la topología inicial de H es la topología menos fina que hace continuas a todos los funcionales lineales que son continuos con la topología de la norma, a la que nos referiremos de ahora en adelante como **topología fuerte.**
Ahora, fijado $x_0 \in H$, vamos a proporcionar una base de entornos de $\sigma(H)$ para x_0. Basta considerar los conjuntos de la forma

$$\{x \in H : |(x - x_0, y_i)| < r, i = 0, \cdots, k\}$$

con $y_i \in H$, $r > 0$.
Una vez que tenemos descrita la topología débil, el siguiente paso es discutir sobre la *convergencia* que induce. Si $x_n \to x$ en $\sigma(H)$, diremos que x_n **converge débilmente** a x y lo denotaremos como

$$x_n \rightharpoonup x.$$

En contrapartida, y cuando haya lugar a confusión, llamaremos a la convergencia usual en la topología de la norma convergencia fuerte.
Además, diremos que una aplicación lineal T entre dos espacios de Hilbert es **débilmente continua** si es continua respecto a las topologías débiles de ambos espacios.
Estudiemos ahora las propiedades más básicas de la convergencia débil y su relación con la fuerte:

Proposición A.0.2. *Sean H, H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Se tiene:*

(a) $x_n \rightharpoonup x$ *si y solo si* $(x_n, y) \to (x, y)$ *para todo* $y \in H$.

(b) Si $x_n \to x$ *fuertemente, entonces* $x_n \rightharpoonup x$.

(c) Si $x_n \rightharpoonup x$, *entonces* x_n *está acotada y*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$$

.

(d) Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, *entonces* T *es débilmente continuo.*

Demostración.

(a) Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$, y sea $y \in H$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Tenemos entonces que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$|(x_n - x, y)| < \varepsilon,$$

gracias a la descripción de la base de entornos de x realizada anteriormente. Por tanto, $(x_n, y) \to (x.y)$, como queríamos.
Recíprocamente, tomemos $y_0, ..., y_k \in H$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ $|(x_n, y_i) - (x, y_i)| < \varepsilon$ para cada i. Así, se sigue que $x_n \rightharpoonup x$.

(b) Basta observar que dado $y \in H$

$$|(x_n, y) - (x, y)| \leq \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0.$$

(c) Basta observar que para cada $y \in H$ el conjunto $(x_n, y)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado, al ser una sucesión convergente. Aplicando Banach-Steinhaus se tiene que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Por otro lado,

$$|(x_n, y)| \leq \|x_n\| \, \|y\| \,,$$

y tomando límite

$$|(x, y)| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \, \|y\| \,.$$

Finalmente

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |(x, y)| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \,.$$

(d) Observemos que como la topología débil es la topología inicial generada por todos los funcinales de H_1, bastará probar que $\Phi \circ T$ es continua para todo $\Phi \in H_2*$, lo cual es trivial por composición. $\square$

Corolario A.0.3. *Sea* (e_n) *una sistema ortonormal en* H*. Entonces* $e_n \rightharpoonup 0$*.*

Demostración.
Sea $x \in H$. Hay que probar que $(x, e_n) \to 0$.
Para ello, sabemos por la desigualdad de Bessel que

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Además, la serie de la derecha es convergente y $|(x, e_n)|^2 \to 0$, como queríamos. □
Ahora veremos el teorema de Banach-Alaoglu, un resultado fundamental que pone de manifiesto la utilidad de la topología débil en los espacios de Hilbert.
Primero, necesitaremos la siguiente definición:

Definición A.0.4. Un subconjunto $K \subseteq H$ se dice **débilmente secuencialmente compacto** si para cada sucesión (x_n) en K podemos extraer una subsucesión (x_{n_k}) de forma que existe $x \in H$ tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x$$

.

Teorema A.0.5 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *La bola unidad cerrada de un espacio de Hilbert* H *es débilmente secuencialmente compacta.*

Demostración.
Tomemos (x_n) sucesión en B_H y sea (e_n) una sucesión densa en H. Gracias al argumento de la diagonal de Cantor, podemos extraer una subsucesión (x_{n_k}) de forma que $(x_{n,m}, e_k)$ converge para cada $k \in \mathbb{N}$ cuando $m \to \infty$. Tomemos

$$v(e_k) := \lim_{m \to} (x_{n_m}, e_k).$$

Observemos que

$$|v(x_k)| = \lim_{m \to \infty} |(x_{n_m}, e_k)| \liminf_{m \to \infty} \|x_{n_m}\| \, \|e_k\| \leq \|e_k\| \, .$$

Así, tenemos que v es un operador lineal y continuo definido en un subconjunto denso de H(el espacio generado por (e_k)).
Finalmente, extendemos v a todo H y obtenemos

$$\lim_{m \to \infty} (x_{n_m}, x) = v(x)$$

para todo $x \in H$. Basta ahora tomar $y \in H$ tal que $v(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$ por el teorema de representación de Riesz y por tanto

$$x_{n_k} \rightharpoonup y,$$

lo que prueba que B_H es débilmente secuencialmente compacto. □

Finalmente, veamos que los operadores compactos se comportan muy bien con la convergencia débil, en el sentido de que llevan sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes, como vemos en el siguiente teorema:

Teorema A.0.6. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, y sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Entonces T es compacto si y solo si*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx.$$

Demostración.
Supongamos que T es compacto. Por linealidad, bastará probar que si $x_n \rightharpoonup 0$, entonces $Tx_n \to 0$.
Sabemos que x_n está acotada, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que se mantiene en $\overline{B_{H_1}}$. Por tanto, $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(\overline{B_{H_1}})$. Ahora, como T es compacto, podemos extraer una subsucesión convergente, es decir, existe $y \in H_2$ tal que

$$Tx_{n_k} \to y,$$

pero $x_{n_k} \rightharpoonup 0$ y T es débilmente continuo por ser continuo en la topología fuerte, por lo que $Tx_{n_k} \to 0$, y así $y = 0$. Finalmente, como 0 es el único punto de acumulación de $\{Tx_n\}$ y la sucesión está contenida en un compacto, obtenemos que $\|Tx_n\| \to 0$, como queríamos probar.
Recíprocamente, notemos por el teorema de Banach-Alaoglu que $\overline{B_{H_1}}$ es débilmente secuencialmente compacta. Así, si (x_n) es una sucesión en $\overline{B_{H_1}}$, podemos extraer una subsucesión tal que

$$x_{n,k} \to x \in H_1.$$

Ahora, por hipótesis tenemos que $Tx_{n_k} \to Tx$, por tanto $T(\overline{B_{H_1}})$ es secuencialmente compacto y T es compacto, como queríamos. □

Bibliografía

[1] D. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser Basel, 2003.

[2] C. Cowen, B MacCluer, Composition Operators on Analytic Function Spaces, CRC Press, 1995.

[3] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, New York, 1995.

[4] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Dover, New York, 2003.

[5] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., Volume 130 (1973), 309-317.

[6] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.

[7] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez Piazza, Some examples of compact composition operators on H^2, J. Funct. Anal. 255 (2008) 3098-3124.

[8] P. Lefèvre, L. Rodríguez Piazza, Absolutely summing Carleson embeddings on Hardy spaces, arXiv: 1610.002246v2.

[9] D.H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 73 (1987) 345-368.

[10] J.R. Retherford, Compact Operators and the Trace Theorem, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[11] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1987.

[12] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] E. Stein, R. Shakarchi, Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces, Princeton University Press, Princeton, 2005.

[14] E. Stein, R. Shakarchi,Complex Analysis, Princeton University Press, Princeton, 2005.

[15] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York, 1990.