



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y
ANÁLISIS NUMÉRICO

ECUACIONES Y SISTEMAS EN
DIFERENCIAS. APLICACIONES DE LA
DINÁMICA DE POBLACIONES

Javier Fernández Rodríguez

Supervisado por:
Manuel Delgado Delgado
Antonio Suárez Fernández

Resumen

Equations and systems in differences have acquired great relevance with the study and simulation of discrete models in the different disciplines that model and study the discrete systems.

Equations in linear differences have their importance in the study of population dynamics, that is, the study of biological populations from the point of view of their size, age and sex and other parameters than those define. Population dynamics uses mathematical equations to model the behaviour of populations, in order to predict the numerical changes that populations suffer, determine their causes, predict their behavior and analyse their ecological consequences.

One of the most common models of population growth is the so-called *Leslie* model, developed in the 1940s, which describes the growth of the female part of a population by classifying females by age at intervals of equal number of years. An alternative to *Leslie's* model is the one known as the *Lefkovich* model, which divides individuals from the population in stages instead of age classes.

If we become interested in changing a system over time, the term discrete dynamic system will appear and together with it, the distinction between linear and non-linear dynamic systems, being *Ricker's* model one of the most influential among the non-linear ones based on the evolution of a salmon population. This study will lead us to observe that certain models can go from having a deterministic behavior to a chaotic behavior, thus introducing Chaos Theory and, therefore, the difficulty of specifying (and, consequently, of predicting) in detail the long-term behavior of the system's orbits.

Resumen

Las ecuaciones y sistemas en diferencias han adquirido una gran relevancia con el estudio y simulación de modelos discretos en las diferentes disciplinas que modelan y estudian los sistemas discretos.

Las ecuaciones en diferencias lineales tienen su importancia en el estudio de dinámica de poblaciones, esto es, el estudio de las poblaciones biológicas desde el punto de vista de su tamaño, estructuración en edad y sexo y otros parámetros que las definen. La dinámica de población modela mediante ecuaciones matemáticas el comportamiento de las poblaciones, para así poder predecir los cambios numéricos que sufren, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas.

Uno de los modelos más comunes del crecimiento poblacional es el llamado modelo de *Leslie*, desarrollado en la década de 1940, el cual describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años. Una alternativa al modelo de *Leslie* es el que se conoce como modelo de *Lefkovich*, el cual clasifica a los individuos de la población en etapas, en lugar de clases de edades.

Interesándonos por el cambio de un sistema en el tiempo aparecerá el término de sistema dinámico discreto y con él, la distinción entre sistemas dinámicos lineales y no lineales, siendo el modelo de *Ricker* uno de los más influyentes dentro de los no lineales basado en la evolución de una población de salmones. Este estudio nos llevará a observar que ciertos modelos pueden pasar de tener un comportamiento determinista a un comportamiento caótico, introduciendo así la Teoría del Caos, y por tanto, la dificultad de precisar (y, en consecuencia, de predecir) con detalle el comportamiento a largo plazo de las órbitas del sistema.

Índice general

Presentación	4
1. Ecuaciones y sistemas en diferencias	8
1.1. Introducción	8
1.2. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden	9
1.3. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden	10
1.3.1. Resolución de la ecuación homogénea	13
1.3.2. Resolución de la ecuación completa	14
1.4. Sistema de ecuaciones en diferencias	19
2. Modelos discretos matriciales	22
2.1. Introducción	22
2.2. Cadenas de Markov	22
2.2.1. Matrices estocásticas	23
2.2.2. Diagrama de estados	24
2.2.3. Cadenas de Markov regulares	25
2.2.4. Propiedades de las matrices estocásticas	27
2.2.5. Aplicación en la genética. Herencia autosómica	35
2.3. Modelo discreto exponencial	39
2.4. Modelo discreto matricial	40
2.5. Modelo de Leslie	42
2.5.1. Introducción	42
2.5.2. Matrices de Leslie	43
2.5.3. Comportamiento en el límite del modelo	47
2.6. Tablas de vida y modelo de Leslie	54
2.6.1. De las tablas de vida al modelo matricial	58
2.7. Modelo de Lefkovitch	61
3. Sistemas dinámicos discretos	66
3.1. Introducción	66
3.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos	66
3.1.2. Conceptos de dinámica discreta	67
3.2. Modelos dinámicos discretos lineales	68

3.3. Modelos dinámicos discretos no lineales	73
3.3.1. Modelo de Ricker	74
3.4. Sistemas caóticos	80
3.5. Aplicación: Parábola logística de May	82
Bibliografía	90

Presentación

El presente trabajo tiene por objetivo abordar el tema de las ecuaciones y sistemas en diferencias, así como analizar y discutir algunos modelos matemáticos que se han desarrollado para estudiar el comportamiento de poblaciones, siendo el modelo de *Leslie* en el que más hincapié haremos.

En el primer capítulo introducimos el concepto de **ecuaciones en diferencias** así como lo que entendemos por solución de la misma. Posteriormente, tras definir el orden de una ecuación en diferencias vemos como este tipo de ecuaciones pueden ser muy útiles para la dinámica de poblaciones explicando el comportamiento de una población. Dicho capítulo se va a centrar en la resolución de las ecuaciones en diferencias lineales de segundo grado, pero antes de nada, debemos realizar un análisis exhaustivo de la existencia y unicidad de soluciones para dichas ecuaciones de un orden arbitrario n .

A partir de dicho momento nos centramos en el análisis de las ecuaciones en diferencias de segundo orden. De forma similar a como hemos visto en asignaturas cursadas en la Universidad de Sevilla (EDO, AED) debemos estudiar en primer lugar la parte homogénea de dichas ecuaciones para después llegar a la solución general de la ecuación completa. En el capítulo se presentan teoremas que tratan sobre estos temas, así como la manera de resolver las ecuaciones en cuestión. Para la resolución de la versión homogénea se recurre al polinomio característico mientras que para llegar a la solución general se hará uso de dos métodos: el método de variación de parámetros o coeficientes indeterminados y un segundo método basado en la expresión del término independiente de la ecuación.

Es preciso comentar que todo lo estudiado va acompañado de ejemplos con el fin de fijar y afianzar lo estudiado. Para finalizar el capítulo nos centramos en los **sistemas en diferencias**; sin embargo, nos interesará sólo el caso más elemental, es decir, con dos variables. Veremos cómo somos capaces de reducir el sistema a una ecuación en diferencias y a partir de ahí, gracias a lo estudiado antes, llegar a la solución del sistema con el que estamos trabajando.

En el segundo capítulo nos interesarán una serie de eventos en la cual la probabilidad de que ocurra uno de ellos depende del evento inmediata-

mente anterior, estamos hablando de las **cadena de Markov**. Con *Andréi Markov* como su máximo defensor introduciremos el concepto de matriz estocástica y con ella, intentaremos dar respuesta a cómo se distribuye una población a lo largo del tiempo, es decir, llegaremos a la ecuación:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots$$

donde A será la matriz estocástica formada por las probabilidades de transición y $\vec{X}(t)$ la distribución de la población en el instante t . Hablaremos, además, de lo que se conoce como diagrama de estados, siendo una herramienta capaz de mostrar el comportamiento dependiente del tiempo de un sistema de información. Como hemos indicado anteriormente, todo esto irá acompañado de sus correspondientes ejemplos con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos.

A continuación, nos centraremos en el estudio del comportamiento a largo plazo de la cadena de *Markov*, para ello, nos ocuparemos de las llamadas cadenas de *Markov* regulares. Posteriormente, enunciaremos una serie de resultados que caracterizarán a las matrices estocásticas lo que nos llevará a observar que la distribución de una población en un instante t dependerá únicamente de la distribución inicial ($\vec{X}(0)$) y de la potencia t -ésima de la matriz A . Luego nuestro objetivo pasará a ser calcular dicha matriz potencia y plasmaremos tres formas distintas de hacerlo: mediante el software *Mathematica*, apoyándonos en un teorema previamente citado o a partir de la definición de matriz diagonalizable. Por último, como aplicación, recurriremos a un concepto biológico: la herencia autosómica, veremos así como las cadenas de *Markov* pueden ser muy útiles para dar respuesta a diferentes cuestiones de la genética.

Introducimos ahora dos modelos discretos con diferencias importantes. En primer lugar, interesándonos por el crecimiento de poblaciones donde la población de la especie después de un período de tiempo es un múltiplo constante de la población en el periodo anterior (**modelo discreto exponencial**) llegaremos a la conclusión de que dicho modelo es muy simplista pues parte de la hipótesis de que todos los individuos son iguales. Esto nos llevará a tratar el **modelo discreto matricial** en el que la población estará distribuida por edades, todo esto nos llevará a estudiar el modelo más importante del capítulo: **Modelo de Leslie**.

Comienza ahora una parte muy importante del trabajo; atendiendo al modelo simplista previamente estudiado, los investigadores *Bernardelli y Lewis (1942)* dividieron la población en clase de edades y, más tarde, *Leslie* construyó la teoría y un modelo basado en un conjunto de ecuaciones en diferencias, una para cada clase de edad. Veremos como *Leslie* se apoya en la hipótesis de que la población consiste enteramente de hembras y, por consiguiente, su modelo se ocupará de describir el crecimiento de la parte fe-

menina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años. De manera análoga a lo que hacíamos con el caso de matrices estocásticas, nos interesaremos ahora en las llamadas: matrices de *Leslie*. Y con ello, estudiando las propiedades de los valores y vectores propios de la matriz L de *Leslie* llegaremos a conocer el comportamiento de la población para tiempos suficientemente grandes.

Apoyándonos en una serie de resultados llegaremos a la conclusión de que cada vector de la distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante el valor propio positivo dominante de la matriz de *Leslie*.

A continuación introduciremos el concepto de **tablas de vida** y cómo, a partir de la definición de una serie de conceptos, se relaciona con el modelo matricial previamente estudiado. Finalmente, hablaremos acerca del **modelo de Lefkovitch** y sus diferencias con el modelo de *Leslie*, siendo la más importante que en este modelo dividiremos a los individuos de la población en etapas en vez de clases de edades.

En el último capítulo nos va a interesar lo relacionado con los **sistemas dinámicos discretos**, como el propio nombre dice, nuestra preocupación va a ser el cambio de un sistema a lo largo del tiempo. Como mera introducción histórica presentaremos dos modelos de sistemas dinámicos encargados del estudio de la evolución de la población de una determinada especie: la ecuación de *Malthus* y la parábola logística de *May*. Tras este paréntesis llegamos a una ecuación en diferencias capaz de dar respuesta al sistema dinámico en cuestión,

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dicha ecuación nos acompañará a lo largo de todo este capítulo. Nuestro estudio va a depender ahora de la forma que tenga la función f , dando lugar así, a los **modelos dinámicos discretos lineales y no lineales**.

Tratamos en primer lugar los modelos lineales, es decir, aquellos en los que:

$$f(x_k) = mx_k + b.$$

Nos ocupamos ahora del estudio de los puntos de equilibrio del modelo dinámico tipo lineal. Enunciaremos un teorema que nos garantizará la existencia y unicidad del punto de equilibrio de nuestro modelo, así como, la convergencia de carácter global del modelo dinámico lineal estudiado con sus correspondientes acotaciones de error. Una vez probado dicho resultado, y deducida la expresión del punto de equilibrio (único), ya estamos en condiciones de clasificar dicho punto, siendo en este caso muy importante el valor que tome m .

Nos disponemos ahora a estudiar los modelos dinámicos discretos no lineales. A diferencia de lo que ocurría con los modelos lineales, en este caso obtendremos muchos puntos de equilibrio los cuales van a estar caracterizados por la pendiente de la curva $f(x)$. Tras probar el resultado que nos da la caracterización de dichos puntos (resultado de convergencia local), veremos en un ejemplo como una variación muy pequeña de los datos puede provocar grandes cambios en los resultados obtenidos. Para ello nos será de una gran ayuda lo que se conoce con el nombre de: *Diagrama de Cobweb*, una construcción a partir de la cual podremos observar el comportamiento de la población que estamos estudiando. Como aplicación estudiaremos en profundidad el **Modelo de Ricker**.

Para finalizar el capítulo, entraremos de lleno en los **sistemas caóticos** y, por consiguiente, con la revolución científica llamada Teoría del Caos con *Edward Lorenz* como su máximo exponente. Como conclusión del trabajo y como aplicación de la Teoría del Caos, abordaremos la ecuación de la parábola logística de *May* y veremos como este modelo puede pasar de tener un comportamiento determinista a un comportamiento caótico modificando los valores de un determinado parámetro.

Capítulo 1

Ecuaciones y sistemas en diferencias

1.1. Introducción

Las **ecuaciones en diferencias** han adquirido una importancia relevante con el creciente estudio y simulación de modelos discretos en las diferentes disciplinas que modelan y estudian sistemas discretos como la Ingeniería y la Economía, dado que este tipo de modelado es más ajustado a la realidad. Por otra parte, es un área muy importante en otras ciencias como las Matemáticas lo cual nos permite ver que tiene un extenso campo teórico como práctico.

Definición 1.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión $F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0. \quad (1.1)$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y_t que la cumpla para $t = 0, 1, \dots$

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

Definición 1.1.2 *Llamamos orden de la ecuación a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y .*

1.2. Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Definición 1.2.1 Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como:

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t), \quad (1.2)$$

donde $p_i(t)$ $i=1,2$ y $q(t)$ son funciones de la variable t .

Aplicación 1.2.1 (Dinámica de poblaciones) Este tipo de ecuaciones que estamos tratando tienen su importancia en el estudio de dinámica de poblaciones. Así pues, consideramos la ecuación en diferencias siguiente:

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t),$$

donde $p(t)$ representa el crecimiento de la población en el instante t , y_t el tamaño de la población en el instante t , mientras que $q(t)$ indica el número de individuos que se incorporan a la población.

Lo vemos en el siguiente **ejemplo**:

- Supongamos que una determinada población con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación como proceso de inmigración. Modelamos este enunciado y lo tratamos como un problema en diferencias, del enunciado obtenemos:

$$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100,$$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \times 100 + 10 \\ y_2 &= 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10 \\ y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10 \end{aligned}$$

por recursión obtenemos:

$$\begin{aligned} y_t &= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \dots + 2 \times 10 + 10 = \\ &= 2^t \times 100 + (2^{t-1} + 2^{t-2} + \dots + 2^1 + 2^0) \times 10 \end{aligned}$$

utilizamos ahora la fórmula que nos da la suma en t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

$$y_t = 110 \times 2^t - 10$$

1.3. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden

Definición 1.3.1 Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t), \quad (1.3)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t .

Nota 1.3.1 Si la función $q(t) = 0$, entonces (1.3) se trata de la ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si las funciones p_i son constantes, entonces, estamos hablando de una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes.

A continuación, enunciamos un teorema que nos garantiza la existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal de orden arbitrario n .

Teorema 1.3.1 (Existencia y unicidad de solución) Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \dots + p_n(t)y_t = 0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, \dots, k_{n-1} existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \dots, y_{n-1} = k_{n-1}.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \dots, y_{n-1} = k_{n-1},$$

y para los valores de t mayores que $n - 1$, procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_n &= -p_1(0)y_{n-1} - \dots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \dots - p_n(0)k_0 \\ y_{n+1} &= -p_1(1)y_n - \dots - p_n(1)k_1 \end{aligned}$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las ecuaciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1},$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t .

□

En lo que resta, vamos a considerar la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes siguiente:

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0 \quad (1.4)$$

Teorema 1.3.2 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (1.4), entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de (1.4).

Demostración. Sean y_t^1, y_t^2 dos soluciones de (1.4) es decir:

$$\begin{aligned} ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1 &= 0 \\ ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Consideramos $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ y sustituimos en (1.4) para ver si verifica la ecuación:

$$\begin{aligned} a[k_1 y_{t+2}^1 + k_2 y_{t+2}^2] + b[k_1 y_{t+1}^1 + k_2 y_{t+1}^2] + c[k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2] &= \\ k_1[ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1] + k_2[ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2] &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado que tanto y_t^1 como y_t^2 son solución de (1.4). □

Teorema 1.3.3 Si y_t^c es una solución de

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = q(t), \quad (1.5)$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la **ecuación completa (1.5)**

Demostración. Sean y_t^c y y_t^h soluciones de (1.5) y (1.4) respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} ay_{t+2}^c + by_{t+1}^c + cy_t^c &= q(t) \\ ay_{t+2}^h + by_{t+1}^h + cy_t^h &= 0 \end{aligned}$$

Consideramos $y_t^h + y_t^c$ y sustituimos en (1.5) para ver si verifica dicha ecuación:

$$a[y_{t+2}^h + y_{t+2}^c] + b[y_{t+1}^h + y_{t+1}^c] + c[y_t^h + y_t^c] = q(t)$$

Observamos que, efectivamente, $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de (1.5). □

A continuación, veamos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

Teorema 1.3.4 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (1.4), entonces

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (1.4) si:

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2 \end{cases}$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2 , por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 1.3.1 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular $\alpha_1 y \alpha_2$. Para finalizar asignaremos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. □

Definición 1.3.2 A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 1.3.1 le daremos el nombre de sistema fundamental de soluciones.

Teorema 1.3.5 Si y_t^p es una solución particular de

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = q(t), \tag{1.6}$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

es la solución general de (1.6).

Demostración. Sea y_t^p solución particular de (1.6) entonces:

$$ay_{t+2}^p + by_{t+1}^p + cy_t^p = q(t)$$

Ahora bien, sabemos por el Teorema 1.3.4 que $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ es solución de (1.4), por tanto:

$$a[k_1 y_{t+2}^1 + k_2 y_{t+2}^2] + b[k_1 y_{t+1}^1 + k_2 y_{t+1}^2] + c[k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2] = 0$$

Sumando ambas ecuaciones llegamos a que $y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ es solución de (1.6):

$$a[y_{t+2}^p + k_1 y_{t+2}^1 + k_2 y_{t+2}^2] + b[y_{t+1}^p + k_1 y_{t+1}^1 + k_2 y_{t+1}^2] + c[y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2] = q(t)$$

como queríamos demostrar. □

1.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

Consideramos la ecuación homogénea siguiente:

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0,$$

que admitirá solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a\lambda^{t+2} + b\lambda^{t+1} + c\lambda^t = \lambda^t(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0,$$

obteniendo,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1.7}$$

A esta ecuación se la denomina con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

Así pues, la resolución de la ecuación en diferencias homogénea se basa en la búsqueda de raíces de (1.7), obteniendo los siguientes casos:

- Si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas λ_1, λ_2 entonces:

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t$$

forman un sistema fundamental de ecuaciones.

- Si la ecuación característica tiene una raíz doble λ , entonces:

$$y_t^1 = \lambda^t, \quad y_t^2 = t\lambda^t$$

forman un sistema fundamental de ecuaciones.

Nota 1.3.2 *Veamos que efectivamente y_t^2 es solución de la ecuación homogénea y con ello quedaría visto que, junto a y_t^1 , forma un sistema fundamental de ecuaciones.*

Para ver esto, debemos ver que: $a(t+2)\lambda^{t+2} + b(t+1)\lambda^{t+1} + ct\lambda^t = 0$.

$$\begin{aligned} a(t+2)\lambda^{t+2} + b(t+1)\lambda^{t+1} + ct\lambda^t &= \lambda^t[a(t+2)\lambda^2 + b(t+1)\lambda + ct] = \\ &= \lambda^t[t(a\lambda^2 + b\lambda + c) + \lambda(2a\lambda + b)] = 0 \end{aligned}$$

ya que λ es solución de (1.7) ($a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$) y λ es raíz doble, luego: $\lambda = \frac{-b}{2a}$.

□

- Si la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

entonces,

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,$$

forman un sistema fundamental de ecuaciones. En este caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera:

$$y_t = k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t,$$

y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, se obtiene:

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos(t\theta) + i \operatorname{sen}(t\theta)) + k_2 \rho^t (\cos(t\theta) - i \operatorname{sen}(t\theta))$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t (\cos(t\theta) + i \operatorname{sen}(t\theta))$ y $\lambda_2^t = \rho^t (\cos(t\theta) - i \operatorname{sen}(t\theta))$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_1^t + \lambda_2^t) = \rho^t \cos(t\theta) \\ \frac{1}{2i}(\lambda_1^t - \lambda_2^t) = \rho^t \operatorname{sen}(t\theta) \end{cases}$$

la solución general será entonces:

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos(t\theta)) + k_2 \rho^t (\operatorname{sen}(t\theta)).$$

1.3.2. Resolución de la ecuación completa

Consideramos ahora (1.5) y distinguimos dos métodos para su resolución:

Método de variación de parámetros o de coeficientes indeterminados

Empezamos buscando la solución general de la ecuación homogénea e imponemos que las constantes k_1 y k_2 dependan de t :

$$y_t = k_1(t)y_t^1 + k_2(t)y_t^2 \tag{1.8}$$

De esta expresión deducimos que:

$$y_{t+1} = k_1(t+1)y_{t+1}^1 + k_2(t+1)y_{t+1}^2$$

que sumando y restando $k_1 y_{t+1}^1 + k_2 y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$y_{t+1} = k_1(t)y_{t+1}^1 + k_2(t)y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)]y_{t+1}^2$$

A continuación, imponemos que:

$$[k_1(t+1) - k_1(t)]y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)]y_{t+1}^2 = 0 \quad (1.9)$$

y nos queda la ecuación siguiente

$$y_{t+1} = k_1(t)y_{t+1}^1 + k_2y_{t+1}^2 \quad (1.10)$$

la cual, usando el procedimiento anterior, obtenemos que:

$$y_{t+2} = k_1(t)y_{t+2}^1 + k_2(t)y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]y_{t+2}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)]y_{t+2}^2 \quad (1.11)$$

Ahora bien, llevando (1.8), (1.10), (1.11) en (1.5) tenemos:

$$\begin{aligned} & ak_1(t)y_{t+2}^1 + ak_2(t)y_{t+2}^2 + a[k_1(t+1) - k_1(t)]y_{t+2}^1 \\ & + a[k_2(t+1) - k_2(t)]y_{t+2}^2 + bk_1(t)y_{t+1}^1 + bk_2^t y_{t+1}^2 \\ & + ck_1(t)y_t^1 + ck_2(t)y_t^2 = q(t) \end{aligned}$$

Reagrupando y teniendo en cuenta que y_t^1 y y_t^2 son solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma:

$$a[k_1(t+1) - k_1(t)]y_{t+2}^1 + a[k_2(t+1) - k_2(t)]y_{t+2}^2 = q(t) \quad (1.12)$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.12) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1) - k_1(t)$ y $k_2(t+1) - k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y_{t+1}^1 & y_{t+1}^2 \\ ay_{t+2}^1 & ay_{t+2}^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = \frac{-q(t)}{ay_{t+1}^1(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_2(t+1) - k_2(t) = \frac{q(t)}{ay_{t+1}^2(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{cases} \quad (1.13)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$ (siendo λ_1 y λ_2 las raíces de la ecuación característica).

Segundo método

En este método nos fijaremos en el término independiente $q(t)$ para resolver la ecuación en cuestión. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces probaremos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).

- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n , entonces probamos con un polinomio del mismo grado. Ahora bien, si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n + 1$, y si además, tiene multiplicidad γ , probaremos con un polinomio de grado $n + \gamma$.
- Si $q(t)$ es seno o coseno de αt , entonces tomaremos $\beta \sin(\alpha t) + \gamma \cos(\alpha t)$ y determinaremos los valores de dichas constantes.

Ejemplo 1.3.1 *Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es las tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.*

- El problema a estudiar es el siguiente:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{3}{4}(y_{t+1} - y_t) + 25, \quad y_0 = 10, \quad y_1 = 30$$

Luego, la ecuación en diferencias lineal de segundo orden a resolver es:

$$y_{t+2} - \frac{7}{4}y_{t+1} + \frac{3}{4}y_t = 25$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 10$, $y_1 = 30$. Para ello comenzamos resolviendo la ecuación característica correspondiente:

$$\lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{4}$$

Por tanto, la solución de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 + k_2 \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Ahora nos centramos en la resolución de la ecuación completa, para ello vamos a usar el **método de variación de constantes**. Usando (1.13), obtenemos:

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = 100 \\ k_2(t+1) - k_2(t) = \frac{-100}{(\frac{3}{4})^{t+1}} \end{cases}$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k_1(0) + 100 \\ k_1(2) &= k_1(0) + 2 \times 100 \\ k_1(t) &= k_1(0) + 100 \times t \end{aligned}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}k_2(1) &= k_2(0) - \frac{100}{\frac{3}{4}} \\k_2(2) &= k_2(0) - \frac{100}{\frac{3}{4}} - \frac{100}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\k_2(t) &= k_2(0) - 100 \left(\frac{1}{\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^t} \right) \\&= k_2(0) - 100 \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^t} \right)\end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$y_t = k_1(0) + 100 \times t + \left[k_2(0) - 100 \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^t} \right) \right] \left(\frac{3}{4} \right)^t$$

Ahora bien, las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ podemos calcularlas imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}10 &= k_1(0) + k_2(0) \\30 &= k_1(0) + 100 + \left[k_2(0) + \frac{100}{3} \right] \frac{3}{4}\end{aligned}$$

de donde deducimos que: $k_1(0) = 310$ y $k_2(0) = -300$.

Por tanto, la ecuación de los efectivos de la población es:

$$y_t = 310 + 100t + \left[-400 + \frac{100}{\left(\frac{3}{4}\right)^t} \right] \left(\frac{3}{4} \right)^t$$

Ejemplo 1.3.2 *Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,*

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5} \right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = 1, x_1 = 2$$

1. *Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias.*

2. *¿Aumentará esta población a largo plazo?*

■ Consideramos la ecuación en diferencias siguiente:

$$6x_{t+2} + x_{t+1} - x_t = \left(\frac{1}{5} \right)^t \tag{1.14}$$

En primer lugar, resolvemos la versión homogénea de (1.14). Obtengamos:

$$6\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, la solución de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$x_t^h = k_1 \left(\frac{1}{3}\right)^t + k_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^t \quad (1.15)$$

Ahora, nos disponemos a encontrar una solución particular de (1.14). Para ello, hacemos uno del segundo método previamente descrito.

Nuestra solución particular va a ser de la forma:

$$x_t^p = \beta \left(\frac{1}{5}\right)^t \quad (1.16)$$

Sustituyendo en (1.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} 6\beta \left(\frac{1}{5}\right)^{t+2} + \beta \left(\frac{1}{5}\right)^{t+1} - \beta \left(\frac{1}{5}\right)^t &= \left(\frac{1}{5}\right)^t \Rightarrow 6\beta \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \beta \left(\frac{1}{5}\right) - \beta = 1 \\ &\Rightarrow \beta = -\left(\frac{25}{14}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (1.16) obtenemos la solución particular de nuestra ecuación en diferencias:

$$x_t^p = -\left(\frac{25}{14}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^t \quad (1.17)$$

Combinando (1.15) y (1.17) obtenemos la solución general de (1.14):

$$x_t = k_1 \left(\frac{1}{3}\right)^t + k_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^t - \left(\frac{25}{14}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^t \quad (1.18)$$

Ahora, usando las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ calculamos los valores de las constantes en (1.18):

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 + k_2 - \frac{25}{14} \\ 2 &= \frac{1}{3}k_1 - \frac{1}{2}k_2 - \frac{5}{14} \end{aligned}$$

Obtenemos, por tanto, $k_1 = \frac{321}{70}$ y $k_2 = -\frac{9}{5}$.

- Conociendo la expresión de la solución de la ecuación en diferencias (1.18) observamos que a largo plazo la población no va a aumentar. De hecho, si hacemos tender $t \rightarrow \infty$ observamos la población de aves tiende a la desaparición.

1.4. Sistema de ecuaciones en diferencias

Definición 1.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

Ahora bien, nos vamos a centrar en el estudio del caso más elemental:

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) \\ y_{t+1}^2 = a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistemas, vamos a convertirlos en una ecuación en diferencias lineal de segundo orden de coeficientes constantes. Observamos que de la primera ecuación podemos deducir que:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1) \quad (1.19)$$

Sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (1.19):

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1) \quad (1.20)$$

Despejando de la primera ecuación del sistema obtenemos:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t),$$

y sustituyendo en (1.20):

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}(y_t^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)$$

Por último, sacando factor común obtenemos una ecuación en diferencias lineal de segundo orden,

$$y_{t+2}^1 = (a_{11} + a_{22})y_{t+1}^1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_t^1 - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)$$

Ejemplo 1.4.1 *Sea x_t e y_t el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t , que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 100$ e $y_0 = 50$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,*

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{cases}$$

- A partir de la primera ecuación obtenemos que:

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} - 3y_{t+1} \quad (1.21)$$

Ahora, tomando la segunda ecuación y sustituyendo en (2.4) llegamos a:

$$x_{t+2} - x_t = 0 \quad (1.22)$$

que se trata de una ecuación en diferencias de segundo orden de coeficientes constantes.

Para resolverla calculamos la solución de la parte homogénea (en este caso, coincide con la solución de la ecuación en general ya que el término independiente es cero). Luego,

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

dando lugar a la siguiente solución de (2.5)

$$x_t = k_1 + k_2(-1)^t \quad (1.23)$$

Ahora, despejando y_t de la primera ecuación y sustituyendo x_t por la expresión obtenida llegamos a la siguiente expresión de y_t :

$$y_t = \frac{2x_t - x_{t+1}}{3} = \dots = \frac{1}{3}k_1 + k_2(-1)^t \quad (1.24)$$

Ahora bien, para encontrar los valores de k_1 y k_2 , imponemos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} 10 = k_1 + k_2 \\ 5 = \frac{1}{3}k_1 + k_2 \end{cases}$$

Así pues, la solución de este sistema viene dada por $k_1 = \frac{15}{2}$ y $k_2 = \frac{5}{2}$. En consecuencia, sustituyendo en (1.23) y (1.24) la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\begin{cases} x_t = \frac{15}{2} + \frac{5}{2}(-1)^t \\ y_t = \frac{5}{2}(1 + (-1)^t) \end{cases}$$

Capítulo 2

Modelos discretos matriciales

2.1. Introducción

La **dinámica de una población** viene determinada por el número de nuevos nacimientos y la probabilidad de morir que tienen los individuos que componen la población. Por ello, es muy importante saber la estructura de edades de la población que estamos estudiando. Es decir, cómo se reparten los individuos en las diferentes clases de edad y lo que es más importante, conocer las probabilidades asociadas de supervivencia, mortalidad y fecundidad. Generalmente esta información se refleja en una tabla de vida, en la mayoría de los casos correspondiente a las hembras de la población, ya que son las que contribuyen a la dinámica de la población en términos de fecundidad.

El presente capítulo es una introducción al estudio de los modelos estructurados basados en el álgebra matricial. Se inicia con un modelo probabilístico clásico como son las cadenas de *Markov* y se centra fundamentalmente en el estudio de uno de los modelos más conocidos como es el modelo de *Leslie*.

2.2. Cadenas de Markov

Una **cadena de Markov** es una serie de eventos, en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediatamente anterior. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de *Markov* de las series de eventos independientes, como puede ser tirar una moneda al aire o un dado. El análisis de *Markov* (1907), llamado así en honor al matemático ruso **Andréi Markov** (1856-1922), permite encontrar la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado en particular en un momento dado, y así predecir el comportamiento del sistema a través del tiempo.

Supongamos una secuencia de n pruebas o experimentos donde cada uno

de ellos tiene un conjunto de resultados posibles (E_1, E_2, \dots, E_m) . Si al realizar una prueba se obtiene el resultado E_i , entonces diremos que el sistema o el fenómeno se encuentra en el estado E_i . Ahora bien, denotaremos E_i^t al estado E_i al cabo de t pruebas, en consecuencia, $P[E_i^t]$ será la probabilidad de que después de t experiencias el sistema se encuentre en el estado E_i .

Definición 2.2.1 Una sucesión de estados E_1, E_2, \dots, E_m , mutuamente exclusivos constituyen una cadena de Markov cuando

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] = P[E_i^t/E_{j_{t-1}}^{t-1} E_{j_{t-2}}^{t-2} E_{j_{t-3}}^{t-3} \dots E_{j_0}^0] \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m$$

Nota 2.2.1 Con la definición anterior lo que podemos observar es que la probabilidad de que el sistema, tras t pasos, se encuentre en el estado E_i depende exclusivamente del estado E_j en el paso $t - 1$.

Definición 2.2.2 En el caso particular en el que la probabilidad P_{ij}^t sea independiente de la prueba t , diremos que la cadena de Markov es **homogénea**, en cuyo caso escribiremos $P_{ij}^t = P_{ij}$.

Al tratarse de una probabilidad, P_{ij} verifica lo siguiente:

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m P_{ij} = 1 \quad i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

2.2.1. Matrices estocásticas

Si $p_j^t, j = 1, 2, \dots, m$ es la probabilidad de que el objeto o sistema se encuentre en el estado E_j en el experimento t , entonces

$$p_j^t = p_1^{t-1} P_{j1} + p_2^{t-1} P_{j2} + \dots + p_m^{t-1} P_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

Ahora bien, estos números los reagrupamos en un vector columna $\vec{X}(t)$, y con los P_{jk} una matriz cuadrada A . Luego obtenemos lo siguiente:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Dicha matriz A se conoce con el nombre de **matriz estocástica o matriz de transición** y cumple lo siguiente:

- La suma de los elementos de cada una de sus columnas vale 1. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la suma de los elementos de su fila (si esto se cumpliera, recibiría el nombre de doblemente estocástica).
- Todos sus elementos P_{jk} son mayores o iguales que cero y menores o iguales que 1.

2.2.2. Diagrama de estados

Un **diagrama de transición de estados** muestra el comportamiento dependiente del tiempo de un sistema de información. Representa los estados (nodos o vértices) que puede tomar un objeto o un sistema y muestra con qué probabilidad se puede pasar de un estado a otro mediante flechas (aristas).

Ejemplo 2.2.1 *Una tienda de animales que vende peces incluye una garantía por la que cualquier pez que muera antes de cumplir tres meses se reemplaza de forma gratuita. Una vez que el pez se ha reemplazado ya no queda cubierto por la garantía. Se sabe que:*

1. El 3% de los peces mueren durante su primer mes.
2. El 5% de los peces que han cumplido un mes mueren durante el segundo.
3. El 7% de los peces que han cumplido dos meses mueren durante el tercer mes.

- Estamos ante una cadena de *Markov* homogénea con cinco estados: E_i que representa el mes $i = 1, 2, 3$ de garantía, E_4 el pez sin garantía por haber sido repuesto y E_5 el pez sin garantía por tener más de 3 meses.

- Teniendo en cuenta la elección de los estados:

1. $P_{12} = 0.97$ pues sabemos que la probabilidad de que un pez muera en el primer mes es del 3%, luego la de sobrevivir y pasar al segundo mes de garantía será 97%. Además, el 3% de peces que mueren durante el primer mes son reemplazados y pasan a convertirse en peces sin garantía, luego $P_{14} = 0.03$.
2. Con un razonamiento análogo, llegamos a que $P_{24} = 0.05$ pues en este caso, son el 5% de peces los que mueren durante el segundo mes y por consiguiente, al ser reemplazados, pasan a ser peces sin estado de garantía. A partir de esto, llegamos a que el 95% de peces sobreviven en el segundo mes y pasan al tercer mes, luego, $P_{23} = 0.95$.
3. Por último, el 93% de peces que sobreviven al tercer mes pasan a convertirse en peces sin garantía al haber superado el periodo de tres meses, luego $P_{35} = 0.93$. Así pues, el 7% muere y son reemplazados, siendo por tanto, $P_{34} = 0.07$.

Vemos esto reflejado en el diagrama de estados correspondiente a dicho problema:

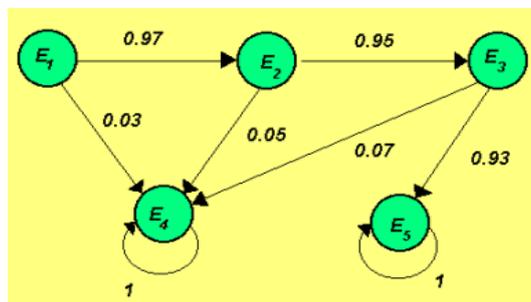


Figura 2.1: Diagrama de estados

- La matriz de transición es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.05 & 0.07 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.93 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3. Cadenas de Markov regulares

Nos centramos a continuación en el **estudio del comportamiento a largo plazo de la cadena de Markov**.

Teorema 2.2.1 Si A^n representa a la potencia n -ésima de la matriz de transición A , entonces $P[E_i^n/E_j^0] = A^n(i, j)$.

Demostración. Vamos a utilizar el método de inducción sobre la potencia n de la matriz de transición. Sean i, j dos valores cualesquiera de $\{1, 2, \dots, m\}$, por definición de los elementos de la matriz A tenemos

$$P[E_i^1/E_j^0] = P_{ij} = A(i, j)$$

Supongamos ahora que el teorema sea cierto para el paso $n - 1$, es decir

$$P[E_i^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(i, j) \quad (2.3)$$

Haciendo uso de la ley de la probabilidad total,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m P[E_k^{n-1}/E_j^0] P[E_i^n/E_k^{n-1}E_j^0]$$

Por (2.3) obtenemos que $P[E_k^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(k, j)$, y por la definición de cadena de Markov $P[E_i^n/E_k^{n-1}E_j^0] = P[E_i^n/E_k^{n-1}] = P_{ik} = A(i, k)$. Es decir,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m A(i, k) A^{n-1}(k, j)$$

que corresponde al elemento de la fila i columna j del producto de las matrices $AA^{n-1} = A^n$.

□

Definición 2.2.3 Una cadena de Markov es **regular** si existe un número natural n tal que la potencia n -ésima de su matriz de transición A tiene todos sus elementos positivos.

Definición 2.2.4 Una cadena de Markov **irreducible** es aquella en la que todos los estados son alcanzables desde cualquier otro estado de la cadena en un número finito de pasos. Eso implica que se puede llegar a cualquier estado E_i desde otro estado E_j esto es $p_{ij}^{(n)} > 0$, para algún número entero n .

Nota 2.2.2 Una cadena regular obviamente es irreducible, sin embargo, lo contrario no tiene por qué ser necesariamente cierto.

Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Suponemos la siguiente matriz de transición de una cadena irreducible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$A^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

y

$$A^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

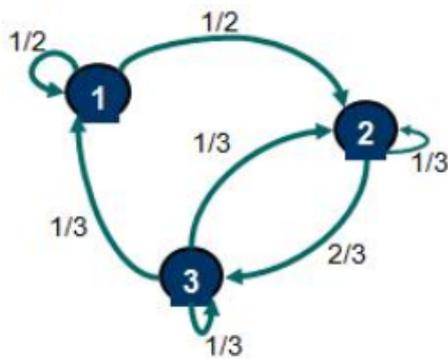
para $n = 1, 2, 3, \dots$ entonces ninguna potencia de A es una matriz positiva y por tanto no define a una cadena regular.

Definición 2.2.5 Se define el **periodo de un estado** i de una cadena de Markov como el máximo común divisor del número de pasos necesarios para volver al estado i supuesto que se ha partido de él. Un estado con periodo 1 se dice **aperiódico**. Así pues, se define una **cadena de Markov aperiódica** como aquella en la que todos sus estados son aperiódicos.

Teorema 2.2.2 Diremos que una cadena de Markov homogénea y finita es regular si y sólo si es irreducible y aperiódica.

Demostración. Ver [5].

□



Consideramos la siguiente cadena de *Markov*. Observamos que dicha cadena es regular pues se cumplen las dos condiciones:

- Todos los estados (1,2,3) son accesibles (cadena irreducible).
- Observamos que todos los estados son aperiódicos; cada estado forma un ciclo de longitud 1 (1 – 1, 2 – 2, 3 – 3) siendo por tanto el periodo de cada estado

igual a 1 (la mera existencia de un ciclo de longitud 1 hace que el estado asociado sea aperiódico). Por tanto, la cadena es aperiódica.

En este caso tendríamos que la matriz de transición y su potencia n -ésima serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

2.2.4. Propiedades de las matrices estocásticas

Teorema 2.2.3 Si A y B son dos matrices estocásticas para las que está definido el producto AB , entonces dicho producto es también una matriz estocástica.

Demostración. Al estar definido el producto AB , el número de columnas de la matriz A es igual que al de filas de B . Sea $A = (a_{ij})$ de p filas y q columnas, y $B = (b_{ij})$ de q filas y r columnas. Se tiene entonces que el elemento ij de la matriz producto C viene dado por:

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^q a_{in}b_{nj}$$

donde i varía desde 1 hasta p y j varía desde 1 hasta r .

Obviamente se tiene que $c_{ij} \geq 0$, por ser no negativos los elementos de las matrices A y B . Quedará demostrado que A es una matriz estocástica si se prueba que:

$$\sum_{i=1}^p c_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Para ello, notemos que:

$$\sum_{i=1}^p c_{ij} = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=1}^q a_{in}b_{nj} \right) = \sum_{n=1}^q \left(\sum_{i=1}^p a_{in}b_{nj} \right) = \sum_{n=1}^q b_{nj} \left(\sum_{i=1}^p a_{in} \right) = \sum_{n=1}^q b_{nj} = 1$$

cualquiera que sea $j = 1, 2, \dots, r$ lo que concluye la demostración. \square

Teorema 2.2.4 *Si A es una matriz de orden n estocástica, entonces tiene al uno como valor propio.*

Demostración. Para facilitar la notación vamos a tomar $n = 3$. La idea de esta demostración es probar que el determinante $|A - I|$ es nulo. Luego,

$$|A - I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{vmatrix}$$

Ahora, sumamos a la primera fila el resto de las filas,

$$|A - I| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{i1} - 1 & \sum_{i=1}^3 a_{i2} - 1 & \sum_{i=1}^3 a_{i3} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{vmatrix}$$

Ahora, al ser A una matriz estocástica sabemos que la suma de los elementos de cada una de sus columnas vale 1, luego:

$$\sum_{i=1}^3 a_{i1} = \sum_{i=1}^3 a_{i2} = \sum_{i=1}^3 a_{i3} = 1$$

y, por lo tanto, el determinante anterior es nulo, tal y como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.2.5 *Si A es una matriz estocástica de orden n con todos sus elementos positivos (regular), entonces la sucesión de matrices A^n , $n = 1, 2, \dots$ converge hacia una matriz que tiene todas sus columnas iguales que coinciden con \vec{u} tal que:*

- $\sum_{j=1}^r u_j = 1$
- La distribución \vec{u} es el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz estocástica A . Esto es, $A\vec{u} = \vec{u}$.

Demostración. Sea

$$t = [t_1(0) \ t_2(0) \ \dots \ t_r(0)]$$

un vector fila arbitrario, y A la matriz cuadrada estocástica de orden n . Para $n = 0, 1, 2, \dots$ sea

$$t(n+1) = At(n).$$

Si se definen

$$M(n) = \max(t_j(n) | j = 1, 2, \dots, r), \quad m(n) = \min(t_j(n) | j = 1, 2, \dots, r)$$

entonces se verifica que

$$\begin{aligned} M(n+1) &\leq M(n) \\ m(n+1) &\geq m(n) \end{aligned}$$

En efecto, tales relaciones son consecuencia del siguiente hecho: de la definición de $m(n)$ y $M(n)$ se sigue que

$$m(n) \leq t_i(n) \leq M(n), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

y como

$$t_j(n+1) = \sum_{i=1}^r a_{ij} t_i(n)$$

resulta

$$t_j(n+1) = \sum_{i=1}^r a_{ij} t_i(n) \geq \sum_{i=1}^r a_{ij} m(n) = m(n) \sum_{i=1}^r a_{ij} = m(n)$$

ya que $\sum_{i=1}^r a_{ij} = 1 \forall j$ al ser la matriz A estocástica. Por consiguiente, todas las componentes del vector $t(n+1)$ son mayores o iguales que $m(n)$, luego el mínimo de las mismas, $m(n+1)$, será mayor o igual que $m(n)$. Un razonamiento análogo demuestra la otra relación, esta vez entre los máximos. Se han construido así dos sucesiones de números reales,

$$\{m(n)\}_{n=0}^{\infty} \quad y \quad \{M(n)\}_{n=0}^{\infty}$$

la primera de las cuales es creciente, y la segunda decreciente. Como obviamente la primera está acotada superiormente - por ejemplo, por $M(0)$ - y la segunda lo está inferiormente, ambas sucesiones convergen. De otra parte, al ser positivos todos los elementos de la matriz A existe un número $c > 0$ tal que $a_{ij} \geq c > 0$. Como se tiene que

$$t_j(n+1) = \sum_{i=1}^r a_{ij} t_i(n),$$

si el mínimo $m(n)$ (para un determinado n) es el elemento $t_k(n)$ del vector t_n , entonces

$$\begin{aligned} t_j(n+1) &= \sum_{i=1, i \neq k}^r a_{ij} t_i(n) + a_{kj} m(n) \leq \sum_{i=1, i \neq k}^r a_{ij} M(n) + a_{kj} m(n) = \\ &= M(n)(1 - a_{kj}) + a_{kj} m(n) = M(n) + a_{kj}(m(n) - M(n)) \leq \\ &\leq M(n) + c(m(n) - M(n)) = (1 - c)M(n) + cm(n) \end{aligned}$$

Puesto que la relación anterior es válida para todo j , se deduce que el máximo $M(n+1)$ de $t(n+1)$ también verifica dicha acotación, es decir:

$$M(n+1) \leq (1-c)M(n) + cm(n). \quad (2.4)$$

Un razonamiento análogo muestra que también se cumple la siguiente relación:

$$m(n+1) \geq (1-c)m(n) + cM(n),$$

de la que se deduce

$$-m(n+1) \leq -(1-c)m(n) - cM(n). \quad (2.5)$$

Sumando (2.4) y (2.5) se obtiene

$$M(n+1) - m(n+1) \leq (1-2c)(M(n) - m(n))$$

y, por tanto,

$$M(N+1) - m(n+1) \leq (1-2c)^{n+1}(M(0) - m(0)).$$

Como el orden de la matriz A es al menos 2, es claro que $c \leq \frac{1}{2}$ por lo que $0 \leq 1-2c < 1$, y esto implica que $(1-2c)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. En consecuencia, los límites de las dos sucesiones $\{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{M(n)\}_{n=0}^{\infty}$ son iguales, y puesto que $m(n) \leq t_j(n) \leq M(n)$, cualquiera que sea $j = 1, 2, \dots, r$, $t_i(n)$ también converge al mismo límite cualquiera que sea j , lo que significa que el vector $t(n)$ converge hacia un vector con todas las componentes iguales. Este vector límite depende en principio del vector inicial elegido.

Si ahora se toma como vector inicial $t(0) =$ el que tiene todas sus componentes iguales a 0 salvo la j -ésima, que es igual a 1, resulta que

$$t(1) = [a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{rj}]$$

es decir, $t(1)$ es j -ésima fila de la matriz A . De manera inmediata se tiene que $t(2)$ es la j -ésima fila de A^2 , y en general $t(n)$ es la j -ésima fila de la matriz A^n , y como dicho vector columna converge hacia un vector con todas sus componentes iguales, la sucesión de matrices $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia una matriz U que tiene la siguiente forma:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_r & u_r & \dots & u_r \end{pmatrix}$$

Claramente los elementos del vector $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]$ son positivos, pues de todo lo anterior se deduce que u_j está comprendido entre el elemento

mínimo y el máximo de la fila j -ésima de la matriz A , y ambos son positivos por hipótesis.

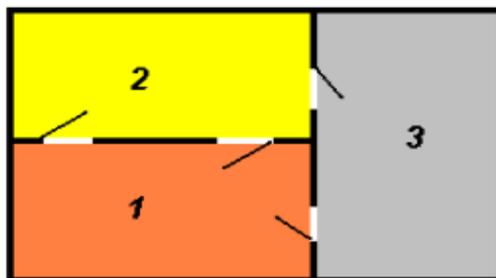
Para ver que \vec{u} es autovector asociado al autovalor 1 de la matriz A , nótese que $AU = A(\lim A^n) = \lim A^{n+1} = U$. Luego la primera columna de U , que es \vec{u} , multiplicada por la matriz A es igual a la primera columna de U . En definitiva:

$$A\vec{u} = \vec{u}$$

Finalmente hay que demostrar que $\sum_{j=1}^r u_j = 1$. Para ello basta observar que, puesto que A es estocástica, todas sus potencias también lo son, por el Teorema 2.2.3. En consecuencia, la suma de las componentes de cada una de las columnas de A^n es igual a la unidad, y lo mismo ocurre para el vector límite de cada una de las columnas que no es otro que el vector \vec{u} . Esto concluye la prueba. □

A continuación, vemos en un ejemplo diferentes formas de calcular la matriz A^t para cualquier instante $t = 0, 1, \dots$

Ejemplo 2.2.2 *Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como indica la figura.*



Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será la distribución de los ratones al cabo de infinitas semanas.

Posteriormente distinguiremos 3 casos para la resolución de dicho problema, pero, en primer lugar calcularemos la matriz de transición (la cuál la necesitaremos para los distintos casos):

Teniendo en cuenta que P_{ij} es la probabilidad de que el objeto se encuentre en el estado i cuando en un tiempo anterior estaba en el estado j ,

obtenemos la siguiente matriz de transición,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora las distintas posibilidades de resolución:

1. En este caso, usaremos la identidad (2.2). Así pues, sean $X_i(t)$ el número de ratones que hay en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ la distribución inicial, obtenemos a partir de la matriz de transición que:

$$\begin{cases} X_1(1) = \frac{2}{3}X_2(0) + \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = \frac{2}{3}X_1(0) + \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = \frac{1}{3}X_1(0) + \frac{1}{3}X_2(0) \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente de la forma:

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)$$

donde,

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$$

De forma análoga, se prueba que $\vec{X}(2) = A^2\vec{X}(0)$, y por tanto, en general se llega a la expresión (2.2).

Así, para dar solución a nuestro problema tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t ; para ello haremos uso del programa *Mathematica*:

```
A := {{0, 2/3, 1/2}, {2/3, 0, 1/2}, {1/3, 1/3, 0}}
MatrixPower[A, 100]
{{0.375, 0.375, 0.375}, {0.375, 0.375, 0.375}, {0.25, 0.25, 0.25}}
```

y en consecuencia, después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia: **0.375 el primero, 0.375 el segundo y 0.25 el tercero.**

2. Ahora, usaremos el concepto de **matriz diagonalizable.**

Definición 2.2.6 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se dice que A es diagonalizable $\Leftrightarrow A$ es semejante a una matriz diagonal $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible cuyos vectores columna son vectores propios de A tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D una matriz diagonal formada por los vectores propios de A .

Observamos que si la matriz A es diagonalizable, entonces la matriz potencia (A^t) sería fácil de calcular pues bastaría elevar a t los elementos de la diagonal de A . Así pues, empezaremos diagonalizando la matriz A :

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & -\lambda & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde deducimos que: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-2}{3}, \lambda_3 = \frac{-1}{3}$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable.

Calculamos ahora la matriz de paso, P . Antes de ello obtenemos los subespacios propios asociados a los autovalores anteriores:

$$S_1 = (3, 3, 2)^T, S_2 = (-1, 1, 0)^T, S_3 = (-1, -1, 2)^T$$

Luego, la matriz de paso sería:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que: $A = PDP^{-1}$ tenemos que $A^t = PD^tC^{-1}$, luego

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

de donde obtenemos,

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(\frac{-2}{3} \right)^t + \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(\frac{-2}{3} \right)^t - \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) \\ \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(\frac{-2}{3} \right)^t + \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(\frac{-2}{3} \right)^t + \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{3}{8} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(\frac{-1}{3} \right)^t \right) \end{pmatrix}$$

por último, hacemos que $t \rightarrow \infty$ y obtenemos la matriz potencia,

$$A^t = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Razonando como en el apartado anterior, obtenemos la distribución de ratones al cabo de infinitas semanas: **0.375 el primero, 0.375 el segundo y 0.25 el tercero.**

3. Haremos uso ahora del Teorema 2.2.5. En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y todos los estados son aperiódicos; en efecto, el periodo del estado E_1 es igual a 1 ($m.c.d(2, 3) = 1$) pues existen los ciclos $E_1 - E_2 - E_3 - E_1$, $E_1 - E_2 - E_1$ y $E_1 - E_3 - E_1$ (de manera análoga con los estados restantes), por tanto, la cadena de *Markov* es aperiódica. Por otro lado, el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3, 3, 2)$. Por tanto,

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8} \right)$$

y, en consecuencia, haciendo $t \rightarrow \infty$ obtenemos la matriz potencia en cuestión:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.2.3 *Se dispone de dos urnas A y B y de dos bolas, una blanca y otra roja, así como de dos monedas. Las bolas pueden estar las dos en A, las dos en B, o una en A y otra en B. Se realiza sucesivamente el siguiente experimento: se lanzan las dos monedas al aire y si salen dos caras, se cambia la bola blanca de urna; si se obtiene una cara y una cruz, es la bola roja la que se cambia. Finalmente, si salen dos cruces se cambian las dos bolas, blanca y roja, de la urna en la que se encuentre cada una a la otra urna. Debemos determinar la situación de las urnas a largo plazo (si estarán vacías, si contienen una bola o las dos bolas).*

Observamos que analizando la situación de la urna A, de forma indirecta se estudia el de la urna B. Los diferentes estados son:

1. E_1 = la urna A se encuentra vacía.
2. E_2 = la urna A contiene la bola blanca.
3. E_3 = la urna A contiene la bola roja.
4. E_4 = la urna A contiene a las dos bolas.

Observamos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al estado E_i sólo depende de i y de j .

Ahora bien, la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces viene dada por $1/4$, mientras que la probabilidad de que salga una cara y una cruz viene dada por $1/2$. Así pues, la matriz de transición para esta cadena es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos ante una cadena de *Markov* regular ya que la matriz A^2 tiene todos sus elementos positivos. En consecuencia, gracias al Teorema 2.2.5, la distribución a largo plazo viene dada por el vector propio (normalizado) asociado al autovalor propio estrictamente dominante $\lambda = 1$.

Recurrimos al programa *Mathematica* para obtener los autovalores y autovectores de la matriz A :

```
A := {{0, 1/2, 1/4, 1/4}, {1/2, 0, 1/4, 1/4}, {1/4, 1/4, 0, 1/2},
      {1/4, 1/4, 1/2, 0}}
Eigenvalues[A]
{1, - 1/2, - 1/2, 0}
Eigenvectors[A]
{{1, 1, 1, 1}, {0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {-1, -1, 1, 1}}
```

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1 que una vez normalizado: $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$.

Luego podemos concluir diciendo que: A largo plazo, **existe la misma probabilidad (25 %) de que la urna A se encuentre vacía, que contenga a la bola blanca, que contenga a la bola roja, o que contenga a las dos bolas.**

2.2.5. Aplicación en la genética. Herencia autosómica

A continuación utilizaremos las cadenas de *Markov* para estudiar cómo se propaga un determinado rasgo hereditario en sucesivas generaciones.

Antes de nada vamos a familiarizarnos con dicha materia biológica. Los genes, las unidades más pequeñas de la herencia, son partes de la molécula de ADN que se encuentran en los cromosomas. El rasgo que se va a heredar está regido por dos genes (A y a).

Atendiendo al tipo de herencia que nos ocupa (autosómica), los individuos de la población van a portar los dos genes, siendo AA , Aa y aa las distintas posibilidades, cada uno de estos conjuntos se conoce como genotipo

del individuo. Cada individuo de la población forma su genotipo heredando un gen de los dos del padre y uno de los dos de la madre, siendo el azar el que determina cuál de los dos genes pasa a su descendiente.

Por ejemplo, si uno de los padres es del genotipo aa y el otro del Aa , el descendiente podrá tener como genotipo las siguientes posibilidades:

- Aa si toma el gen a y el gen A del padre y madre respectivamente (dicho genotipo se da con una probabilidad del 50%).
- aa si toma el gen a y el gen a del padre y madre respectivamente, con igual probabilidad que el anterior.

Ejemplo 2.2.4 *Supongamos que un agricultor tiene una población de plantas con una cierta distribución de tres tipos de genotipos, AA , Aa y aa . Desea iniciar un programa de cultivos en el que todas las plantas de la población sean fecundadas por una planta del genotipo AA . Queremos conocer cuál será la distribución de los tres posibles genotipos de la población tras un cierto número de generaciones.*

- Podemos considerar el ejemplo anterior como una cadena de *Markov*, siendo los estados E_1 , E_2 y E_3 los correspondientes a los genotipos AA , Aa y aa .

Nuestro trabajo ahora será calcular la matriz de transición correspondiente al modelo, para ello debemos conocer el valor de las probabilidades P_{ij} para $i, j = 1, 2, 3$.

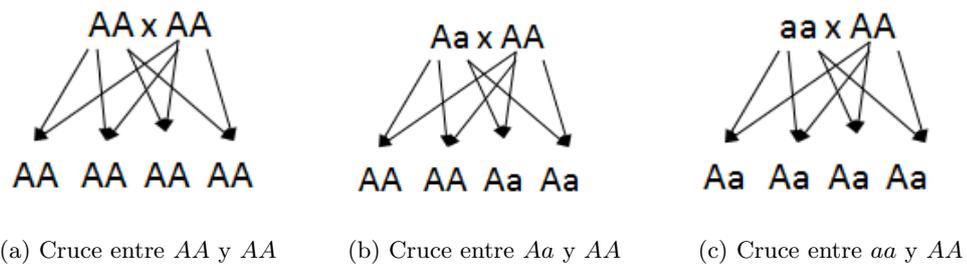


Figura 2.2: Resultado al fecundar cualquier planta con una del genotipo AA

En la gráfica anterior podemos observar el cruce entre una planta de genotipo AA con cualquier planta, lo que nos ayudará a hacer el diagrama de estados correspondiente al modelo, y por lo tanto, podremos conocer el valor de las probabilidades P_{ij} .

En vista de lo obtenido, llegamos a las siguientes conclusiones:

- El 100% de los descendientes de la fecundación de dos plantas con genotipo AA tendrán genotipo AA ($P_{11} = 1$).
- El 50% de los descendientes de la fecundación de una planta con genotipo Aa y otra con genotipo AA tendrán genotipo AA , el resto, Aa ($P_{12} = \frac{1}{2}$ y $P_{22} = \frac{1}{2}$).
- El 100% de los descendientes de la fecundación de una planta con genotipo aa y otra con genotipo AA tendrán genotipo Aa ($P_{23} = 1$).

Así pues, a partir de las consideraciones obtenidas formamos el diagrama de estados correspondiente al modelo:

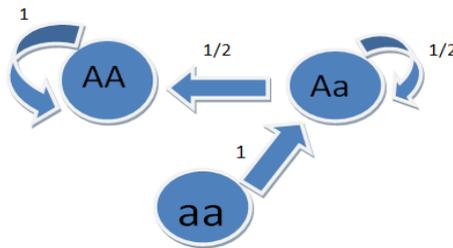


Figura 2.3: Diagrama de estados

Luego la matriz de transición sería:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nos centramos ahora en el comportamiento a largo plazo del modelo. Para $t = 0, 1, 2, \dots$
 - $X_1(t)$ representa la fracción de plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden t .
 - $X_2(t)$ representa la fracción de plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden t .
 - $X_3(t)$ representa la fracción de plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden t .

En consecuencia, $X_1(0)$, $X_2(0)$ y $X_3(0)$ son las fracciones de la distribución inicial de los tres genotipos. Por tanto, a partir de la matriz de transición obtenida podemos llegar a la siguiente ecuación que nos representa el comportamiento del modelo:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1); \quad t = 1, 2, \dots$$

donde,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} \quad \vec{X}(t-1) = \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que, $\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0)$ donde A^t es la matriz potencia. Luego, nos centramos ahora en el comportamiento a largo plazo de la matriz potencia A^t . Ahora bien, no podemos hacer uso del Teorema 2.2.5 pues la cadena de *Markov* no es regular (observamos que el estado E_3 correspondiente al genotipo aa no es accesible). Por tanto, procederemos al cálculo de la matriz potencia A^t usando, como en un ejemplo anterior, el concepto de matriz diagonalizable ($\exists P|A = PDP^{-1}$).

Para ello, primero se diagonaliza la matriz A :

$$|A - I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0$$

luego la matriz A es diagonalizable.

Calculamos ahora la matriz de paso P . Antes de ello obtenemos los subespacios propios asociados a los autovalores anteriores:

$$S_1 = (1, 0, 0)^T, S_2 = (1, -1, 0)^T, S_3 = (1, -2, 1)^T$$

Luego, la matriz de paso seria:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $A = PDP^{-1}$ tenemos que $A^t = PD^tP^{-1}$ donde D es la matriz diagonal formada por los autovalores de A . Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

de donde obtenemos que,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^t & 1 - (1/2)^{t-1} \\ 0 & (1/2)^t & (1/2)^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^t & 1 - (1/2)^{t-1} \\ 0 & (1/2)^t & (1/2)^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) - (1/2)^t X_2(0) - (1/2)^{t-1} X_3(0) \\ (1/2)^t X_2(0) + (1/2)^{t-1} X_3(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como $X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) = 1$ (pues estamos hablando de las fracciones iniciales de plantas), se tiene, para $t = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} X_1(t) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t X_2(0) - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} X_3(0) \\ X_2(t) &= \left(\frac{1}{2}\right)^t X_2(0) + \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} X_3(0) \\ X_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

Así obtenemos las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden t , expresada en función de las fracciones de los genotipos iniciales.

Por último, haciendo tender t a ∞ obtenemos que:

$$X_1(t) \rightarrow 1, \quad X_2(t) \rightarrow 0, \quad X_3(t) \rightarrow 0$$

lo que significa que para tiempos muy grandes, toda la población tendrá el genotipo AA .

2.3. Modelo discreto exponencial

Este modelo es muy útil para describir el comportamiento de la población de muchas plantas, insectos, mamíferos y otros organismos que se reproducen en cada estación. Supongamos que una población crece a una tasa constante, i.e, la población de la especie después de un período de tiempo es un múltiplo constante de la población en el periodo anterior.

Por tanto, el crecimiento de la población en el intervalo $[t, t+1]$ se describe por la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = r y_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

siendo r la tasa de crecimiento.

Si y_0 es la población inicial de (2.6) deducimos,

$$y_1 = ry_0, \quad y_2 = ry_1(t) = r^2y_0 \dots y_t = r^t y_0$$

Por tanto, la expresión que nos devuelve el tamaño de la población en el instante t es: $y_t = y_0 r^t$. Así pues, podemos observar que la población aumenta indefinidamente si $r > 1$, disminuye hasta su extinción si $r < 1$ y permanece en un valor constante (y_0) para $r = 1$.

Este modelo es muy simplista, ya que estamos suponiendo que todos los individuos de la población son iguales, pero es evidente que tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad dependen de la edad del individuo. Una manera de resolver este contratiempo es recurrir al **modelo de Leslie** que describirá el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades.

2.4. Modelo discreto matricial

Supongamos que en un estudio de una especie estructuramos su población en dos clases: la de sus miembros jóvenes (X_1) que aún no tienen capacidad reproductiva, y la de aquellos más maduros que sí son fértiles y denotaremos por X_2 .

Supongamos que cierta proporción a de jóvenes sobreviven hasta convertirse en maduros, y una proporción b de maduros aún viven en ese nuevo paso de tiempo. Por otro lado, denotaremos por c la tasa de nuevos ejemplares de la especie que hay debido a la reproducción de los maduros en la etapa de tiempo anterior.

Esto podemos reproducirlo en el siguiente esquema:

$$\begin{cases} X_1(t) = cX_2(t-1) \\ X_2(t) = aX_1(t-1) + bX_2(t) \end{cases}$$

Matricialmente, podemos representarlo:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) \Rightarrow \vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

Observamos cierto parecido con el modelo exponencial antes estudiado, sin embargo, ahora sí podemos distinguir la tasa de supervivencia de miembros jóvenes y adultos.

Tratamos un ejemplo concreto y veamos la evolución tras un cierto periodo; sean $a = 0.4$, $b = 0.5$, $c = 3$ y $X_0 = (2, 4)^T$ (a y b no negativos y

$c > 0$ pues si no la población se extinguiría). Si calculamos los autovalores de la matriz A de este ejemplo, obtenemos que $\lambda_1 = 1.3736$ y $\lambda_2 = -0.8736$ siendo $\vec{v}_1 = (0.9092, 0.4163)^T$ y $\vec{v}_2 = (0.9601, -0.2796)^T$ sus autovectores respectivos. En concreto, A es diagonalizable y al formar estos vectores una base del plano vectorial, podemos escribir $\vec{X}(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ con unos valores determinados de c_1 y c_2 .

En consecuencia, $\vec{X}(t) = A^t(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)$ pero por definición de valor y vector propio, $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ llevando estos valores en la expresión anterior:

$$\vec{X}(t) = c_1A^t\vec{v}_1 + c_2A^t\vec{v}_2 = c_1\lambda_1^t\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^t\vec{v}_2$$

Por otro lado, la ecuación característica de A es: $|A - \lambda I| = \lambda^2 - b\lambda - ca = 0$ cuyas soluciones son:

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}$$

Por hipótesis, $c > 0$ y $a, b \in (0, 1)$. Entonces, $4ac > 0$ y $b^2 + 4ac > 0$. Existirán, por tanto, dos valores propios reales y diferentes y además si un valor propio es positivo, el otro será negativo. Es decir, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, con lo que $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| < 1$.

Ahora bien,

$$\vec{X}(t) = \lambda_1^t \left(c_1\vec{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \vec{v}_2 \right)$$

Cuando el valor de t aumenta, la expresión $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^t$ tiende a cero, luego

$$\vec{X}(t) \approx c_1\lambda_1^t\vec{v}_1$$

Como aplicación a nuestro ejemplo, como $\lambda_1 = 1.3736$ podemos predecir un aumento del 37.36%. Por otro lado, sabemos que si $\lambda_1 > 1$, entonces la población aumentará cuando,

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2} > 1 \Rightarrow b^2 + 4ac < (2 - b)^2 = 4 - 4b + b^2$$

es decir,

$$c > \frac{1 - b}{a}$$

Como en nuestro caso $b = 0.5$, $a = 0.4$, resulta que $c > 1.25$, con lo que la población aumentará (como ya sabíamos).

Esto nos lleva a las siguientes consideraciones:

- A largo plazo, la distribución de las edades se estabiliza y es proporcional al vector \vec{v}_1 .
- Los valores y vectores propios de A determinan el comportamiento de las generaciones futuras.

- No hemos tenido en cuenta un factor muy importante como es la densidad de la población. Evidentemente, las tasa de natalidad y supervivencia varían con el tamaño de la población, ya que en caso contrario la población crecería de forma ilimitada y dominaría al resto de las especies.

2.5. Modelo de Leslie

Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, obtenemos un proceso que recibe el nombre de dinámica de población. El objetivo de la dinámica de poblaciones es estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. Estudiamos en esta sección un importante modelo de dinámica de poblaciones denominado **modelo de Leslie** en honor al autor del método, el fisiólogo *Patrick Holt Leslie* (1900 - 1974).

Existen dos procesos que afectan al cambio de tamaño de la población: los nacimientos y las migraciones, que aumentan su tamaño, y las defunciones y las emigraciones que la disminuyen. En los modelos más simplistas podemos suponer que estamos estudiando una población en la que no intervienen ninguno de esos procesos. Las hipótesis más simplistas que podemos plantear serían del tipo:

- Todos los individuos son iguales (especialmente lo que hace referencia a la natalidad y supervivencia).
- Los recursos disponibles son ilimitados.

Es evidente que estas hipótesis solo serán válidas para un número limitado de casos pues parece claro que la tasa de mortalidad será mayor entre los individuos de mayor edad que entre los más jóvenes, al igual que la tasa de natalidad, la cual también depende de la edad.

2.5.1. Introducción

Los primeros investigadores que aplicaron el álgebra matricial al estudio del crecimiento de poblaciones fueron *Bernardelli y Lewis* (1942). Para ello, dividieron a la población en clase de edades y construyeron un modelo basado en un conjunto de ecuaciones en diferencias, una para cada clase de edad. Mas tarde, *Leslie* (1945,1948) construyó la teoría y desde entonces a las matrices que aparecen en este tipo de modelos se las conoce con el nombre de matrices de *Leslie*.

Patrick Holt Leslie (1900 - 1974), fisiólogo, empezó a trabajar en el Departamento de Población Animal de la Universidad de Oxford y diez años

después, en 1945, aparecieron publicados sus primeros trabajos en dinámica de poblaciones relacionados con la clasificación por edades. Posteriormente, en 1948 investigó el problema de introducir en los modelos matriciales el crecimiento logístico de poblaciones. Por último, en 1959 propuso nuevos modelos matriciales para tener en cuenta el efecto de retardo en el tiempo en la evolución de las poblaciones.

Podemos suponer que la población consiste enteramente de hembras. En realidad, para la mayoría de las especies la cantidad de machos es prácticamente la misma que la de hembras, por otra parte, el papel determinante es jugado por las hembras y no por los machos (en lo que respecta a cuestiones reproductivas). Como ya hemos comentado, normalmente el número de descendientes producidos depende de la edad de los adultos. Con el fin de superar esta dificultad es necesario introducir un modelo que permita el agrupamiento por edades con diferentes tasas de fertilidad, ahora bien, como en muchas de las poblaciones estudiadas es muy difícil determinar la paternidad analizaremos la evolución de la población de hembras (en el caso de que el número de hembras y machos sea muy diferente, esta hipótesis supone una gran restricción sobre el modelo).

Por tanto, **el modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual números de años.**

2.5.2. Matrices de Leslie

Supongamos que la edad máxima alcanzada por una hembra de una población, por término medio, sea E años y que esta población la dividimos en n clases de edades. Así, este modelo contempla n clases que son: X_1 , las hembras en la edad $[0, \frac{E}{n})$, X_2 , las hembras de edad $[\frac{E}{n}, \frac{2E}{n})$, y así sucesivamente \dots , X_n con edad en $[\frac{(n-1)E}{n}, E]$ (se supone que las hembras mueren superando la edad E).

Supongamos que en el momento inicial ($t = 0$) conocemos el número de hembras en cada subintervalo y llamamos $X_i(0)$ al número de hembras en el momento inicial en la clase i ($i = 1, 2, \dots$). Así, formamos el vector de la distribución inicial de las edades:

$$\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0))^T$$

Nuestra tarea será la de construir un modelo matricial para ver como se produce la evolución del vector $\vec{X}(0)$ con el paso del tiempo. Para ello realizaremos distintas observaciones de la población en tiempos discretos: $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$, y exigiremos que las hembras que están en la edad $(i + 1)$ en el instante t_{k+1} se encontraban en la clase (i) en el tiempo anterior (t_k).

Entonces, la duración entre dos tiempos consecutivos de observación debe ser igual a la duración de los intervalos de edad, esto es:

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{E}{n}; \dots, t_k = \frac{kE}{n} \dots$$

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos tiempos consecutivos de observación se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- Al promedio del número de hijas que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase i , lo llamaremos a_i con $i = 1, 2, \dots$
- La fracción de las hembras que están en la clase i y se espera que sobrevivan y pasen a la clase $i + 1$ la llamaremos b_i con $i = 1, 2, \dots$

Según las definiciones dadas:

1. $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots$
2. $0 < b_i \leq 1, i = 1, 2, \dots$

El caso $b_i = 0$, no puede ocurrir pues supondría que ninguna hembra viviría mas allá de la clase i , además, también suponemos que al menos hay un $a_i > 0$ lo que garantiza que habrá nacimientos.

Sea $\vec{X}(k) = (X_1(k), X_2(k), \dots, X_n(k))^T$ el vector de distribución de las edades en el tiempo t_k , entonces, el número de hembras de la primera clase en el tiempo t_k vendrá dado por las nacidas entre los tiempos t_{k-1} y t_k . Podemos escribir:

$$X_1(k) = a_1 X_1(k-1) + a_2 X_2(k-1) + \dots + a_n X_n(k-1) \quad (2.7)$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase $(i+1)$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$ en el tiempo t_k es igual al número de hembras de la clase i en el tiempo t_{k-1} que todavía están vivas en el tiempo t_k :

$$X_{i+1}(k) = b_i X_i(k-1) \quad (2.8)$$

Expresando matricialmente (2.7), (2.8) tenemos,

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_{n-1}(k) \\ X_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ \vdots \\ X_{n-1}(k-1) \\ X_n(k-1) \end{pmatrix}$$

O de una forma vectorial,

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) \quad (2.9)$$

donde a la matriz

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

se la conoce con el nombre de **matriz de Leslie**.

A partir de (2.9) obtenemos:

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0)$$

luego, conocida la distribución inicial $\vec{X}(0)$ y la matriz de *Leslie* asociada, podemos determinar la distribución de las hembras en cualquier tiempo.

Ejemplo 2.5.1 *Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 20 años y que esta población se divide en cuatro clases de edades iguales con intervalos de 5 años. Supongamos que la matriz de Leslie viene dada por:*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

Si inicialmente hay 100 hembras en la primera clase, 60 en la segunda, 20 en la tercera y 10 en la cuarta, podemos estudiar la evolución de la población para los próximos años.

- En efecto, el vector inicial es,

$$\vec{X}(0) = (100, 60, 20, 10)^T$$

Calculando,

$$\vec{X}(1) = L\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 25 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De manera equivalente,

$$\begin{aligned} \vec{X}(2) &= L\vec{X}(1) = L^2\vec{X}(0) = (119, 35, 12.5, 3)^T \\ \vec{X}(3) &= L\vec{X}(2) = L^3\vec{X}(0) = (78.5, 29.75, 17.5, 1.25)^T \\ \vec{X}(4) &= L\vec{X}(3) = L^4\vec{X}(0) = (84.75, 19.6, 14.8, 1.75)^T \end{aligned}$$

Veámos este ejemplo usando el programa matemático: **Matlab**

```

L = [0 1 3 2; 1/4 0 0 0; 0 1/2 0 0; 0 0 1/10 0]; % matriz de Leslie
x0 = [100; 60; 20; 10]; % distribución inicial

X = zeros(4,5);
X(:,1) = x0;

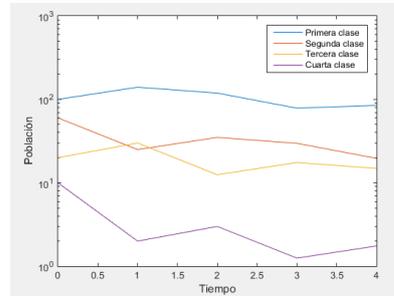
for k=2:5 % modelo de Leslie
    X(:,k) = L*X(:,k-1);
end

% Representación gráfica

t=0:4;
semilogy(t,X')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Población')
legend('Primera clase', 'Segunda clase', 'Tercera clase', 'Cuarta clase')

% Distribución al cabo del cuarto periodo (a los 20 años)
X(:,5)

```



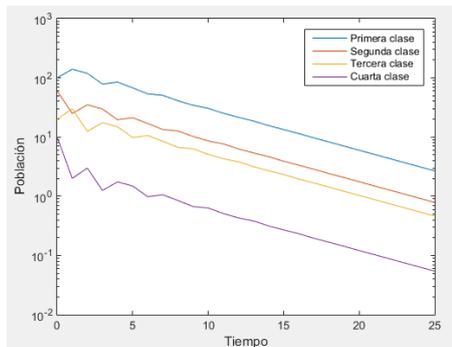
(a) Programa

(b) Representación gráfica

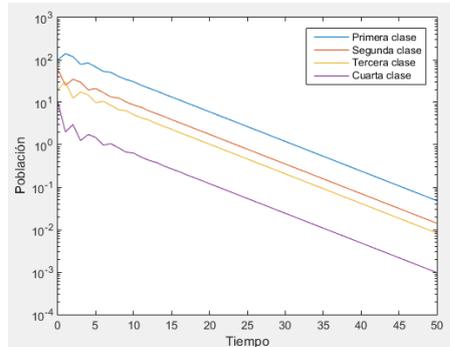
Figura 2.4: Evolución de la población a lo largo de 4 periodos (20 años)

Por tanto, después de 20 años (4 periodos), aproximadamente habrá 85 hembras en la primera clase, 20 entre 5 y 10 años, 15 entre 10 y 15 años y 2 entre 15 y 20 años.

- Supongamos que estamos interesados en hacer un estudio de la evolución de la población a lo largo del tiempo; veremos que dicha población tiende a la extinción. Para llegar a esta conclusión nos apoyaremos en el programa *Matlab* recientemente construido analizando el comportamiento de la población a lo largo de un gran número de periodos.



(a) A lo largo de 25 periodos



(b) A lo largo de 50 periodos

Figura 2.5: Evolución de la población

donde:

$$\vec{X}(25) = (2.6792, 0.7871, 0.4618, 0.0543)$$

$$\vec{X}(50) = (0.0481, 0.0141, 0.0083, 0.0010)$$

2.5.3. Comportamiento en el límite del modelo

Estudiar las propiedades de los valores y vectores propios de la matriz L de *Leslie* nos permitirá conocer el comportamiento de la población para tiempos grandes.

Para no dificultar con la notación asociada al caso más general posible, consideremos un modelo de *Leslie* de orden tres. Entonces, los autovalores son las soluciones de la ecuación $p(\lambda) = 0$ donde:

$$p(\lambda) = (a_1 - \lambda)(-\lambda)^2 + a_3b_1b_2 + a_2b_1\lambda$$

Como $\lambda = 0$ no puede ser la única solución de la ecuación (ya que algún $a_i > 0$) y estamos interesados en conocer los valores no nulos que la resuelven, dividimos por λ^3 y analizamos equivalentemente la ecuación $q(\lambda) = 1$ donde:

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3}$$

Obsérvese que todos los numeradores son no negativos y al menos uno es estrictamente positivo. Esto implica que $q : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cumple ser estrictamente decreciente, con $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = \infty$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0$, por lo que usando el Teorema de Bolzano, existe un único valor $\lambda_1 \in (0, \infty)$ (de multiplicidad 1 pues $q'(\lambda_1) \neq 0$) con $q(\lambda_1) = 1$ (por tanto, $p(\lambda_1) = 0$, autovalor de L). El resto de autovalores de L , por el razonamiento anterior, serán cero, negativos, o complejos.

Todas estas conclusiones las podemos observar en la representación gráfica de la función $q(\lambda)$:

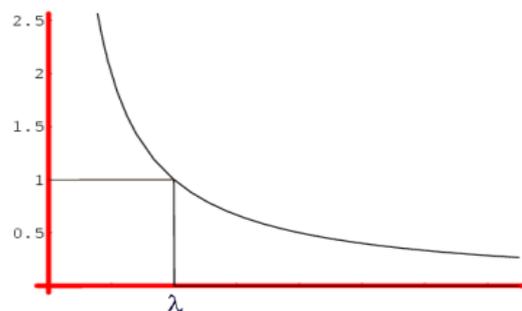


Figura 2.6: Representación gráfica de $q(\lambda)$

El paso siguiente será el de calcular el autovector propio asociado al valor propio λ_1 . Por definición, λ_1 es aquel valor no nulo que cumple, $L\vec{U}_1 = \lambda_1\vec{U}_1$, siendo \vec{U}_1 el vector propio asociado. Si $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$, entonces

$$(L - \lambda_1 I)\vec{X} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - \lambda_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Como el sistema lineal homogéneo anterior es compatible indeterminado, suprimimos la primera de las ecuaciones y llamamos $X_1 = \alpha$. El resto de las incógnitas valen: $X_2 = \frac{b_1}{\lambda_1}\alpha$, $X_3 = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\alpha$.

La solución general del sistema homogéneo es el subespacio unidimensional \mathbb{R}^3 :

$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{b_1}{\lambda_1}\alpha, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\alpha \right)^T : \alpha \neq 0 \right\}$$

que puede ser generado por el vector

$$\left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \right)^T$$

En forma general, concluimos diciendo que el vector propio asociado al autovalor propio dominante λ_1 , para una matriz de *Leslie* de orden n es:

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \dots, \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right)$$

Esto nos lleva a observar que el comportamiento a largo plazo de las edades de la población quedará determinado por este autovalor propio λ_1 y su autovector propio \vec{U}_1 .

Así pues, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 *Una matriz de Leslie tiene un único autovalor propio positivo λ_1 . Este valor propio es simple y tiene un vector propio asociado \vec{U}_1 cuyas coordenadas son todas positivas.*

Demostración. Trivial a partir de lo anterior. Basta demostrar que $q(\lambda_1) = 1$ (lo cual lo tenemos por razonamientos previos). Veamos que λ_1 es simple:

Sea

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

entonces

$$q'(\lambda) = -\frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{2a_2 b_1}{\lambda^3} - \frac{3a_3 b_1 b_2}{\lambda^4} - \dots - \frac{na_n \dots b_{n-1}}{\lambda^{n+1}}$$

como las a_i son no negativas y las b_i positivas, entonces, $q'(\lambda_1) \neq 0$.

Para ver que \vec{U}_1 tiene todas sus componentes positivas, sólo hay que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

□

Teorema 2.5.2 Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L y si λ_i es cualquier otro valor propio (real o complejo) de L , entonces:

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1$$

Demostración. Sea $\lambda_j = re^{i\theta}$ y $q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}$. Así,

$$q(\lambda_j) = \frac{a_1 e^{-i\theta}}{r} + \frac{a_2 b_1 e^{-2i\theta}}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1} e^{-ni\theta}}{r^n}$$

Sustituyendo $q(\lambda_j)$ por 1 y $e^{-in\theta}$ por $\cos n\theta - i \sin n\theta$:

$$1 = \frac{a_1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

tomando partes reales se tiene:

$$1 = \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos n\theta$$

Aplicando valor absoluto:

$$1 = \left| \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos n\theta \right| \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n}$$

Por lo que, $1 \leq q(r)$, entonces, $1 = q(\lambda_1) \leq q(r)$, pero como $q(\lambda)$ es monótona decreciente se tiene que $r = |\lambda_i| \leq \lambda_1$.

□

Nota 2.5.1 Para el estudio que estamos realizando se requiere que $|\lambda_i| < \lambda_1$ para todos los valores propios de L , i.e., que λ_1 sea un autovalor propio dominante.

Vemos, a continuación, que no todas las matrices de Leslie cumplen este requisito basándonos en un ejemplo que propuso Harro Bernadelli en 1941:

Sea la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, los autovalores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

con lo cual $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, y por tanto, λ_1 no es dominante.

Este ejemplo nos lleva a enunciar la siguiente propiedad que caracteriza a los valores propios dominantes:

Teorema 2.5.3 *Si dos entradas consecutivas a_i, a_{i+1} de la primera fila de la matriz de Leslie son diferentes de cero, el valor propio positivo de L es dominante.*

Demostración. Como hay un único valor propio positivo, si $\lambda_j = re^{i\theta}$ es un valor propio, entonces $\theta \neq 2k\pi$ por lo que $\cos m\theta$ y $\cos(m+1)\theta$ no pueden ser ambos 1 y como existen dos entradas consecutivas de la primera fila positivas, se tiene:

$$1 = q(\lambda_j) = \left| \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos 2\theta + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos n\theta \right| \leq \frac{a_1}{r} + \frac{a_2 b_1}{r^2} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{r^n} = q(r)$$

Ahora, $r = |\lambda_j| < \lambda_1$ lo que demuestra que el valor propio positivo de L (λ_1) es dominante, como queríamos ver. □

Nos centramos nuevamente en el análisis del modelo para valores suficientemente grandes. Gracias a que la matriz L es diagonalizable va a existir una matriz regular P tal que,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1}LP$$

Por tanto, la potencia k -ésima de la matriz de Leslie viene dada por:

$$L^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix} P^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para cualquier vector de distribución inicial de edades, se tiene:

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0) = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dividiendo por λ_1^k :

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k \end{pmatrix} P^{-1} \vec{X}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Ahora bien, como λ_1 es dominante, se deduce que: $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k = 0$, $i = 1, 2, 3$.

En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \vec{X}(0)$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \vec{X}(0) = d \vec{U}_1 \quad (2.10)$$

donde $d > 0$ es la componente del vector columna $P^{-1} \vec{X}(0)$ y depende únicamente de la distribución inicial.

A partir de (2.10) obtenemos que: $\vec{X}(k) = d \lambda_1^k \vec{U}_1$, o bien, $\vec{X}(k) = d \lambda_1^{k-1} \vec{U}_1$. Por tanto, observamos que:

$$\vec{X}(k) = d \lambda_1^k \vec{U}_1 = \lambda_1 d \lambda_1^{k-1} \vec{U}_1 \approx \lambda_1 \vec{X}(k-1)$$

Entonces, podemos concluir diciendo que **cada vector de la distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante el valor propio positivo dominante de la matriz de Leslie, además, la proporción de hembras en cada una de las clases será constante.**

Ejemplo 2.5.2 *Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edades de dos años de duración. En cada período, el 50% de la primera pasa a la segunda. El número medio de crías hembras de las de la primera clase es de 1 y de las de la segunda es 1.5.*

1. Calcular la matriz de Leslie correspondiente al modelo.

2. ¿Cuál será la población cuatro años después?
3. ¿Tiene la matriz L un valor propio estrictamente dominante? Calcular el % de crecimiento o decrecimiento de la población.
4. Determinar a largo plazo la distribución por edades (en porcentaje).
 - En primer lugar, a partir de las definiciones de a_i y b_i formamos nuestra matriz de *Leslie* correspondiente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, la expresión matricial del modelo de *Leslie* $\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1)$ es:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \end{pmatrix}$$

- Si $\vec{X}(0) = (100, 0)^T$ podemos determinar la población al cabo de 2 años, primero, y posteriormente al cabo de 4 años. Así pues, para $k = 2$, $\vec{X}(2)$ determina la población cuatro años después.

Luego,

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 175 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Luego podemos concluir diciendo que habrá 175 hembras en la primera clase y 50 en la segunda al cabo de 4 años (2 periodos).

- Para estudiar el comportamiento en el límite es necesario en primer lugar resolver la ecuación característica,

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.5; \lambda_2 = -0.5$$

El vector propio correspondiente al valor propio positivo (que por el teorema estudiado anteriormente, será dominante) es,

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^T = \left(1, \frac{1}{3}\right)^T$$

lo cual indica, que para valores de k grandes, en cada período de tiempo aumentará el número de hembras en un 50% en cada una de las edades.

- Atendiendo al vector propio \vec{U}_1 asociado al valor propio λ_1 podemos conocer cual será la distribución de las hembras por edades:

$$x + \frac{1}{3}x = 100 \Rightarrow x = 75\%$$

Los porcentajes serán por tanto: 75 % primera clase, y 25 % la segunda clase (de acuerdo a la proporción 3:1).

Ejemplo 2.5.3 Una población de ardillas está dividida en tres clases de edades de 5 años de duración. Su evolución está determinada por un modelo de Leslie siendo su matriz,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Encontrar el valor de a_2 para que cada 5 años la población aumente en un 50%.
2. Para el valor de a_2 anteriormente encontrado. Si a largo plazo el número de hembras es de 800, ¿cuántas de ellas serán jóvenes?

- Sabemos que el porcentaje de crecimiento o decrecimiento de una población está asociado al autovalor propio estrictamente dominante de la matriz L . Así pues, sabemos que un crecimiento del 50 % corresponde a un autovalor, $\lambda = \frac{3}{2}$.

Por tanto, nos centramos ahora en el cálculo de: $|L - \lambda I| = 0$ para $\lambda = \frac{3}{2}$. Luego,

$$|L - \lambda I| = -\lambda^3 + \frac{a_2}{2}\lambda + \frac{3}{8} = 0$$

de donde, tomando $\lambda = \frac{3}{2}$ se obtiene que $a_2 = 4$, así pues, serán 4 el número medio de crías hembras de la segunda clase.

- El vector propio correspondiente al valor propio positivo (que es dominante para el valor a_2 previamente calculado) es:

$$\vec{U} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)^T$$

Por tanto,

$$\vec{X}(k) \approx \frac{3}{2}\vec{X}(k-1)$$

lo cual indica, que para valores k grandes, en cada período de tiempo aumentará el número de hembras en un 50 % en cada uno de las clases, tal y como nos pedía el ejercicio.

Ahora bien, conocido el vector propio asociado al valor propio estrictamente dominante podemos conocer cual será la distribución de las hembras por edades:

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x = 100 \Rightarrow x = 72$$

Por tanto, los porcentajes que nos marcan la distribución por edades serían: 72 %, 24 % y 4 % la primera, la segunda y la tercera clase respectivamente.

Ahora bien, el enunciado nos dice que a largo plazo tenemos un total de 800 hembras. Por tanto haciendo uso de los porcentajes previamente calculados podemos concluir diciendo que: **de las 800 hembras, 576 serán jóvenes (correspondientes a la primera edad) ya que es el 72 % del total.**

2.6. Tablas de vida y modelo de Leslie

Recordamos que el modelo de crecimiento discreto exponencial (versión continua)

$$y(t) = y(0)e^{rt}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

estudiado en la sección anterior era adecuado para describir la evolución de una población de bacterias o de protozoos. Sin embargo, a nosotros nos interesan aquellas poblaciones donde los nacimientos y muertes dependen de la edad del individuo.

El objetivo básico de esta sección es el de aprender a calcular la tasa de reproducción r para poblaciones donde la natalidad y la mortalidad dependen de la edad del organismo. Además construiremos un modelo matricial de *Leslie* a partir de los datos presentados en una tabla de vida.

Antes de nada debemos analizar el concepto de **tasa neta de reproducción**.

Si consideramos de nuevo la ecuación

$$\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1$$

que da el vector de distribución de la población por edades para valores k muy grandes. Observamos, que dependiendo del valor propio positivo λ_1 podemos diferenciar tres casos:

- La población crecerá si $\lambda_1 > 1$.
- La población decrecerá si $\lambda_1 < 1$.

- La población se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

Para cualquier distribución inicial de las edades, la población tiende a una distribución en el límite que es algún múltiplo del vector propio \vec{U}_1 . Teniendo en cuenta que $L\vec{U}_1 = \lambda_1\vec{U}_1 = \vec{U}_1$, puede comprobarse que,

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \dots b_{n-1} = 1$$

La expresión $R = a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}$ se conoce con el nombre de tasa neta de reproducción de la población, y su interpretación demográfica es la de ser el promedio de crías que tiene un hembra durante su esperanza de vida.

Por tanto, una población es de crecimiento nulo si y sólo si su tasa neta de reproducción es igual a uno.

En primer lugar es necesario definir una serie de conceptos básicos para el desarrollo del modelo:

Definición 2.6.1 *Se define **tabla de vida** a una tabla estadística donde se recogen el número de individuos en cada una de las edades, sus probabilidades de supervivencia y sus tasas de fecundidad.*

Nota 2.6.1 *Para simplificar la notación, representaremos por x a la edad del individuo, generalmente en años (aunque puede ser tomada otra unidad de medida).*

Nos encontramos ahora con la dificultad de cómo representar la edad de un individuo:

- En primer lugar, diremos que un individuo tiene la edad 0 si se encuentra entre 0 y 12 meses. Usaremos la constante K para referirnos a la edad final de la tabla de vida que hará referencia a aquella en la que han muerto todos los individuos.
- De manera equivalente, podemos representar la edad de un individuo por su clase de edad. Así, diremos que un individuo está en la clase i si su edad se encuentra entre $i - 1$ e i .

Por tanto, si el rango de las edades de la población va de 0 a K , el rango de las clases de edades va de 1 hasta K .

Teniendo en cuenta los razonamientos hechos en secciones anteriores, seguiremos suponiendo que el número de hembras y machos son iguales y nos centraremos en la evolución de una población de hembras.

Definición 2.6.2 *Definimos la **fertilidad** como el número medio de hembras que han nacido al finalizar la primavera de una hembra con una edad x determinada, y la representaremos por $b(x)$.*

Nota 2.6.2 La fertilidad será un número positivo o cero, lo cual significaría que el individuo de edad x no es fértil.

Definición 2.6.3 Representaremos por $S(x)$ al número de individuos que han sobrevivido al comenzar el año.

Definición 2.6.4 Representaremos por $l(x)$ a la probabilidad de que un individuo sobreviva desde el nacimiento hasta comienzos de la edad x .

A partir de estas dos últimas definiciones llegamos a la siguiente relación:

$$l(x) = \frac{S(x)}{S(0)}$$

Definición 2.6.5 Se define la **probabilidad de supervivencia**, $g(x)$ como la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + 1$, y viene dada por

$$g(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Consideramos ahora la siguiente tabla:

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x)$	$g(x)$
0	100	0	1	0.8
1	80	1	0.8	0.5
2	40	3	0.4	0.25
3	10	0	0.1	0
4	0	0	0	-

Consideraciones:

- Atendiendo al valor de $S(x)$, vemos que empezamos con 100 individuos los cuales todos han fallecido al comienzo del cuarto año.
- Haciendo referencia a la fertilidad, vemos que, por ejemplo, $b(2) = 3$ lo cual significa que una hembra de 2 años tiene por término medio 3 hembras recién nacidas.
- Fijándonos en los valores correspondientes a $l(x)$, vemos que $l(1) = 0.8$ lo que significa que el 80% de la población sobrevivirá hasta comienzos del año 1.
- Por último, atendiendo a los valores de $g(x)$, vemos que, por ejemplo, $g(3) = 0$, esto nos lleva a afirmar que ningún individuo de edad 3 sobrevivirá al cuarto año.

Nos centramos ahora en estimar el valor de r en (2.11) a partir de $l(x)$ y $b(x)$. Para ello necesitamos definir otros dos conceptos: **tasa neta de reproducción** R y **tiempo de generación** G .

Definición 2.6.6 *Se define la tasa neta de reproducción R como el número de individuos que por término medio tiene una hembra durante toda su esperanza de vida. Es decir,*

$$R = l(0)b(0) + l(1)b(1) + \dots + l(k)b(k) = \sum_{x=0}^k l(x)b(x)$$

En virtud de dicha definición, si $R > 1$ la población crecerá exponencialmente. Si por el contrario $R < 1$ se extinguirá y si $R = 1$ la población permanecerá constante.

Definición 2.6.7 *Se define el tiempo de generación G , como la edad media de las hijas de todos los individuos producidos. Es decir,*

$$G = \frac{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)}$$

Ahora bien, sustituimos el tiempo G en (2.11). Así:

$$N_G = N_0 e^{rG} \Rightarrow \frac{N_G}{N_0} = e^{rG}$$

El número $\frac{N_G}{N_0}$ es aproximadamente la tasa neta de reproducción (R).

$$R = e^{rG} \Rightarrow r \approx \frac{\ln R}{G}$$

Es preciso decir que el valor encontrada de r es sólo una aproximación, para conocer el valor exacto de r debemos resolver la siguiente ecuación:

$$1 = \sum_{x=0}^k e^{-rx} l(x)b(x) \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.6.1 *Supongamos la siguiente tabla de vida para una población de caracoles:*

Edad en años	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2.5
2	40	3
3	0	0

- A partir de la tabla del ejemplo calcularemos los valores de la tasa neta de reproducción, tiempo de generación así como estimar el valor de r . En la siguiente tabla plasmamos algunos de los cálculos necesarios para ello:

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0	0
1	400	2.5	0.8	2	2
2	40	3	0.08	0.24	0.48
3	0	0	0	0	0

Calculamos ahora R , G y r :

$$R = \sum_{x=0}^3 l(x)b(x) = 2.24$$

$$G = \frac{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)} = 1.107 \text{ años}$$

$$r = \frac{\ln R}{G} = 0.729 \text{ individuos}$$

Ahora bien, para encontrar el valor exacto de la tasa de reproducción r utilizamos la ecuación (2.12). Observamos que con el valor de r previamente calculado llegamos a que:

$$\sum_{x=0}^3 e^{-rx} l(x)b(x) = 0.989 < 1$$

Probamos con diferentes valores hasta alcanzar el valor de r exacto: $r = 0.749$.

2.6.1. De las tablas de vida al modelo matricial

Es preciso comenzar esta subsección indicando que a partir de ahora nos vamos a referir, no a la edad del individuo, sino a la clase de edad a la que pertenece. Así pues, nuestro objetivo ahora va a ser conocer como evoluciona el número de individuos que hay en cada una de dichas clases.

Es sabido que para confeccionar el modelo de *Leslie* necesitamos conocer los valores de supervivencia (b_i) y de natalidad (a_i). Luego, a partir de las definiciones anteriores, la probabilidad de que un individuo de la clase i sobreviva y pase a la clase $i + 1$ será:

$$b_i = \frac{l(i)}{l(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

y la natalidad de un individuo que se encuentre en la clase i vendrá dada por:

$$a_i = b(i)b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, el modelo de *Leslie* quedaría expresado a través de dicha ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) \quad k = 1, 2, \dots$$

donde L es la matriz de *Leslie* correspondiente con a_i y b_i satisfaciendo las expresiones anteriores.

Ejemplo 2.6.2 *Supongamos la siguiente tabla de vida para una determinada población:*

Edad en años	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2.5
2	200	3
3	50	1
4	0	0

1. ¿Cuál será la distribución por edades al cabo de 5 años sabiendo que $\vec{X}(0) = (200, 0, 0, 0)^T$?
2. Determinar el porcentaje de crecimiento o decrecimiento de la población.
3. Calcular la tasa de reproducción r asociada a los datos de la tabla.

x	i	$l(x)$	$b(x)$	b_i	a_i
0	-	1	0	-	0
1	1	0.8	2	0.8	1.6
2	2	0.4	3	0.5	1.5
3	3	0.1	1	0.25	0.25
4	4	0	0	-	0

- Estamos interesados en construir la matriz de *Leslie* para la tabla de vida del ejemplo. Para ello, hemos elaborado la tabla anterior.

Expresamos a continuación el modelo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.5 & 0.25 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) \quad k = 1, 2, \dots$$

Partimos del vector de distribución inicial,

$$\vec{X}(0) = (200, 0, 0, 0)^T$$

Estamos interesados en la distribución por edades al cabo del quinto año, es decir, debemos calcular: $\vec{X}(5)$. Por tanto,

$$\vec{X}(5) = L\vec{X}(4) = \dots = L^5\vec{X}(0) = (7613, 2804, 642, 75)^T$$

Esto nos lleva a decir que habrá 7613 individuos en la primera clase, 2804 en la segunda, 642 en la tercera y 75 en la cuarta. Expresamos ahora estos valores en porcentaje:

$$7613x + 2804x + 642x + 75x = 100 \Rightarrow x = 8.98 \times 10^{-3}$$

Esto supone que **un 68 % de la población se encuentra en la primera clase, un 25 % en la segunda, un 6 % en la tercera y un 1 % en la cuarta.**

- Para estudiar el comportamiento en el límite es necesario en primer lugar resolver la ecuación característica,

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2.17, \lambda_2 = -0.48, \lambda_3 = -0.096$$

Al ser el valor propio positivo dominante, para valores k grandes, en cada año aumentará el número de individuos en un 117 % en cada una de las edades.

- Para terminar, podemos relacionar la tasa de reproducción r del modelo exponencial con el valor propio dominante. En efecto, sabemos que:

$$\vec{X}(k) = \vec{X}(0)e^{rk} = \vec{X}(0)e^{r(k-1)} = e^r \vec{X}(k-1) \quad (2.13)$$

Por otro lado, sabemos que cada vector de distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior siendo dicha constante el valor propio positivo dominante de la matriz de *Leslie*. Luego,

$$\vec{X}(k) \approx \lambda_1 \vec{X}(k-1) \quad (2.14)$$

Por último, relacionando (2.13) y (2.14) tenemos que: $e^r \approx \lambda_1$ o bien, $r \approx \ln(\lambda_1)$. Entonces,

$$r \approx \ln(2.17) = 0.77625$$

Además dicho valor satisface la ecuación (2.12) luego hemos encontrado el valor exacto de la tasa de reproducción del modelo.

2.7. Modelo de Lefkovitch

A la hora de estudiar la evolución de muchos organismos, la variable edad, que hemos tenido en cuenta en el modelo de *Leslie*, no es la más importante. Por ejemplo, en el caso de los insectos, los individuos pasan por etapas de ser huevos, larvas, crisálidas y adultos.

La tasa de supervivencia (b_i), puede estar más influenciada por las etapas del insecto que por su edad. De hecho, la supervivencia de un escarabajo no depende de que tenga 3 o 6 meses, sino de que sea una larva o que se encuentre en la etapa adulta. El paso de una etapa a otra es a menudo bastante flexible y depende de factores muy diversos como la densidad de población, la cantidad de comida suplementaria, la temperatura, la luminosidad, etc. Afortunadamente, podemos modificar la matriz de *Leslie* para tener en cuenta estos factores.

En 1965 *Lefkovitch* propuso un modelo matricial para estudiar la evolución de una población que generalizaba al modelo propuesto por *Leslie*. La diferencia fundamental entre ambos modelos reside en el hecho de que ahora se clasifica a los individuos de la población en etapas, en lugar de clases de edades.

En este nuevo modelo aparece un nuevo parámetro p_i que representa la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la etapa i en el periodo n permanezca en la misma etapa para el período siguiente $n + 1$. Gracias a este nuevo parámetro podemos expresar el modelo de la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ \vdots \\ X_n(k-1) \end{pmatrix}$$

A diferencia de la matriz de *Leslie* tenemos entrada positivas p_i en a diagonal principal.

Adjuntamos, a continuación, una imagen donde se observa la diferencia entre los modelos de *Leslie* y *Lefkovitch*:

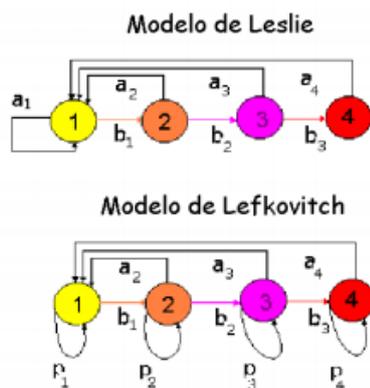


Figura 2.7: Comparación modelos

Ejemplo 2.7.1 La siguiente tabla muestra la matriz de transición para un modelo que representa el ciclo de vida de un insecto con tres etapas (huevo, larva, adulto).

-	huevo	larva	adulto
huevo	0.25	0	2
larva	0.75	0.5	0
adulto	0	0.5	1

Nos centramos ahora en el comportamiento a largo plazo de dicho modelo.

- En primer lugar debemos representar nuestro modelo en forma matricial: llamamos $X_i(k)$ (para $i = 1, 2, 3$) al número de huevos, larvas y adultos que hay en el instante $k = 1, 2, \dots$

Sea la matriz A de transición del modelo obtenida a partir de la tabla anterior, tenemos que:

$$\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 2 \\ 0.75 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Antes de empezar el análisis a largo plazo, es preciso observar que estamos ante un ejemplo de modelo de *Lefkovich*: observamos que efectivamente la matriz de transición tiene elementos positivos en su diagonal haciendo referencia a la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la etapa i en el instante k permanezca en dicha etapa en el instante inmediatamente superior.

Es conocido que el comportamiento a largo plazo de un modelo viene determinado por el autovalor propio positivo de la matriz de transición, λ_1 y su correspondiente autovector propio.

Recurrimos al programa matemático *Mathematica* para obtener los autovalores y autovectores de la matriz A :

```
A := {{0.25, 0, 2}, {0.75, 0.5, 0}, {0, 0.5, 1}}
Eigenvalues[A]
{1.54972 + 0. i, 0.100141 + 0.744708 i, 0.100141 - 0.744708 i}
Eigenvectors[A]
{{0.719295 + 0. i, 0.51392 + 0. i, 0.46744 + 0. i},
{0.719527 + 0. i, -0.302013 - 0.562478 i, -0.0539137 + 0.267919 i},
{0.719527 + 0. i, -0.302013 + 0.562478 i, -0.0539137 - 0.267919 i}}
```

A partir de los resultados obtenidos llegamos a que $\lambda_1 = 1.5497176$ lo que supone un crecimiento del 55 % en cada una de las etapas.

Atendiendo al autovector propio asociado al autovalor propio positivo (λ_1) podemos conocer la distribución por etapas de la población en cuestión:

$$0.719295x + 0.5139203x + 0.467440x = 100 \Rightarrow x = 58.8 \%$$

Por tanto podemos afirmar que, a largo plazo, **el 42.3 % de la población serán huevos, el 30 % larvas y el 27.7 % restante, adultos.**

- Sea ahora el vector de distribución inicial $\vec{X}(0) = (10, 5, 7)^T$ nos interesamos en conocer la distribución de la población en 27 y 28 años.

Recurrimos nuevamente al programa *Mathematica*:

```

x0 := {10, 5, 7}
MatrixPower[A, 27].x0
{1.31397×106, 938800., 853892.}
MatrixPower[A, 28].x0
{2.03628×106, 1.45487×106, 1.32329×106}

```

Lo primero que observamos es que la tasa de crecimiento de la población coincide con el autovalor propio dominante de la matriz de transición:

$$\frac{2.03628 \times 10^6}{1.31397 \times 10^6} = \frac{1.45487 \times 10^6}{938800} = \frac{1.32329 \times 10^6}{853892} = 1.5497176 = \lambda_1$$

Comprobamos ahora que los porcentajes calculados anteriormente que nos indicaba cómo se distribuía la población a lo largo del tiempo coinciden con los porcentajes que determinan la distribución por etapas de la población al cabo de 27 años,

$$\frac{1.31397 \times 10^6}{1.31397 \times 10^6 + 938800 + 853892} = 0.423$$

$$\frac{938800}{1.31397 \times 10^6 + 938800 + 853892} = 0.30$$

$$\frac{853892}{1.31397 \times 10^6 + 938800 + 853892} = 0.277$$

lo que supone una distribución de: 42.3% de huevos, 30% de larvas y 27.7% de adultos, tal y como habíamos visto anteriormente.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos discretos

3.1. Introducción

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactúan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**.

Ahora bien, los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar cómo pequeños cambios en una parte del sistema pueden afectar al comportamiento del sistema completo.

Todo esto lo podemos ver reflejado en el siguiente **ejemplo**:

Un ejemplo de sistema es un ecosistema, cuya estructura está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes y otras variables específicas para un ecosistema particular. También hemos hablado del comportamiento del sistema, en el ejemplo que estamos tratando el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. A su vez, dicho comportamiento está sujeto a la influencia de los depredadores, la comida disponible así como al medio ambiente.

3.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos

1. **La ecuación de *Malthus***. Nuestro objetivo va a ser estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante k . Suponemos

ahora que habrá, por término medio, α individuos en el período $k + 1$ por cada individuo en el instante k , obtenemos por tanto:

$$x_{k+1} = \alpha x_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Ahora bien, si $\alpha > 1$, observamos que los valores de x_k crecen de forma exponencial, razón por la cual muchos contemporáneos de *Malthus* cuestionaron dicha ecuación atendiendo a la sobrexplotación del planeta.

2. **La parábola logística de May.** *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, i.e, consideramos este parámetro en función del número de individuos. Con ello se llega se llega a una ecuación de la forma:

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

May formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Así pues, $\alpha(x_k)$ se toma de la forma $\mu(1 - x_k)$ obteniendo así lo que se conoce con el nombre de parábola logística de *May*:

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

3.1.2. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

donde f es una aplicación $f : X \rightarrow X$ definida en un conjunto X llamado **espacio de fases o espacio de los estados**.

Atendiendo a los ejemplos previamente citados, en el modelo de *Malthus*, podremos considerar como espacio de fases el conjunto de los números enteros no negativos (no es posible considerar poblaciones con un número negativo de individuos). Por otro lado, en el ejemplo de la parábola logística de *May*, un espacio de fases adecuado podría ser $X = [0, 1]$.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Dichas variables se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases previamente definido es el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

A continuación nos centramos en la interpretación de la ecuación que resume lo que hemos llamado sistema dinámico: si el sistema, en un estado

k , se encuentra en un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces, en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} . Así pues, la aplicación f representa la **ley de evolución del sistema dinámico**.

Se puede observar que si el sistema se encuentra inicialmente en un estado x_0 , por recursión,

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$$

y, por lo tanto, en general:

$$x_k = f^k(x_0)$$

La expresión $f^k(x)$ recibe el nombre de: **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. A su vez, nos permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir del estado inicial.

Así, el conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

recibe el nombre de **órbita** de x .

3.2. Modelos dinámicos discretos lineales

Nuestro objetivo en esta sección va a ser estudiar la ecuación (3.3) en el caso en el que la función f sea de la forma:

$$f(x_k) = mx_k + b \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.2.1 *Sea x_k el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo k . Se sabe que año tras año sobreviven el 80% de los animales y además se incorporan 200 a la población. Queremos construir un modelo discreto lineal para la situación planteada y calcular los tres primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas $x_0 = 90$.*

- El cambio de población puede ser descrito por el modelo siguiente:

$$x_{k+1} = 0.8x_k + 200, \quad k = 0, 1, \dots$$

Observamos que el modelo es lineal en el sentido en el que la función $f(x) = 0.8x + 200$ representa a una línea recta. Podemos ver que, además, podemos tratar este problema como un modelo de *Malthus* en el que la población crece exponencialmente (sin considerar la inmigración en la que cada año se incorporan 200 individuos cada año).

Conociendo el valor inicial de la población, y haciendo uso de la ecuación lineal conseguida podemos conocer el conjunto de valores que forman la órbita de x_0 , o dicho de otra forma: conociendo el estado inicial podemos conocer el estado del sistema en cualquier instante.

Así, podemos ver que:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.8x_0 + 200 = 272 \\x_2 &= 0.8x_1 + 200 = 0.8(0.8x_0 + 200) + 200 = 417.6 \\x_3 &= 0.8x_2 + 200 = \dots = 534.08\end{aligned}$$

Quedan determinados así los tres primeros términos de la órbita de x_0 .

Nos vamos a encargar ahora del estudio de los **puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto**, es decir, aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Dichos puntos tienen la propiedad de que si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto.

Teorema 3.2.1 (Convergencia global y acotación del error) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dados. Supongamos que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ y que f es contractiva en el intervalo $[a, b]$, con constante de contractividad $L \in [0, 1)$ (i.e. $|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2| \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$). Entonces,

1. La función f posee un único punto fijo α en $[a, b]$.
2. $\forall x_0 \in [a, b]$ se tiene que $\{x_k\}_{k \geq 0} \subset [a, b]$.
3. $x_k \rightarrow \alpha$, siendo α el punto de equilibrio.
4. Se tienen las siguientes acotaciones del error absoluto:

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha| \quad \forall k \geq 0 \text{ y } \forall x_0 \in [a, b] \quad (\text{cota a priori}) \quad (3.5)$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \quad \forall k \geq 0 \text{ y } \forall x_0 \in [a, b] \quad (\text{cota a posteriori}) \quad (3.6)$$

Demostración. Probaremos en primer lugar el punto 1; al ser f una función continua en el intervalo $[a, b]$ deducimos que f es continua en el intervalo $[a, b]$. Ahora bien, como $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ tenemos que se cumple: $(f(a) - a)(f(b) - b) \leq 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, deducimos que $\exists \alpha$ tal que $f(\alpha) = \alpha$, y así queda probada la existencia. Para probar la unicidad, supongamos que existen α_1, α_2 puntos de equilibrio de f en $[a, b]$. Entonces:

$$0 < |\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

donde $L \in [0, 1)$ es la constante de contractividad. Y hemos alcanzado el absurdo, luego queda probado el primer punto. Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, es fácil deducir que para cualquier $x_0 \in [a, b]$ se tiene que $\{x_k\}_{k \geq 0} \subset [a, b]$.

Pasemos a continuación a probar el punto 3. Para ello, probemos la estimación (3.5). Fijemos $x_0 \in [a, b]$ arbitrario. Se tiene,

$$|x_k - \alpha| = |f(x_{k-1}) - f(\alpha)| \leq L|x_{k-1} - \alpha| \leq \dots \leq L^k|x_0 - \alpha|.$$

Obsérvese que en la desigualdad anterior estamos usando de manera reiterada que, para cualquier $k \geq 0$, $x_k \in [a, b]$ y que f es contractiva en $[a, b]$.

Teniendo en cuenta que $L \in [0, 1)$, deducimos que $\lim x_k = \alpha$ y, por tanto, tenemos que $x_k \rightarrow \alpha$ en $[a, b]$. Por otro lado, tenemos

$$|x_k - \alpha| \leq L|x_{k-1} - \alpha|, \quad \forall k \geq 1$$

Tenemos probado así el punto 3 y la desigualdad (3.5). Para finalizar probemos la estimación (3.6). Sea $m \geq 0$. Entonces,

$$|x_{m+1} - x_m| = |f(x_m) - f(x_{m-1})| \leq L|x_m - x_{m-1}| \leq \dots \leq L^m|x_1 - x_0|$$

(de nuevo hemos usado que, para cualquier $m \geq 0$, $x_m \in [a, b]$ y que f es contractiva en $[a, b]$).

Por otro lado, tomando k, m con $m > k \geq 0$, aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta la desigualdad anterior, podemos escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_m - x_k| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\ \leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + L^{k+1} + L^k)|x_1 - x_0| = \left(\frac{L^k - L^m}{1 - L}\right)|x_1 - x_0| \\ \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0| \end{array} \right.$$

Sabemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \alpha$, así, si en la desigualdad precedente tomamos $\lim_{m \rightarrow \infty}$ obtendremos la estimación (3.6). Esto finaliza la prueba. \square

Corolario 3.2.1 *Consideramos el sistema dinámico discreto lineal (3.4). Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio:*

$$x^* = \frac{b}{1 - m}$$

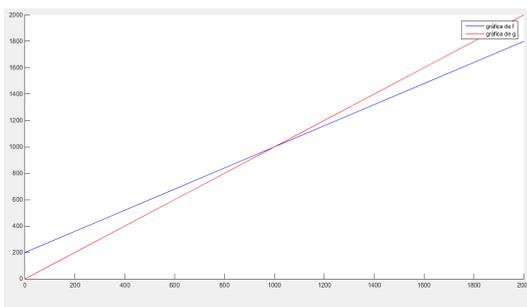
Haciendo referencia al ejemplo anterior vamos a ver como podemos calcular el punto de equilibrio (gracias al corolario anterior sabemos de la existencia y unicidad de él). Vamos a determinarlo tanto algebraicamente como gráficamente:

- Sabemos que $f(x) = 0.8x + 200$ nos describe la evolución de la población y que el punto de equilibrio es aquel que cumple que $f(x) = x$, luego basta con imponer lo siguiente:

$$f(x) = x \Rightarrow x = 0.8x + 200 \Rightarrow x = 1000$$

Como mera comprobación podemos ver que dicho punto cumple el corolario anterior: $100 = \frac{200}{1-0.8}$.

- Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 200$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 1000$. Este punto se llama punto de equilibrio ya que la población en los próximos años sera la misma que la población actual:



$$f(1000) = 0.8 \times 1000 + 200 = 1000$$

A continuación nos centramos en la clasificación de los puntos de equilibrio o análisis de la estabilidad:

Clasificación de los puntos de equilibrio

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos existe, y es único, un punto de equilibrio:

$$x^* = \frac{b}{1 - m}$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden a x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a más o menos infinito).

A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

Teorema 3.2.2 Sea el sistema dinámico lineal discreto:

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = \frac{b}{1-m}$ el punto de equilibrio.

- si $|m| < 1$ entonces x^* es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

- si $|m| > 1$, entonces x^* es repulsivo, y al menos que $x_0 = x^*$ se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k .

$$x_2 = mx_1 + b$$

$$x_3 = mx_2 + b = m^2x_1 + b(m+1)$$

$$x_4 = mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1+m)) + b = m^3x_1 + b(1+m+m^2)$$

⋮

$$x_k = m^{k-1}x_1 + b(1+m+m^2+\dots+m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b \sum_{j=0}^{k-2} m^j$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{k-1}x_1 = 0$$

Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m}$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{b}{1-m} = x^*$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \rightarrow \infty$.

□

3.3. Modelos dinámicos discretos no lineales

En este caso, a diferencia de lo que ocurría en los modelos dinámicos discretos lineales, la función f que determinaba la ecuación en diferencias (3.3) no es lineal. Como consecuencia de esto, van a poder existir muchos puntos de equilibrio que van a estar caracterizados por la pendiente de la curva $f(x)$, tal y como veremos en el siguiente teorema.

Antes de nada, vamos a dar una condición suficiente para que una función sea contractiva en un intervalo $[a, b]$ y que necesitaremos para la prueba del teorema en cuestión, viene dada en la siguiente proposición:

Proposición 3.3.1 *Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Supongamos que satisface la condición*

$$L := \sup_{x \in (a, b)} |f'(x)| < 1$$

Entonces f es contractiva en el intervalo $[a, b]$, siendo L una constante de contractividad para f en $[a, b]$.

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$. Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función f deducimos que existe un punto $z \in (a, b)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x - y)| \leq L|x - y|$$

A partir de esta desigualdad obtenemos el resultado buscado. □

Teorema 3.3.1 (Convergencia local) *Consideramos el sistema dinámico (3.3) siendo x^* un punto de equilibrio $f(x^*) = x^*$ con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $(x^* - \delta, x^* + \delta) \subset I$ y $f \in C^1(x^* - \delta, x^* + \delta)$. Supongamos también que*

$$|f'(x^*)| < 1$$

Entonces, x^ es un punto atractivo, es decir, existe $\rho \in (0, \delta)$ tal que para cualquier $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$ existe una sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ verificando que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = x^*$$

Además, existe una constante $L \in [0, 1)$ (que depende de ρ y $|f'(x^)|$) tal que*

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &\leq L^k |x_0 - x^*| \quad \forall k \geq 0 \quad y \quad \forall x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho] \\ |x_k - x^*| &\leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| \quad \forall k \geq 1 \quad y \quad \forall x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho] \end{aligned}$$

Demostración. La prueba es consecuencia del Teorema 3.2.1 aplicado en un intervalo (que tendremos que encontrar) $[x^* - \rho, x^* + \rho]$. Como $|f'(x)| < 1$, existe $\rho \in (0, \delta)$ tal que $f \in C^1([x^* - \rho, x^* + \rho])$ y

$$|f'(x)| < 1, \quad \forall x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

Como consecuencia de la Proposición 3.3.1 obtenemos que f es contractiva en el intervalo $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ y

$$L = \max_{x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]} |f'(x)| = |f'(\bar{x})| < 1, \quad \text{con } \bar{x} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

es una constante de contractividad asociada.

Por otro lado, $f([x^* - \rho, x^* + \rho]) \subseteq [x^* - \rho, x^* + \rho]$ pues, fijado $x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, existe ξ tal que

$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| = |f'(\xi)||x - x^*| \leq L|x - x^*| \leq L\rho < \rho$$

Se tiene así la propiedad.

Podemos aplicar el Teorema 3.2.1 a f en el intervalo $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ obteniendo la prueba del resultado. □

3.3.1. Modelo de Ricker



El modelo de *Ricker* se trata de un modelo dinámico no lineal basado en las poblaciones de peces y más en particular, centrado en la evolución de una población de salmones.

William Edwin Ricker (1908-2001) nació en Waterdown, Ontario y fue un gran biólogo teórico, además de un gran entomólogo. Sus libros de textos, especialmente en ecología, siguen teniendo una gran influencia en los estudios actuales de postgrados.

Se trata de un modelo discreto basado en una ecuación en diferencias, con el objetivo de conocer, una vez sabido el valor inicial de individuos, el número de individuos que habrá en un cierto instante $k + 1$ a partir de la cantidad de individuos en el momento k .

Nos encontramos entonces ante un sistema dinámico de la forma:

$$x_{k+1} = x_k e^{r(1 - \frac{x_k}{K})}, \quad x_0 = x(0)$$

donde r = tasa intrínseca de crecimiento de la población y K = la capacidad de carga.

Observamos que se trata de una generalización del modelo logístico en el que existe un término que limita el crecimiento de la población. Podemos observar también que para valores menores que la capacidad de carga, la población crece exponencialmente, pero a medida que x_k aumenta, se produce una disminución en el crecimiento de x_{k+1} .

Estudio de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del modelo se obtienen resolviendo la ecuación:

$$f(x) = xe^{r(1-\frac{x}{K})} = x$$

En un ejemplo anterior hemos visto cómo podemos determinar los puntos de equilibrio gráficamente (representando conjuntamente la gráfica de f y la bisectriz del primer cuadrante atendiendo a los puntos de corte), numéricamente basta resolver la siguiente ecuación:

$$xe^{r(1-\frac{x}{K})} = x \Rightarrow x(e^{r(1-\frac{x}{K})} - 1) = 0$$

de donde deducimos que los puntos de equilibrio son: $x_1^* = 0$ y $x_2^* = K$.

Ahora nos disponemos a clasificar dichos puntos de equilibrio. Sabemos que un punto de equilibrio es estable cuando la órbita de cualquier punto tiende a ese punto a medida que transcurre el tiempo, o equivalente, cuando $|f'(x)| < 1$. Por el contrario, diremos que el punto de equilibrio es inestable.

Calculamos ahora la derivada:

$$f'(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})} \left(1 - \frac{rx}{K}\right)$$

Atendemos ahora a los valores que hemos obtenido como puntos de equilibrio:

- $|f'(0)| = |e^r|$. Luego, si $e^r < 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ es estable y esto ocurre cuando $r < 0$. (Observamos que este valor no tiene mucho sentido pues r hace referencia a la tasa de crecimiento de una población).
- $|f'(K)| = |1 - r| < 1$ si $r \in (0, 2)$. Luego la órbita de nuestro sistema tiende a estabilizarse en el valor K cuando $r \in (0, 2)$.

Simulación del modelo

A continuación veremos como modificando el valor de la tasa intrínseca del crecimiento de la población (r) observamos cambios en el tipo de soluciones obtenidas.

A lo largo de las diferentes simulaciones, fijaremos el valor de K , $K = 30$, recordamos que K hace referencia a la capacidad de soporte del medio, es decir, el número máximo de individuos que puede soportar el medioambiente.

Para realizar estas simulaciones haremos uso del software *Mathematica* y de los *diagramas de Cobweb*.

- Consideramos $r = 0.8$. En primer lugar, atendiendo a la estabilidad del modelo, construiremos la órbita asociada a la función f : vemos que los valores tienden a estabilizarse en el 30, que coincide con el punto de equilibrio estable que habíamos pronosticado en el análisis teórico previo $x_2^* = 30 = K$ (con la orden *ListPlot* podemos observarlo, gráficamente, con más claridad):

```
f[x_] := x * Exp [0.8 * (1 - x/30)]
orbita = NestList[f, 3, 15]
{3, 6.1633, 11.6378, 18.9901, 25.4703, 28.7404, 29.7222,
29.9432, 29.9886, 29.9977, 29.9995, 29.9999, 30., 30., 30., 30.}
ListPlot[orbita, PlotStyle -> PointSize[0.02], AspectRatio -> 1]
```

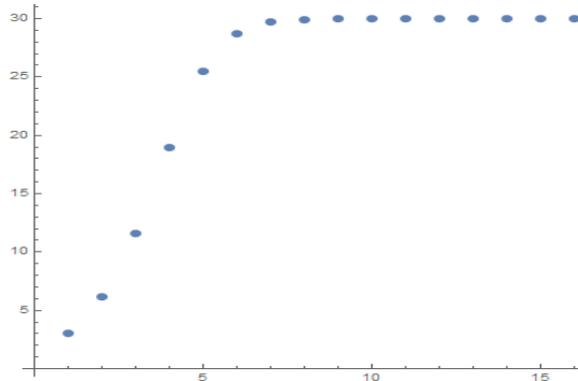


Figura 3.1: Órbita del modelo de *Ricker* con $r = 0.8$, $K = 30$

A continuación, construimos el *Diagrama de Cobweb* correspondiente: dibujamos el punto x_1 en el eje OX . Marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2) . El próximo paso, es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2) . Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente el proceso.

```

grafica1 = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 35}, PlotStyle ->
  {{Thickness[0.01], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0],
    RGBColor[0, 0, 1]}}, DisplayFunction -> Identity]
grafica2 = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{orbita,
  orbita}]], 2, 1], PlotJoined -> True, DisplayFunction ->
  Identity, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
Show[grafica1, grafica2, AspectRatio -> 1, DisplayFunction ->
  $DisplayFunction, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]

```

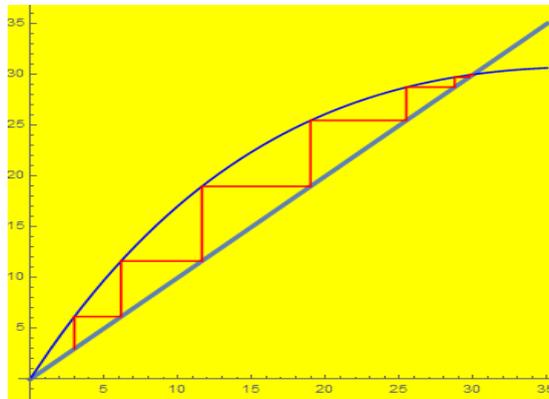


Figura 3.2: Diagrama de Cobweb del modelo de *Ricker* con $r = 0.8$, $K = 30$

Observamos en la figura anterior como las dos gráficas se cortan en los puntos $x_1^* = 0, x_2^* = 30$, los puntos de equilibrio. Queda así determinada la estabilidad del punto de equilibrio $x_2^* = K$ cuando $r \in (0, 2)$.

- Veremos ahora que ocurre cuando $r > 2$. Tomamos ahora $r = 2.2$ y realizamos un análisis parecido al anterior.

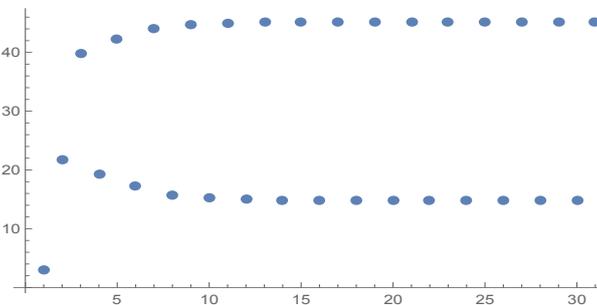


Figura 3.3: Órbita del modelo de *Ricker* con $r = 2.2$, $K = 30$

En este caso, observamos que la órbita no tiende a un único valor sino que intercala entre dos valores: 14.9118, 45.0882. Es decir, en este caso la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* = 14.9118$ y $x_2^* = 45.0882$ tal y como observamos en la imagen adjunta.

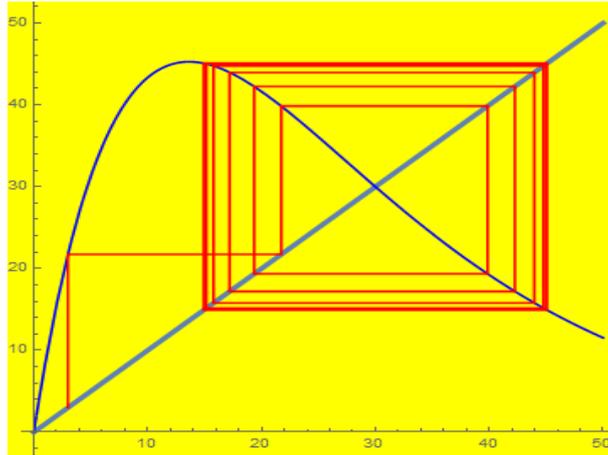


Figura 3.4: Diagrama de Cobweb del modelo de *Ricker* con $r = 2.2$, $K = 30$

- Aumentamos ahora el valor de r y observamos que obtenemos un modelo más complicado.

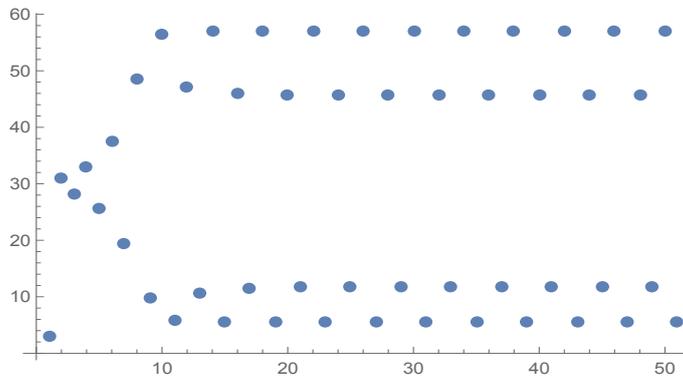


Figura 3.5: Órbita del modelo de *Ricker* con $r = 2.6$, $K = 30$

Tomamos ahora $r = 2.6$ y vamos que en este caso la órbita tiende a 4 valores lo que nos lleva a determinar que la población tiene un comportamiento periódico de orden cuatro tendiendo a estos cuatro valores $x_1^* = 5.43667$, $x_2^* = 45.695$, $x_3^* = 11.7254$, $x_4^* = 57.143$.

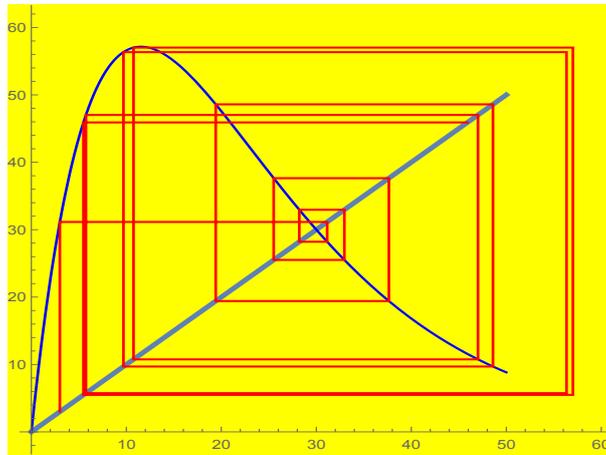


Figura 3.6: Diagrama de Cobweb de *Ricker* con $r = 2.6$, $K = 30$

- Analizamos ahora el caso en el que $r = 3$; fijaremos en este caso un valor inicial $x_0 = 10$ y un valor de capacidad de carga $K = 200$ y calcularemos la órbita correspondiente, así como el *Diagrama de Cobweb* asociado.

Comenzamos calculando la órbita para el valor inicial $x_0 = 10$:

```
f[x_] = x * Exp [3 * (1 - x/200)]
orbita = NestList[f, 10, 24]
```

Construimos ahora el *Diagrama de Cobweb* correspondiente:

```
grafica1 = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 350}, PlotStyle ->
  {{Thickness[0.01], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0],
  RGBColor[0, 0, 1]}}, DisplayFunction -> Identity]
grafica2 = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[orbita,
  orbita]], 2, 1], PlotJoined -> True, DisplayFunction
  -> Identity, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
Show[grafica1, grafica2, AspectRatio -> 1, DisplayFunction
  -> $Display Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
ListPlot[orbita, PlotStyle -> PointSize[0.02], Background ->
  RGBColor[1, 0.5, 0.2], AspectRatio -> 1]
```

Observamos que la población tiene un comportamiento caótico cuando el tiempo tiende hacia infinito.

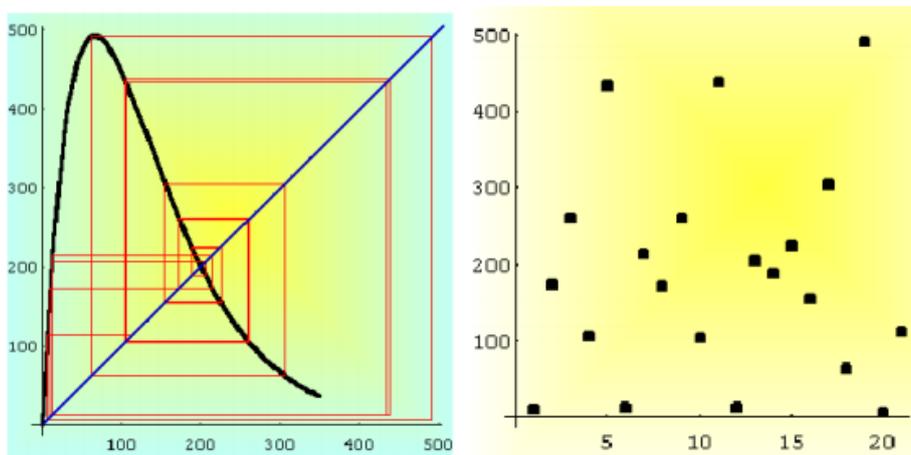
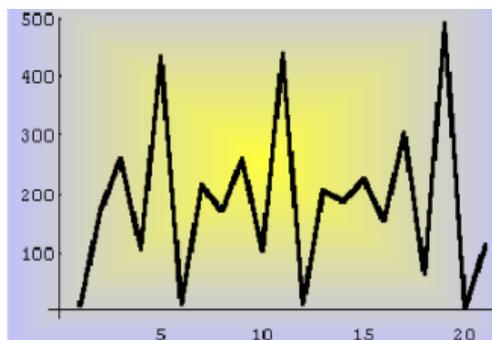


Figura 3.7: Diagrama de Cobweb y evolución de la población (órbita)

Podemos observar mejor el comportamiento caótico si unimos los puntos correspondientes a la población en el tiempo k .

```
grafica2 = ListPlot[orbita, PlotJoined → True,
Background → RGBColor[0.8, 1, 0], PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

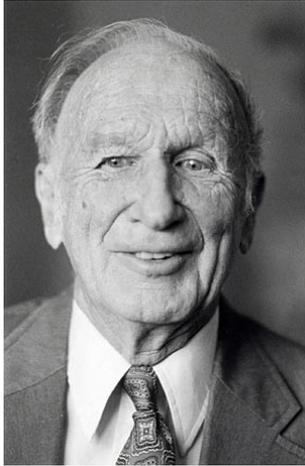


3.4. Sistemas caóticos

En un ejemplo anterior hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinista a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro.

Edward Lorentz (1917-2008) fue un meteorólogo que trató de explicar por qué es tan difícil obtener las previsiones meteorológicas, dando lugar a una revolución científica llamada **Teoría del caos**. El profesor *Lorentz* fue

el primero en reconocer lo que se denomina comportamiento caótico en el modelado matemático de los sistemas meteorológicos.



A principios de la década de 1960, *Lorenz* se dio cuenta de que las pequeñas diferencias en un sistema dinámico, como la atmósfera - o un modelo de la atmósfera - podrían desencadenar enormes y, a menudo, insospechados resultados. Estas observaciones en última instancia le llevaron a formular lo que se conoce como el **efecto mariposa**, presentado en 1972 en un artículo titulado: "Previsibilidad: ¿debe el aleteo de una mariposa en Brasil originar un tornado en Texas?".

Las ideas de *Lorenz* dieron lugar al comienzo de un nuevo campo de estudio que afectó no solo a las matemáticas, sino prácticamente a cada rama de las ciencias. En meteorología, llegó a la conclusión de que puede ser fundamentalmente imposible hacer predicciones más allá de dos o tres semanas con un grado razonable de exactitud.

Afortunadamente, *Lorenz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de espiral.

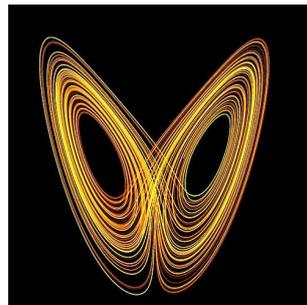


Figura 3.8: Atractor de Lorenz

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde las variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un « circuito cerrado » y se repite infinitamente. A su representación gráfica se conoce con el nombre de **Atractor de Lorenz**. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que,

si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Se conocen diversas aplicaciones en la teoría del caos que involucran a campos muy diversos como la Biología o la Medicina, precisamente, en el campo de la Medicina las investigaciones actuales nos ofrecen la esperanza de poder controlar el caos. *Edward Ott, Ceslo Grebogi y James A. York*, los dos primeros físicos y el último matemático, han elaborado un algoritmo matemático que consiste en convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. Dicho algoritmo se basa en que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular, sino que basta con observar continuamente que comportamiento va adquiriendo el proceso, y realizar las perturbaciones necesarias para volver a dirigirlo al camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, ya que después el caos aparecerá de nuevo.

Esto nos hace ver que se trata de un problema actual con constantes investigaciones al respecto, por ejemplo, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

3.5. Aplicación: Parábola logística de May

Consideramos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$$

1. Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.
 2. $\mu = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de Cobweb clasificar el punto de equilibrio del sistema.
 3. Repetir el proceso para $\mu = 3.3$.
 4. Cuando μ aumenta de 3 a 4, ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?
- En primer lugar mostraremos la gráfica de la ecuación logística para varios valores del parámetro μ . Naturalmente, la parábola tendrá un grado de curtosis que dependerá del valor del parámetro de control μ .

Recurriendo al programa *Mathematica* y con la orden siguiente obtenemos la gráfica de la ecuación logística:

```
Plot[Evaluate[Table[f[c,x],{c,0,4}]],{x,0,1},
PlotStyle -> RGBColor[1,0,0]]
```

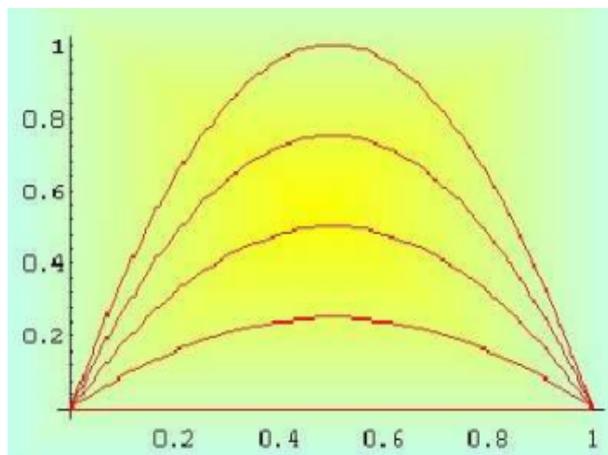


Figura 3.9: $f(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$

- Consideramos la función f no lineal siguiente:

$$f(x) = \mu x(1 - x)$$

Por tanto, debemos encontrar los puntos x tales que $f(x) = x$, obtenemos por tanto: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$.

Ahora, para clasificar estos puntos de equilibrio usamos el Teorema 3.3.1, luego necesitamos conocer el valor de la derivada de $f(x)$, así: $f'(x) = \mu - 2\mu x$.

Por tanto, x_1^* será estable si: $|f'(0)| = |\mu| < 1 \rightarrow 0 \leq \mu < 1$. Vemos que tan pronto como el parámetro μ pasa de $\mu < 1$ a $\mu > 1$ el punto fijo x_1^* pierde su estabilidad y se convierte en un punto fijo inestable. Nos preguntamos ahora si dicho punto es globalmente estable; de acuerdo a la Figura 3.9 vemos que la función f que define la parábola tiene un rango de $[0, \frac{\mu}{4}]$ y que el dominio es $[0, 1]$. Luego para $\mu < 4$

$$f([0, 1]) = \left[0, \frac{\mu}{4}\right] \subset [0, 1]$$

Por otro lado,

$$f'(x) = \mu(1 - 2x)$$

y por tanto,

$$|f'(x)| \leq |\mu| \text{ en } [0, 1]$$

Luego si $\mu < 1$ la aplicación es contractiva; por lo que el punto $x_1^* = 0$ es globalmente estable.

En cuanto al segundo punto de equilibrio, x_2^* será estable si:

$$|f'(1 - \frac{1}{\mu})| = |\mu - 2\mu(1 - \frac{1}{\mu})| = |\mu - 2\mu + 2| = |2 - \mu| < 1 \rightarrow 1 < \mu < 3$$

- Considerando $\mu = 2.5$ y $x_0 = 0.1$, construimos el *Diagrama de Cobweb* asociado al modelo: dibujamos el punto x_1 en el eje OX . A continuación, marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2) . El próximo paso, es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2) . Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente el proceso.

```
f[x_] = 2.5 * x * (1-x)
orbita = NestList[f, 0.8, 20]
{0.8, 0.4, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6,
 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6}
grafica1 = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 35}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0],
  RGBColor[0, 0, 1]}}], DisplayFunction -> Identity]
grafica2 = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{orbita,
orbita}]]], 2, 1], PlotJoined -> True, DisplayFunction ->
  Identity, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
Show[grafica1, grafica2, AspectRatio ->1, DisplayFunction ->
  $DisplayFunction, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
```

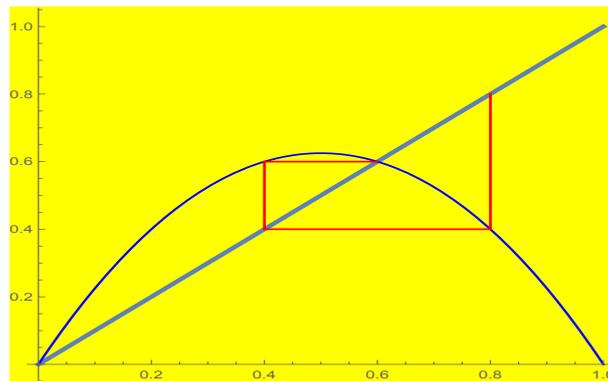


Figura 3.10: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 2.5x(1 - x)$ y $x_0 = 0.8$

Observamos en la figura anterior como las dos gráficas se cortan en el punto $x_2^* = 0.6$ determinando así la estabilidad de dicho punto de equilibrio.

- Repetimos el procedimiento para $\mu = 3.3$:

```
f[x_] = 3.3 * x * (1-x)
orbita = NestList[f, 0.8, 20]
{0.8, 0.528, 0.822413, 0.481965, 0.823927, 0.478736,
 0.823508, 0.479631, 0.823631, 0.479368, 0.823595,
 0.479444, 0.823606, 0.479422, 0.823603, 0.479428,
 0.823603, 0.479427, 0.823603, 0.479427, 0.823603}
```

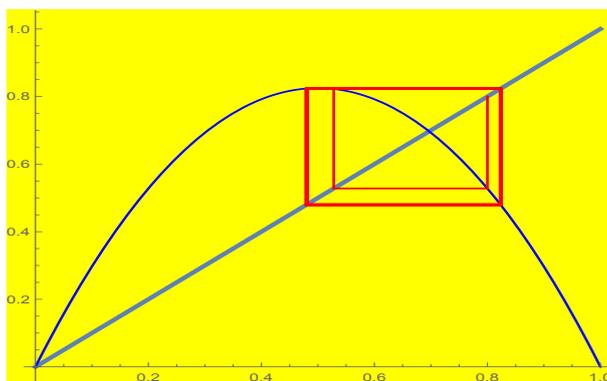


Figura 3.11: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 3.3x(1 - x)$ y $x_0 = 0.8$

Observamos que los valores de la órbita tienden a intercalarse entre dos valores $x_1 = 0.479427$ y $x_2 = 0.823603$. En este caso, la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a dichos valores.

- Por último, consideramos $f(x) = 4x(1 - x)$ y $x_0 = 0.8$, ahora la población se comporta caóticamente.

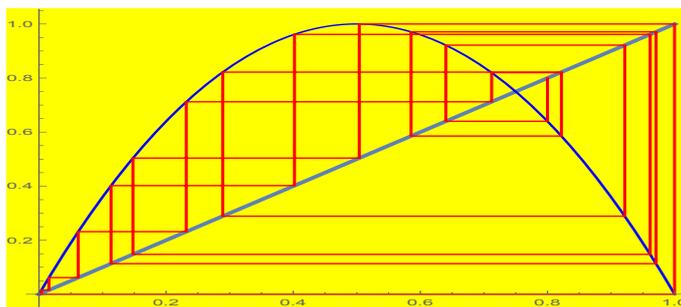


Figura 3.12: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 4x(1 - x)$ y $x_0 = 0.8$

En resumen, hemos visto en este ejemplo que al variar el parámetro μ el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro, \dots , o bien presentar un comportamiento caótico.

Diagramas de bifurcación

A continuación, introducimos un nuevo concepto: **los diagramas de bifurcación**. Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representativos de cada estrato. Las soluciones estables suelen representarse mediante líneas continuas, mientras que las soluciones inestables se representan con líneas punteadas.

El diagrama de bifurcación es el modo más eficiente para dar una visión en conjunto de los diferentes comportamientos asintóticos del sistema según el valor de μ .

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta, ¿cómo obtenemos un diagrama de bifurcación? Bien, en nuestro ejemplo, el diagrama de bifurcación asociado al modelo de *May* se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro μ y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo, si $\mu = 2.5$ entonces $x_k \rightarrow 0.6$, o bien, en el caso $\mu = 3.3$ entonces $x_k \rightarrow 0.823$ y $x_k \rightarrow 0.479$.

A continuación mostraremos una imagen del diagrama de bifurcación del modelo de *May* y en base a ella, analizaremos los diferentes comportamientos en función del valor que tome el parámetro μ :

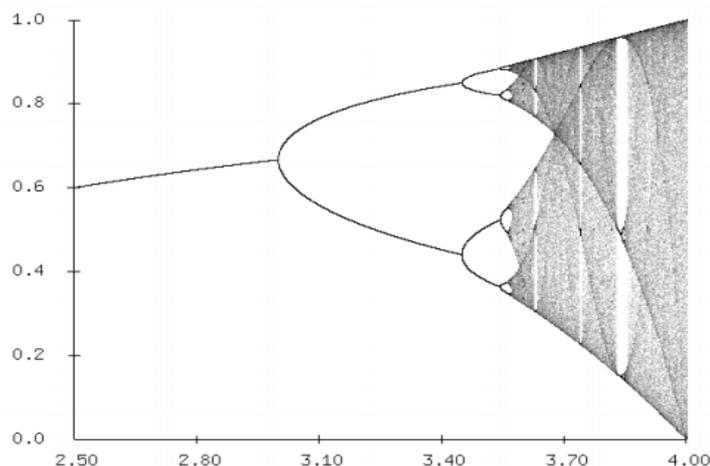


Figura 3.13: Diagrama de bifurcación del modelo de *May*

- Si $0 < \mu \leq 1$ la población terminará desapareciendo independientemente del valor de la población inicial.
- Si $1 < \mu \leq 2$ la población tenderá rápidamente al valor $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, independientemente del valor de la población inicial.

- Si $2 < \mu \leq 3$ a la larga la población también se estabilizará en $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ pero previamente fluctuará en el entorno de ese valor.
- Si $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, la población oscilará entre dos valores.
- Con μ entre 3.45 y 3.54 (aproximadamente), la población tendrá oscilaciones permanentes aproximándose a 4 valores.
- Si μ es ligeramente mayor de 3.54, la población oscilará entre 8 valores (luego 16,32, etc.). La relación entre la longitud de los dos intervalos sucesivos de las bifurcaciones se aproxima a la **constante de Feigenbaum** = 4.669 (esto se debe gracias a que a medida que aumentamos el valor de μ el período se va duplicando).
- Cerca de 3.57 es el inicio del caos, pero todavía hay ciertos valores de μ que muestran un comportamiento no caótico. Por ejemplo, a partir de $1 + \sqrt{8}$ existe una serie de valores de μ que muestran oscilación entre 3 valores, y para valores ligeramente más altos de μ 6 valores, luego 12, etc.
- Ahora, si $\mu = 4$, los valores dejan el intervalo $[0,1]$ y divergen para casi todos los valores iniciales.

Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una característica esencial de los sistemas caóticos es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales que exhiben.

Dados dos puntos iniciales muy próximos el uno del otro, sus respectivas trayectorias divergen tan sólo tras unas pocas iteraciones. Se denomina *fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales* y se refiere al hecho de que cambios muy pequeños en las condiciones iniciales de sistemas caóticos son amplificados enormemente con el orden de la iteración.

Empezamos tratando un caso que no presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, por ejemplo $\mu = 3.3$.

```
f[x_] = 3.3 * x * (1 - x)
orbita1 := NestList[f, 0.8, 25]
orbita2 := NestList[f, 0.8001, 25]
ListPlot[{orbita1, orbita2}, PlotStyle ->PointSize[0.02]]
```

Tal y como vemos en la gráfica siguiente y de acuerdo al análisis hecho anteriormente, tenemos que la población oscilará entre dos valores independientemente de la condición inicial.

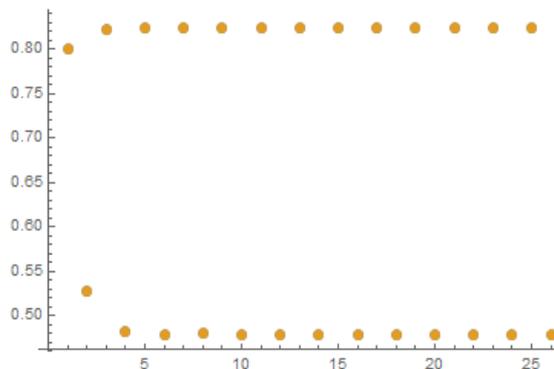


Figura 3.14: Sensibilidad a las condiciones iniciales para $\mu = 3.3$

Gracias al estudio previo sabemos que un caso que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales es cuando tomamos $\mu = 4$.

Si escogemos una de las condiciones iniciales $x_0 = 0.8$ y la otra $x_0 = 0.8001$ veremos que las dos trayectorias sólo tienen en común las primeras iteraciones (aproximadamente, hasta la octava iteración son similares). En muy pocas iteraciones ambas trayectorias han divergido competamente, a pesar de que ambos valores de x_0 son muy próximos. Éste es el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Adjuntamos a continuación una imagen donde podemos observar las 25 primeras iteraciones del ejemplo estudiado para cada condición inicial:

```
f[x_] = 4 * x * (1 - x)
orbital := NestList[f, 0.8, 25]
orbital2 := NestList[f, 0.8001, 25]
ListPlot[{orbital, orbital2}, PlotStyle ->PointSize[0.02]]
```

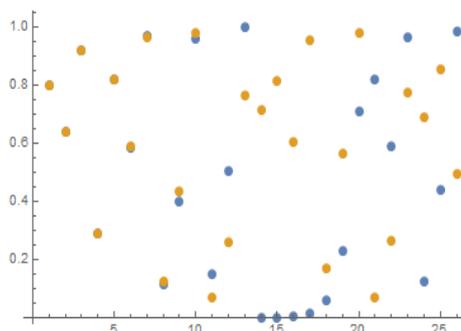


Figura 3.15: Sensibilidad a las condiciones iniciales para $\mu = 4$

Acabamos de ver un ejemplo de **caos**: cómo tomando dos valores iniciales muy próximos las trayectorias divergen completamente. Así pues, la existencia de este comportamiento caótico diluye, como hemos comentado con anterioridad, la posibilidad de precisar (y, en consecuencia, de predecir) con detalle el comportamiento a largo plazo de las órbitas del sistema.

Bibliografía

- [1] Jorge Alberto Brenis Parraguez, *Tesis doctoral: Modelo matricial de Leslie para describir el crecimiento poblacional por edad específica*, 2015, Universidad de Lambayeque, Perú.
- [2] Francisco Armando Carrillo Navarro, *Tesis doctoral: Análisis de Sensibilidad de Poblaciones Estructuradas*, 1988, Universidad de Sonora, México.
- [3] Omar Cuevas Salazar, *Tesis doctoral: Dinámica de Poblaciones*, 1986, Universidad de Sonora, México.
- [4] Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández y José Manuel Vegas Montaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, 2003.
- [5] Emanuel Parzen, *Stochastic processes*, 1962, San Francisco.
- [6] Juan Navas Ureña, *Diversos temas y artículos relacionado con el modelado matemático y los sistemas dinámicos*, 2009, Universidad de Jaén, España.
- [7] Santiago Pérez-Cacho García, Fernando María Gómez Cubillo, Jose María Marbán Prieto, *Modelos matemáticos y procesos dinámicos*, 2002.
- [8] *Apuntes Cálculo Numérico I*, 2018, Universidad de Sevilla, España.
- [9] *Apuntes Cálculo Numérico II*, 2018, Universidad de Sevilla, España.