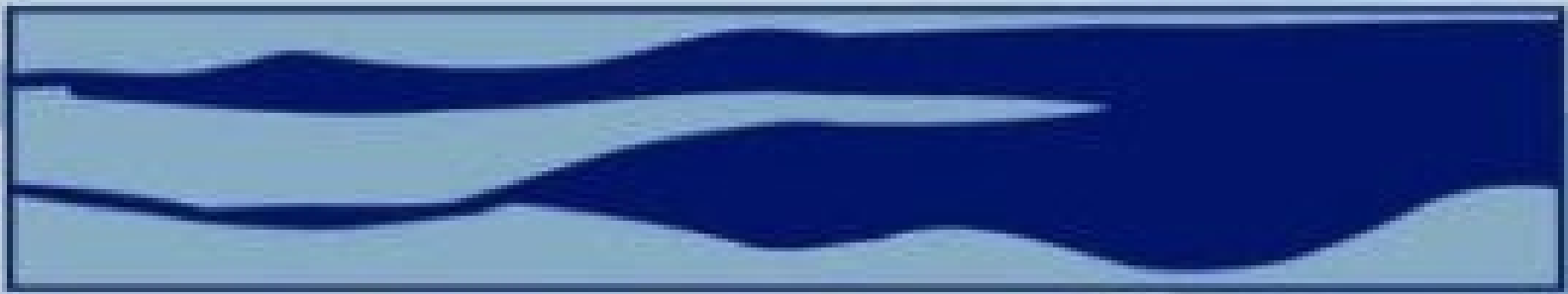


**TEORÍA DE JUEGOS:  
EL PENALTY DE NASH**

Guillermo Bautista Baquero







©2018

TEORÍA DE JUEGOS:  
EL PENALTY DE NASH

Por

Guillermo Bautista Baquero

TRABAJO FIN DE GRADO  
PRESENTADO PARA OPTAR  
AL GRADO EN MATEMÁTICAS  
POR LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Guillermo Bautista Baquero

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE  
ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

El abajo firmante ha leído este trabajo y recomienda a la Facultad de Matemáticas la aceptación del trabajo “**Teoría de Juegos: el penalty de Nash**” realizado por **Guillermo Bautista Baquero** como Trabajo Fin de Grado para obtener el Grado en Matemáticas a conforme a lo dispuesto en la Ley.

Con fecha de: Junio 2018

Tutor:

Prof. Dr. José María Fernández Ponce

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Fecha: **Junio 2018**

Autor: **Guillermo Bautista Baquero**  
Título: **Teoría de Juegos: el penalty de Nash**  
Dpto: **Estadística e Investigación Operativa**

Firma del autor

SE PROHIBE LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL DE ESTE TRABAJO SIN EL PERMISO EXPRESO DEL AUTOR O DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA.



<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos fundamentales: equilibrio . . . . .	1
1.2. Teorema del Punto Fijo . . . . .	2
1.3. Estructura del trabajo . . . . .	6
<b>2. Juegos de Suma Nula</b>	<b>9</b>
2.1. Definición de un juego en forma normal . . . . .	9
2.2. Estrategias MIN-MAX . . . . .	11
2.3. Extensión mixta de un juego . . . . .	13
2.4. Solución en juegos matriciales . . . . .	16
2.5. Estrategias óptimas y valor del juego . . . . .	20
2.6. Juegos completamente mixtos y simétricos . . . . .	21
<b>3. Juegos de Suma No Nula</b>	<b>25</b>
3.1. Juego no cooperativo en f.n. . . . .	25
3.2. Principios de Optimidad . . . . .	27
3.3. Estrategias mixtas . . . . .	32
3.4. Existencia equilibrios de Nash . . . . .	36
3.5. Equilibrios en estrategias mixtas conjuntas . . . . .	38
<b>4. Aplicación: El Penalty de Nash</b>	<b>41</b>
4.1. Introducción . . . . .	41
4.2. Estrategias mixtas en lanzamientos de penalties . . . . .	43
4.3. Datos . . . . .	47
4.4. Análisis empírico . . . . .	49
4.4.1. Pruebas individuales . . . . .	51
4.4.2. Pruebas conjuntas . . . . .	52
4.4.3. Interpretación y discusión . . . . .	55
4.5. Debate y pruebas adicionales . . . . .	57
4.6. Conclusión . . . . .	57
.1. Apéndice. Identidades de lanzadores y porteros . . . . .	59

# Resumen

Este trabajo pretende explicar y analizar dos de los principales tipos de juegos: los juegos de suma nula y juegos de suma no nula, para finalizar dando un ejemplo real donde se puede aplicar la teoría explicada previamente.

El primer caso trata sobre aquellos juegos donde la ganancia de un jugador es lo mismo que la pérdida del otro. En este caso se tratan juegos bipersonales, es decir, sólo hay dos jugadores. Para analizarlos, se representa el juego en forma matricial donde las filas y columnas representan las estrategias de cada jugador. Se trata de ver cuál es la ruta a escoger (estrategia) para poder maximizar la cantidad a ganar. Pero no siempre se va a poder alcanzar, ya que los juegos de suma nula son estrictamente competitivos, es decir, el otro jugador intentará que el oponente pierda la mayor cantidad posible para beneficio propio. Por lo tanto, se pretende que el riesgo de pérdida sea el mínimo, definiéndose así estrategias de seguridad donde el jugador se pone en el peor de los supuestos e intenta elegir el mejor entre los peores casos. Para buscar una situación estable (equilibrios) y poder dar un valor solución del juego que garantice la mínima pérdida posible, se utiliza la probabilidad. Se prosigue definiendo las estrategias más favorables para los jugadores, estrategias óptimas, para finalizar con dos clases especiales de juegos de suma nula donde el valor del juego está perfectamente determinado al tener la matriz de ganancias con una serie de características peculiares.

Posteriormente, se introducen los juegos donde las recompensas recibidas no son antagónicas, los juegos de suma no nula. En este caso, se tratan de juegos donde puede

haber más de dos participantes, aunque ocasionalmente se restringirá a juegos bipersonales para mejor comprensión. Seguidamente se definirán cómo son las estrategias de seguridad en este caso. De nuevo, los jugadores no se centran exclusivamente en obtener un cierto resultado, sino también en las posibilidades que tienen de lograrlo, extendiéndose de estrategias puras, donde no se usan probabilidades, a estrategias mixtas. A continuación se presentan el equilibrio de Nash, situación donde los jugadores no se sienten tentados a cambiar de estrategia, ya que puede provocar un descenso en las ganancias. Por último, al haber equilibrios más favorables para unos jugadores que para otros, se estudian aquellos en estrategias mixtas conjuntas.

Para terminar se ve una aplicación empírica de la teoría de juegos: los lanzamientos de penalties. Se trata de una situación de juego de suma nula donde las estrategias están totalmente determinadas. Se comenzará explicando las características del juego para continuar describiendo las estrategias mixtas en este caso. Luego se proporcionan datos extraídos de más de 1400 penalties para después comprobar que existe un equilibrio en este juego. Se concluye viendo el interés de este estudio frente a otras aplicaciones y dónde se ha usado este análisis.

# Abstract

This dissertation pretends to explain and analyze two of the main types of games: the zero-sum games and the nonzero-sum games, to end giving and empiric sample where the theory explained previously can be applied.

The first case consists of those games where the profit of a player is the same as the loss of the other one. The games that will be explained are two person games. In order to analyse them, the games are represented in a cuadratic matrix where the rows and columns symbolize the different strategies of each player. The participants will try to maximize their gains, but it will not be always possible, because, the zero-sum games are strictly competitive in the sense that the other player will intend that the opponent lose as much as possible for his/her own benefit. Therefore, the loss of risk should be minimal, defining then security strategies where the player supposes the worst situations and he/she tries to choose the best one between the deficientes. For looking for a steady situation and to give a solution value which guarantees the minimum possible loss. It continues by defining the most favorable strategies for the players, optimal strategies, to end up with two special classes of zero-sum games where the value of the game is perfectly determined because of the matrix characteristics.

Later, the games where the received rewards are not opposite are introduced, the non-zero sum games. In this case, there could be more than two player, but, sometimes, it will be restringed to bipersonal games for better understanding. Next, the security strategies are defined in this case. Again, the players are not exclusively foccused on obtaining a certain result, but also on the probabilities to achieve it, extending from

pure strategies, where probabilities are not used, to mixed strategies. Immediately after, the Nash equilibrium is presented, a situation where the players are not tempted to change their strategies, because the deviation of it could produce a decrease on their gains. Finally, as some equilibrium situations are more favorable for certain players than others, the equilibriums on joint mixed strategies are studied.

To conclude a real situation of game theory is analysed: penalty kicks in football. It consists of a zero-sum game where the strategies are perfectly defined. Beginning by explaining the characteristics of the game, to continue describing the mixed strategies in this case. Next data are provided extracted from more than 1400 penalties, in order to show that there exists an equilibrium in this game. To finish, it is shown the interest of this research against other applications and how it has been used.

# 1 Introducción

A diario existen problemas o situaciones en las que se tienen que tomar decisiones. Hay varias formas de afrontar el problema y sin importar cómo se razona o qué criterio se use, al final habrá que decidir qué acción realizar. Esta decisión tendrá resultados que serán favorables, perjudiciales o, tal vez, ni uno ni otro. Además, las consecuencias para cada uno de los participantes no sólo dependerán de la acción propia sino también de las tomadas por los demás.

Existe un área de las matemáticas que analiza y modela este tipo de situaciones llamada Teoría de Juegos (TJ), proporcionando técnicas matemáticas para analizar situaciones donde dos o más individuos están involucrados en un conflicto. Los juegos tradicionales entre personas, son posiblemente los ejemplos más fáciles de visualizar. Sin embargo, los individuos involucrados no se restringen exclusivamente a personas, pueden ser compañías, fábricas, naciones u otras entidades. Entre las situaciones de mayor interés para su estudio y análisis están los conflictos económicos, políticos y sociales.

Los fundamentos de esta teoría fueron establecidos y expuestos por John von Neumann junto a Oskar Morgenstern en el libro Neumann y Morgenstern (1944). En dicha obra se dan las bases para realizar un análisis matemático riguroso de modelos planteados aplicables tanto a situaciones económicas como políticas. Este libro no solo revolucionaría la economía sino que abriría un nuevo campo de conocimiento (Teoría del Juego) que ha sido usado en ámbitos desde la medicina, como en políticas de vacunación, hasta en el deporte.

## 1.1. Conceptos fundamentales: equilibrio

Para comenzar, se presentarán tres conceptos fundamentales para el estudio de la TJ.

**Definición 1.1.1.** *Se denomina **juego** a una situación en la que dos o más individuos, sometidos a unas reglas preestablecidas deben tomar decisiones que, consideradas conjuntamente, conducen a un resultado.*

**Definición 1.1.2.** *Los **jugadores** son los participantes involucrados en el juego.*

**Definición 1.1.3.** *Se llama **estrategia** a una especificación completa de las acciones que ejecutará un jugador en cualquier contingencia que pueda presentarse en el desarrollo del juego. Es cada uno de los cursos de acción de cada jugador.*

**Nota 1.** *Estas definiciones no son literales en el sentido que se están definiendo dentro del campo que nos concierne. Destacar también que, como se ha dicho anteriormente, los jugadores no tienen por qué ser personas.*

En TJ, un concepto muy importante es el de equilibrio, ya que estudia cuál es la mejor estrategia para varios jugadores simultáneamente. La pregunta obligada es si, dada una situación, existe un equilibrio. Nash (1950) introduce formalmente el concepto de equilibrio.

**Definición 1.1.4.** *Un **equilibrio** en TJ es un conjunto de estrategias donde ningún jugador tiene ningún incentivo para cambiarla.*

Para estudiar la existencia de dichos equilibrios, hay que basarse en el Teorema del Punto Fijo de Kakutani (Youngeun (2016)), una versión general del conocido teorema del Punto Fijo de Brouwer (Uriquidi (2018)). Este segundo teorema establece, a grosso modo que, para ciertas condiciones sobre el dominio, una función continua de un conjunto en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, existe al menos una solución de la ecuación  $f(x) = x$ . Aunque el teorema es fácil de enunciar, su demostración no es nada sencilla.

## 1.2. Teorema del Punto Fijo

En lo que sigue de este primer capítulo, se introducirán los conceptos necesarios para, primero enunciar el teorema del punto fijo de Brouwer y finalmente generalizar enunciando y demostrando el teorema del punto fijo de Kakutani basándose en el artículo

Youngeun (2016).

**Definición 1.2.1.** Una **envolvente convexa** de un conjunto de puntos en el espacio Euclídeo  $\mathbb{E}$ , es el menor conjunto convexo que contiene a  $\mathbb{E}$ .

**Definición 1.2.2.** Un **politopo** es un objeto geométrico con lados planos y que puede existir en cualquier dimensión  $n$ , siendo así un politopo  $n$ -dimensional.

**Definición 1.2.3.** Un **símplex** es un politopo  $k$ -dimensional cuya envolvente convexa tiene  $k + 1$  vértices. Suponiendo que los  $k + 1$  puntos son  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$  son afínmente independientes, i.e.,  $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_k - u_0$  son linealmente independientes, entonces el símplex determinado por estos puntos es de la forma:

$$C = \{\theta_0 u_0 + \theta_1 u_1 + \dots + \theta_k u_k \mid \sum_{i=0}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\}.$$

**Definición 1.2.4.** Una **función continua**  $g$  es aquella que transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes: si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $g(x_n) \rightarrow g(x)$ .

**Definición 1.2.5.** Un subespacio  $B \subset A$  es un **retracto** si existe una función continua  $r : A \rightarrow B$ , llamada retracción, tal que  $r \circ i = id_A$  donde  $i$  representa la inclusión de  $B$  en  $A$  e  $id_A$  representa la función identidad de  $A$ .

**Teorema 1.2.6** (Punto Fijo de Brouwer). Si  $x \rightarrow \varphi(x)$  es una función continua punto a punto de un símplex  $r$ -dimensional  $S$  en sí mismo, entonces existe  $x_0 \in S$  tal que  $\varphi(x_0) = x_0$ .

*Demostración.* La prueba está basada en el hecho de la no existencia de retracciones del disco unidad en su frontera. Se puede encontrar en Youngeun (2016).  $\square$

El teorema del punto fijo de Kakutani generaliza el de Brouwer en dos aspectos: la función continua no es punto a punto sino que se da de punto a conjunto y la continuidad de funciones se generaliza como funciones semicontinuas superiormente.



**Notation 1.** Denotamos por  $\Omega(A)$  al conjunto partes de  $A$ :

$$\Omega(A) = \{B : B \subset A\}. \quad (1.2.1)$$

**Definición 1.2.7.** Sean  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  dos conjuntos no vacíos. Una **correspondencia** de  $\mathbb{X}$  en  $\mathbb{Y}$  es una función  $\Phi : \mathbb{X} \rightarrow \Omega(\mathbb{Y})$ , que a cada punto  $x$  de  $\mathbb{X}$ , le asigna un subconjunto no vacío  $\Phi(x)$  de  $\mathbb{Y}$ .

**Definición 1.2.8.** Una correspondencia  $x \rightarrow \Phi(x) \in \Omega(\mathbb{Y})$  de  $\mathbb{X}$  en  $\Omega(\mathbb{Y})$  se dice que es **semicontinua superiormente** si  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \in \Phi(x_n)$  e  $y_n \rightarrow y_0$  implican que  $y_0 \in \Phi(x_0)$ .

**Definición 1.2.9.** Una **subdivisión baricéntrica simplicial** es un algoritmo que divide un politopo convexo arbitrario en simpliciales de la misma dimensión conectando los baricentros de sus caras.

**Lema 1.2.10.** Cualquier sucesión de números reales acotada tiene una subsucesión convergente.

*Demostración.* Véase Youngeun (2016). □

**Lema 1.2.11** (Bolzano-Weierstrass). Cualquier sucesión acotada de  $\mathbb{R}^n$  tiene una subsucesión convergente.

*Demostración.* Véase Youngeun (2016). □

**Corolario 1.2.12.** Toda sucesión en un conjunto  $S$  cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^n$  tiene una subsucesión que converge a un punto en  $S$ .

*Demostración.* Toda sucesión en un cerrado y acotado es acotada, luego por el Lema 1.2.11, tiene una subsucesión convergente. Como el conjunto  $S$  es cerrado, dicha subsucesión converge a un punto en  $S$ . □

**Teorema 1.2.13** (Teorema del Punto Fijo de Kakutani). Si  $x \rightarrow \Phi(x)$  es una correspondencia semicontinua superiormente de un simplex  $r$ -dimensional  $S$  en  $\Omega(S)$ , entonces existe un  $x_0 \in S$  tal que  $x_0 \in \Phi(x_0)$ .

*Demostración.* Sea  $S_n$  la  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica simplicial de  $S$ . El número  $n \in \mathbb{N}$  denota cuántas divisiones de este tipo se han hecho previamente. Los ejemplos de  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$  están en la figura (1.1). Obsérvese que sólo se necesita el simplex  $S$  para ser dividido en simpliciales más pequeños, no necesariamente mediante subdivisión baricéntrica. Dicha subdivisión es una entre muchas posibles. Como  $S$  es un simplex

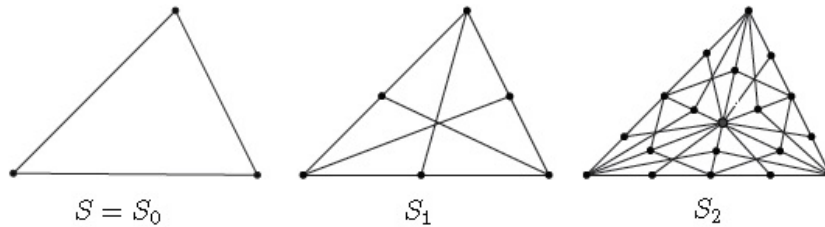


Figura 1.1

cerrado  $r$ -dimensional, existen muchos simpliciales  $r$ -dimensionales cerrados más pequeños en  $S_n$ . Se toma uno de ellos, que tendrá  $r + 1$  vértices, y lo denotamos por  $S_x$ . Sean  $x_0, \dots, x_r$  los vértices. Así, todos los puntos de  $S_x$  pueden ser representados por la ecuación  $\theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_r x_r$ , con  $\sum_{i=0}^r \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$  por definición de simplex. Para cada vértice  $x_i$ ,  $\Phi(x_i)$  será un conjunto de números ya que  $\Phi(x_i)$  es una correspondencia. Sean  $y_i$  un punto arbitrario en  $\Phi(x_i)$  y  $S_y$  el simplex formado por  $y_0, y_1, \dots, y_r$ . Entonces, todos los puntos de  $S_y$  también pueden ser representados por  $\theta_0 y_0 + \theta_1 y_1 + \dots + \theta_r y_r, \sum_{i=0}^r \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$  donde  $\theta_i$  son exactamente los mismos que se necesitan para representar los puntos en  $S_x$ . Por tanto, existe una correspondencia entre los puntos de  $S_x$  y los de  $S_y$ .

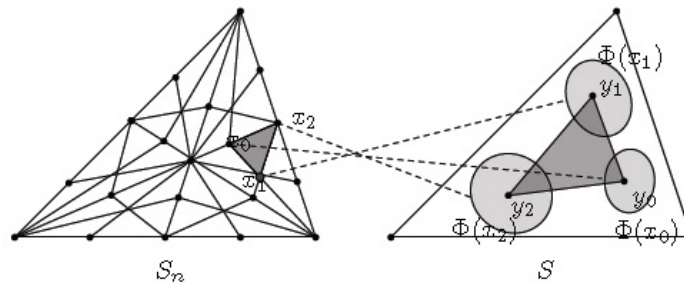


Figura 1.2

Si se repite el proceso para todos los simpliciales  $r$ -dimensionales en  $S_n$ , entonces todos los puntos en  $S_n$  tendrían su correspondiente punto en  $S$ . Luego, dicha función es punto a punto de  $S$  en sí mismo. Esa función se denotará por  $x \rightarrow \varphi_n(x)$ . Como es una función

continua punto a punto de un simplex cerrado  $r$ -dimensional en sí mismo, por el Teorema 1.2.6 existe un punto  $x_n \in S$  tal que  $x_n = \varphi_n(x)$ . Repitiendo de nuevo todo este proceso para  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , existirían los correspondientes  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Como la subdivisión baricéntrica puede hacerse tantas veces como se desee, la sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots$  es infinita. Además, como  $S$  es un cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ , por el Corolario 1.2.12, esta sucesión tiene una subsucesión convergente a un punto  $x^* \in S$ . Dicho punto es el punto  $x^* \in S$  tal que  $x_0 \in \Phi(x_0)$ . Obsérvese que puede haber más de un  $x^*$  si existe más de una subsucesión convergente de  $x_0, x_1, x_2, \dots$ .

Para probar esta característica de  $x^*$ , sea  $\Delta_n$  un simplex  $r$ -dimensional de  $S_n$  que contiene al punto  $x^*$ . El punto  $x^*$  puede ser parte de más de un simplex  $r$ -dimensional si está en algún vértice o eje de los simpliciales. En ese caso, se toma cualquiera de esos simpliciales. Sean  $v_0, v_1, \dots, v_r$  los  $r+1$  vértices de  $\Delta_n$ . Entonces, como  $\Delta_n$  es un simplex y  $x_n \in \Delta_n$ ,  $x_n = \sum_{i=0}^r \theta_i v_i$ , para  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_r$  tal que  $\sum_{i=0}^r \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ . Ahora, sean  $q_i = \varphi(v_i), (i = 0, 1, 2, \dots, r)$ . Entonces,  $q_i \in \Phi(v_i)$  ya que  $\varphi(x^*) = \sum_{i=0}^r \theta_i q_i$  para los  $\theta_i$  usados para representar  $x_n = \sum_{i=0}^r \theta_i v_i$ . Se puede repetir el proceso obteniendo:

$$x^* = \varphi_n(x^*) = \sum_{i=0}^r \theta_i^n v_i^n.$$

Ahora tomando una nueva subsucesión  $(n'_v)$  de  $(n_v)$  tal que  $(\theta_i^{n'_v})$  y  $(v_i^{n'_v})$  converge para  $i = 0, 1, \dots, r$  y se toma  $\lim_{v \rightarrow \infty} \theta_i^{n'_v} = \theta_i^0$  y  $\lim_{v \rightarrow \infty} v_i^{n'_v} = v_i^0$ . Entonces por la semicontinuidad superior de  $\Phi(x)$ ,  $y_i^0 \in \Phi(x_0)$  para  $i = 0, 1, \dots, r$  y esto implica, por la convexidad de  $\Phi(x_0)$ , que  $x_0 = \sum_{i=0}^r \theta_i^0 v_i^0 \in \Phi(x_0)$ . Ésto completa la prueba.  $\square$

### 1.3. Estructura del trabajo

Como se ha mencionado anteriormente, el trabajo se centrará en juegos no cooperativos con un conjunto, tanto de jugadores como de estrategias, finito.

A continuación se presenta un breve resumen de los contenidos de cada uno de los capítulos restantes que conforman el trabajo.

En el segundo capítulo se abordan los juegos donde hay dos partes en conflicto con intereses enfrentados y el total de las recompensas permanece constante a lo largo

de todo el juego (cero). Son los llamados juegos de suma nula donde los pagos son opuestos. Primero se introducirán los conceptos necesarios para analizar esta clase de juegos, sirviendo estos conceptos para capítulos posteriores. Seguidamente se presenta el teorema principal del capítulo, el Teorema Minimax de John Von Neumann. Por último, se tratarán un subtipo especial de juegos dentro de los de suma nula. A lo largo de esta parte, se expondrán ejemplos para una mejor comprensión de la teoría. Se explicará cómo se puede modelar una situación de suma nula y ver las posibles soluciones (que no siempre podrán ser las mejores) de cualquier juego de este tipo.

El principal objetivo del capítulo 3 es presentar el concepto de equilibrios de Nash. Basándose en definiciones anteriores, se trata de comprender cómo se formalizan los juegos cuando la recompensa total no es constante. Comienza con la definición de un juego no cooperativo en forma normal para seguir introduciendo conceptos con el objetivo final de demostrar la existencia de equilibrios de Nash en juegos de suma no nula. De nuevo, a través de ejemplos simples se visualizará cómo se formulan y resuelven dichos juegos. Finalmente se trata de ver qué ocurre cuando las estrategias son llevadas a cabo conjuntamente.

El cuarto capítulo trata sobre una aplicación empírica al teorema principal del capítulo 2, el Teorema del Minimax. Tras numerosas observaciones realizadas el matemático Ignacio Palacios-Huerta pretende aportar una situación real de la teoría de equilibrios. Para ello, analiza más de 1400 penalties, un juego en el que las estrategias están perfectamente definidas y donde las recompensas son inmediatas, generando una situación totalmente controlada.



## 2 Juegos de Suma Nula

Desde pequeño, todos conocemos juegos tradicionales como piedra/papel/tijera o el ajedrez, pero lo que (seguramente) no sabíamos es que estábamos divirtiéndonos con juegos de suma nula. Estos juegos clásicos son estrictamente competitivos ya que, lo que es beneficio para un jugador se transforma en pérdida para el otro.

Como curiosidad decir que deportes donde no se contempla el empate, como el baloncesto o el tenis, son juegos de este tipo. No es el caso del fútbol, aunque sí existen situaciones durante un partido que se dan esta clase de juegos, pero eso es una cuestión que se abordará más adelante.

Se empezará definiendo los juegos en forma normal y se continuará explicando un tipo de estrategia, probablemente el más famoso. A continuación se procederá a relacionar la teoría de probabilidades con las estrategias para después ver tanto el concepto de solución de un juego como las estrategias más favorables para los jugadores. Se concluirá haciendo una descripción de una clase particular de juego de suma nula.

### 2.1. Definición de un juego en forma normal

Establecidos los conceptos de juego, jugadores y estrategias, veamos uno de los casos más importantes dentro de los juegos.

Un juego, según si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar resultados o no, se puede clasificar como cooperativo o no cooperativo. Los juegos de suma nula están dentro de la segunda clase.

**Definición 2.1.1.** *Un juego bipersonal de suma nula (jbsn) es aquel en el que se enfrentan dos jugadores con una serie de estrategias y cuyos pagos son opuestos; lo que un jugador gana el otro lo pierde.*

**Definición 2.1.2.** *La función de pagos es aquella función real que proporciona explícitamente el pago que recibe un jugador para cada una de sus estrategias.*

Un juego puede describirse, principalmente, mediante dos formas: forma extensiva (a través un árbol de decisión) y forma normal. La segunda, nos resultará mucho más útil para analizar los juegos, así que se utilizará a la hora de representarlos.

**Definición 2.1.3.** *Se llama representación formal de un juego bipersonal a una especificación de las estrategias de cada jugador,  $S$  y  $T$ , y de las funciones de pago,  $p_1$  y  $p_2$ , definidas como:*

$$p_1 : S \times T \rightarrow \mathbb{R} \quad p_2 : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

*El juego es finito cuando los conjuntos de estrategias  $S$  y  $T$  son finitos,  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ .*

Así pues un juego es de suma nula si, y sólo si,

$$p_1(s, t) + p_2(s, t) = 0 \quad \forall (s, t) \in S \times T.$$

Además, cuando el juego es finito, toda la información está contenida en la llamada matriz de ganancias, definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde  $a_{ij} = p_1(s_i, t_j) = -p_2(s_i, t_j)$ .

Esta matriz muestra la ganancia para el jugador 1 ( $J_1$ ) o la pérdida para jugador 2 ( $J_2$ )

Por tanto, la estrategia  $s_i$  de ( $J_1$ ) es la  $i$ -ésima fila de  $A$  y la estrategia  $t_j$  de ( $J_2$ ) es la  $j$ -ésima columna de la matriz anterior. Luego se supondrá que  $J_1$  elige una fila y  $J_2$

elige una columna simultáneamente, ignorando cada uno la elección del otro jugador.

Una vez conocidas sus estrategias,  $J_1$  gana el valor de la entrada  $a_{ij}$ , que es pagado por  $J_2$ . Si ésta es un número negativo,  $J_1$  pagará el valor absoluto de esa cantidad a  $J_2$ . Así pues,  $J_1$  buscará una estrategia que maximice la función  $p_1$  sin importar qué estrategia escoge el otro jugador, y  $J_2$  buscará minimizar dicha función independientemente de la elección del primer jugador.

- Problema  $J_1$ :

$$\max_{s \in S} p_1(s, t) \quad \forall t \in T$$

- Problema  $J_2$ :

$$\min_{t \in T} p_1(s, t) \quad \forall s \in S$$

## 2.2. Estrategias MIN-MAX

En los juegos de suma nula, cuando un jugador intenta maximizar sus ganancias, a la vez está intentando minimizar las de su oponente.

Las estrategias de seguridad se definen en Bilbao y Fernández (1999) como aquellas en las que cada jugador presume que va a obtener el peor resultado y escoge la estrategia que proporciona el mejor de los peores resultados. De esta forma se garantiza que, en el caso más desfavorable, se obrendrá la mejor solución posible.

Desde el punto de vista de  $J_1$ , se tienen dos posibles estrategias de seguridad a seguir. Se puede buscar maximizar el mínimo de ganancias a obtener, o bien, minimizar la ganancia máxima de  $J_2$ , minimizando así la pérdida máxima.

**Definición 2.2.1.** *Para cada estrategia  $s_i \in S$ , se define el nivel de seguridad de*



$J_1$  como el pago que puede asegurarse con esa estrategia prescindiendo de las acciones de  $J_2$ :

$$v_1(s_i) = \min_j a_{ij}.$$

Análogamente, para cada estrategia,  $t_j \in T$  el nivel de seguridad de  $J_2$  es el pago que puede asegurarse con esa estrategia prescindiendo de las acciones de  $J_1$ :

$$v_2(t_j) = \max_i a_{ij}.$$

**Definición 2.2.2.** *El valor maximin viene dado por:*

$$v_1 = \max_i v_1(s_i) = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Así, una estrategia maximin es aquella que proporciona al jugador su valor maximin.

**Definición 2.2.3.** *El valor minimax viene dado por:*

$$v_2 = \min_j v_2(t_j) = \min_j \max_i a_{ij}$$

Una estrategia minimax es aquella que proporciona al jugador su valor maximin.

Se cumple siempre que

$$v_1 \leq v_2.$$

La estrategia maximin, o criterio de Wald (matemático que estableció por primera vez este método en su libro Wald (1950)), y la estrategia minimax, o criterio de Savage (Shafer (1986)), se dice que son pesimistas ya que el jugador quiere asegurarse la mejor elección en caso que se dé la situación más desfavorable. Suelen ser útiles en situaciones

muy inciertas, es decir, cuando hay mucho riesgo de pérdida.

**Definición 2.2.4.** *Un juego de matriz de pagos  $A = (a_{ij})$  tiene un punto de silla, denotado por  $v$ , cuando se verifica:*

$$v = v_1 = v_2.$$

*Este valor es el mínimo elemento de su fila y el máximo de su columna.*

Un punto de silla, si existe, representa el pago correspondiente a una pareja de estrategias de seguridad. Se aclara que estas estrategias no tienen por qué ser únicas. Además no todos los juego de suma nula poseen un punto de silla.

**Ejemplo 2.2.5** (Cálculo Maximin/Minimax). *Supongamos que tenemos la siguiente matriz de ganancias*

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\min(J_1)$
$s_1$	-3	-2	-6	-6
$s_2$	2	0	2	0
$s_3$	5	-2	-4	-4
$\max(J_2)$	5	0	6	

donde  $\min(J_1)$  indica el pago mínimo que el jugador 1 puede obtener en cada una de sus estrategias (mínimo de cada fila), y  $\max(J_2)$  denota el pago máximo que el jugador 2 puede obtener en cada una de sus estrategias (máximo de cada columna).

El máximo de los pagos mínimos para  $J_1$ , *maximin*, será  $v_1 = \max(\min(J_1)) = 0$ .

El mínimo de los pagos máximos para  $J_2$ , *minimax* será  $v_2 = \min(\max(J_2)) = 0$ .

En este caso, al coincidir el valor de *maximin* y *minimax*,  $v = 0$  es un punto de silla.

## 2.3. Extensión mixta de un juego

Hasta el momento se ha supuesto que, cada vez que un jugador toma una decisión, éste utiliza una estrategia bien definida, a las que se denominan estrategias puras. A partir

de ahora, se pensará que un jugador optará por cierta estrategia con una probabilidad determinada. Este tipo son las que se denominan estrategias mixtas.

**Definición 2.3.1.** Sean  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  el conjunto de estrategias (puras) de  $J_1$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  el de  $J_2$ . Una *estrategia mixta* para  $J_1$  es una distribución de probabilidad sobre  $S$ , es decir, un conjunto

$$X = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

De la misma forma, para  $J_2$  se define el conjunto de estrategias mixtas como

$$Y = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0, 1 \leq j \leq n\}.$$

Se dice que  $J_1$  sigue la estrategia mixta  $\mathbf{x}$  si elige la estrategia  $s_i$  con probabilidad  $x_i$ , es decir, si elige la fila  $i$ -ésima de la matriz de pagos con probabilidad  $x_i$ . Análogamente, se dice que  $J_2$  sigue la estrategia mixta  $\mathbf{y}$  si elige la estrategia  $t_j$  con probabilidad  $y_j$ , es decir, si elige la columna  $j$ -ésima de la matriz de pagos con probabilidad  $y_j$ .

El conjunto de las estrategias mixtas incluye a todas las puras ya que éstas pueden considerarse como un caso particular en que la correspondiente estrategia pura se toma con probabilidad igual a 1 y todas las demás con probabilidad 0.

Por tanto, los diferentes conceptos estudiados para estrategias puras pueden ser extendidos para mixtas:

**Definición 2.3.2.** La función de pagos del juego para estrategias mixtas es la función real dada por:

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j^T.$$

Es decir, el *valor esperado* de conseguir los pagos del juego con la combinación de estrategias mixtas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

**Definición 2.3.3.** El *valor maximin en estrategias mixtas* de  $J_1$  es el valor real dado por:

$$v_1^M = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

El valor minimax en estrategias mixtas de  $J_2$  es el valor real dado por:

$$v_2^M = \min_y \max_x v(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Se cumple siempre que

$$v_1 \leq v_1^M; \quad v_2^M \leq v_2$$

**Ejemplo 2.3.4** (Pares/Nones). Supongamos que  $J_1$  y  $J_2$  enseñan 1 ó 2 dedos cada uno. Si el número resultante de la suma de dedos extendidos es impar, gana  $J_1$  y si es par  $J_2$ . El ganador consigue tantos puntos como dedos extendidos. La matriz de pagos (respecto  $J_1$ ) sería:

	1	2
1	-2	3
2	3	-4

Sea  $p$  la probabilidad de que  $J_1$  muestre 1. Así mostrará 2 con probabilidad  $1-p$ . Si  $J_2$  muestra 1,  $J_1$  perderá 2 puntos con probabilidad  $p$  y ganará 3 con probabilidad  $1-p$ ;

Valor esperado :  $-2p + 3(1 - p)$

Si  $J_2$  muestra 2,  $J_1$  ganará 3 puntos con probabilidad  $p$  y perderá 4 con probabilidad  $1-p$ ;

Valor esperado :  $3p - 4(1 - p)$

Elegimos  $p$  de manera que  $J_1$  gane la misma cantidad media independientemente de lo que muestre  $J_2$ . Entonces

$$-p + 3(1 - p) = 3p - 4(1 - p) \implies p = \frac{7}{12}$$

Por tanto para ganar de media  $-2(\frac{7}{12}) + 3(\frac{5}{12}) = \frac{1}{12}$  puntos cada vez que se juegue (independientemente de  $J_2$ ),  $J_1$  deberá mostrar 1 dedo con probabilidad  $\frac{7}{12}$  y 2 dedos con probabilidad  $\frac{5}{12}$ .

Ahora tocaría realizar una toma de decisión aleatoria, la cual nos sirve para ver qué estrategias convendría elegir. Por ejemplo, con un dado de 12 caras, escoger que si sale un número entre 1 y 7 (ambos incluidos) entonces se optará por mostrar un dedo, ya que la probabilidad de ganar mostrando un solo dedo es  $p = \frac{7}{12}$ . En cambio, si saliese un valor comprendido entre 8 y 12 (incluidos también) se mostrarían dos dedos.

## 2.4. Solución en juegos matriciales

Dado un juego biperpersonal finito de matriz  $A$  y definidas las estrategias mixtas, cabe preguntarse cuál de ellas proporciona el mejor resultado para  $J_1$  y  $J_2$ .

Una solución de estos juegos especifica las estrategias óptimas que jugadores racionales usarán y el pago que se obtiene con ellas.

**Definición 2.4.1.** Sean  $X$  e  $Y$  los conjuntos definidos en la definición 2.3.1. Entonces  $\mathbf{x}^* \in X$ ,  $\mathbf{y}^* \in Y$  son *estrategias mixtas óptimas* para los jugadores 1 y 2 respectivamente, si:

$$v_1^M = \min_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^* A \mathbf{y}^T$$

$$v_2^M = \max_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x} A \mathbf{y}^{*T}$$

donde  $v_1^M$  y  $v_2^M$  son los valores maximin y minimax en estrategias mixtas.

**Definición 2.4.2.** El número

$$\underline{\lambda} = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x} A \mathbf{y}^T$$

se denomina *valor inferior del juego* y el número

$$\bar{\lambda} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x} A \mathbf{y}^T$$

se llama *valor superior del juego*.

Así pues, se dice que un juego tiene un *valor solución*  $\lambda$  si tiene un punto de silla, i.e. , si se cumple que:

$$\lambda = \underline{\lambda} = \bar{\lambda}$$

A continuación se enuncia y prueba el teorema más relevante del capítulo. Primero se ve el caso en que cada jugador utiliza 2 estrategias para más adelante generalizar cuando usan  $m$  y  $n$  estrategias respectivamente. Ambos fueron enunciados y demostrados por Von Neumann en Neumann (1928).

**Teorema 2.4.3** (Teorema Minimax (Caso 2x2)). *Todo juego matricial biperpersonal de suma nula con matriz  $A$  y estrategias mixtas  $X$  e  $Y$ , tal que  $n = m = 2$ , tiene un valor. Es decir, se cumple:*

$$\min_y \max_x \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \max_x \min_y \mathbf{x}A\mathbf{y}^T. \quad (2.4.1)$$

*Demostración.* Sea  $A$  la matriz del juego:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si existe un punto de silla para  $A$ , el juego posee un valor, cumpliéndose la ecuación 2.4.1. Por tanto supongamos que no existe punto de silla. Esto lleva a que las filas no son proporcionales, es decir,  $a - c \neq b - d$ .

Por otra parte, si  $b \leq a$ , entonces  $b < d$  ya que, en caso contrario,  $b$  podría ser un punto de silla. Como  $b < d$ , entonces  $c < d$  ya que, sino,  $d$  podría ser un punto de silla. Como  $c < d$ , entonces  $c < a$ , en otro caso,  $c$  podría ser punto de silla. Finalmente, como  $c < a$ , entonces  $b < a$ .

Razonando análogamente, si  $a \leq b$ , nos salen las desigualdades contrarias.

Por tanto, si no hay punto de silla, se cumple:

$$a > b; b < d; d > c; c < a \quad \text{o bien} \quad a < b; b > d; d < c; c > a$$

Se supone ahora que  $J_1$  elige la primera fila con probabilidad  $p$  y la segunda con  $1 - p$ . Entonces, sea

$$\mathbf{x} = (p, 1 - p).$$

Así, se tiene:

$$\underline{\Delta}(x) = \min_y \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \min \{ap + c(1 - p), bp + d(1 - p)\}.$$

Como, en cualquiera de los dos casos anteriores se cumple que  $(a - b)(d - c) > 0$ , entonces definimos:

$$p^* = \frac{d - c}{a - b + d - c},$$

con  $0 \leq p^* \leq 1$ .

Tomando

$$\mathbf{x}^* = (p^*, 1 - p^*),$$

se tiene que:

$$\underline{\Delta}(\mathbf{x}^*) = \min_y \mathbf{x}^*A\mathbf{y}^T = ap^* + c(1 - p^*) = bp^* + d(1 - p^*) = \frac{ad - bc}{a - b + d - c},$$

y

$$\underline{\lambda} = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \underline{\Lambda}(\mathbf{x}^*),$$

ya que  $p^*$  es la abcisa del punto de corte de las rectas  $ap + c(1 - p)$  y  $bp + d(1 - p)$ .

Suponiendo ahora que  $J_2$  utiliza la estrategia

$$\mathbf{y} = (q, 1 - q),$$

i.e., elige la primera columna con probabilidad  $q$  y la segunda con  $1 - q$ , y tomando:

$$q^* = \frac{d - b}{a - b + d - c}; \quad \mathbf{y}^* = (q^*, 1 - q^*),$$

se obtiene que:

$$\bar{\lambda} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \frac{ad - bc}{a - b + d - c}.$$

Por lo tanto:

$$\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T.$$

□

**Teorema 2.4.4** (Teorema Minimax). *Todo juego matricial bipersonal de suma nula con matriz  $A$  y estrategias mixtas  $X$  e  $Y$ , tiene un valor. Es decir, se cumple:*

$$\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}A\mathbf{y}^T.$$

*Demostración.* Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  (de tamaño  $m + n$ ). La demostración de este teorema se hará por inducción sobre el tamaño de la matriz.

Sea  $t = l + m$ . Supongamos que todo juego matricial está estrictamente determinado si su tamaño es menor que  $t$ .

Si el tamaño de la matriz es 4, entonces el juego tiene un valor por el Teorema 2.4.3.

Sean  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  la fila  $i$ -ésima de la matriz  $A$  y  $a^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$  su  $j$ -ésima columna. Se definen:

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{1 \leq j \leq n} \mathbf{x}a^j \quad \bar{\Lambda}(y) = \max_{1 \leq i \leq m} a_i\mathbf{y}^T$$

Como  $\underline{\Lambda}(x)$  y  $\overline{\Lambda}(y)$  son funciones continuas y están definidas en  $X$  e  $Y$ , que son compactos, entonces

$$\exists \mathbf{x}^* \in X \quad e \quad \mathbf{y}^* \in Y,$$

tal que:

$$\underline{\Lambda}(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}a^j = \underline{\lambda} \quad (2.4.2)$$

$$\overline{\Lambda}(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} a_i \mathbf{y}^T = \overline{\lambda}. \quad (2.4.3)$$

Así para cada  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ :

$$\mathbf{x}^* a^j \geq \min_{1 \leq j \leq n} \mathbf{x}^* a^j = \underline{\Lambda}(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}a^j,$$

y para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq m$ :

$$a_i \mathbf{y}^{*T} \leq \max_{1 \leq i \leq m} a_i \mathbf{y}^{*T} = \overline{\Lambda}(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} a_i \mathbf{y}^T.$$

Hay 3 posibles casos:

1. Para cada  $j$ ,  $\mathbf{x}^* a^j = \underline{\lambda}$ , y para cada  $i$ ,  $a_i \mathbf{y}^{*T} = \overline{\lambda}$ .
2.  $\exists k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tal que  $\mathbf{x}^* a^k > \underline{\lambda}$ .
3.  $\exists h$ ,  $1 \leq h \leq m$ , tal que  $a_h \mathbf{y}^{*T} < \overline{\lambda}$ .

En el caso 1 el juego tiene valor claramente. Veamos qué ocurre en el caso 2 (el caso 3 es completamente análogo).

Al existir,  $k$  se sigue que  $n > 1$ . Se denota como  $A^{-k}$  la matriz resultante de eliminar la  $k$ -ésima fila de  $A$ . Así, el conjunto de estrategias mixtas de  $J_2$  en  $A^{-k}$  se identifica como:

$$Y^{-k} = \{\mathbf{y} \in Y \mid \mathbf{y}_k = 0\}.$$

Sean  $\underline{\lambda}^{-k}$  y  $\overline{\lambda}^{-k}$  el valor minimax y maximin del juego de matriz  $A^{-k}$ . La hipótesis de inducción, es que este juego tiene valor, i.e.,  $\underline{\lambda}^{-k} = \overline{\lambda}^{-k}$ . Por otra parte:

$$\underline{\lambda}^{-k} = \max_{\mathbf{x} \in X} \min_{j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}} \mathbf{x}a^j \geq \max_{\mathbf{x} \in X} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \mathbf{x}a^j = \underline{\lambda}$$

$$\overline{\lambda}^{-k} = \min_{\mathbf{y} \in Y^{-k}} \max_{1 \leq i \leq m} a_i \mathbf{y}^T \geq \min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{1 \leq i \leq m} a_i \mathbf{y}^T = \overline{\lambda}.$$

Se probará que  $\underline{\lambda}^{-k} = \underline{\lambda}$  y, por tanto,

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{-k} = \overline{\lambda}^{-k} \geq \overline{\lambda} \geq \underline{\lambda},$$



quedando demostrado el teorema. Así pues, se supone que  $\underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}$  (reducción al absurdo). Sea  $x^0$  tal que

$$\underline{\lambda}^{-k} = \min_{j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}} \mathbf{x}^0 a^j.$$

Entonces para cada  $j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ , se cumple que:

$$\mathbf{x}^0 a^j \geq \underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}.$$

Por último utilizando 2.4.2, se tiene que, para cada  $\epsilon \in (0, 1)$  y cada  $j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ ,

$$(\epsilon \mathbf{x}^0 + (1 - \epsilon) \mathbf{x}^*) a^j > \underline{\lambda}.$$

Además, como  $\mathbf{x}^* a^k > \underline{\lambda}$  existe un  $\bar{\epsilon} \in (0, 1)$  suficientemente pequeño, tal que

$$(\bar{\epsilon} \mathbf{x}^0 + (1 - \bar{\epsilon}) \mathbf{x}^*) a^k > \underline{\lambda}.$$

Por tanto,

$$\underline{\lambda} = \max_{\mathbf{x} \in X} \min_j x a^j \geq \min_j (\bar{\epsilon} \mathbf{x}^0 + (1 - \bar{\epsilon}) \mathbf{x}^*) a^j > \underline{\lambda}$$

Lo cual es una contradicción. □

## 2.5. Estrategias óptimas y valor del juego

Esta sección tratará de relacionar dos conceptos fundamentales en la teoría de juegos: las estrategias óptimas y el valor del juego.

Se supone que el jugador 1 utiliza la estrategia mixta  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  y el jugador 2 utiliza la estrategia  $j$ -ésima de la matriz del juego  $A = (a_{ij})$ . Entonces, el valor esperado para  $J_1$  es:

$$\mathbf{x} A e_j = \sum_{i=1}^m x_i a_{ij},$$

donde  $e_j$  denota la columna  $j$ -ésima de la matriz identidad.

**Definición 2.5.1.** *Sea  $v$  el valor de un juego. Una estrategia óptima  $\mathbf{x}$  para  $J_1$  es aquella que garantiza que el pago medio para  $J_1$  sea, al menos,  $v$  sin importar la columna*

$j$ -ésima que elija  $J_2$ , es decir, tiene que cumplir:

$$\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \geq v \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Análogamente, una estrategia  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  es óptima para  $J_2$  si cumple:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Cuando ambos jugadores escogen sus estrategias óptimas, el pago esperado es exactamente  $v$ :

$$v = \sum_{j=1}^n v y_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \right) y_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} \right) y_j = \sum_{i=1}^m x_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) \leq \sum_{i=1}^m x_i v = v,$$

lo cual implica que las estrategias de  $J_1$  y  $J_2$  deben cumplir, respectivamente, que:

$$\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} = v \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = v. \quad (2.5.1)$$

Por tanto,  $J_1$  (respec.  $J_2$ ) busca una estrategia originando que el  $J_2$  (respec.  $J_1$ ) sea indiferente en cuanto a qué estrategias puras usa. (Principio De Indiferencia. Se puede encontrar en Ferguson (2005)).

## 2.6. Juegos completamente mixtos y simétricos

Un amplio conocimiento de las estrategias óptimas simplifica la resolución de juegos, es decir, permite encontrar el valor del juego más fácilmente.

**Definición 2.6.1.** Se dice que  $J_1$  (respec.  $J_2$ ) utiliza una *estrategia completamente mixta* si asigna una probabilidad estrictamente positiva a cada estrategia pura.

Es decir,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  es una estrategia completamente mixta para  $J_1$  si  $x_i > 0$  y  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ . (Análogo para  $J_2$  cambiando  $\mathbf{y}$  por  $\mathbf{x}$  y  $n$  por  $m$ ).

**Definición 2.6.2.** Se dirá que un punto de silla  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  es completamente mixto (c.m.) si las estrategias  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{y}^*$  son completamente mixtas y si, en un juego cada punto de silla es c.m., entonces éste es completamente mixto.

Estos juegos son interesantes ya que tienen una única solución:

**Teorema 2.6.3.** Un juego  $\Gamma_A$  c.m. con matriz  $A$  de dimensión  $m \times n$  tiene una única solución  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  y una matriz cuadrada ( $m=n$ ). Además, si el valor del juego  $v$  es no nulo entonces  $A$  es una matriz regular y se tiene:

$$\mathbf{x}^* = \frac{uA^{-1}}{uA^{-1}u} \quad \mathbf{y}^* = \frac{A^{-1}u}{uA^{-1}u} \quad v = \frac{1}{uA^{-1}u},$$

donde  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ .

**Nota 2.** Una matriz regular es aquella que tiene inversa ( $A$  tal que  $|A| \neq 0$ ).

*Demostración.* Sean  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_m^*) \in X^*$  e  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_n^*) \in Y^*$  las estrategias arbitrarias óptimas para  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente y sea  $v_A$  el valor del juego  $\Gamma_A$ . Al ser c.m.,  $\mathbf{x}^*$  y  $\mathbf{y}^*$  son estrategias completamente mixtas y (sólo ellas) son soluciones de las ecuaciones 2.5.1:

$$\mathbf{x}a^j = v_A \quad x_i > 0, \mathbf{x}u^T = 1, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (2.6.1)$$

$$a_i\mathbf{y}^T = v_A \quad y_j > 0, \mathbf{y}w^T = 1, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \quad (2.6.2)$$

donde  $a_i$  es el vector fila  $i$ -ésimo de la matriz  $A$ ,  $a_j$  el vector columna  $j$ -ésimo y  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ ,  $v = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

Hay que probar que la solución  $(x^*, y^*)$  del juego c.m.  $\Gamma_A$  es única. Los conjuntos  $X^*, Y^*$  que definen las ecuaciones 2.6.1 y 2.6.2 son poliedros convexos no vacíos y, por tanto, se alcanzan los valores extremos. Además se puede comprobar que:

$$m \leq \text{rg}(a^1, \dots, a^n, u) = \text{rg}(A|u) \leq m$$

$$n \leq \text{rg}(a_1, \dots, a_m, w) = \text{rg}(A|w) \leq n,$$

donde  $\text{rg}$  denota la rango de la matriz y  $(A|u), (A|w)$  son las matrices que se obtienen al añadir  $u$  y  $w$  a la matriz  $A$ .

Ésto implica que los conjuntos  $X^*$  e  $Y^*$  tienen un punto extremo cada uno y, por tanto, consiste solo en esos puntos. Así se tiene la unicidad de  $(x^*, y^*)$ . Sea  $v_A = 0$ .

Entonces el sistema homogéneo:

$$\mathbf{x}a^j = v_A, \quad j = 1, \dots, n,$$

tiene una solución no nula; por tanto  $rg(A) < m$ . Como  $rg(A|u) = m$ , se tiene:  $rg(A) = m - 1$ . Análogamente se obtiene del otro sistema que  $rg(A) = n - 1$ . Por tanto  $m = n$ . Sea  $v_A \neq 0$ . Entonces

$$rg(A) = rg(A|v_A u) = rg(A|u) = m,$$

$$rg(A) = rg(A|v_A w) = rg(A|u) = n.$$

Por tanto  $m = n = rg(A)$ , i.e.,  $A$  es una matriz regular. El sistema de ecuaciones  $\mathbf{x}^* A = v_A u$  tiene una solución:

$$\mathbf{x}^* = v_A u A^{-1}.$$

Escribiendo la solución del sistema  $A \mathbf{y}^{*T} = v_A u$  se obtiene que:

$$\mathbf{y}^* = v_A A^{-1} u,$$

Por tanto

$$v_A = \frac{1}{u A^{-1} u}.$$

Ésto completa la prueba. □

Ahora se estudiará un tipo de juego con una matriz especial.

**Definición 2.6.4.** *Un juego, con una matriz cuadrada  $A$ , es simétrico si  $A$  es anti-simétrica, i.e., si  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i$  y  $j$ .*

En este caso, todos los elementos de la diagonal son ceros,  $a_{ii} = 0$  para todo  $i$ . Al ser la matriz cuadrada, se sigue que las estrategias mixtas de cada jugador son las mismas.

Además estas matrices cumplen que  $A^T = -A$ .

Los juegos simétricos tienen unas características especiales:

**Teorema 2.6.5.** *Sea  $\Gamma_A$  un juego simétrico. Entonces*

$$v_A = 0,$$

y los conjuntos de estrategias óptimas de cada jugador coinciden, i.e.

$$X^* = Y^*.$$

*Demostración.* Sea  $A$  la matriz del juego y  $\mathbf{x} \in X$  una estrategia arbitraria. Entonces,  $\mathbf{x}A\mathbf{x} = \mathbf{x}A^T\mathbf{x} = -\mathbf{x}A\mathbf{x}$ . Y, por tanto,  $\mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$ . Sea  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  un punto de silla y  $v_A$  el valor del juego. Entonces:

$$v_A = \mathbf{x}^*A\mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^*A\mathbf{y},$$

$$v_A = \mathbf{x}^*A\mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}A\mathbf{y}^*,$$

para todo  $x \in X, y \in Y$ . Consecuentemente:

$$v_A \leq \mathbf{x}^*A\mathbf{x}^* = 0,$$

$$v_A \geq \mathbf{y}^*A\mathbf{y}^* = 0.$$

Por tanto  $v_A = 0$ . Sea  $\mathbf{x}^*$  la estrategia óptima en el juego. Entonces:

$$\mathbf{x}^*A \geq 0.$$

Se sigue, sin embargo que  $\mathbf{x}^*(-A^T) \geq 0$ , por tanto  $\mathbf{x}^*A^T \leq 0$ . Por tanto, se tiene

$$A\mathbf{x}^* \leq 0.$$

Por la caracterización de estrategias óptimas, se sigue que  $\mathbf{x}^*$  es la estrategia óptima para  $J_2$ . Así pues, se ha probado que  $X^* \subset Y^*$ . La conclusión inversa se prueba de manera totalmente análoga.  $\square$

## 3 Juegos de Suma No Nula

Una vez estudiados los juegos donde la ganancia de un jugador es exactamente la pérdida del otro, toca ver qué ocurre cuando hay más de dos jugadores y los pagos no tienen por qué ser opuestos. En este capítulo se supondrá que los jugadores son inteligentes en el sentido que cada uno será capaz de realizar los mismos cálculos y determinar un plan coherente antes de que empiece el juego. Además, se supone que son racionales al buscar maximizar su beneficio. Por tanto, no se perderá generalidad si se asume que todos los jugadores formulan su plan de estrategias simultáneamente al principio del juego. Así, un juego consiste solo en un proceso mecánico donde se implementan dichas estrategias y se determinan los resultados acorde a las reglas del juego. Esta situación en la que todos los jugadores toman sus decisiones a la vez y de manera independiente (con respecto a los demás) está exactamente descrita por la forma normal (f.n.) de un juego.

### 3.1. Juego no cooperativo en f.n.

La teoría de este capítulo está basada en Petrosyan y Zenkevich (1996).

En Neumann y Morgenstern (1944) argumentaron, a groso modo, que la representación de un juego en forma normal es todo lo que se necesita para poder analizar un juego. Luego, aún existiendo la forma extensiva a la hora de representar un juego, la forma normal ofrece una descripción más compacta ya que se pueden relacionar estrategias y recompensas mediante la matriz de pagos.

A pesar de que el objetivo de cada jugador es elegir una estrategia que maximice su ganancia, en algunos casos puede que esta elección ayude a los demás jugadores y en otros que los perjudique, al contrario que pasaba con los juegos de suma nula. Es por ello que se pueden dar situaciones donde haya un beneficio mutuo. Luego, a veces, la

llegada a un acuerdo por parte de los jugadores (cooperación) produce un incremento en el beneficio para ellos. Por esta razón, en los juegos de suma no nula se distingue el caso de comportamiento no cooperativo, donde las reglas no permiten ningún tipo de colaboración, ni de comportamiento cooperativo. Cabe destacar que, como las posibilidades de cooperación son muchas y muy complejas, resulta difícil modelarlas explícitamente. Así pues, se considerará el primer caso.

**Definición 3.1.1.** *La terna*

$$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}),$$

se llama *juego no cooperativo en forma normal* donde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de jugadores,  $X_i$  es el conjunto de estrategias del jugador  $i$ -ésimo y  $u_i$  es la función de pagos para el jugador  $i$ , definida sobre el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias  $X = \prod_{i=1}^n X_i$ .

Como se ha dicho antes, los jugadores escogen sus estrategias  $x_i$  de forma independiente y simultánea de los conjuntos de estrategias  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , generando una combinación de estrategias  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X_i$ . A este vector se le llamará situación.

Al contrario que pasa con los jbsn, ahora no basta con dar una matriz de pagos ya que éstos no son opuestos. Así se podrá formar matrices donde las entradas están formadas por un vector fila con dos componentes (bimatrices): la primera es el pago que recibe un jugador si elige la  $i$ -ésima estrategia (fila) y la segunda el pago que recibe otro jugador si escoge la  $j$ -ésima estrategia (columna). Además, al no tratarse de un juego bipersonal, habría que implementar  $\binom{N}{2}$  matrices, cuestión que dificulta el análisis. Por ello habrá veces que se simplificará el caso a dos jugadores, para la mejor comprensión.

**Ejemplo 3.1.2** (Dilema del prisionero.). *García (2016) La policía acaba de arrestar a dos sospechosos de un crimen. No se han encontrado pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, un oficial de policía visita a cada uno y les ofrece el*

*mismo trato. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa no será condenado al haber colaborado con la justicia mientras que al otro le condenarán a diez años de prisión. Pero si ambos confiesan el crimen, cada uno recibirá una condena menor, de seis años. Si ninguno confiesa, ante la falta de pruebas, pasarán un año en la cárcel acusados de un cargo menor.*

*Si la primera estrategia para ambos es confesar,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  y la segunda negar,  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , entonces la bimatrix sería:*

$$(A, B) = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & (6, 6) & (0, 10) \\ \alpha_2 & (10, 0) & (1, 1) \end{matrix},$$

Por último apuntar que van Damme y Furth (2002) dieron otro punto de vista sobre los juegos no cooperativos. Proponían que, en muchas ocasiones, los jugadores no cooperaban al carecer de mecanismos que les permitan llegar a acuerdos vinculantes; no es que no quieran colaborar, es que no pueden.

## 3.2. Principios de Optimidad

Cuando se habla de optimizar se referirá a buscar alguna de las mejores soluciones entre muchas alternativas posibles. Este proceso puede ser visto como una secuencia de decisiones que nos proporciona la solución correcta.

Si dada una secuencia de decisiones siempre se conoce cuál es la decisión que debe tomarse a continuación para obtener la estrategia óptima, el problema es elemental y se resuelve trivialmente tomando una decisión detrás de otra, lo que se conoce como **estrategia voraz**. Pero esto solamente ocurre en una minoría de juegos. En los casos donde no se puedan aplicar, se cumple el principio de Bellman (1958) que dicta: "*Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima*".



Hemos visto que para los juegos de suma nula los principios de minimax, maximin y equilibrio coinciden en el sentido que si son factibles, entonces existe un equilibrio (punto de silla) mientras haya maximin y minimax y además coinciden. En tal caso definen una única noción de optimalidad y soluciones del juego. Aunque en la teoría de los juegos de suma no nula no existe una única aproximación a los principios óptimos, existen algunos, basados en hipótesis adicionales sobre el comportamiento de los jugadores y la estructura del juego, que permiten el cálculo de valores óptimos y solución del juego.

Parece natural que cada jugador procure alcanzar una situación  $\mathbf{x}$  en el juego  $\Gamma$  tal que su pago sea máximo. La función valor  $u_i$ , sin embargo, no solo depende de las estrategias del jugador  $i$ , sino que también depende de las escogidas por los oponentes. Por ello, las situaciones que determinan un pago máximo para un cierto jugador pueden no ser las mismas que para los demás. Así, como en el caso de los jbsn, la búsqueda del pago máximo involucra un conflicto e incluso la formulación de un comportamiento óptimo, se vuelve problemática. Hay muchos enfoques a esta cuestión. Uno de ellos es el **equilibrio de Nash** (eq. N.) con sus extensiones y refinamientos.

En el caso de suma nula, el eq N. coincide con la idea del punto de silla, que es el principio básico de este tipo de juegos. En lo que queda de este capítulo se estudiará la noción de equilibrios de Nash en los juegos no cooperativos de suma no nula.

Se supone una situación arbitraria del juego  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  con  $x_i$  la  $i$ -ésima estrategia del jugador  $i$ . Se construye una situación diferente reemplazando  $x_i$  por  $x'_i$  obteniendo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$  la que se escribirá como  $(\mathbf{x}||x'_i)$ . Nótese que si  $x_i = x'_i \Rightarrow (\mathbf{x}||x'_i) = \mathbf{x}$ .

**Definición 3.2.1.** *La situación  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$  es un **equilibrio de Nash** si*

para todo  $x_i \in X_i$  con  $i = 1, \dots, n$  se tiene:

$$u_i(x_i^*) \geq u_i(\mathbf{x}^* || x_i).$$

Se sigue de la definición que ningún jugador  $i$  se siente tentado a cambiar su estrategia  $x_i^*$  ya que si escogiese otra diferente,  $x_i$ , su recompensa puede descender. Por tanto, si los jugadores acuerdan (cooperación) establecer unas estrategias donde haya un equilibrio, entonces cualquier jugador que no tenga constancia del acuerdo estará en desventaja con respecto a los que cooperan.

**Definición 3.2.2.** *Se dirá que la estrategia  $x_i^* \in X_i$  es un **equilibrio** si aparece, como mínimo, en uno de Nash.*

Entonces, en un juego bipersonal no cooperativo  $\Gamma = (X_1, X_2, u_1, u_2)$  la situación  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  es un equilibrio si se cumplen las desigualdades:

$$u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq u_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in X_1,$$

$$u_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq u_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \forall \mathbf{y} \in X_2.$$

En particular para la bimatriz (matriz de entradas con 2 componentes explicada previamente) de tamaño  $m \times n$ , el par  $(i^*, j^*)$  es eq.N. si se da que

$$\alpha_{ij^*} \leq \alpha_{i^*j^*} \quad \beta_{i^*j} \leq \beta_{i^*j^*},$$

para todas las filas  $i \in 1, \dots, m$  y todas las columnas  $j \in 1, \dots, n$ .

El equilibrio de Nash es un principio de optimalidad múltiple en el sentido que estos equilibrios pueden ser preferibles para varios jugadores, surgiendo así la pregunta: ¿Cuál de los equilibrios puede ser tomado como óptimo para todos los jugadores? En lo que

sigue se verá que la multiplicidad es una característica fundamental de un comportamiento óptimo en un proceso de conflicto con muchos participantes.

Cabe resaltar que la estrategia de equilibrio  $x_i^*$  del  $i$ -ésimo jugador no siempre asegura el pago máximo ya que éste depende esencialmente de las estrategias escogidas por los demás. Por ello, puede que el eq. Nash no sea la estrategia óptima para el jugador  $i$ .

**Definición 3.2.3.** *La situación  $\mathbf{x}^*$  se llama **equilibrio fuerte** si para cualquier subconjunto de jugadores  $S \subset N$  y  $x_s \in \prod_{i \in S} X_i$ , hay un jugador  $i_0$  de  $S$  tal que se satisface:*

$$u_{i_0}(\mathbf{x}^*) > u_{i_0}(\mathbf{x}^* || x_s).$$

Esta condición garantiza que no es conveniente ninguna coalición al existir un jugador que no está interesado en el acuerdo. Así, cualquier situación de equilibrio fuerte es un equilibrio de Nash.

**Ejemplo 3.2.4.** *Para calcular un equilibrio de Nash en el dilema del prisionero (ver Ejemplo(3.1.2)) hay que tener en cuenta que se busca obtener el menor valor posible ya que este pago representa el número de años de condena. En las bimatrices hay un método que ayuda a hallar estos equilibrios:*

- *Se marca el mejor valor por filas de la segunda coordenada (de  $J_2$ ).*
- *Se marca el mejor valor por columnas de la primera coordenada (de  $J_1$ ).*

*Así se obtiene que el equilibrio de Nash para el dilema del prisionero es  $(\alpha_1, \beta_1)$ , es decir, que ambos confiesen. Obsérvese que no es la mejor estrategia para cada uno individualmente ya que están condenados a 6 años cada uno, mientras que si los dos negasen les sancionarían con un año de prisión. Ésto es consecuencia del hecho de que una desviación simultánea del equilibrio podría producir un aumento de la condena.*

Este ejemplo sugiere la posibilidad de aplicar otro principio de optimalidad que pueda producir situaciones más favorables para ambos jugadores que el caso de equilibrio. El principio de optimalidad en el que otra situación distinta del equilibrio es más ventajosa

para los jugadores se llama Optimalidad de Pareto.

Consideramos el conjunto de los vectores de pagos en todas las situaciones posibles  $\mathbf{x} \in X$ :

$$\{u(\mathbf{x})\} = \{u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})\} \quad \mathbf{x} \in X; \quad X = \prod_{i=1}^n X_i$$

**Definición 3.2.5.** *La situación  $\bar{\mathbf{x}}$  en el juego no cooperativo  $\Gamma$  es **Pareto-optimal** si no hay ninguna combinación de estrategias  $\mathbf{x} \in X$  para que se cumpla:*

$$u_i(\mathbf{x}) \geq u_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad u_{i_0}(\mathbf{x}) > u_{i_0}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{para (al menos) algún } i_0 \in N$$

*El conjunto de las situaciones Pareto-optimales se denota por  $X^p$ .*

Así se plantea que, la pertenencia de una situación  $\bar{\mathbf{x}}$  al conjunto  $X^p$ , implica que no existe otra combinación de estrategias  $\mathbf{x}$  que sea para todos los jugadores “más preferible” que  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Siguiendo Vorob'ev (1977), conceptualmente se distingue la noción situación de equilibrio de la de Pareto-optimalidad. En el primer caso ningún jugador podría incrementar individualmente su recompensa mientras que en el segundo todos los jugadores, actuando como uno solo, no podrían incrementar la recompensa de cada uno. Nótese también que en el acuerdo de un eq.N. a ningún jugador le conviene desviarse de él. En una situación Pareto-óptima, el jugador que se desmarque del convenio podría obtener, ocasionalmente, un mayor pago. Evidentemente un equilibrio fuerte es también Pareto-optimal.

### 3.3. Estrategias mixtas

Se recuerda que, en general, en el caso de suma nula no existía un equilibrio en estrategias puras. La existencia de equilibrios en juegos matriciales está fuertemente relacionada con las estrategias mixtas. Por ello, parece natural que el concepto equilibrio de Nash sea visto bajo el enfoque de este tipo de estrategias.

Como en el capítulo anterior, se identifican las estrategias mixtas con una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Por simplicidad, se asume que los conjuntos  $X_i$  son finitos. Sea  $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$  un juego finito no cooperativo arbitrario. Para mayor comprensión, se supone que el jugador  $i$  en el juego  $\Gamma$  tiene las estrategias  $m_i$ . Se denota por  $\mu_i$  a su estrategia mixta arbitraria, i.e., una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras  $X_i$ . Análogamente,  $\mu_i(x_i)$  será la probabilidad inducida por la estrategia  $\mu_i$  a la particular estrategia pura  $x_i \in X_i$ . El conjunto de todas las estrategias mixtas de  $i$  se denota por  $\overline{X}_i$ .

Si cada jugador  $i \in N$  usa su estrategia mixta  $\mu_i$  (elige estrategias puras con probabilidad  $\mu_i(x_i)$ ) entonces la probabilidad de que una situación  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  se dé es igual al producto de las probabilidades de escoger esas estrategias, al ser elecciones independientes:

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_1(x_1)\mu_2(x_2) \cdots \mu_n(x_n).$$

Esta fórmula define una distribución de probabilidad sobre el conjunto de todas las situaciones

$$X = \prod_{i=1}^n X_i$$

determinada por las estrategias mixtas  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ .

**Definición 3.3.1.** La  $n$ -tupla  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  se dirá que es una **situación en**

**estrategias mixtas.**

Una situación en estrategias mixtas  $\mu$  lleva a cabo varias situaciones en estrategias puras con algunas probabilidades; por tanto la función valor de las recompensas para un jugador,  $u_i$  resulta ser una *variable aleatoria*.

La función valor del  $i$ -ésimo jugador en la combinación de estrategias  $\mu$  se toma como la esperanza matemática de dicha variable aleatoria:

$$K_i(\mu) = \sum_{\mathbf{x} \in X} u_i(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) = \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_n \in X_n} u_i(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^N \mu_i(x_i) \quad (3.3.1)$$

para  $i \in N$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ .

Se introduce la notación:

$$K_i(\mu || x'_j) = \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_{j-1} \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \cdots \sum_{x_n \in X_n} u_i(\mathbf{x} || x'_j) \prod_{k \neq j} \mu_k(x_k). \quad (3.3.2)$$

Sea  $\mu'_j$  una estrategia mixta arbitraria del jugador  $j$  en el juego  $\Gamma$ . Multiplicando 3.3.2 por  $\mu'_j(x'_j)$  y sumando sobre  $x'_j \in X_j$ , se obtiene:

$$\sum_{x'_j \in X_j} K_i(\mu || x'_j) \mu'_j(x'_j) = K_i(\mu || \mu'_j).$$

**Definición 3.3.2.** El juego  $\bar{\Gamma} = (N, \{\bar{X}_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$  donde  $N$  es el conjunto de jugadores,  $\bar{X}_i$  son las estrategias mixtas de cada jugador  $i$  y la función de pagos  $K_i$ , definida por 3.3.1, se llama **extensión mixta** del juego  $\Gamma$ .

Particularizando a un juego bipersonal  $\Gamma(A, B)$  con  $A$  y  $B$  las matrices de pago en estrategias mixtas de  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente, se definen los conjuntos respectivos de

estrategias mixtas como:

$$X_1 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}u = 1; x \in \mathbb{R}^m\}; \quad X_2 = \{\mathbf{y} | \mathbf{y}w = 1; y \in \mathbb{R}^n\},$$

donde  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$  ;  $w = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ . Se definen también los pagos con estrategias mixta  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  como la esperanza de pago:

$$K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^T, \quad K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}B\mathbf{y}^T, \quad \mathbf{x} \in X_1, \mathbf{y} \in X_2.$$

Así se ha construido formalmente la extensión mixta  $\bar{\Gamma}(A, B) = (X_1, X_2, K_1, K_2)$  de un juego  $\Gamma(A, B)$ .

Para el juego bimatricial, el conjunto

$$M_{\mathbf{x}} = \{i | \xi_i > 0\},$$

será llamado *espectro* de la estrategia mixta  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , de  $J_1$ , mientras que la estrategia  $\mathbf{x}$  que cumpla  $M_{\mathbf{x}} = M$  con  $M = \{1, \dots, m\}$ , será *completamente mixta*. Análogamente se definen el espectro y las estrategias completamente mixtas para  $J_2$ .

**Definición 3.3.3.** *La situación  $\mu^*$  es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego  $\Gamma$  si, para cualquier jugador  $i$  y para cualquier estrategia mixta  $\mu_i$ , se cumple la siguiente desigualdad:*

$$K_i(\mu^* || \mu_i) \leq K_i(\mu^*), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Ejemplo 3.3.4.** *Getafe (2015) Dado el siguiente juego bimatricial:*

$$(A, B) = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & (2, 1) & (0, 2) \\ \alpha_2 & (1, 2) & (3, 0) \end{matrix}.$$

*Se supone que el  $J_1$  elige la estrategia  $\alpha_1$  con probabilidad  $p$  y, por tanto,  $\alpha_2$  con probabilidad  $1 - p$ . De la misma forma,  $J_2$  eligiría  $\beta_1$  con probabilidad  $q$  y  $\beta_2$  con probabilidad*

$1 - q$ . Así el pago esperado para  $J_1$  sería:

$$K_1 = 2pq + 0p(1 - q) + 1(1 - p)q + 3(1 - p)(1 - q) = p(4q - 3) + (3 - 2q). \quad (3.3.3)$$

Existen varios casos:

Si  $q = 3/4$ , es decir,  $J_2$  opta por la estrategia  $\beta_1$  las tres cuartas partes de las veces y por  $\beta_2$  una cuarta parte,  $J_1$  obtendrá el mismo pago si utiliza  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$ .

Si  $q > 3/4$ , el paréntesis de la segunda igualdad en 3.3.3 será positivo, luego como  $J_1$  busca maximizar su pago esperado  $K_1$ , entonces le interesa que  $p$  se haga lo mayor posible (se recuerda que  $0 \leq p \leq 1$ ).

Si  $q < 3/4$ , el paréntesis de la segunda igualdad en 3.3.3 será negativo, entonces le interesa que  $p$  sea lo menor posible.

El pago esperado para  $J_2$  viene dado por:

$$K_2 = pq + 2p(1 - q) + 2(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = q(2 - 3p) + 2p$$

Si siguiendo el mismo procedimiento, si  $p = 2/3$ ,  $J_2$  será indiferente a las elecciones de  $J_1$ .

Si  $p < 2/3$ , a  $J_2$  le interesa que  $q$  sea lo más grande posible (se recuerda que  $0 \leq q \leq 1$ ), porque lo que va multiplicando por  $q$  sería positivo.

Análogamente, si  $p > 2/3$ ,  $J_2$  busca que  $q$  sea lo más pequeño que se pueda.

En este caso el equilibrio de Nash en estrategias mixtas (ENEM) es aquel que  $J_1$  utiliza la estrategia  $\alpha_1$  con probabilidad  $2/3$  y la  $\alpha_2$  con  $1/3$  y el  $J_2$  utiliza la estrategia  $\beta_1$  con probabilidad  $3/4$  y la  $\alpha_2$  con  $1/4$ . Se representa de la siguiente forma:

$$ENEM = ((2/3)\alpha_1 + (1/3)\alpha_2, (3/4)\beta_1 + (1/4)\beta_2).$$

Sea  $K(\mu^*) = \{K_i(\mu^*)\}$  un vector de pago en algún equilibrio de Nash. Se denota por  $v_i = K_i(\mu^*)$  y  $v = \{v_i\}$ . Mientras que en los j.s.n el valor  $v$  de una función de recompensas es el mismo para todos los equilibrios y, por tanto, está unívocamente determinado, en los juegos de suma nula hay un conjunto completo de vectores  $v$ . Por tanto, todo vector  $v$  está relacionado con un determinado equilibrio  $\mu^*$ ,  $v_i = K_i(\mu^*)$ ,  $\mu^* \in \bar{X}$ ,  $\bar{X} = \prod_{i=1}^n \bar{X}_i$ .

Para finalizar, puntualizar que si los conjuntos de estrategias son no finitos,  $X_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^n$ , entonces las estrategias mixtas de los jugadores están identificadas con



las medidas de probabilidad dadas por el  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre los conjuntos de estrategias. Si  $\mu$  y  $\nu$  son las estrategias mixtas de  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente, entonces el pago al jugador  $i$ , en la situación  $(\mu, \nu)$ , es la esperanza matemática del pago:

$$K_i(\mu, \nu) = \int_{X_1} \int_{X_2} H_i(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \quad i = 1, 2,$$

donde las integrales que se toman son de Lebesgue.

### 3.4. Existencia equilibrios de Nash

En el capítulo previo se ha visto que la continuidad de la función de pagos y la compacidad de los conjuntos de estrategias eran suficientes para la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas para los juegos de suma nula. Se verá que también bastan estas condiciones en el caso que nos incumbe.

Primero se prueba la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas para un juego biperonal. Esta demostración está basada en el teorema del punto fijo de Kakutani, estudiado en el primer capítulo.

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $\Gamma(A, B)$  un juego bimatricial  $m \times n$ . Entonces existen las estrategias mixtas  $\mathbf{x}^* \in X_1$  e  $\mathbf{y}^* \in X_2$  para  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente tal que el par  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  es un equilibrio de Nash.*

*Demostración.* Los conjuntos de estrategias mixtas  $X_1$  y  $X_2$  son poliedros (politopos tridimensionales) convexos. Luego el conjunto de situaciones  $X_1 \times X_2$  es un convexo compacto.

Sea  $\psi$  la función:

$$\psi : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2,$$

dada por

$$\psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \{(\mathbf{x}', \mathbf{y}') | K_1(\mathbf{x}', \mathbf{y}_0) = \max_{X_1} K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0), K_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}') = \max_{X_2} K_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}')\}.$$

Así la imagen de  $\psi$  consiste en los pares de las mejores estrategias para reaccionar a las estrategias  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{y}_0$  respectivamente.

Se recuerda que las funciones  $K_1$  y  $K_2$  son las esperanzas matemáticas de los pagos en la combinación de estrategias  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Dichas funciones son bilineales y, por tanto, la imagen  $\psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  representa un subconjunto convexo compacto de  $X_1 \times X_2$ . Además, si la sucesión de pares  $\{(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{y}_0^n)\}, (\mathbf{x}_0^n, \mathbf{y}_0^n) \in X_1 \times X_2$  y  $\{(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)\}, (\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) \in \psi(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{y}_0^n)$  tiene puntos límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_0^n, \mathbf{y}_0^n) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'),$$

entonces, por la bilinearidad de las funciones  $K_1$  y  $K_2$  y por la compacidad de los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$ , se tiene que  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Así, por el teorema de Kakutani existe una situación  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in X_1 \times X_2$  para la cual  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ , i.e.

$$K_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad K_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq K_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}),$$

para todo  $\mathbf{x} \in X_1$  e  $\mathbf{y} \in X_2$ , completándose la demostración del teorema □

**Nota 3.** *El teorema anterior puede ser extendido al caso en que los conjuntos de estrategias sean infinitos e inducen unas funciones continuas de pago.*

Finalmente remarcar que el de equilibrio de Nash es probablemente, el concepto de solución más importante. Dado un equilibrio de Nash, la desviación hacia otra elección de estrategias, provoca una alteración en los beneficios de varios jugadores, pudiendo ser éstos negativos. Cuando algún jugador se pregunta por qué usar un equilibrio de Nash, la respuesta debe ser: ¿por qué no? y dejar que piense lo que cree que el resto de jugadores deben hacer. En general, el concepto solución es cualquier regla para especificar predicciones sobre cómo los jugadores podrían comportarse dado un juego.

### 3.5. Equilibrios en estrategias mixtas conjuntas

En esta sección se considera un juego biperpersonal para mejorar la comprensión de la misma. Como se ha explicado en la sección 3.2, habrá equilibrios que serán más beneficiosos para un jugador que para el otro. Ésto conlleva ciertos problemas a la hora de encontrar una solución mutuamente propicia en un conflicto no antagónico. Por ello, se puede examinar cómo se formaliza un conflicto donde los intereses no están enfrentados, permitiendo a los jugadores tomar una decisión conjunta.

**Definición 3.5.1.** *Una estrategia mixta conjunta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de pares de estrategias puras  $(i, j)$ , que no está necesariamente generada por elecciones aleatorias independientes de las estrategias puras.*

Una estrategia mixta en el juego bimatricial  $\Gamma(A, B)$  será denotada por  $M$ . Así si se juega esta estrategia por ambos jugadores, sus pagos esperados  $K_1(M)$  y  $K_2(M)$  serán:

$$K_1(M) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mu_{ij} \quad K_2(M) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu_{ij},$$

donde  $A = (\alpha_{ij})$  y  $B = (\beta_{ij})$  son las matrices de pago y  $M = (\mu_{ij})$  tal que  $uMw = 1$  con  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$  y  $w = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

Geoméricamente el conjunto de todos los posibles vectores de pago correspondientes a las estrategias mixtas es la envolvente convexa del conjunto de todos los posibles vectores de pago correspondientes a las estrategias puras.

**Definición 3.5.2.** *Para el juego bimatricial  $\Gamma(A, B)$ , sea  $M = (\mu_{ij})$  la probabilidad conjunta sobre los pares  $(i, j)$  con  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Se denota por  $\mu_i(j)$  a la probabilidad condicionada de que  $J_2$  realice la estrategia  $j$ -ésima si  $J_1$  ha realizado la estrategia  $i$ -ésima. Análogamente, se denota por  $\nu_j(i)$  a la probabilidad condicionada de*

que  $J_1$  realice la estrategia  $i$ -ésima si  $J_2$  ha realizado la estrategia  $j$ -ésima. Entonces:

$$\mu_i(j) = \begin{cases} \frac{\mu_{ij}}{\sum_{j=1}^n \mu_{ij}}, & \text{si } \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } \mu_{ij} = 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\nu_j(i) = \begin{cases} \frac{\mu_{ij}}{\sum_{i=1}^m \mu_{ij}}, & \text{si } \sum_{i=1}^m \mu_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } \mu_{ij} = 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Entonces se dice que  $M^* = (\mu_{ij}^*)$  es un **equilibrio en estrategias mixtas conjuntas** si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \nu_i^*(j) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_{i'j} \nu_i^*(j) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \mu_j^*(i) \geq \sum_{i=1}^m \alpha_{ij'} \mu_j^*(i) \quad (3.5.1)$$

para todo  $i, i' \in \{1, \dots, m\}$  y para todo  $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ .

El juego  $\Gamma(A, B)$  en estrategias mixtas conjuntas puede ser interpretado de la siguiente forma:

Se supone que los jugadores han alcanzado un acuerdo en estrategias conjuntas  $M^* = (\mu_{ij}^*)$  y el  $J_1(J_2)$  elige la estrategia  $i$  ( $j$  respectivamente); se ha producido la situación  $(i, j)$ . Remarca que cada jugador sólo conoce su plan de acción. En general, el jugador 1(2) puede no estar de acuerdo en escoger  $i$  ( $j$  respec.) de la estrategia conjunta y escoge  $i'(j')$ . Si  $M^*$  es un equilibrio, se sigue de 3.5.1 que es desfavorable para cada jugador desviarse de la realización propuesta  $i(j)$ , donde los lados izquierdos de las desigualdades coinciden con los pagos esperados de  $J_1(J_2)$  suponiendo que se acuerda la realización de  $i(j)$ .

Si se supone que  $J_1$  elige la estrategia  $i$  tal que  $\mu_{ij} = 0$ , con  $j = 1, \dots, n$ , entonces la primera desigualdad de 3.5.1 se satisface. De la misma forma, suponiendo que  $J_2$  elige la estrategia  $j$  tal que  $\mu_{ij} = 0$ , con  $i = 1, \dots, m$ , entonces la segunda desigualdad de

3.5.1 se satisface. Ahora sustituyendo las expresiones de  $\mu_i(j)$  y  $\nu_j(i)$  en términos de  $\mu_{ij}$  en 3.5.1, se sigue que es condición necesaria y suficiente de equilibrio que se cumplan:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \nu_i^*(j) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_{i'j} \nu_i^*(j) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \mu_j^*(i) \geq \sum_{i=1}^m \alpha_{ij'} \mu_j^*(i)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^* = 1 \quad \mu_{ij}^* \geq 0$$

para todo  $i, i' \in \{1, \dots, m\}$  y para todo  $j, j' \in 1, \dots, n$ .

## 4 Aplicación: El Penalty de Nash

Los deportes profesionales, como el fútbol, son un laboratorio excelente para observar las interacciones estratégicas humanas; son situaciones reales en un ambiente perfectamente controlado.

El estudio se centra en analizar cómo dos jugadores se comportan en un lanzamiento de penalty. Tiene cierta relevancia ya que los intentos para dar ejemplos empíricos de jbsn daban resultados que no se correspondían con la teoría, porque muchas dependen de numerosas propiedades de la función de pagos. Luego los teóricos que examinan este tipo de situaciones se enfrentaban a algo tan abstracto como un juego en una hoja de papel. Así se decidió empezar un análisis donde realmente había jugadores tomando decisiones.

### 4.1. Introducción

Este capítulo está basado en un estudio realizado en Palacios-Huerta (2002a).

Al encontrarse problemas para probar empíricamente estudios teóricos, muchos autores se han visto obligados a probar las predicciones en un entorno experimental. Pero, a pesar de la controlada estructura de los experimentos, a menudo los resultados rechazaban la hipótesis de que los sujetos están jugando de acuerdo a las implicaciones teóricas de un juego de equilibrio. Por ejemplo, muchos experimentos han evaluado la utilidad empírica del Teorema de Minimax de Neumann (1928) para juegos bipersonales de suma nula, generando resultados contradictorios y, frecuentemente, negativos.

Así, en entornos experimentales los jugadores se enfrentan a situaciones no conocidas y ésto, a pesar de su simpleza, hace que no se conviertan en expertos a lo largo del tiempo, contribuyendo, a su vez, a generar numerosos estudios sobre el juego sin tener

en cuenta el equilibrio. Consecuentemente, la mayoría de pronósticos relacionados con equilibrios no han recibido apoyo real.

Este capítulo ofrece una prueba empírica donde es aplicable el concepto de equilibrio en situaciones de interacciones estratégicas. Tanto en el Teorema del Minimax como en el concepto de equilibrio de Nash, es fundamental el hecho de que un jugador debe ser imprevisible a su oponente. Se usarán datos de un juego estratégico que se da en el deporte profesional para ofrecer una prueba empírica del teorema del Minimax. Es más, las características específicas del juego y su entorno, permiten sobreponerse a las habituales inconveniencias de la aplicación real de dicho teorema.

En los deportes profesionales los jugadores son expertos en los juegos, lo que hace que sea una ventaja con respecto a otros experimentos ya que son los más capaces de controlar la situación del juego. Sin embargo, la gran cantidad de estrategias a escoger y las múltiples consecuencias que se obtienen al aplicarlas hacen que no sea factible llegar a resultados precisos a la hora de usar empíricamente las hipótesis del teorema del Minimax. Pero, todas estas dificultades e inconvenientes se superan en la situación que se analizará en esta sección, que es un jbsn que requiere impredecibilidad y que ambos jugadores busquen el mejor resultado. Como en las condiciones habituales, el juego tiene perfectamente definido un conjunto de reglas, (pocas) estrategias disponibles, los resultados se dan inmediatamente después de que se decidan las estrategias y toda la información relevante es visible. El análisis trata uno de los juegos más famosos del mundo: lanzamientos de penalties en fútbol. Para probar las implicaciones del teorema del Minimax, se analizan más de 1400 lanzamientos de partidos profesionales que incluyen información muy detallada de todos los aspectos relevantes del juego, especialmente acciones y resultados.

Como breve adelanto de los resultados principales, se encuentra que, como predice la TJ en estrategias mixtas:

- Las probabilidades de éxito son estadísticamente idénticas usando cualquier estrategia.
- Las elecciones son temporalmente independientes.

A continuación se describe cómo está organizado lo que resta del capítulo. La siguiente sección describe la estructura y escenario del juego, evaluándose también la hipótesis empírica. En la sección 3 se describen los datos recogidos y en la 4 se analizan. La quinta sección contiene una evaluación de las pruebas realizadas frente a un criterio diferente al del Minimax. Por último, en la sección 6 se concluye y se estudia la relevancia que ha tenido este análisis en posteriores aplicaciones.

**Nota 4.** *A partir de ahora, se omitirá teorema del Minimax de Von Neumann, refiriéndose a este simplemente como el teorema. En caso de utilización de otro, se pondrá explícitamente.*

## 4.2. Estrategias mixtas en lanzamientos de penalties

Aunque es mundialmente conocido, se describen las características de un penalty.

Para empezar diremos que el árbitro señala penalty cuando un equipo comete una de las diez infracciones existentes en el fútbol dentro de su área mientras el balón está en juego. El penalty tiene las siguientes particularidades:

- La pelota se coloca en el punto de penalty. Éste está colocado dentro del área a 11 metros de la línea de gol.



- El jugador que va a realizar el lanzamiento está perfectamente identificado.
- El portero permanece en la línea de gol, equidistante a los postes y enfrente del lanzador, hasta que éste tire.
- El resto de jugadores se colocan fuera del área de penalty, detrás del punto de penalty y, como mínimo, a 9.15 metros del punto fatídico.
- El lanzador golpea el balón hacia delante.
- No puede tocar otra vez el esférico hasta que no lo haya tocado otro jugador.



Figura 4.1

El balón suele tardar 0.3 segundos en recorrer la distancia del punto de penalty hasta la portería. Portero y lanzador deben moverse simultáneamente. Tiene solo dos posibles

resultados: gol o fallo. Los jugadores tienen pocas estrategias disponibles y sus acciones son visibles. El resultado se da inmediatamente después de la toma de decisiones.

La claridad de las reglas y la detallada estructura de este juego simultáneo hace que presente considerables ventajas respecto a otras situaciones en deportes profesionales, ofreciendo una oportunidad adecuada para probar las hipótesis del teorema con datos reales. Por ejemplo, en tenis, la dirección del saque, su efecto, la posición inicial del oponente o si es primer o segundo servicio, hace que los jugadores tengan más estrategias para elegir, dificultando su análisis. Además los tenistas suelen variar sus estrategias de saque a menudo, perdiéndose la aleatoriedad, requisito fundamental para la aplicación del teorema.

En lo que sigue, los pagos de los jugadores serán las probabilidades de éxito en el lanzamiento del penalty; “gol” para el lanzador, “fallo” para el portero. El lanzador desea maximizar la probabilidad de marcar, mientras que el guardameta intenta minimizarla. Se considera una matriz  $2 \times 2$  en la que se recogen las posibles acciones de los jugadores y se denota por  $\pi_{ij}$  la probabilidad de anotar del lanzador, donde  $i = \{I, D\}$  denota si el tirador elige izquierda (I) o derecha (D) y  $j = \{I, D\}$  la elección del portero:

$i \setminus j$	I	D
I	$\pi_{II}$	$\pi_{ID}$
D	$\pi_{DI}$	$\pi_{DD}$

Razonando como en la demostración de 2.4.3, este juego tiene un único equilibrio de Nash cuando:

$$\pi_{ID} > \pi_{II} < \pi_{DI} \quad \text{y} \quad \pi_{DI} > \pi_{DD} < \pi_{ID}.$$

Así, si el juego del lanzamiento de penalty puede ser representado de esta forma,

entonces la búsqueda del equilibrio requiere que cada jugador use estrategias mixtas. Entonces, la teoría de equilibrios proporciona dos predicciones demostrables acerca del comportamiento del lanzador y el portero:

- 1-. Probabilidad de éxito: la probabilidad de gol (fallo) para el lanzador (portero) debe ser la misma en todas las estrategias para cada jugador.

Formalmente, sea  $p_I$  la probabilidad de que el portero se lance hacia la izquierda. Esta probabilidad debe ser escogida de forma que la probabilidad de éxito del lanzador sea idéntica para cualquiera de sus estrategias. Así pues,  $p_I$  debe verificar que  $p_I^L = p_D^L$ , donde:

$$p_I^L = p_I \pi_{II} + (1 - p_I) \pi_{ID}, \quad (4.2.1)$$

$$p_D^L = p_I \pi_{DI} + (1 - p_I) \pi_{DD},$$

que indican la probabilidad de anotar por parte del lanzador.

Análogamente, la probabilidad de que el lanzador elija izquierda,  $l_I$  debe ser escogida de manera que la probabilidad de éxito del portero sea la misma para cualquiera de sus estrategias. Por lo tanto  $p_I^p = p_D^p$ , donde:

$$p_I^p = l_I(1 - \pi_{II}) + (1 - l_I)(1 - \pi_{DI}), \quad (4.2.2)$$

$$p_D^p = l_I(1 - \pi_{ID}) + (1 - l_I)(1 - \pi_{DD}),$$

que indican la probabilidad de éxito del portero, es decir, fallo del lanzador o parada.

- 2-. Cada elección de un jugador debe ser secuencialmente independiente dados pagos constantes a lo largo del juego. Por tanto, las selecciones de estrategias por parte de los jugadores tienen que ser un sorteo independiente de un proceso aleatorio;

luego no pueden depender de un juego propio previo, un juego del oponente previo, de ninguna interacción ni de ninguna acción anterior.

Antes de describir los datos e implementar las pruebas empíricas, se debe hacer una observación. Será demostrado que existe una simetría perfecta entre lanzadores diestros y zurdos. De hecho, la hipótesis de que el juego es idéntico para los dos tipos de lanzadores, no será rechazada (se usará un contraste de hipótesis). Remarcar de nuevo, que las distintas ventajas y características del entorno de este juego facilitan el análisis empírico frente a otros juegos.

### 4.3. Datos

Los 1417 lanzamientos de penalties analizados fueron tomados de partidos de la liga española, italiana e inglesa. Los datos incluyen a los equipos que se enfrentaban en el partido donde se produjeron los penaltis, los nombres del lanzador y el portero, las elecciones que toman (izquierda(I), derecha(D) o centro(C)) y el marcador en ese minuto. También incluyen si el lanzador es zurdo o diestro y el resultado del tiro (gol o fallo). Aclarar que en el fallo se distingue si fue parada realizada por el portero, disparo a los postes o lanzamiento fuera.

La Tabla 1 muestra las proporciones relativas de las diferentes elecciones realizadas por el portero y lanzador (I, D o C) con el número total de observaciones (*Obs.*). La primera letra se refiere si la decisión tomada por el lanzador y la segunda la del portero. Por ejemplo “ID” significa que el lanzador ha chutado a la izquierda y el portero se ha lanzado a la derecha. Mientras que la última columna indica el porcentaje de goles anotados, la primera muestra la diferencia de goles en el marcador entre el equipo del

Diferencia de goles	Obs.	II	IC	ID	CI	CC	CD	DI	DC	DD	(%) Goles
0	580	16.9	1.3	21.0	4.3	0.8	5.6	19.4	0.6	27.9	81.9
1	235	19.1	0	19.1	4.2	0	2.5	28.0	0	26.8	77.8
-1	314	19.7	0.9	25.8	1.9	0	6.4	20.0	0.6	30.2	80.2
2	97	23.7	2.0	17.5	5.2	0	0	20.6	1.0	29.9	75.2
-2	114	26.3	0	25.4	3.5	0	3.5	16.6	0	24.5	78.0
3	27	14.8	0	18.5	3.7	0	11.1	20.2	0	29.6	77.7
-3	23	30.4	0	30.4	0	0	0	21.7	0	17.4	82.6
4	7	42.8	0	28.5	0	0	0	14.2	0	14.2	100
-4	12	25.0	0	25.0	0	0	16.6	16.6	0	16.6	83.3
Otros	8	50.0	0	0	0	0	12.5	37.5	0	0	87.5
1ªParte	558	21.1	0.8	19.8	3.9	0.3	20.0	0.3	29.7	82.9	
2ªParte	859	18.7	0.9	23.2	3.3	0.3	22.8	0.5	26.3	78.3	
Penalties totales	1417	19.6	0.9	21.9	3.6	0.3	3.6	21.7	0.5	27.6	80.1
Porcentaje de goles	80.1	55.2	100	94.2	94.1	50.0	82.3	96.4	100	71.1	

TABLA 1

*Distribución de las estrategias y tasa de goles*

lanzador menos el equipo del portero. Por ejemplo, “-1” indica que el equipo del lanzador está perdiendo por un gol en el momento que se produce el penalty.

Las estrategias seguidas por los porteros coinciden con la de los delanteros casi la mitad de las ocasiones, 47,5%. Los lanzadores tiran al medio, relativamente, pocas veces un 7,5% de todos los lanzamientos, mientras que los porteros solo se quedan en el medio, incluso menos, un 1,7%. El porcentaje donde las estrategias no coinciden, se divide en su mayoría entre las opciones ID (21,9%) y DI (21,7%). Un gol es anotado el (80,1%) de las ocasiones; hay gol casi un 100% de las veces cuando portero y lanzador toman decisiones distintas y más de un 60% cuando son las mismas. Es conocido que un partido de fútbol se divide en dos partes de 45 minutos cada una con un descanso entre medio de 15 minutos. Pues bien, el porcentaje de goles anotados en la segunda parte es un poco más bajo (78,3%) que el de la primera parte (82,9%). La media de goles en los partidos analizados es de 2,57. Por tanto, no es llamativo observar que en la mayoría de partidos donde se produce un penalty, la diferencia en el resultado es 0, 1 ó -1 goles en el momento de la infracción.

Diferencia de goles	Obs.	Lanzadores zurdos										(% ) Goles
		II	IC	ID	CI	CC	CD	DI	DC	DD		
0	174	17.8	1.7	20.1	6.3	0	8.6	22.9	0.5	21.8	82.7	
1	73	28.7	0	30.1	4.1	0	2.7	19.1	0	15.0	78.0	
-1	92	29.3	1.0	26.0	1.0	0	2.0	21.7	1.0	18.4	82.6	
2	29	51.4	0	13.7	3.0	0	0	10.3	0	20.6	72.4	
-2	30	40.0	0	13.3	3.0	0	3.0	20.0	0	20.0	76.6	
Todos los penalties	406	29.3	1.4	20.4	4.4	0	3.9	23.8	0	16.5		
Porcentaje de goles	81.0	62.1	100	95.1	94.4	0	81.2	93.8	0	61.2		
		Lanzadores diestros										
0	406	16.4	1.2	21.4	3.4	1.2	4.4	20.4	0.7	30.5	83.2	
1	162	14.8	0	14.2	4.3	0	2.4	32.1	0	32.1	77.7	
-1	222	15.7	1.0	25.6	2.2	0	0	19.3	1.0	35.1	80.6	
2	68	11.7	2.9	19.1	5.8	0	0	25.0	1.4	33.8	76.4	
-2	84	21.4	0	29.7	3.5	0	3.5	15.4	0	26.2	78.5	
Todos los penalties	1011	15.8	0.6	22.5	3.2	0.5	3.4	20.8	0.6	32.1		
Porcentaje de goles	79.8	50.0	100	93.8	93.9	60.0	82.8	97.6	100	73.2		

TABLA 2

*Distribución de las estrategias y tasa de goles según el tipo de lanzador*

Los lanzadores pueden ser clasificados en dos tipos dependiendo con qué pierna chutan: zurdos o diestros. La mayoría de lanzadores de la muestra son diestros. La Tabla 2 muestra la distribución de estrategias y el porcentaje de aciertos según el tipo de lanzador y la diferencia en el marcador.

Se ve claramente que estos dos grupos de lanzadores tienen diferentes lados fuertes. Los zurdos tiran más a menudo al lado izquierdo del portero mientras que los diestros suelen optar por el derecho. En la siguiente sección se considerarán éstos sus “lados naturales”. Los porteros suelen elegir derecha cuando se enfrentan a un jugador diestro e izquierda si el lanzador es zurdo. Los porcentajes de anotación son similares para los dos tipos de lanzadores y para una diferencia en el resultado dada. Nótese que los lanzadores tienden a anotar cuando eligen su lado natural. A continuación se pasa a probar las implicaciones empíricas de los equilibrios con estrategias mixtas en este escenario.

## 4.4. Análisis empírico

Se consideran lanzadores y porteros que hayan estado implicados en un número relativamente alto de penalties. La muestra consiste en 22 lanzadores y 20 porteros que han participado en, al menos, 30 penalties cada uno. Sus identidades están en el apéndice.

Dado que hay dos tipos de lanzadores, zurdos y diestros, sería incorrecto tratar al juego asociado a cada lanzador (sea zurdo o diestro) por igual. Así, se considerará en lo que resta que los jugadores deciden según el lado natural del lanzador. Sea cual sea el pie fuerte del lanzador,  $D$  denotará su “lado natural”, mientras que  $I$  será su “lado no natural”. Se recuerda que cuando el lanzador es diestro, su lado natural es el derecho del portero y cuando es zurdo el izquierdo. Ésto implica que, por ejemplo, que un zurdo tire a la derecha del portero será considerado lo mismo que si un diestro tira a la izquierda del portero. Por tanto, el portero está ante la misma situación cuando se enfrenta a cualquier lanzador, pero las acciones están identificadas de diferente forma. Luego lo único que importa es si el lanzador elige su lado fuerte ( $D$ ) o su lado débil ( $I$ ). El centro ( $C$ ) se considera como lado natural, ya que la posición que tiene que adoptar el pie para un lanzamiento al medio es muy similar a la del lado natural.

Los jugadores de la muestra eligen  $D$  o  $I$  del 96,3% de las veces, los lanzadores un 93,8% y los porteros un 98,9%, por lo que el centro ( $C$ ) es una opción poco frecuente. Como se ha explicado en la sección 4.2, los lanzamientos de penalties descritos en el modelo tienen un equilibrio de Nash, requiriendo a cada jugador utilizar estrategias mixtas. Además, la teoría de equilibrios realizaba dos predicciones comprobables acerca del comportamiento de los jugadores: (1) las probabilidades de ganar deben ser la misma para cualquier estrategia, y (2) cada elección de estrategia debe ser independiente.

Antes de comenzar cualquier prueba formal, vale la pena examinar hasta qué punto los datos de la muestra coinciden con las predicciones de equilibrio de Nash. Para todos los jugadores de la muestra, las probabilidades de anotar son las siguientes:

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & p_I & 1 - p_I \\
 l_I & \begin{array}{|c|c|} \hline 58.3 & 94.97 \\ \hline \end{array} & & \\
 1 - l_I & \begin{array}{|c|c|} \hline 92.91 & 69.92 \\ \hline \end{array} & & 
 \end{array} \tag{4.4.1}$$

donde, como se ha indicado previamente,  $l_I$  y  $p_I$  denotan que lanzador y portero escogen el lado no natural. La estrategia mixta del equilibrio de Nash predijo las frecuencias con la que los jugadores eligen una estrategia y otra. A continuación se compara los datos reales con las predicciones realizadas:

	$p_I$ (%)	$1 - p_I$ (%)	$l_I$ (%)	$1 - l_I$ (%)
Frecuencias pronosticadas por eq.N	41.99	58.01	38.54	61.46
Frecuencias reales	42.31	57.69	39.98	60.02

(4.4.2)

Se observa que las predicciones teóricas son prácticamente idénticas que los datos observados. Las frecuencias pronosticadas por equilibrio de Nash se obtienen de las ecuaciones 4.2.1 y 4.2.2.

**Nota 5.** *Los datos mostrados a lo largo de la sección, como los que dan las tablas 4.4.1 y 4.4.2, se pueden encontrar en Palacios-Huerta (2002b).*

Se pasa a probar las implicaciones del teorema.



### 4.4.1. Pruebas individuales

Sean  $p_j^i$  la probabilidad de que el jugador  $i$  triunfe cuando elige la estrategia  $j \in \{I, D\}$ ,  $n_j^i$  el número de veces que  $i$  escoge  $j$  y  $N_{jE}^i$  y  $N_{jF}^i$  el número de veces que el lanzador (portero)  $i$  obtiene éxito ( $E$ ) o fracaso ( $F$ ) anotando (fallando) el penalty cuando elige la estrategia  $j$ . Por tanto, la **hipótesis nula** será:

$$p_D^i = p_I^i = p^i$$

Cuando  $p^i$  es sustituido por su estimador de máxima verosimilitud  $\frac{N_{IE}^i + N_{DE}^i}{n_I^i + n_D^i}$ , entonces el estadístico de Pearson para el jugador  $i$  será:

$$P^i = \sum_{j \in \{I, D\}} \left[ \frac{(N_{jE}^i - n_j^i p^i)^2}{n_j^i p^i} + \frac{(N_{jF}^i - n_j^i (1 - p^i))^2}{n_j^i (1 - p^i)} \right],$$

está distribuido asintóticamente como una  $\chi^2$  con 1 grado de libertad. Los resultados de las pruebas están reflejados en la Tabla 3.

Los datos demuestran que la hipótesis nula no se rechaza para la mayoría de jugadores. De los 42 jugadores de la muestra, la hipótesis se rechaza para 3 jugadores (2 lanzadores y 1 portero) al nivel de significancia del 5% y para 5 jugadores (3 lanzadores y 2 porteros) al del 10%. Nótese, que con 42 datos, el número esperado de rechazos a un nivel del 5% es 2.1 y para uno del 10% es 4.2. Estas estimaciones sugieren que, a nivel individual, la hipótesis de que la probabilidad de anotar es idéntica sea cual sea la estrategia escogida no se puede rechazar para la mayoría de jugadores.

Jugador	Obs	Estrategia		Porcentaje acierto		Estadístico Pearson	<i>p</i> -valor
		I	D	I	D		
Lanzador 1	34	0.32	0.68	0.91	0.91	0.000	0.970
Lanzador 2	31	0.35	0.65	0.82	0.80	0.020	0.902
Lanzador 3	40	0.48	0.52	0.74	0.76	0.030	0.855
Lanzador 4	38	0.42	0.58	0.88	0.91	0.114	0.735
Lanzador 5	38	0.50	0.50	0.79	0.84	0.175	0.676
Lanzador 6	46	0.28	0.72	0.70	0.77	0.185	0.667
Lanzador 7	41	0.20	0.80	0.75	0.82	0.191	0.662
Lanzador 8	35	0.31	0.69	0.82	0.75	0.199	0.656
Lanzador 9	31	0.19	0.81	0.83	0.92	0.416	0.519
Lanzador 10	35	0.37	0.63	0.86	0.77	0.476	0.490
Lanzador 11	32	0.48	0.52	0.87	0.94	0.521	0.471
Lanzador 12	32	0.48	0.52	0.87	0.94	0.521	0.471
Lanzador 13	38	0.55	0.45	0.76	0.88	0.907	0.341
Lanzador 14	30	0.33	0.67	0.90	0.75	0.938	0.333
Lanzador 15	30	0.50	0.50	0.80	0.93	1.154	0.283
Lanzador 16	42	0.43	0.57	0.89	0.75	1.287	0.257
Lanzador 17	40	0.42	0.58	0.58	0.85	1.637	0.201
Lanzador 18	36	0.44	0.56	0.90	0.77	1.665	0.197
Lanzador 19	49	0.48	0.52	0.74	0.90	1.761	0.184
Lanzador 20	40	0.35	0.65	0.93	0.69	2.913	0.088*
Lanzador 21	40	0.42	0.58	0.65	0.91	4.322	0.038**
Lanzador 22	40	0.40	0.60	1.00	0.75	4.706	0.030**
Todos los lanzadores	808	0.3998	0.6002	0.8111	0.8268		
Portero 1	37	0.38	0.62	0.21	0.22	0.000	0.982
Portero 2	38	0.39	0.61	0.20	0.22	0.017	0.898
Portero 3	30	0.60	0.40	0.28	0.25	0.028	0.866
Portero 4	50	0.46	0.54	0.17	0.15	0.061	0.804
Portero 5	36	0.33	0.67	0.25	0.21	0.080	0.777
Portero 6	34	0.44	0.56	0.27	0.21	0.147	0.702
Portero 7	37	0.19	0.81	0.14	0.10	0.221	0.638
Portero 8	37	0.54	0.46	0.25	0.18	0.294	0.588
Portero 9	32	0.56	0.44	0.22	0.14	0.326	0.568
Portero 10	40	0.45	0.55	0.11	0.18	0.388	0.533
Portero 11	33	0.18	0.82	0.17	0.30	0.416	0.519
Portero 12	30	0.27	0.73	0.25	0.14	0.545	0.460
Portero 13	34	0.41	0.59	0.14	0.25	0.578	0.447
Portero 14	40	0.50	0.50	0.15	0.25	0.625	0.429
Portero 15	44	0.45	0.55	0.10	0.21	0.957	0.328
Portero 16	36	0.31	0.69	0.09	0.24	1.804	0.298
Portero 17	42	0.55	0.45	0.30	0.11	2.449	0.118
Portero 18	42	0.38	0.62	0.13	0.35	2.506	0.113
Portero 19	42	0.40	0.60	0.35	0.12	3.261	0.071*
Portero 20	40	0.50	0.50	0.08	0.37	5.104	0.024**
Todos los porteros	754	0.4231	0.5769	0.1943	0.2068		

TABLA 3

*Pruebas de igualdades en las probabilidades de acierto**Nota:* \*Indica hipótesis nula rechazada al nivel 10%, y \*\* indica al 5%.

Cuadro A: Tests de Pearson			
Tests de las hipótesis conjunta de que los datos para todos las pruebas fueron generados por el juego de equilibrio: $p_i^j = p_D^j$ para cada jugador $i$			
	Estadístico de Pearson	Grados de libertad	$p$ -valor
Todos los jugadores	43.944	42	0.389
Todos los lanzadores	24.138	22	0.340
Todos los porteros	19.806	20	0.470

Cuadro B: Tests de Kolmogorov-Smirnov		
Tests de las hipótesis nula de que las distribuciones de los $p$ -valores en los tests individuales de Pearson están generados por una toma decisión aleatoria sobre distribución uniforme $U(0,1)$ .		
	Estadístico de KS	$p$ -valor
Todos los jugadores	0.527	0.883
Todos los lanzadores	0.396	0.891
Todos los porteros	0.373	0.832

TABLA 4

*Pruebas de igualdades en las probabilidades de acierto para una distribución conjunta*

#### 4.4.2. Pruebas conjuntas

Ahora se analizará si en el comportamiento grupal puede considerarse en equilibrios, probando la hipótesis de que cada uno de los experimentos están simultáneamente generado por un juego de equilibrio. En este caso, el estadístico para el test de Pearson es la suma de los estadísticos individuales  $P_i$ . Bajo la hipótesis nula, el test sigue la distribución  $\chi^2$  con 42 grados de libertad. Remarcar que este test conjunto permite diferencias en las probabilidades  $p^i$  de los jugadores. Los resultados se muestran en la Tabla 4.

El primer cuadro muestra que el estadístico de Pearson es 43.94 y el  $p$ -valor asociado 0.389, lo que indica que la hipótesis nula de que los datos para todos los jugadores están generados por un juego de equilibrio no puede ser rechazada para los convencionales niveles de significancia. Si los lanzadores y porteros son considerados como grupos separados, entonces, bajo la hipótesis nula, el estadístico está distribuido como una  $\chi^2$  con 22 y 20 grados de libertad respectivamente. Mientras que el estadístico de Pearson para los lanzadores es 24.138 con un  $p$ -valor asociado de 0.340, el estadístico para los portero vale 19.806 con un  $p$ -valor de 0.470. La hipótesis de la igualdad de probabilidades de

ganar tampoco puede ser rechazada para ninguno de los subgrupos.

Se sabe que el test de Pearson conjunto presenta el problema de que tiene poco poder frente a la hipótesis alternativa en cuanto a cómo se han generado los datos. El cuadro B muestra un test más potente que refleja que los resultados son consistentes con la teoría. Bajo la hipótesis nula, todas las observaciones fueron generadas por juegos de equilibrios con los  $p$ -valores asociados al estadístico  $P_i$  deben ser 42 sorteos de una distribución estándar uniforme  $U(0, 1)$ . Los valores 0 y 1 representan los extremos del intervalo donde la variable toma valores no nulos. Se recuerda que la función densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme estándar viene dada por:  $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$  donde  $\chi_{[a,b]}$  es la función indicador en el intervalo  $[a, b]$ . Con una simple comparación con la distribución de los  $p$ -valores de la Tabla 3 se puede comprobar que los resultados son consistentes con la teoría ya que los  $p$ -valores están distribuidos uniformemente a través de deciles. Una evaluación formal puede hacerse comparando la distribución de los  $p$ -valores con la distribución uniforme usando el test de Kolmogorov-Smirnov (KS). El valor del estadístico KS para todos los jugadores considerados simultáneamente es 0.527 con un  $p$ -valor de 0.883. Cuando se consideran solo los lanzadores simultáneamente el estadístico KS es 0.396 con un  $p$ -valor de 0.891; para los porteros es 0.373 con un  $p$ -valor asociado de 0.832.

**Nota 6.** *El autor realizó un test de Kolmogorov-Smirnov aunque la muestra es menor de 50 individuos, pudiéndose usar el test de Smirnov-Wilk.*

En todos los casos, el  $p$ -valor ni siquiera se ha acercado para rechazar la hipótesis de que las probabilidades de ganar son las mismas sea cual sea la estrategia. Además, como se verá en la siguiente sección, los tests tienen tal poder que permiten distinguir estrategias de equilibrio y estrategias de no equilibrio.

### 4.4.3. Interpretación y discusión

Como en todo juego estrictamente competitivo, los intereses de los jugadores en los lanzamientos de penalties son totalmente opuestos. Los resultados de la muestra indican que las acciones tanto de los porteros como de los lanzadores pueden ser interpretadas como un “maxminimizador” para cada jugador en el sentido que sus acciones maximizan las recompensas que se pueden garantizar. Se sabe que un jugador utiliza la estrategia maximin si elige una estrategia que es la mejor para él suponiendo que el oponente va a elegir una para perjudicarlo. Por tanto, en este sentido, las pruebas empíricas de los lanzamientos de penalties son consistentes con la teoría de equilibrios de Nash.

Nótese las dos características especiales de este juego.

Primero, no todos los penalties son lanzados al mismo tiempo. Por ello, los jugadores pueden tener información previa del oponente, hecho que contradice las hipótesis del teorema. Sin embargo, los resultados sugieren que no; se observa que los jugadores actúan instintivamente e intuitivamente.

Segundo, los rivales van cambiando. Los equilibrios en estrategias mixtas proporcionan una buena descripción de “estado estable” en el comportamiento de los jugadores que compiten repetidas veces contra oponentes seleccionados al azar. Los jugadores, sin embargo, podrían servirse de enfrentamientos previos como ayuda. No obstante, se observa que sus decisiones son secuencialmente independientes; no siguen ningún patrón. Por tanto, no eligen las estrategias basándose en elecciones anteriores propias o de los rivales.

Además existen más análisis realizables para confirmar la idea que los equilibrios en estrategias mixtas describen el comportamiento estable de un jugador dado que se

enfrenta a oponentes al azar. Por ejemplo, consideramos el lanzador número 2 (Alan Shearer) de la Tabla 3. Al no rechazarse la hipótesis nula, es indiferente que elija  $D$  o  $I$ , i.e., las probabilidades de que anote son las mismas si escoge su lado natural o no. Se supone ahora que, en vez de tener 31 observaciones, se tienen el doble. Se toma un subconjunto de 30 observaciones de las 62. Entonces, en teoría, se rechazará la hipótesis nula o, al menos, habría una variación significativa de los  $p$ -valores de la prueba. Implementando esta idea para muchas otras submuestras, se demuestra que la media de los  $p$ -valores son muy similares a los obtenidos en la Tabla 3 para cada lanzador y portero. Además, la desviación estándar de los  $p$ -valores es muy pequeña, siempre por debajo de 0.187. Estos resultados ratifican la idea que, dado un jugador, su oponente ha sido elegido al azar.

## 4.5. Debate y pruebas adicionales

Las pruebas empíricas del comportamiento de futbolistas profesionales en lanzamientos de penalties proporcionan un apoyo considerable a las dos implicaciones que se derivan de la hipótesis de que los participantes juegan siguiendo la teoría de equilibrio. Los resultados útiles obtenidos en las pruebas son, en gran parte, gracias a que los participantes son profesionales, ya que son capaces de generar secuencias al azar y aprender a considerar la forma correcta de enfrentarse en un jbsn. La motivación y los incentivos son altos y, tanto las elecciones estratégicas como todos los rasgos relevantes del entorno, son visibles. La experiencia de los jugadores hace que se necesiten pocos elementos en la muestra para aplicar el teorema en comparación con la cantidad de datos producidos en escenarios experimentales.

Otra característica muy útil en este ejemplo de juego es que se pueden calcular los

equilibrios para ambos jugadores. En el caso del servicio en tenis, por ejemplo, sólo es posible calcularlo para quien saca. Se puede encontrar un estudio sobre la aplicación del teorema en el tenis en Walker y Wooders (2001). Además la independencia secuencial que se da en los lanzamientos de penalties no suele ser común en juegos con condiciones naturales o experimentales.

## 4.6. Conclusión

Durante las últimas décadas, la teoría de juegos no cooperativos se ha convertido en una herramienta muy útil en economía y otras ciencias sociales. A pesar de los numerosos avances, sigue siendo un reto importante enfrentarse al problema de refutar con pruebas empíricas las predicciones realizadas por la teoría de juegos.

El análisis realizado aprovecha la experiencia de los jugadores, bajo condiciones naturales, para proporcionar pruebas consistentes relativas al concepto de equilibrio en todos los aspectos: (i) las probabilidades de ganar son estadísticamente idénticas para todas las estrategias (ii) los jugadores generan secuencias independientes e ignoran cualquier posible vínculo estratégico entre las jugadas. Estos resultados representan la primera vez que las dos implicaciones del Teorema del Minimax de Neumann (1928) son respaldadas bajo condiciones naturales.

Este análisis fue utilizado para aconsejar cómo tirar la tanda de penalties a varios clubes de fútbol. Por ejemplo, en la competición más famosa de clubes, la UEFA Champions League, se realizó un informe basado en estos datos para la final de la temporada 2007-2008 que enfrentaban a los equipos ingleses de Manchester United frente al Chelsea. En el informe realizado por Palacios-Huerta para el Chelsea, se mostraba que el

portero del rival, Edwin Van der Saar, se tiraba demasiado al lado natural del lanzador (80 % de las ocasiones), que paraba más penalties a media altura que los que iban rasos o altos, y que muchos jugadores eran predecibles: Cristiano Ronaldo lanzaba el 85% de las veces a la derecha del portero, dato que sirvió para que el guardameta del Chelsea adivinara el lanzamiento de la estrella portuguesa. Fue también contratado por Holanda para una hipotética tanda en la final del mundial de 2010, pero Iniesta tenía otros planes.

Otra aplicación se recoge en la revista económica *American Economic Review* (AER). Palacios-Huerta y Apesteguía (2009) muestra que el primero que tira en la tanda de penalties tiene un 60 % de probabilidades de ganar. Ésto refleja que el azar importa demasiado en este tipo de juegos. Por ello, Palacios-Huerta propone invertir el orden de lanzamiento cada 2 penalties, para igualar las fuerzas, haciendo que el azar tenga la menor cabida posible. Esta propuesta fue remitida al máximo organismo del fútbol profesional, la FIFA, pero hasta ahora, no han llevado a cabo cambio alguno en las tandas de penalties.

Del estudio realizado por el autor, sacamos que a la hora de aplicar las conclusiones realizadas a un penalty, como las probabilidades de acertar tanto para el lanzador como para el portero son las mismas si eligen lado natural o no. Por lo tanto, hay un equilibrio en estrategias mixtas de:  $(I, D) = (1/2, 1/2)$  refiriéndose  $I$  que el jugador elige el lado no natural y  $D$  elige el centro o lado natural.



## .1. Apéndice. Identidades de lanzadores y porteros

A continuación se muestran los jugadores que se han analizado en los penalties; están agrupados por países. Entre corchetes la identificación de cada uno en la Tabla 3 y entre paréntesis los equipos donde jugaban.

### LANZADORES

*Italia*: [9] Batistuta(Roma), [13] Baggio(Brescia), [11] Del Piero(Juventus), [5] Mihajlovic(Lazio), [15] Chiesa(Fiorentina), [6] Signori(Bologna), [7] Rui Costa(Milán), [8] Amoroso(Udinese), [1] Mendieta(Lazio).

*España*: [22] Penev(Atlético de Madrid), [17] Hierro(Real Madrid), [16] Larrazábal(Athletic de Bilbao), [14] Garitano(Zaragoza), [19] Catanha(Celta), [20] Donostia(Eibar), [12] Juninho(Atlético de Madrid), [10] Rivaldo(Barcelona), [3] Zidane(Real Madrid).

*Inglaterra*: [2] Shearer(Newcastle), [4] Bergkamp(Arsenal), [21] Finidi(Ipswich Town), [18] Suker(West Ham).

### PORTEROS

*Italia*: [7] Toldo(Inter Milán), [9] Mazzantani(Perugia), [10] Peruzzi(Lazio), [14] Pagliuca(Bologna), [11] Taivi(Atalanta), [3] Brivio(Venezia), [12] Buffon(Juventus).

*España*: [2] César(Real Madrid), [1] Alberto(Real Sociedad), [13] Cañizares(Valencia), [4] Ceballos(Racing de Santander), [17] Stelea(Salamanca), [18] Etxeberria(Rayo Vallecano), [8] Molina(Deportivo Coruña), [19] Juanmi(Real Zaragoza), [20] Dutruel(Barcelona), [16] Esteban(Real Oviedo), [5] Toni Prats(Real Betis).

*Inglaterra*: [15] Seaman(Arsenal), [6] Schmeichel(Aston Villa).

Nota: los lanzadores 5, 6, 10, 14, 16, 18 y 22 son zurdos, el resto son diestros.

## Referencias

- Bellman, R. (1958). *Combinatorial processes and dynamic programming*. Rand Corporation.
- Bilbao, J. M., y Fernández, F. R. (1999). Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales. *Universidad de Sevilla*.
- Ferguson, T. S. (2005). Game theory. *University of California*, 18-34.
- García, C. R. B. (2016). *Un análisis del dilema del prisionero reiterado* (Tesis de Master no publicada). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
- Getafe, M. (2015). *Equilibrio de nash en estrategias mixtas*. [https://www.youtube.com/watch?v=WHsXX\\_rh0t0&t=330s](https://www.youtube.com/watch?v=WHsXX_rh0t0&t=330s).
- Nash, J. (1950). *Non-cooperative games* (Tesis de Master no publicada). Princeton University.
- Neumann, J. V. (1928). *Zur theorie der gesellschaftsspiele*. *Mathematische Annalen*.
- Neumann, J. V., y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.
- Palacios-Huerta, I. (2002a). Professionals play minimax. *Brown University*.
- Palacios-Huerta, I. (2002b). Professionals play minimax: Appendix. *Brown University*.
- Palacios-Huerta, I., y Apesteguia, J. (2009). Psychological pressure in competitive environments: Evidence from a randomized natural experiment. *American Economic Review*.
- Petrosyan, L., y Zenkevich, N. (1996). *Game theory*. World Scientific Publishing.
- Shafer, G. (1986). *Savage revisited*. [https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.ss/1177013518](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ss/1177013518).
- Uriquidi, J. M. P. (2018). *Teoremas de punto fijo y existencia de equilibrios de nash para juegos no cooperativos*. <http://lic.mat.uson.mx/tesis/146TesisUrquidi.pdf>.
- van Damme, E., y Furth, D. (2002). *Chapters in game theory*. Kluwer Academic Publishers.
- Vorob'ev, N. N. (1977). *Game theory: Lectures for economists and systems scientists*. Springer-Verlag.
- Wald, A. (1950). *Statistical decision functions*. J. Wiley.
- Walker, M., y Wooders, J. (2001). Minimax play at wimbledon. *American Economic Review*.
- Youngeun, Y. (2016). Kakutani's fixed point theorem and the minimax theorem in game theory. *University of Delaware*.