FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO FIN DE GRADO:

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS CON APLICACIONES EN FINANZAS

Lucía Baqueiro Vidal

Sevilla, 2017-2018

Tutor: María José Garrido Atienza

Índice general

Resumen

En este trabajo vamos a ver como se comporta, a diferencia de una integral de Riemann-Stieljes, una integral estocástica. Desarrollaremos el cálculo estocástico y lo emplearemos para estudiar las ecuaciones diferenciales estocásticas, dando un teorema de existencia y unicidad de soluciones. Finalmente, estudiaremos cómo se aplican estas ecuaciones en Finanzas, exponiendo el modelo de Black&Scholes muy recurrido en el mercado financiero. Modelaremos un problema de mercado mediante ecuaciones diferenciales estocásticas y daremos una solución explícita mediante la fórmula de Black-Scholes.

Abstract

In this document we are going to discusse how it behaves, in contrast to a Riemann-Stieljes integral, a stochastic integral. We will develop the stochastic calculus and we will use it to study the stochastic differential equations giving a theorem of existence and uniqueness of solutions. Finally, we will study how these equations are applied in finance, exposing the Black&Scholes model very resorted in the financial market. We will model a problem of market through stochastic differential equations, and give an explicit solution using the Black-Scholes formula.

Introducción

La motivación para la realización de este trabajo ha sido adentrarme en el campo de la Matemática Financiera, donde pretendo desarrollar mi futura carrera laboral. Ha sido un árduo trabajo personal, pero a la vez muy enriquecedor. Empleando los conocimientos adquiridos en el Grado en Matemáticas, he investigado nuevas áreas de la matemática que desconocía, basándome en los libros [10] y [8] y complementándolo con la búsqueda de artículos y tesis doctorales que me dieran una mayor visión del tema a tratar.

El transcurso del trabajo que se va a exponer será guiado por la búsqueda de la resolución al siguiente problema:

Problema 1 *Supongamos que una persona tiene un bien o activo. El precio X_t de su activo en el tiempo t varía en el mercado de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial estocástica,*

$$\frac{dX_t}{dt} = cX_t + \sigma X_t \cdot \text{“}ruido\text{”},$$

donde c y σ son constantes. Lógicamente, esa persona está interesada en predecir el valor de su activo en un futuro, conociendo el comportamiento que este ha tenido hasta el presente, para tomar las decisiones financieras que más le convengan. Esta ecuación tiene una parte determinista, fácil de interpretar. El problema surge con el término que introduce la aleatoriedad en la ecuación, lo que llamamos ruido.

Por tanto, nuestro objetivo será interpretar todos los términos de la ecuación y buscar posibles soluciones.

En el Capítulo 1 se enuncian conceptos previos de probabilidad que serán empleados posteriormente, así como la exposición de procesos estocásticos, presentes en todo el trabajo.

En el Capítulo 2 nos centraremos en un proceso estocástico en particular, el movimiento browniano. En este capítulo se puede encontrar una breve introducción histórica de cómo fue descubierto, su definición, características y algunos resultados a destacar.

El Capítulo 3 es un bloque más extenso donde se interpreta el término que introduce aleatoriedad en la ecuación estocástica del problema planteado, es decir, el ruido. Haremos una primera aproximación interpretando el ruido como un proceso estocástico pero veremos que no es suficiente, por lo que debemos exigirle el cumplimiento de algunas condiciones más, definiendo así el proceso de ruido blanco. Ahora bien, al sustituir el ruido por el proceso de ruido blanco en la ecuación del problema planteado llegaremos a otra encrucijada: probar la existencia de la integral resultante respecto al movimiento browniano, el cual tiene variación no acotada y es no diferenciable en (casi) ningún punto por lo que no sigue el cálculo integral clásico, y como resolver dicha integral. La solución a este dilema la encontraremos mediante el cálculo estocástico con la construcción de la Integral de Itô y la Fórmula o Lema de Itô.

Una vez solucionado el problema de la integral de Itô, en el Capítulo 4 ya estamos en disposición de estudiar la Ecuación Diferencial Estocástica, pues conocemos todos los términos que la componen. Pero ahora debemos dar un resultado para garantizar que tenga solución y esta sea única, por lo que exponemos el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones.

Por último, en el Capítulo 5 damos solución al problema planteado, adentrándonos en la Matemática Financiera. En esta última parte, empezamos dando una introducción histórica para contextualizar de dónde y por qué ha surgido esta nueva área de la matemática. Posteriormente, definiremos unos conceptos básicos en finanzas, necesarios para el buen entendimiento del problema que nos ocupa. Y, por último, veremos una aplicación de todo lo estudiado en los capítulos anteriores mediante el modelado del precio de opciones en el mercado. Esto será posible gracias a la Fórmula precio opción de Black-Scholes descubierta por Fishcher Black y Myron Scholes en 1973, gracias a la cual fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1997, pues supuso una herramienta indispensable hoy día en las transacciones de opciones y otros derivados financieros.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Probabilidad

Vamos a repasar unos conceptos básicos de probabilidad presentes en este trabajo.

De aquí en adelante consideramos el espacio de probabilidad que consta de una terna ordenada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ω , llamado espacio muestral y cuyo elemento típico es ω , es un conjunto arbitrario que en nuestro caso representa el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. $\mathcal{F}$, llamada *σ-álgebra*, es una colección no vacia de subconjuntos de Ω cerrada bajo las operaciones de complementos y uniones numerables, y cuyos elementos se les llama eventos o conjuntos medibles. La pareja de estos dos $(\Omega, \mathcal{F})$ se le denomina espacio medible (en particular, si $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la *σ-álgebra* más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces se tiene el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se denominan *Borelianos* o *conjuntos de Borel medibles.* Por último, P, llamada medida de la probabilidad, es una función $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple los siguientes axiomas (Kolmogorov, 1993):

- $P(\Omega) = 1$
- *σ-aditiva*: si A_1, A_2,... es una sucesión de eventos, disjuntos dos a dos $\Longrightarrow$ $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Las medidas de probablidad nos permiten representar las leyes del azar. Así, el número $P(A)$ es una medida de la frecuencia con la que se observa el evento A al realizar un experimento aleatorio.

Definición 1.1.1 (Variable aleatoria) *Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, el conjunto*

$$X^{-1}B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

es un elemento de $\mathcal{F}$.

A X se le denomina función medible entre los espacios medibles $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ o función *$\mathcal{F}$-medible*

La función de distribución de X, $F(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por $F(x) = P(X \leq x)$, contiene toda la información probabilística de X.

Definición 1.1.2 (Esperanza) *La esperanza de una variable aleatoria $g(X)$, siendo g una función real de variable real es,*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x),$$

siendo $F(x)$ la función de distribución de X y asumiendo la existencia de la integral de Riemann-Stieljes.

Definición 1.1.3 (Esperanza condicional) *Dada una sub-σ-álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, se define la esperanza condicional de una variable aleatoria integrable X como una variablae aleatoria denotada por $E(X|\mathcal{G})$, la cual es integrable, $\mathcal{G}$-medible y cumple que*

$$\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP \quad \textit{para cualquier } G \in \mathcal{G}.$$

Una distribución de especial interés en nuestro caso es la normal o gaussiana. Se dice que $X \in N(\mu, \sigma^2)$ si su función de distribución es:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/2\sigma^2}\, du,$$

siendo $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.

Algunas propiedades que usaremos en adelante son:

- Si X es $\mathcal{G}$-*medible* $\Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = X$, ya que X cumple con la definición de esperanza condicional.
- Si X es independiente de $\mathcal{G} \Rightarrow$ la esperanza condicional $E(X|\mathcal{G}) = E(X)(cte)$.

1.1.1. Espacios L^2 y convergencia en media cuadrática

Una variable aleatoria pertenece al espacio $L^2(dP)$ si $\int_\Omega X^2 dP < \infty$. Equivalentemente, $E(X^2) < \infty$, es decir, X tiene varianza finita. La norma L^2 es $\|X\| = (\int_\Omega X^2 dP)^{1/2} = \left[E(X^2)\right]^{1/2}$. Una sucesión $X_n \in L^2(dP)$ converge a $X \in L^2(dP)$, o en media cuadrática, si converge en la norma anterior, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0.$$

Además, como el espacio $L^2(dP)$ es completo, todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.

1.2. Procesos estocásticos

Definición 1.2.1 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por el espacio parametrizal T que en nuestro caso es a tiempo continuo, es decir, $T = (a, b) \in \mathbb{R}$ ya que representa el tiempo.*

A nosotros nos interesan los procesos estocásticos en los que las variables aleatorias tomen valores en $\mathbb{R}$ y $T = [0, \infty)$, por tanto podemos redefinir el concepto estocástico de la siguiente manera:

Definición 1.2.2 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico es una función de dos variables,*

$$X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que $\forall t \geq 0$ la función $\omega \mapsto X_t(w)$ es una variable aleatoria y $\forall \omega \in \Omega$ la función $t \mapsto X_t(w)$ es una trayectoria del proceso.

Definición 1.2.3 (Filtración) *Una familia $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de σ-álgebras es una filtración si $\forall 0 \leq s \leq t$ se cumple $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.*

Se puede observar que todo proceso estocástico X_t determina una filtración natural dada por $\mathcal{F}_t = \sigma \{X_s : 0 \leq s \leq t\}$. Además, el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ se denomina *espacio de probabilidad filtrado* y cuando X_t es $\mathcal{F}$*-medible* $\forall t \geq 0$, el proceso es adaptado a la filtración. Por tanto, todo proceso es adaptado a su filtración natural y la σ*-álgebra* representa flujo de información que vamos obteniendo al observar como evoluciona un proceso en tiempo continuo hasta el tiempo t, es decir, todos los posibles sucesos que haya tenido el proceso estocástico hasta el tiempo t. Denotamos $X_t \in \mathcal{F}_t$ al proceso estocástico X_t adaptado a $\mathcal{F}_t$.

Una propiedad interesante de algunos procesos estocásticos que vamos a utilizar es que tengan incrementos independientes.

Definición 1.2.4 *Decimos que un proceso estocástico tiene incrementos independientes si $\forall t_0 < t_1 < ... < t_n$, las variables incremento $X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes, es decir, la función de distribución conjunta coincide con el producto de las funciones de distribución individuales.*

Además, hay muchos tipos de procesos estocásticos. Nosotros vamos a mencionar dos de los más relevantes para nuestro objetivo: proceso estocástico de Markov y proceso estocástico de Lévy, conocido como martingala.

Definición 1.2.5 (Proceso de Markov) *Un proceso estocastico X_t es de Markov si $\forall\, 0 \leq s \leq t$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se cumple que*

$$P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s).$$

Observamos, por tanto, que el estado del proceso en un tiempo futuro $t > s$ dado el estado del proceso en el tiempo presente $s \geq 0$, es independiente del tiempo pasado anterior a s.

Definición 1.2.6 (Martingala) *Un proceso estocástico X_t es una martingala si:*

1. *X_t es adaptado adaptado a la filtración: X_t es $\mathcal{F}_t -$ medible $\forall\, t$.*
2. *X_t es integrable: $E(|X_t|) < \infty$.*
3. *$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$, $\forall\, 0 \leq s \leq t$.*

Consecuentemente, $E(X_t) = E(X_0)\ \forall\, t \geq 0$. Además, es continua si las trayectorias $t \to X_t$ son continuas con probabilidad uno.

Para entender el significado de lo que representa una martingala vamos a poner un caso práctico. Supongamos que X_t es la fortuna de una persona que apuesta a un juego de forma continua. Por tanto, en promedio la fortuna del jugador en el tiempo t conociendo toda la historia del juego hasta el tiempo $s \leq t$, es la fortuna que tenía el jugador en el tiempo s. Podriamos decir en este caso que el juego es justo, pues el jugador en promedio no pierde ni gana nada.

Aplicando este mismo ejemplo podemos entender lo que es una supermartingala, pues con la misma definición pero cambiando la igualdad por $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$, el jugador en promedio disminuiría su fortuna y en este caso el juego sería desfavorable para él. Por el contrario, cambiando la igualdad anterior por $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$, el proceso sería una submartingala donde el jugador vería aumentada su fortuna en promedio y por tanto el juego sería favorable para él.

Capítulo 2

Movimiento Browniano

2.1. Introducción histórica

Figura 2.1: Robert Brown

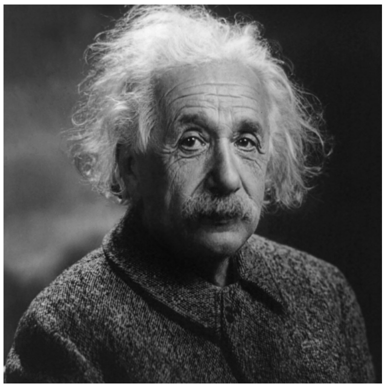

Figura 2.2: Albert Einstein

Robert Brown, nacido en 1773 e hijo de un pastor escocés, estudió medicina pero su amistad con el botánico Joseph Bank le hizo interesarse por esa rama. Así, en 1828 mientras observaba los granos de polen de la *Clarkia purcella* en el microscopio descubrió que estos se movían de forma errática sobre el líquido. Este fenómeno lo plasmo en una revista científica en 1828 y aunque no logró dar una explicación científica a este hecho fue el precursor a su investigación. Más tarde Einstein, en 1905, partiendo de suponer cierta la existencia de moléculas, calculó exactamente que pasaría si suspendiéramos partículas pequeñas en un líquido proporcionando una descripción matemática completa de este fenómeno que podía ser verificada experimentalmente con una exactitud tal en los cálculos que no podría ser refutado. Quedaba demostrado entonces que el movimiento browniano es debido a la excitación térmica de las moléculas de agua. El movimiento que se provoca en los granos de polen no es debido a la colisión entre una molécula de agua y el polen, ya que esto requeriría que las moléculas de agua fueran muchísimo más grandes.

De las observaciones reales de partículas suspendidas sobre un líquido se puede deducir que el moviento browniano debería cumplir propiedades tales como: movimiento continuo, desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos e incrementos que pueden modelarse como variables aleatorias gausianas teniendo en cuenta el teorema del límite central respecto al gran número de colisiones de la partícula con las moléculas del líquido en longitudes de tiempo no pequeños. De este hecho se llega a la conclusión de que un proceso estocástico modelaría exitosamente este fenómeno. Es decir, quedaría modelado por una estructura matemática compuesta por una colección de variables aleatorias $\{B_t : t \geq 0\}$, donde B_t representa la posición de una partícula browniana en el tiempo t.

2.2. Movimiento Browniano

Definición 2.2.1 *Un movimiento Browniano estandar unidimensional es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ tal que*

1. $B_0 = 0$.
2. *Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas:* $\forall \delta > 0$, $\lim_{\Delta \to 0} P(|B_{t+\Delta} - \ X_t| > \ \delta)/\Delta = 0$.
3. *Tiene incrementos independientes: $B_{t+\Delta} - B_t$ independiente de todas las variables B_s con $s \leq t$.*
4. *Tiene incrementos estacionarios: $B_{t+\Delta} - B_t$ no depende de t.*

Tenemos entonces que la variable $B_t - B_s \in N(0, t-s)$ para $0 \leq s < t$ y cada variable B_t tiene distribución $N(0,t)$, es decir, $E(B_t) = 0$ y $Var(B_t) = E(B_t^2) = t$.

Observación 2.2.2 *Si $s < t$ entonces $B_t - B_s \sim \sqrt{t-s}\, N(0,1)$, con lo cual $E((B_t - B_s)^2) = t - s$ y $Var((B_t - B_s)^2) = E((B_t - B_s)^2 - (t-s)) = 2(t-s)^2$.*

Definición 2.2.3 *Una realización del proceso es una función $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual,*

1. *es continua.*
2. *tiene variación infinita:*

$$\text{Dado}[0,T], \left\{ \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|, 0 = t_0 < \ldots < t_n = T \right\} \text{ no está acotado.}$$

3. *no es derivable en (casi) ningún punto.*

Particularmente importante es *2.)* ya que, como consecuencia, no se pueden usar las trayectorias brownianas como integradores en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Teorema 2.2.4 (caracterización de Lévy) *Un proceso estocástico cualquiera $\{X_t : t \geq 0\}$ es un movimiento browniano si y solo si tiene trayectorias continuas, empieza en cero y tanto $\{X_t : t \geq 0\}$ como $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$ son martingalas.*

Teorema 2.2.5 (representación de Lévy) *(Casi) cualquier martingala continua es un movimiento browniano con un cambio de tiempo. Es decir,*

$$\text{Dado } X, \quad \exists\, B, g(t) \ / \ X_t = B_{g(t)}.$$

Proposición 2.2.6 *Si* $\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *es un movimiento Browniano entonces es una martingala.*

Demostración: La prueba es inmediata ya que

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + B_s = B_s \text{ c.s. para } s \leq t.$$

Ejemplo 2.2.7 *Un ejemplo de martingala continua respecto a la filtración* $\mathcal{F}_t$ *es* B_s *ya que*

$$E\left[|B_s|\right]^2 \leq E\left[|B_s|^2\right] = |B_0|^2 + ns \quad \text{y si } s \leq t \text{ luego,}$$
$$E\left[B_t|\mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t - B_s|\mathcal{F}_s\right] + E\left[B_s|\mathcal{F}_s\right] = 0 + B_s = B_s$$

ya que $E\left[B_t - B_s|\mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t - B_s\right] = 0$ *, pues* $B_t - B_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$ *y además,* $E\left[B_s|\mathcal{F}_s\right] = B_s$ *al ser* B_s $\mathcal{F}$*-medible.*

Capítulo 3

Integrales de Itô

Retomando nuestro objetivo de interpretar todos los términos y estudiar posibles soluciones de las ecuaciones con forma

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{“ruido”} \ , \tag{3.1}$$

donde b y σ son funciones dadas y vamos ahora a buscar una interpretación matemática para el “ruido”.

3.1. Ruido

Veamos brevemente que es esto del “ruido”, que es utilizado en todas las aplicaciones de las *ecuaciones diferenciales estocásticas* para modelar la dinámica del sistema sometido a influencias externas.

El *ruido* es una señal aleatoria que tiene características y propiedades estadísticas. Una de ellas, la densidad espectral (potencia y distribución en el espectro de frecuencia), es la que se utiliza para diferenciar los tipos de ruidos y su clasificación se hace por colores. Al tipo de procesos en los que la función espectral no es una constante se les denomina *ruido de color*, por el contrario, en los que sí lo son se les denomina *ruido blanco*. Este último es el tipo de ruido que nos interesa para nuestro problema.

Nos centraremos en el caso del ruido 1-dimensional. Es razonable pensar en un proceso estocástico W_t para representar el ruido, quedando la ecuación (3.1) de la forma,

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\, W_t \ . \tag{3.2}$$

Además, basándonos en situaciones reales de diversos campos como por ejemplo en Ingeniería, W_t deberia cumplir al menos las siguientes propiedades:

i) Si $t_1 \neq t_2$ entonces W_{t_1} y W_{t_2} son independientes.

ii) $\{W_t\}$ es estacionario, es decir, la distribución conjunta de $\{W_{t_1+t}, \cdots, W_{t_k+t}\}$ no depende de t.

iii) $E[W_t] = 0$ para todo t.

Problema: *No existe ningún proceso estocástico "razonable" que satisfaga las condiciones i) y ii), pues* W_t *no podría tener tener trayectorias continuas. Si además le pedimos que* $E[W_t^2] = 1$, *entonces la función* $(t, w) \to W_t(w)$ *tampoco puede ser medible, con respecto a la* σ*-álgebra* $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$, *donde* $\mathcal{B}$ *es la* σ*-álgebra de Borel en* $[0, \infty]$.

Solución: Representamos W_t como un proceso estocástico llamado *proceso de ruído blanco.*

Definición 3.1.1 (Ruido blanco) *Es una señal aleatoria (proceso estocástico) que se caracteriza por la no correlación estadística de sus valores de señal en dos tiempos diferentes y consecuentemente, su densidad espectral de potencia es constante, es decir, su gráfica es plana. Por tanto, sus valores son independientes e idénticamente distribuídos a lo largo del tiempo y, además, tiene media nula.*

Nota 3.1.2 *Desde un punto de vista matemático, este ruido es una idealización de una situación real en la que, generalmente, la densidad espectral no es constante pues normalmente los valores de la señal en un tiempo* t *dependen en cierta medida de los que toma en otro tiempo* s *distinto de* t.

Por tanto, vamor a intentar reescribir la ecuación (3.2) reemplazando W_t por un proceso estocástico adecuado.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$ y cogiendo la versión discreta de (3.2):

$$X_{k+1} - Xk = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k \ , \tag{3.3}$$

donde

$$X_j = X(t_j), \quad W_k = W_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Además, vamos a reemplazar la notación W_k por V_t, donde $\{V_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico adecuado y consecuentemente cambiamos $W_k\Delta t_k$ por $\Delta V_k = V_{t_k+1} - V_{t_k}$. Las propiedades *i*), *ii*) y *iii*) que asumimos antes para W_t nos indican que ahora V_t deberia tener incrementos independientes con media 0 y resulta que el único proceso estocástico con incrementos estacionarios independientes con media cero y trayectorias continuas es el movimiento browniano B_t (ver [6]). Por tanto, asumiento en la ecuación (3.3) que $V_t = B_t$ obtenemos:

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_+ \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j \, .$$

Se puede probar que el límite del lado derecho de la ecuación anterior existe cuando $\Delta t_j \to 0$ así que, haciendo uso de la notación habitual de integración obtenemos,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \text{``}\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\text{''} \tag{3.4}$$

y asumimos entonces que en la ecuación (3.1), $X_t = X_t(\omega)$ es un proceso estocástico el cual satisface la ecuación (3.4).

3.2. Integral de Itô

Nuestro objetivo ahora es probar la existencia de

$$“\int_0^t f(s,w)dB_s(w)'' \ ,$$

donde $B_t(w)$ es un movimiento browniano 1-dimensional y f una clase de funciones muy amplia $f : [0,\infty] \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Suponemos $0 \leq S < T$ y una función $f(t,w)$ dada, la cual tenemos que estudiar sus características para definir correctamente la integral

$$\int_S^T f(s,w)dB_t(w) \, . \tag{3.5}$$

Vamos a empezar definidiendo (3.5) para funciones simples y luego las extendemos por aproximación. Por tanto, podemos empezar definiendo f de la forma

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega) \cdot \chi_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t) \ ,$$

donde χ es la funcion carácterística y n un número natural.

Por tanto, sustituyendo en (3.5) tendriamos

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega) \left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right](\omega) \ , \tag{3.6}$$

donde

$$t_k = t_k^{(n)} = \left\{ \begin{array}{ccc} k\cdot 2^{-n} & \text{si} & S \leq k\cdot 2^{-n} \leq T \\ S & \text{si} & k \cdot 2 - n < S \\ T & \text{si} & k\cdot 2^{-n} > T \end{array} \right\}$$

Problema 2 *La variación de la trayectoria del movimiento browniano es demasiado grande para poder definir la ecuación (3.5) en el sentido de Riemann-Stieljes. De hecho, el movimiento browniano no satisface los requisitos necesarios del cálculo infinitesimal tradicional y necesitamos definir una nueva integral para poder integrar una función no diferenciable en (casi) ningún punto y de variación infinita en cada intervalo de tiempo.*

Vamos a ver un ejemplo donde podemos comprobar este problema fácilmente.

Ejemplo 3.2.1 *Consideramos dos funciones,*

$$\phi_1(t,\omega) = \sum j \geq 0 B_{j\cdot 2^{-n}}(\omega) \cdot \chi_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t)$$
$$\phi_2(t,\omega) = \sum j \geq 0 B_{(j+1)\cdot 2^{-n}}(\omega) \cdot \chi_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t)$$

luego,

$$E\left[\int_0^T \phi_1(t,\omega)dB_t(\omega)\right] = \sum_{j\geq 0} E\left[B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = 0 \, ,$$

ya que $\{B_t\}$ tiene incrementos independientes. Pero,

$$E\left[\int_0^T \phi_2(t,\omega)dB_t(\omega)\right] = \sum_{j\geq 0} E\left[B_{t_{j+1}}\cdot(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\right]$$
$$= \sum_{j\geq 0} E\left[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2\right] = T\,,$$

ya que $E\left[(B_t-B_s)^2\right]=(t-s)$ si $t\geq s$.

Este ejemplo pone de manifiesto que, aunque ϕ_1 y ϕ_2 son aproximaciones de $B_t(\omega)$, la integral no está bien definida. El motivo principal es el dado en **Problema 2**.

Para dar solución a este problema vamos a definir una nueva forma de integración, la *Integral de Itô*.

3.2.1. Construcción de la Integral de Itô

Vamos a definir entonces la integral de Itô, primero para procesos simples y después, por aproximación, para procesos más generales.

En general, parece natural aproximar una función dada $f(t,\omega)$ por

$$\sum_j f(t_j^*,\omega)\cdot\chi\left[t_j,t_{j+1}\right)(t) \tag{3.7}$$

donde los puntos t_j^* pertenecen al intervalo $[t_j,t_{j+1}]$ y definimos $\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$ como el límite de $\sum_j f(t_j^*,\omega)\left[B_{t_{j+1}}-B_{t_j}\right](\omega)$ cuando $n\to\infty$.

Aunque los puntos t_j^* pueden ser escogidos de diversas formas dentro del intervalo $[t_j,t_{j+1}]$, nos vamos a centrar en el más apropiado para definir la integral de Itô que es de la forma, $t_j^*=t_j$ (el punto izquierdo del intervalo).

El proceso de aproximación que vamos a llevar a cabo nos indica que f tiene la propiedad de que cada función $\omega\to f(t_j,\omega)$ solo depende del comportamiento de $B_s(\omega)$ hasta el tiempo t_j.

Siguiendo estos requisitos, vamos a definir unos conceptos previos antes de contruir la *integral de Itô*.

Definición 3.2.2 *Sea $B_t(\omega)$ un movimiento browniano n-dimensional, definimos $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^{(n)}$ como la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{B_i(s)\}_{1\leq i\leq n,0\leq s\leq t}$. En otras palabras, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos de la forma,*

$$\{\omega\,;\; B_{t_1}(\omega)\in F_1,\cdots,B_{t_k}(\omega)\in F_k\}\ ,$$

donde $t_j\leq t$ y $F_j\subset\mathbb{R}^n$ son conjuntos de Borel, siendo $j\leq k=1,2,\cdots$ (Asumiendo que todos los conjuntos de medida cero estan incluídos en $\mathcal{F}_t$).

Interpretamos convenientemente $\mathcal{F}_t$ como “la historia de B_s hasta el timpo t”. Además, como hemos visto anteriormente, una función $h(\omega)$ se dice que es $\mathcal{F}_t$-medible si y solo si, h puede escribirse como el límite de sumas punto por punto de funciones de la forma,

$$g_1(B_{t_1})g_2(B_{t_2})\cdots g_k(B_{t_k})\ ,$$

donde $g_1, \cdots, g_k$ son funciones continuas acotadas y $t_j \leq t$ para $j \leq k$, $k = 1, 2, \cdots$.

Intuitivamente, que h sea $\mathcal{F}_t$-medible significa que el valor de $h(\omega)$ puede ser determinado de los valores de $B_s(\omega)$ para $s \leq t$. Por ejemplo,
$h_1(\omega) = B_{t/2}(\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible, mientras que $h_2(\omega) = B_{2t}(\omega)$ no lo es.

Fijémonos, además, que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s < t$, es decir, $\mathcal{F}_t$ es creciente, y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo t.

Definición 3.2.3 *Sea $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ una familia creciente de σ-álgebras de subconjuntos de Ω. Un proceso $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ se dice que es $\mathcal{N}_t$-adaptado si $\forall\, t \geq 0$ la función*

$$\omega \to g(t, \omega)$$

es $\mathcal{N}_t$-medible.

Por tanto, el proceso $h_1(t, \omega) = B_{t/2}$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado mientras que
$h_2(t, \omega) = B_{2t}(\omega)$ no lo es.

Ahora ya estamos en disposición de poder describir la clase de funciones para las cuales definiremos la *integral de Itô.*

Definición 3.2.4 *$\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ es la clase de funciones*

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que

1. *$(t, \omega) \to f(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$, donde $\mathcal{B}$ denota la σ-álgebra de Borel en $[0, \infty)$.*
2. *$f(t, \omega)$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado.*
3. *$E\left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt\right] < \infty$.*

Vamos a ver como definir la *integral de Itô* para funciones $f \in \mathcal{V}$,

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \ ,$$

donde B_t es el movimiento browniano 1-dimensional.

Primero vamos a definir $\mathcal{I}[\phi]$ para una clase de funciones simples ϕ y después, demostrando que cada $f \in \mathcal{V}$ puede ser aproximada por esas funciones simples, definiremos $\int f dB$ como el límite de $\int \phi dB$ cuando $\phi \to f$.

Para ello vamos a introducir previamente la definición de *función elemental* y la *isometria de Itô* para este tipo de funciones.

Definición 3.2.5 *Una función $\phi \in \mathcal{V}$ se dice que es elemental si es de la forma*

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t) \ . \tag{3.8}$$

Como $\phi \in \mathcal{V}$, cada función e_j tiene que ser $\mathcal{F}_t$-medible. Por tanto, usando el mismo ejemplo (3.2.1) anterior vemos fácilmente que la función ϕ_1 es elemental mientras que ϕ_2 no lo es, pues la esperanza de la integral respecto del movimiento browniano es distinta de cero.

Por tanto, de acuerdo a la ecuación (3.6) definida previamente, definimos la integral para funciones elementales $\phi(t,\omega)$ de la forma

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dB_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega) \ .$$

Lema 3.2.6 (Isometría de Itô) *Si la función $\phi(t,\omega)$ es acotada y elemental entonces,*

$$E\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega) dB_t(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_S^T \phi(t,\omega)^2 dt\right] \ .$$

Demostración. Usando la siguiente notación, $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, tenemos que

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ E[e_j]^2 \cdot (t_{j+1} - t_j) & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

pues $e_i e_j \Delta B_i$ y ΔB_j son independientes si $i < j$. Por tanto,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_S^T \phi dB\right)^2\right] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_j E[(e_j)^2 (\Delta B_j)^2] \\ &= \sum_j E[e_j^2] E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = \sum_j E[e_j^2](t_{j+1} - t_j) \\ &= E\left[\int_S^T \phi^2 dt\right] \ . \end{aligned}$$

Lo que vamos a hacer es extender la definición de funciones elementales a funciones en $\mathcal{V}$ en 3 pasos, usando la Isometría de Itô 3.2.6 que acabamos de demostrar:

Paso 1. *Sea $g \in \mathcal{V}$ una función acotada y $g(\cdot,\omega)$ continua para cada ω entonces existen funciones elementales $\phi_n \in \mathcal{V}$ tal que*

$$E\left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\right] \longrightarrow 0 \qquad \textit{cuando } n \to \infty \ .$$

Demostración. Se define $\phi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega) \cdot \chi_{[t_j,t_{j+1})(t)}$. Por tanto, ϕ_n es elemental ya que $g \in \mathcal{V}$ y

$$\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty \quad \forall\, \omega \, ,$$

ya que $g(\cdot,\omega)$ es continua $\forall\, \omega$. Por consiguiente, $E\left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\right] \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, por convergencia acotada.

Paso 2. *Sea $h \in \mathcal{V}$ una función acotada entonces existen funciones acotadas $g_n \in \mathcal{V}$ tal que $g_n(\cdot, \omega)$ es continua para todo ω y n, y*

$$E\left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt\right] \longrightarrow 0 \ .$$

Demostración. Suponemos $|h(t,\omega)| \leq M$ para todo (t,ω). Para cada n, sea ψ_n una función continua no-negativa en $\mathbb{R}$ tal que

1. $\psi_n(x) = 0$ para $X \leq -\frac{1}{n}$ y $x \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx = 1$

se define

$$g_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)h(s,\omega)ds \ .$$

Entonces $g_n(\cdot,\omega)$ es continua para cada ω y $|g_n(t,\omega)| \leq M$. Ya que $h \in \mathcal{V}$, podemos ver que $g_n(t,\cdot)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para todo t. Además,

$$\int_S^T (g_n(s,\omega) - h(s,\omega))^2 ds \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty \, , \ \forall \omega \ ,$$

ya que $\{\psi_n\}_n$ constituye una aproximación identidad. Asi que, por convergencia acotada

$$E\left[\int_S^T (h(t,\omega) - g_n(t,\omega))^2 dt\right] \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty \ .$$

Paso 3. *Sea $f \in \mathcal{V}$ entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$ tal que cada función h_n es acotada para cada n y*

$$E\left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt\right] \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty \ .$$

Demostración. Cogiendo

$$h_n(t,\omega) = \begin{cases} -n & \text{si} \quad f(t,\omega) < -n \\ f(t,\omega) & \text{si} \quad -n \leq f(t,\omega) \leq n \\ n & \text{si} \quad f(t,\omega) > n \ . \end{cases}$$

Entonces, por convergencia dominada ya lo tendríamos demostrado.

Ya hemos completado el procedimiento de aproximación, por lo que estamos en disposición de completar la definición de la *integral de Itô*

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) \quad \text{para } f \in \mathcal{V} \ .$$

Si $f \in \mathcal{V}$, entonces escogemos, por los Pasos 1-3, funciones elementales $\phi_n \in \mathcal{V}$ tales que

$$E\left[\int_S^T |f - \phi_n|^2 dt\right] \longrightarrow 0 \ .$$

Por tanto, definimos

$$\mathcal{I}[f](\omega) := \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega) \ .$$

El límite existe como un elemento de $L^2(P)$, ya que $\left\{\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega)\right\}$ es una serie de Cauchy en $L^2(P)$, por la Isometría de Itô 3.2.6.

Ahora que ya vimos como se construye la *Integral de Itô* podemos dar una definición bien justificada.

Definición 3.2.7 (Integral de Itô) *Dada una función $f \in \mathcal{V}(S,T)$, la integral de Itô de f (de S a T) está definida por*

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega) \qquad \text{(límite en } L^2(P)) \tag{3.9}$$

donde $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones elementales tales que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] = 0 \,. \tag{3.10}$$

Sabemos que existe una sucesión $\{\phi_n\}$ que satisface (3.10) por los Pasos 1-3 anteriores. Además, por la Isometría de Itô 3.2.6 el límite en (3.9) existe y no depende de la sucesión $\{\phi_n\}$ escogida mientras se siga cumpliendo (3.10).

Corolario 3.2.8 (Isometría de Itô para procesos generales) *Para toda función $f \in \mathcal{V}(S,T)$ se cumple,*

$$E\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right] \ .$$

Tenemos la *Integral de Itô* definida para un intervalo fijo $[S,T]$. Ahora vamos a verla, no como una variable aleatoria sino como un proceso estocástico, que es lo que queremos representar. Tal proceso no es necesariamente continuo, sin embargo existe una versión continua que resulta ser una martingala respecto a la filtración natural del movimiento browniano.

Teorema 3.2.9 *Sea $f \in \mathcal{V}(0,T)$, para $t \in [0,T]$ existe una version t-continua de*

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega) \,,$$

es decir, existe un proceso estocástico t-continuo J_t en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$P\left[J_t = \int_0^t f dB\right] = 1 \qquad \forall\, t,\ 0 \le t \le T \ .$$

Demostración: (Ver [10], Teorema 3.2.5, pág 32))

Corolario 3.2.10 *Sea $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(0,T)$ para todo T, entonces*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega) dB_s$$

es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t$ y

$$P\left[\sup_{0 \le t \le T} |M_t| \ge \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T f(s,\omega)^2 ds\right] \qquad \textit{siendo } \lambda, T > 0 \ .$$

Demostración: (Ver [10], Corolario 3.2.6, pág 33))

Corolario 3.2.11 *Si $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$, $f_n(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$ para $n = 1, 2, \cdots$ y $E\left[\int_S^T (f_n(t,\omega) - f(t,\omega))^2 dt\right] \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \int_S^T f_n(t,\omega) dB_t(\omega) = \int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) \qquad \textit{en } L^2(P).$$

Vamos a ver un ejemplo de como afrontaríamos la *Integral de Itô*

Ejemplo 3.2.12 *Asumiendo que $B_0 = 0$, entonces*

$$\int_0^t B_s dB_S = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \ .$$

Demostración: Cogiendo $\phi_n(s,\omega) = \sum B_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(s)$, donde $B_j = B_{t_j}$, entonces

$$E\left[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds\right] = E\left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right]$$

$$= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } \Delta t_j \to 0 \ .$$

Por el Corolario 3.2.11,

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j B_j \Delta B_j \ .$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \Delta(B_j^2) &= B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) \\ &= (\Delta B_j^2) + 2B_j \Delta B_j \ . \end{aligned}$$

y además, como $B_0 = 0$,

$$B_t^2 = \sum_j \Delta(B_j^2) = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2\sum_j B_j \Delta B_j$$

o,

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_j (\Delta B_j)^2 \ .$$

Y ya tendríamos el resultado, pues $\sum_j (\Delta B_j)^2 \longrightarrow t$ en $L^2(P)$ cuando $\Delta t_j \to 0$

A la vista del resultado, observamos que difiere en un término "$-\frac{1}{2}t$" a lo que daría si resolviéramos una integral ordinaria, lo que nos lleva a pensar que la integral estocástica de Itô se comporta de una forma diferente. Con el fin de poder resolver un gran número de este tipo de integrales estocásticas vamos a explicar más adelante una herramienta de gran utilidad, la *Fórmula de Itô*.

Para acabar con esta sección, vamos a ver algunas de las propiedades más destacadas de la *Integral de Itô*: Sea $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$ y $0 \leq S < U < T$, entonces

- $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ para casi todo ω
- $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ con $c \in \mathbb{R}$ para casi todo ω
- $E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0$
- $\int_S^T f dB_t$ es $\mathcal{F}_T$-medible
- $\mathcal{I}_t(f) = \int_S^T f dB_t$ vista como un proceso estocástico es una martingala, es decir, es integrable, adaptado a la filtración natural y para $0 \leq s \leq t$ se cumple $E(\mathcal{I}_t(f)|\mathcal{F}_s) = \mathcal{I}_s(f)$
- $Var\left(\int_0^t f(s,\omega) dB_s\right) = E\left[\int_0^t f^2(s,\omega) ds\right]$, $0 \leq t \leq T$ (aplicando la isometría de Itô y que la esperanza de la integral es igual a 0)
- La definición de integral de Itô se puede extender a procesos que verifican la condición $P\left(\int_S^T f^2(t,\omega) dt < \infty\right) = 1$, en lugar de la condición más restrictiva $E\left[\int_S^T f^2(t,\omega) dt\right] < \infty$. En este caso, la integral de Itô ya seria necesariamente una martingala.

3.2.2. Integral de Stratonovich

En la construcción de la *Integral de Itô* hemos visto que evaluamos el integrando en el extremo inferior de cada intervalo de la partición $[t_j, t_{j+1}]$ (3.7), donde $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$, es decir, $t_j^* = t_j$ y la integral se denota por

$$\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) \, .$$

Sin embargo, se pueden hacer diferentes elecciones de los puntos $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$. Otra de las elecciones más convenientes es la del punto promedio de los dos extremos, es decir, $t_j^* = (t_j, t_{j+1})/2$, lo que nos lleva a la *integral de Stratonovich* denotada por

$$\int_S^T f(t,\omega) \circ dB_t(\omega)\,.$$

Recapitulando, hemos visto que la interpretación matemática de la ecuación de ruído blanco

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

es que X_t es la solución de la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\ , \tag{3.11}$$

con una interpretación adecuada de la última integral, la cual hemos considerado anteriormente ser la *Integral de Itô.*

Sin embargo, puede haber situaciones en las que sería más adecuado interpretarla en el sentido de *Stratonovich.* Vamos a justificar esto: Analizaremos procesos diferenciables t-continuos $B_t^{(n)}$ tales que para casi todo ω,

$$B^{(n)}(t,\omega) \longrightarrow B(t,\omega) \quad \text{cuando } n \to \infty$$

uniformemente (en t) en intervalos acotados. Para cada ω, $X_t^{(n)}(\omega)$ es la solución de la correspondiente ecuación diferencial determinista

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\frac{dB_t^{(n)}}{dt}\ .$$

Por tanto, para casi todo ω, $X_t^{(n)}(\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en t en intervalos acotados.

Resulta que esta solución X_t coincide con la solución de (3.11) obtenida al usar integrales de *Stratonovich*, es decir,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s\,,$$

lo que implica que X_t es la solución de la *ecuación de Itô modificada*:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(s, X_s)\sigma(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{3.12}$$

donde σ' es la derivada de $\sigma(t,x)$ con respecto a x. Vemos que (3.11) y (3.12) coinciden si $\sigma(t,x)$ no depende de x.

La *integral de Stratonovich* tiene la ventaja principal de que sigue la mayoría de reglas usuales del cálculo integral bajo una transformación (un cambio de variable), es decir, no hay términos de segundo orden. Esta propiedad hace que de una forma natural se use esta integral, por ejemplo, en muchas ecuaciones diferenciales estocásticas. Por el contrario, tiene el problema de que no es una martingala como lo es la *Integral de Itô*, lo que le confiere una gran desventaja computacional frente a esta última.

3.3. Fórmula de Itô

Como pudimos comprobar en el Ejemplo 3.2.12, la definición de la *Integral de Itô* no es muy útil para resolver integrales de este tipo, de hecho es muy difícil dar un resultado explícito para este tipo de integrales. Sin embargo, como ocurre en el caso de las integrales de Riemann aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, existe un procedimiento que nos permite dar una solución explícita a algunas integrales de Itô aunque en este caso no tenemos teoría diferencial, solo teoría de integración. Se trata de una versión de la regla de la cadena para integrales de Itô, llamada *Fórmula de Itô*.

Recordando ese ejemplo, $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$, vemos como la imagen de la *Integral de Itô* $B_t = \int_0^t dB_s$ por la función $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ no es de nuevo una integral de Itô de la forma

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

sino una combinación de una integral ds y una dB_s

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B_s dB_s \ .$$

Pues resulta que si definimos *procesos de Itô* (o *integrales estocásticas*) como sumas de una integral ds y una dB_s, esta familia de integrales son estables.

Antes de ver esto vamos a definir unos conceptos previos:

Definición 3.3.1 *$\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S,T)$ denota la clase de procesos $f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ que satisfacen:*

1. *$(t,\omega) \to f(t,\omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-medible, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,\infty)$*
2. *Existe una familia creciente de σ-álgebras $\mathcal{H}_t$, $t \geq 0$ tal que:*
   - a) *B_t es una martingala con respecto a $\mathcal{H}_t$*
   - b) *f_t es $\mathcal{H}_t$-adaptado*
3. *$P\left[\int_S^T f(s,\omega)^2 ds < \infty\right] = 1$.*

Nota 3.3.2 *Observamos que 2.a) implica que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ y 2.) implica que $E[B_s - B_t|\mathcal{H}_t] = 0$ para todo $s > t$.*
Usamos la notación $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \cup_{T>0}\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0,T)$. Si $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ escribimos $\mathcal{W}(S,T)$ en vez de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}(S,T)$.

Sea B_t un movimiento browniano 1-dimensional. Si $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ vemos que para todo t existen funciones de salto $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ tales que $\int_0^t |f_n - f|^2 ds \to 0$ en probabilidad, es decir, en medida con respecto a P por lo que $\int_0^t f_n(s,\omega)dB_s$ converge en probabilidad a alguna variable aleatoria y el límite solo depende de f, no de la sucesión $\{f_n\}$. Si $f \in W_H$ podemos entonces definir

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s,\omega)dB_s(\omega) \quad \text{(límite en probabilidad).}$$

Ahora ya podemos definir el *proceso de Itô*:

Definición 3.3.3 (Proceso de Itô 1-dimensional) *Sea B_t un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un proceso de Itô (1-dimensional) es un proceso estocástico X_t en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la forma,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s \tag{3.13}$$

donde $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, así que

$$P\left[\int_0^t v^2 ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0\right] = 1\,.$$

También podemos asumir que u es $\mathcal{H}_t$-adaptado y

$$P\left[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0\right] = 1\,.$$

Si X_t es un proceso de Itô de la forma (3.13) también puede ser escrito de la siguiente forma diferencial,

$$dX_t = udt + vdB_t\,. \tag{3.14}$$

Por ejemplo, el Ejemplo 3.2.12 visto anteriormente se puede expresar de la forma

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t\,.$$

Teorema 3.3.4 (Fórmula de Itô 1-dimensional) *Sea X_t un proceso estocástico dado por (3.14) y sea $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, es decir, g es dos veces continua diferenciable en $[0,\infty)$. Entonces*

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es de nuevo un proceso de Itô, y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2\ , \tag{3.15}$$

donde $(dX_t)^2 = (dX_t)\cdot(dX_t)$ se calcula de acuerdo a las reglas

$$dt\cdot dt = dt\cdot dB_t = dB_t\cdot dt = 0\ ,\quad dB_t\cdot dB_t = dt\ . \tag{3.16}$$

Para demostrar la *Fórmula de Itô* vamos a ver primero el teorema de integración por partes:

Teorema 3.3.5 (Integración por partes) *Suponemos $f(s,\omega)$ es continua y de variación acotada con respecto a $s \in [0,t]$ para casi todo ω. Entonces*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s\ .$$

Hay que recalcar que para este resultado es crucial que f sea de variación acotada.

Demostración: Solo vamos a presentar una prueba esquemática.
Primero observamos que si sustituímos (3.14) en la ecuación (3.15) y usamos (3.16) obtenemos la siguiente expresión equivalente,

$$\begin{aligned} g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} v_s^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds \\ + \int_0^t v_s \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s \qquad \text{donde } u_s = u(s, \omega)\,,\; v_s = v(s, \omega)\;. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tenemos que (3.17) es un proceso de Itô en el sentido de la Definición 3.3.3. Podemos asumir que $g, \frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ estan acotados, pues si (3.17) se prueba en este caso obtenemos el caso general por aproximación por funciones $g_n \in C^2$ tales que $g_n, \frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial g_n}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ están acotadas para cada n y convergen uniformemente en subconjuntos compactos de $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ a $g, \frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ respectivamente. Además, podemos asumir que $u(t, \omega)$ y $v(t, \omega)$ son funciones elementales (ver [10], Definición 3.3.1, pág 34). Usando el teorema de Taylor obtenemos,

$$\begin{aligned} g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_j) = g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j \\ + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} (\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j\;, \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, etc. se evalúan en los puntos (t_j, X_{t_j}),

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j\;,\;\; \Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\;,\;\; \Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_j)$$

y $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$ para todo j.

Si $\Delta t_j \to 0$ entonces

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j) \Delta t_j \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds \tag{3.18}$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) \Delta X_j \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s \tag{3.19}$$

Además, como u y v son funciones elementales tenemos,

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta B_j) \\ + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v_j^2 (\Delta B_j)^2\;, \qquad \text{donde } u_j = u(t_j, \omega)\,,\; v_j = v(t_j, \omega)\;. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Los primeros dos términos tienden a 0 cuando $\Delta t_j \to 0$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} & E\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta B_j) \right)^2 \right] \\ & = \sum_j E\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j \right)^2 \right] (\Delta t_j)^3 \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta t_j \to 0\;. \end{aligned}$$

Vamos a argumentar que el último término de (3.20) tiende a

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v^2 ds \quad \text{en } L^2(P)\,, \text{ cuando } \Delta t_j \to 0\ .$$

Para demostrarlo cogemos $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t,\omega)$, $a_j = a(t_j)$ y consideramos

$$E\left[\left(\sum_j a_j(\Delta B_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right)^2\right] = \sum_{i,j} E[a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)]\ .$$

Si $i < j$ entonces $a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$ y $(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$ son independientes así que estos términos desaparecen, análogamente si $i > j$. Así que quedaría,

$$\sum_j E[a_j^2((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2] = \sum_j E[a_j^2] \cdot E[(\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2]$$
$$= \sum_j E[a_j^2] \cdot (3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2)$$
$$= 2\sum_j E[a_j^2] \cdot (\Delta t_j)^2 \quad \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta t_j \to 0\,.$$

En otras palabras, hemos establecido que

$$\sum_j a_j(\Delta B_j)^2 \longrightarrow \int_0^t a(s)ds \qquad \text{en } L^2(P) \text{ cuando } \Delta t_j \to 0\,,$$

que a menudo se expresa de forma abreviada por la fórmula

$$(dB_t)^2 = dt\,.$$

El argumento anterior tambien prueba que $\sum R_j \longrightarrow 0$ cuando $\Delta t_j \to 0$ y con esto hemos completado la demostración de la *Fórmula de Itô.*

Observación 3.3.6 *Es suficiente que $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times U)$ si $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto tal que $X_t(\omega) \in U$ para todo $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Es más, es suficiente que $g(t,x)$ sea C^1 con respecto a t y C^2 con respecto a x.*

Vamos a exponer dos ejemplos para ver más claramente estas aplicaciones:

Ejemplo 3.3.7 *Sea*

$$I = \int_0^t B_s dB_s\,.$$

Cogemos $X_t = B_t$ y $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. Entonces,

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2\,.$$

Aplicando la fórmula de Itô,

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt\,.$$

Por tanto

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt\,.$$

En otras palabras,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\,,$$

lo que ya habíamos visto en el Ejemplo 3.2.12.

Ejemplo 3.3.8 *Analizaremos ahora la integral*

$$\int_0^t s dB_s\,.$$

Del cálculo clásico parece razonable que debe aparecer el término tB_t, asi que cogemos

$$g(t,x) = tx$$

y

$$Y_t = g(t, B_t) = tB_t\,.$$

Aplicando la fórmula de Itô,

$$dY_t = B_t dt + t dB_t + 0$$

es decir,

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t\,.$$

Lo que tambien podemos expresar como,

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

o,

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds\,.$$

Esta es la fórmula clásica de la integración por partes (téngase en cuenta que $B_0 = 0$).

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En este capítulo vamos a analizar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t\ , \qquad b(t,x) \in \mathbb{R}\,,\ \ \sigma(t,x) \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

donde W_t representa el ruido blanco 1-dimensional. Como hemos visto en el capítulo anterior, la interpretación de Itô de la ecuación (4.1) es que X_t verifique la ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_t)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

o en forma diferencial,

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t\,. \tag{4.2}$$

Por lo tanto, de (4.1) a (4.2) solo hemos reemplazado formalmente el ruido blanco W_t por $\frac{dB_t}{dt}$ en (4.1) y lo hemos multiplicado por dt.

Es natural preguntarse cómo resolver una ecuación de este tipo y la *Fórmula de Itô* nos va a ayudar mucho en este menester, como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.0.9 *Consideramos el modelo de crecimiento poblacional*

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t\,, \qquad N_0 \text{ dado}$$

donde $a_t = r_t + \alpha W_t$, W_t =ruido blanco, α =constante.

Asumimos que $r_t = r$ =contante. Por la interpretación de Itô (4.2), esta ecuación es equivalente a

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \tag{4.3}$$

o

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t\,.$$

Por tanto,

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t \qquad (B_0 = 0)\,. \tag{4.4}$$

Para evaluar la integral de la parte izquierda de la igualdad anterior usamos convenientemente la fórmula de Itô para la función

$$g(t,x) = \ln x\,; \qquad x > 0$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t}\,dN_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N_t^2}\right)(dN_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2}\,\alpha^2 N_t^2 dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt\,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

así que de (4.4) concluímos que

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t$$

o

$$N_t = N_0 \cdot e^{((r-\frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t)}$$

Por comparación, la interpretación de Stratonovich de (4.3),

$$d\overline{N}_t = r\overline{N}_t dt + \alpha \overline{N}_t \circ dB_t$$

habría tenido la solución

$$\overline{N}_t = N_0 \cdot e^{(rt + \alpha B_t)}\,.$$

Ambas soluciones N_t y $\overline{N}_t$ son procesos del tipo

$$X_t = X_0 \cdot e^{(\mu t + \alpha B_t)} \qquad (\mu, \alpha \text{ constantes})\,.$$

Estos procesos son llamados ***movimientos brownianos geométricos*** *y son muy importantes para modelar precios aleatorios en economía.*

4.1. Existencia y Unicidad de soluciones

Ahora que ya vimos como se resolverían algunas Ecuaciones Diferenciales Estocásticas es natural preguntarse, ¿existe algún resultado que nos garantice la existencia y unicidad de tales soluciones? La respuesta en sí, mediente los teoremas de existencia y unicidad que vamos a ver.

Teorema 4.1.1 *Sea $T > 0$ y $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^{n\times m}$ funciones continuas medibles tales que*

$$\begin{aligned} &|b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y| \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq t \leq T \quad x,y \in \mathbb{R}^n \\ &|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \hat{L}|x-y| \end{aligned}$$

para algunas constantes apropiadas $L, \hat{L}$ y

$$
\begin{aligned}
&|b(t,x)| \leq C(1+|x|) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq t \leq T \quad x \in \mathbb{R}^n \\
&|\sigma(t,x)| \leq \hat{C}(1+|x|)
\end{aligned}
$$

para algunas contantes apropiadas $C, \hat{C}$ (donde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$ y $|\cdot|$ denota la norma euclídea). Sea Z una variable aleatoria independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ generada por $B_s(\cdot), s \geq 0$ y tal que

$$E[|Z|^2] < \infty\,, \qquad Z = Z(\omega)\,.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t\;, \qquad 0 \leq t \leq T\;,\;\; X_0 = Z$$

tiene una única solución t-continua, $X_t(\omega)$, siendo esta adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t^Z$ generada por Z y $B_s(\cdot)$ con $s \leq t$, y cumpliendo

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty\;.$$

Demostración:

<u>Existencia:</u>

1º) Como en el caso determinista, la existencia de una solución será probada utilizando una sucesión recurrente,

$$X^{(0)}(t) = Z$$

$$X^{(k+1)}(t) = Z + \textstyle\int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})dB_s\,.$$

Veamos que $X^{(k)}$ está bien definida y que $X^{(k)} \in L^2([0,T]\times\Omega)$. Usando inducción, para $k=0$ es trivial pues $Z \in L^2([0,T]\times\Omega)$. Supongamos que se cumple para k, como $X^{(k)} \in L^2([0,T]\times\Omega)$ y $|\sigma(t, X_t^{(k)})|^2 \leq \hat{C}^2(1 + |X_t^{(k)}|)^2$ entonces $\sigma(t, X_t^{(k)}) \in L^2([0,T]\times\Omega)$. Análogamente, como tambien
$X^{(k)} \in L([0,T]\times\Omega)$ y $|b(t, X_t^{(k)})| \leq C(1 + |X_t^{(k)}|)$ entonces
$b(t, X_t^{(k)}) \in L([0,T]\times\Omega)$. Por tanto, $X_t^{(k+1)}$ está bien definido.

Para todo $t \in [0,T]$, veamos que $X_t^{(k+1)} \in L^2(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
E\left(|X_t^{(k)}|^2\right) \leq & 3E\left(|Z|^2\right) + 3E\left(|\int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds|^2\right) \\
& + 3E\left(\int_0^t \sigma(s, X_x^{(k)})dB_s|^2\right)\,.
\end{aligned}
$$

Estimando las desigualdades,

$$
\begin{aligned}
E\left(|\int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds|^2\right) &\leq E\left(T\int_0^T |b(s, X_s^{(k)})|^2 ds\right) \\
&\leq TC^2 E\left(\int_0^T (1 + |X_s^{(k)}|)^2 ds\right) \\
&\leq 2TC^2(T + ||X^{(k)}||^2_{L^2([0,T]\times\Omega)})
\end{aligned}
$$

y, usando la Isometría de Itô,

$$
\begin{aligned}
E\left(|\int_0^t \sigma(s, X_x^{(k)})dB_s|^2\right) &\leq E\left(\int_0^t |\sigma(s, X_s^{(k)})|^2 ds\right) \\
&\leq \hat{C}^2 E\left(\int_0^T (1 + |X_x^{(k)}|^2 ds\right) \\
&\leq 2\hat{C}^2 (T + ||X^{(k)}||^2_{L^2([0,T]\times\Omega)}) \,.
\end{aligned}
$$

Por tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$
E\left(|X_t^{(k+1)}|^2\right) \leq \underbrace{3E(|Z|^2) + 3(2TC^2 + 2\hat{C}^2)(T + ||X^{(k)}||^2_{L^2([0,T]\times\Omega)})}_{D} \,.
$$

Integrando con respecto a t, conluímos que $X^{(k+1)} \in L^2([0,T] \times \ \Omega)$ como queríamos ver, es decir,

$$
E \int_0^T |X_t^{(k+1)}|^2 dt \leq DT < \infty \,.
$$

2º) Veamos que $\left\{X^{(k)}\right\}$ converge a la solución de la ecuación estocástica. Empecemos probando que,

$$
d^k(t) := E\left(|X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)}|^2\right) \leq \frac{(Mt)^k}{k!} \qquad \forall k \geq 1
$$

donde $M = M(C, \hat{C}, L, \hat{L}, T, E|Z|^2)$. Usamos nuevamente inducción. Para $k = 1$,

$$
\begin{aligned}
d^1(t) &= E\left(|x_t^{(1)} - Z|^2\right) \\
&\leq 2E\left(|\int_0^t b(s, Z)ds|^2\right) + 2E\left(|\int_0^t \sigma(s, Z)dB_s|^2\right) \\
&\leq 2TE\left(\int_0^t |b(s, Z)|^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t |\sigma(s, Z)|^2 ds\right) \\
&\leq (2TC^2 + 2\hat{C}^2)E\left(\int_0^t (1 + |Z|^2)ds\right) \leq 2(TC^2 + \hat{C}^2)(1 + E[|Z|^2])t \\
&= Mt \,.
\end{aligned}
$$

Suponiendo que se cumple para k entonces,

$$\begin{aligned}
d^{k+1}(t) &= E\left(|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}|^2\right) \\
&\leq 2E\left(|\int_0^t b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})ds|^2\right) \\
&\quad + 2E\left(|\int_0^t \sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s^{(k-1)})dB_s|^2\right) \\
&\leq 2TE\left(\int_0^t |b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})|^2 ds\right) \\
&\quad + 2E\left(\int_0^t |\sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s^{(k-1)})|^2 ds\right) \\
&\leq (2TL^2 + 2\hat{L}^2)E\left(\int_0^t |X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}|^2 ds\right) \\
&\leq 2(TL^2 + \hat{L}^2)\int_0^t \frac{M^k s^k}{k!} ds \\
&\leq \frac{M^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}\,.
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

3º) Gracias a esta acotación tenemos que, $\forall\ 0 \leq t \leq T$, $\left\{X_t^{(k)}\right\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Por tanto, $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso estocástico. Ahora vamos a ver que X_t tiene una modificación $\tilde{X}_t$ tal que $X_t^{(k)} \to \tilde{X}_t$ uniformemente en $[0,T]$ casi seguro. Para ello probaremos que $X_t^{(k)}$ es uniformemente de Cauchy casi seguro de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
|X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)}|^2 \leq & 2TL^2 \int_0^T |X_s^{(k-1)} - X_s^{(k-2)}|^2 ds \\
& + 2|\int_0^t \sigma(s,X_s^{(k-1)}) - \sigma(s,X_s^{(k-2)})dB_s|^2\,.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E\left(\max_{0\leq t\leq T}|X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)}|^2\right) \leq & 2TL^2 E\left(\int_0^T |X_s^{(k-1)} - X_s^{(k-2)}|^2 ds\right) + \\
& + 2E\left(\max_{0\leq t\leq T}|\int_0^t \sigma(s,X_s^{(k-1)}) - \sigma(s,X_s^{(k-2)})dB_s|^2\right)\,.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad martingala tenemos que,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\max_{0\le t\le T}|\int_0^t \sigma(s,X_s^{(k-1)})-\sigma(s,X_s^{(k-2)})dB_s|^2\right)\\
&\le \sum_{i=1}^{n} E\left(\max_{0\le t\le T}|\underbrace{\int_0^t \sigma_i(s,X_s^{(k-1)})-\sigma_i(s,X_s^{(k-2)})dB_s}_{martingala}|^2\right)\\
&\le \sum_{i=1} n4E\left(|\int_0^T \sigma_i(s,X_s^{(k-1)})-\sigma_i(s,X_s^{(k-2)})dB_s|^2\right)\\
&= 4E\left(\int_0^T \sigma(s,X_s^{(k-1)})-\sigma(s,X_s^{(k-2)})dB_s|^2\right)\\
&\le 4\hat{L}^2E\left(\int_0^T |X_s^{(k-1)}-X_s^{(k-2)}|^2ds\right)\ .
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\max_{0\le t\le T}|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}|^2\right)\le(2TL^2+8\hat{L}^2)E\left(\int_0^T |X_s^{(k-1)}-X_s^{(k-2)}|^2ds\right)\\
&\le(2TL^2+8\hat{L}^2)\int_0^T\frac{M^{k-1}s^{k-1}}{(k-1)!}ds\le C\frac{M^kT^k}{k!}\qquad ,C=C(T,L,\hat{L})\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
&P\left(\max_{0\le t\le T}|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}|\ge\frac{1}{k^2}\right)=P\left(|\max_{0\le t\le T}|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}|^2\ge\frac{1}{k^4}\right)\\
&\le k^4E\left(\max_{0\le t\le T}|X_t^{(k)}-X_t^{(k+1)}|^2\right)\le C\frac{k^4M^kT^k}{k!}\ ,
\end{aligned}
$$

y como $\sum_{k=1}\infty\frac{k^4M^kT^k}{k!}<\infty$ concluímos por el Lema de Borel Cantelli que para casi todo ω

$$
\max_{0\le t\le T}|X_t^{(k)}-X_t^{(k-1)}|<\frac{1}{k^2}\qquad \text{para } k\ge k_0(\omega)\,.
$$

Luego, $X_t^{(k)}\to\tilde{X}_t$ uniformemente en $[0,T]$ casi seguro y por tanto $\tilde{X}_t$ tiene trayectorias continuas casi seguro. Como $\forall\ 0\le t\le T\ ,\ \ X_t^{(k)}\to\tilde{X}_t$ casi seguro tenemos que $X_t=\tilde{X}_t$ casi seguro como queríamos ver.

Supongamos adecuadamente que $X_t=\tilde{X}_t$. Entonces X_t verifica ser continuo y por tanto progresivamente medible. Como $X_t^{(k)}\to X_t$ casi seguro $\forall\ t\in[0,t]$ concluímos que $X^{(k)}(t,\omega)\to X(t,\omega)$ casi seguro en $L^2(\lambda\times P)$, siendo λ la medida de Lebesgue en $[0,T]$.

4º)Veamos ahora que $X\in L^2([0,T]\times\Omega)$. Para ello vamos a ver que $X^{(k)}\to X$ en $L^2([0,T]\times\Omega)$:

$$
||X^{(k)}-X^{(k-1)}||_{L^2([0,T]\times\Omega)}=E\left(\int_0^T|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}|^2ds\right)\le\int_0^t\frac{M^kT^{k+1}}{(k+1)!}\,.
$$

Tenemos entonces que $\left\{X^{(k)}\right\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2([0,T]\times\Omega)$. Sea $\tilde{X}$ su límite en $L^2([0,T]\times\Omega)$, como $X^{(k)}(t,\omega)\to X(t,\omega)$ casi seguro en $L^2(\lambda\times P)$ concluímos que $X(t,\omega)=\tilde{X}(t,\omega)$ casi seguro en $L^2(\lambda\times P)$.

5º) Veamos que X_t verifica la ecuación diferencial estocástica. Sea

$$Y_t := Z + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s\,.$$

Y_t está bien definida pues $X\in L^2([0,T]\times\Omega)$, $|\sigma(t,X_t)|^2\le\tilde{C}^2(1+|X_t|^2)$ y $X\in L([0,T]\times\Omega)$, $|b(t,X_t)|\le C(1+|X_t|)$.
Veamos que $X_t^{(k+1)}\to Y_t$ en $L^2(\Omega)\quad\forall\ 0\le t\le T$:

$$\begin{aligned}
E\left(|Y_t - X_t^{(k+1)}|^2\right) &\le 2E\left(\int_0^t b(s,X_s)-b(s,X_s^{(k)})|^2\right)\\
&\quad + 2E\left(|\int_0^t \sigma(s,X)-\sigma(s,X_s^{(k)})dB_s|^2\right)\\
&\le (2TL^2+2\hat{L}^2)E\left(\int_0^t |X_s - X_s^{(k)}|^2 ds\right)\\
&\le 2(TL^2+\hat{L}^2)||X-X^{(k)}||_{L^2([0,T]\times\Omega)}\longrightarrow 0\ .
\end{aligned}$$

Como $X_t^{(k+1)}\longrightarrow X_t$ en $L^2(\Omega)$ tenemos que $X_t=Y_t$ casi seguro $\forall\ 0\le t\le T$, o sea que,

$$X_t = Z + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s \qquad \text{casi seguro } \forall\ 0\le t\le T$$

como queríamos demostrar.

__Unicidad:__ Supongamos $X,\tilde{X}\in L^2([0,T]\times\Omega)$ dos soluciones de una misma ecuación diferencial estocástica. Entonces,

$$X_t - \tilde{X}_t = \int_0^t b(s,X_s)-b(s,\tilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)-\sigma(s,\tilde{X}_s)dB_s$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E\left(|X_t-\tilde{X}_t|^2\right) &\le 2E\left(|\int_0^t b(s,X_s)-b(s,\tilde{X}_s)ds|^2\right)\\
&\quad + 2E\left(|\int_0^t \sigma(s,X_s)-\sigma(s,\tilde{X}_s)dB_s|^2\right)\\
&\le (2TL^2+2\hat{L}^2)\int_0^t E(|X_s-\tilde{X}_s|^2)ds\ .
\end{aligned}$$

Tomando $\phi(t):=E\left(|X_t-\tilde{X}_t|^2\right)$ y $C:=2TL^2+2\hat{L}^2$ tenemos que $\phi(t)\le C\int_0^t\phi(s)ds$. Por el Lema de Gronwall tenemos que $\phi\equiv 0$, entonces $\tilde{X}$ es una modificación de X pero como ambos procesos son continuos casi seguro, concluímos que $\tilde{X}$ y X son indistinguibles, como queríamos demostrar.

Capítulo 5

Aplicación a la Matemática Financiera

5.1. Introducción histórica

Figura 5.1: A la izquierda Fischer Black (1938-1995). En el centro: Myron Scholes (1941). A la derecha: Robert Merton (1941).

Desde que las civilizaciones han tenido intereses económicos y sociológicos se han preocupado por el conocimiento y desarrollo teórico acerca de cuestiones financieras, apareciendo documentado en fuentes como el *Código de Hammurabi* y el *Antiguo Testamento*. A partir de lo que conocemos como banca moderna, la cual tuvo sus inicios en Italia a finales del periodo medieval y principios del Renacimiento (s.XV), se desarrollan los aspectos básicos de las finanzas aunque los elementos matemáticos involucrados eran todavía muy rudimentarios. En 1973 Fischer Black y Myron Scholes publican un artículo que se conoce popularmente como el acta de nacimiento de la teoría moderna de las finanzas matematicas ([2]), donde incluyen una fórmula explícita para la valuación de opciones de compra europeas. Gracias a sus aportaciones, junto con Merton, al Cálculo Estocástico elemental, numerosos matemáticos y economistas comienzan a realizar un notable desarrollo matemático en este ámbito caracterizado por su rapidez, profundidad y sofisticación de los conceptos matemáticos empleados. En los años noventa la profundidad matemática en las finanzas teóricas da otro salto cuantitativo ubicándose al nivel de la investigación matemática más demandante técnicamente y fue cuando numeroso matemáticos de los más reconocidos, especialmente probabilistas y analistas funcionales, se comenzaron a dedicar a la investigación de lo que denominamos actualmente Finanzas Matemáticas. En la última década las Finanzas Matemáticas no solo utilizan matemática avanzada sino que han influído en esta y retroalimentado, renovando el uso y consideración de importantes áreas de la teoría de la probabilidad y procesos estocásticos, e incluso han promovido y orientado avances como en el caso de la teoría del movimiento browniano.

En conclusión, si bien es discutible el correcto modelado matemático y algunas aplicaciones de la matemática en finanzas, dudas que surgen en tiempos de receso económico como la crisis financiera de 2008-2010, es indiscutible que la Matemática Financiera ya forma un área sólida dentro de la matemática y se encuentra en plena evolución.

5.2. Conceptos financieros

En este apartado vamos a explicar terminología básica de finanzas que requeriremos en el siguiente apartado para exponer el modelo Black-Scholes.

Definición 5.2.1 (Activo) *Un activo financiero es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor, es decir, es el derecho sobre los activos reales del emisor y el efectivo que generen. Pueden ser emitidas por cualquier unidad económica (empresa, Gobierno, etc.). Al contrario que los activos tangibles (una vehículo, una vivienda...), los activos financieros no suelen tener un valor físico. El comprador de un activo financiero posee un derecho (un activo) y el vendedor una oblicación (un pasivo).*

Tiene tres características fundamentales:

- ***Rentabilidad**: Cuanto más interés aporta el activo mayor es su rentabilidad.*
- ***Riesgo**: Probabilidad de que el emisor no cumpla sus compromisos. Cuanto mayor riesgo, mayor será su rentabilidad.*
- ***Liquidez**: Capacidad de convertir el activo en dinero sin sufrir pérdidas.*

Se consideran dos procesos estocásticos que representan el precio por unidad de dos activos financieros:

- **Activo libre de riesgo**. A este tipo de activos se les denomina *bonos* y sería, por ejemplo, una cuenta bancaria. Una inversión de β_0 en bonos produce una cantidad
$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}$$
en el tiempo t. Por tanto, el capital inicial β_0 ha sido continuamente acrecentado por una constante $r > 0$ que representa el tipo de interés continuo. Esto es una idealización ya que el tipo de interés también cambia con el tiempo.

  Observamos que β satisface la ecuación integral determinista
$$\beta_t = \beta_0 + r \int_0^t \beta_s ds \ , \tag{5.1}$$

es decir, la dinámica de este proceso es

$$d\beta_t = r\beta_t dt\,.$$

- **Activo sujeto a riesgo sistemático**. A este tipo de activos se le denomina *acciones*. Asumimos que el precio X_t de la acción en el tiempo t es dado por el movimiento browniano geométrico de la forma

  $$X_t = f(t, B_t) = X_0\, e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}\ , \qquad (5.2)$$

  donde, como hemos visto antes, $B = (B_t,\, t \geq 0)$ representa el movimiento browniano y X_0 asumimos que es independiente de B. Por tanto, X es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

  $$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma\int_0^t X_s dB_s\ . \qquad (5.3)$$

  Esta evolución de su precio tambien lo podemos escribir formalmente en forma diferencial como

  $$dX_t = c\, X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t\ . \qquad (5.4)$$

  Si interpretamos esta ecuación de una forma laxa, tenemos que en $[t, t+dt]$

  $$X_{t+dt} - X_t = c\, X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t$$

  o equivalentemente,

  $$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} = cdt + \sigma dB_t\ .$$

  La cantidad que representa la parte izquierda de la igualdad es el rendimiento del activo en el periodo $[t, t+dt]$. Esto nos dice que hay una tendencia lineal $c\,dt$ que es perturbada por un término de ruido estocástico σdB_t. La constante $c > 0$ representa la tasa de beneficio instantánea esperada y la constante $\sigma > 0$ es la desviación estándar local de la tasa de beneficio, llamada volatilidad.

  A la vista de (5.2) observamos que cuanto mayor sea la volatilidad σ, mayores son las fluctuaciones de X_t. Por tanto, σ es una medida del riesgo de la acción. Se cree que el modelo (5.3) es una razonable aproximación al proceso del precio real. Si olvidamos por un momento el término σ, es decir, asumimos $\sigma = 0$, la ecuación (5.3) es una ecuación diferencial determinista que tiene una solución conocida $X_t = X_0\, e^{ct}$. Por tanto, si $\sigma > 0$ debemos esperar obtener una función exponencial con perturbación aleatoria, es decir, el movimiento browniano geométrico (5.2).

  Los economistas creen en el crecimiento exponencial por lo que están satisfechos con este modelo.

Definición 5.2.2 (Portafolio) *Un portafolio es la cantidad a_t de acciones y b_t de bonos que tiene un agente en cada instante t. Asumimos que a_t y b_t son procesos estocásticos adaptados al movimiento browniano y al par*

$$(a_t, b_t) \quad t \in [0, T]$$

se le llama estrategia comercial.

El valor de un portafolio en el instante t es

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t\ .$$

Un valor negativo de a_t significa venta corta (*short sale*) de la acción, es decir, se vende la acción en el tiempo t. Sin embargo, un valor negativo de b_t significa que se pide dinero prestado a una tasa de interés del riesgo de bono r . En realidad, se debería pagar costes de transacción por estas operaciones pero los obviamos por simplicidad. Además, asumimos que a_t y b_t no son acotados, es decir, se dispondría de una cantidad infinita de capital lo que es claramente una simplificación para hacer los problemas matemáticos más sencillos. Finalmente, suponemos que no se gasta dinero en otros objetivos, es decir, el portafolio no se hace más pequeño por consumo.

Otra consideración que vamos a hacer acerca de nuestro portafolio es que es *autofinanciante*, lo que significa que la variación de capital es producto únicamente de las variaciones en los precios de los activos X_t y β_t. La compra de un nuevo activo se financia con la venta de activos de la propia cartera y además, no hay inyección externa ni retirada de dinero. Matemáticamente, esta condición de que el portafolio sea autofinanciante se formula en términos diferenciales,

$$dV_t = d(a_t X_t + b_t \beta_t) = a_t dX_t + b_t d\beta_t$$

lo cual interpretamos en el sentido de Itô como,

$$V_t - V_0 = \int_0^t d(a_s X_s + b_s \beta_s) = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s \, .$$

Las integrales del lado derecho tienen sentido si se sustituye $d\beta_s$ por $r\beta_s ds$ (ver (5.1)) y dX_s por $cX_s ds + \sigma X_s dB_s$ (ver (5.3)). Por tanto, el valor V_t del portafolio al tiempo t es igual a la inversión inicial V_0 más el rendimiento de capital en bonos y acciones hasta el tiempo t.

Definición 5.2.3 (Opción financiera) *Una opción financiera es un contrato mediante el cual el comprador de la opción adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente al vendedor de la misma.*

Nota 5.2.4 *Un activo subyacente es un activo financiero sobre el que recaen contratos financieros.*

El precio al que se puede ejercer el derecho de compra o venta del activo se denomina *precio de ejercicio* o *strike price*. Este derecho se puede ejercer hasta una fecha fijada llamada *fecha de vencimiento de la opción* o *tiempo de maduración*. El contrato se formaliza mediante el pago, del comprador al vendedor, de una prima o precio de la opción. Durante el periodo de vigencia del contrato el vendedor tiene la obligación de vender o comprar su derecho y, si el comprador no ejerce su derecho de compra o venta, el vendedor de la opción se queda con el importe de la prima.

En función del derecho que otorgan existen dos tipos de opciones:

- **Opción de compra (call)**: El comprador adquiere el derecho, pero nunca la obligación, de compar un activo subyacente a un precio predeterminado, el precio de ejercicio, en un periodo de tiempo no superior a una fecha fijada con anterioridad. El vendedor de la opción call tiene la obligación de vender el activo subyacente, siempre y cuando se ejerza la opción.

- **Opción de venta (put)**: El comprador adquiere el derecho, pero nunca la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado, el precio de ejercicio, en un periodo de tiempo no superior a una fecha fijada con anterioridad. El vendedor de la opción put tiene la obligación de comprar el activo subyaciente, siempre y cuando se ejerza la opción.

Ahora vamos a ver los dos grandes tipos de opciones en función del periodo de ejercicio pues, aunque existen más, estas son las más recurrentes.

- **Opción europea:** Una opción de compra (call) europea con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T sobre un activo subyacente X, es un contrato que otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar una unidad del activo subyacente al vendedor en el intante de maduración T, y únicamente en ese instante. El precio del ejercicio K y la fecha de vencimiento T están fijadas en el momento que se establece el contrato, denominado instante $t = 0$. Una opción de venta (put) europea es un contrato en los mismos términos que el anterior, dando a su comprador el derecho a vender una unidad del activo subyacente al precio de ejercicio predeterminado.

  Está claro que el comprador de la opción debe pagar un precio positivo al vendedor por adquirir este derecho, ya que en el momento de ejercer la opción puede obtener beneficios pero nunca pérdidas. Así, si en el instante de vencimiento el precio en el mercado del activo subyacente, X_T, es menor o igual que el precio del ejercicio, el comprador simplemente no ejercerá su derecho a comprar un activo a un precio más caro que en el mercado. Sin embargo, si X_T es mayor que el precio de ejercicio, el poseedor de la opción comprará el activo por debajo de su precio de mercado, obteniendo un beneficio de $X_T - K$. Por tanto, matemáticamente, el beneficio nunca negativo que obtiene el comprador de una opción call europea en el instante de vencimiento viene dada por,

  $$\phi_1(X_T) = \text{máx}\{X_T - K, 0\} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } X_T \leq K \\ X_T - K\,, & \text{si } X_T > K\,. \end{cases}$$

  De forma análoga, el beneficio nunca negativo que obtiene el comprador de una opción put europea en el instante de vencimiento viene dado por,

  $$\phi_2(X_T) = \text{máx}\{K - X_T, 0\} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } X_T \geq K \\ K - X_T\,, & \text{si } X_T < K\,. \end{cases}$$

  Algunos ejemplos en mercados organizados donde se aplique este tipo de opciones podrían ser las opciones sobre los índices IBEX 35 y Eurostoxx 50.

  Por tanto, existen dos tipos de contratos con dos partes cada uno, lo que da lugar a cuatro situaciones distintas. Para facilitar el entendimiento de esto, vamos a verlo de una forma más esquemática en las siguientes tablas:

	Comprador	Vendedor
Derecho y Obligación	Derecho	Obligación
Expectativas del Inversor	Alcistas	Bajistas
Beneficios	Ilimitados	Prima
Pérdidas	Prima	Ilimitadas

Cuadro 5.1: Opción Call Europea

	Comprador	Vendedor
Derecho y Obligación	Derecho	Obligación
Expectativas del Inversor	Bajistas	Alcistas
Beneficios	Ilimitados	Prima
Pérdidas	Prima	Ilimitadas

Cuadro 5.2: Opción Put Europea

- **Opción americana:** En este caso el derecho a comprar o vender la unidad del activo subyacente que adquiere el comprador de la opción call o put americana la puede ejercer en cualquier instante desde el inicial, $t = 0$, hasta la fecha de vencimiento, T. El precio de ejercicio sigue siendo fijo y la referencia para la liquidación del contrato sigue siendo tambien la cotización del activo subyacente en el mercado. Las opciones sobre acciones negociadas en mercados organizados suelen ser de tipo americano como, por ejemplo, las que se contratan en MEFF.

Haciendo una analogía simplona, podemos ver esto como un juego, donde la recompensa es el beneficio de la opción y el propietario de la opción debe pagar una tasa (el precio de la opción) por jugar al juego.

Definición 5.2.5 (Cartera de arbitraje) *Una cartera autofinanciada se dice que es una cartera de arbitraje si su valor asociado es no negativo verificando,*

$$V_0 = 0 \quad y \; P(V_T > 0) > 0 \,.$$

Se puede interpretar como una máquina determinista de hacer dinero, ya que es una posibilidad de hacer una cantidad positiva de dinero sin asumir ningún riesgo. Así, una posibilidad de arbitraje es un caso de malformación de precios en el mercado y una hipótesis usual que se hace sobre el mercado es que es eficiente en el sentido de que no admite posibilidades de arbitraje. Se dice que un modelo está libre de arbitraje si no existen carteras de arbitraje para cualquier $T > 0$.

El arbitraje, por tanto, es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados (situados en diferentes países o diferentes tipos de mercado) sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, obteniendo una ganancia libre de riesgo. Además, los arbitrajistas influyen a regular los mercados, ya que al vender en el mercado con mayor precio generan un aumento de la oferta que hace que el precio baje y, por el contrario, al comprar en el mercado de menor precio general un aumento de la demanda que hace aumentar su precio (ley de la oferta y la demanda).

Para entenderlo más fácilmente, vamos a poner un ejemplo donde se ilustra perfectamente.

Ejemplo 5.2.6 *Si el precio del euro/real en el mercado de Madrid es de 4'6 reales por euro y en Brasilia se paga a 4,3 reales por euro, suponiendo que pudiéramos intercambiar la operación a la vez en las dos ciudades seguiríamos la siguiente estrategia. Primero compraríamos reales en España, donde por 1000€ obtendríamos 4600R$ y después venderíamos esos reales en Brasilia obteniendo 1069,76€, por lo que hubiéramos obtenido un beneficio de 69,76€ sin asumir ningún tipo de riesgo.*

Nota 5.2.7 *En realidad, el mercado de divisas es de los más líquidos del mundo y por tanto, es prácticamente imposible hacer arbitraje en él. El ejemplo que acabamos de dar es una suposición exagerada para facilitar la comprensión del concepto.*

A partir de ahora nos vamos a restringir únicamente a la opción call europea, ya que en este caso podemos obtener soluciones explícitas y fórmulas para los problemas de precios.

Llegados a este punto se nos plantean dos problemas fundamentales:

- Determinar un precio justo para el precio compra de la opción, es decir, el precio a pagar para obtener el derecho a compra o venta de algun activo.
- Cubrir el riesgo financiero que asume el vendedor para una transacción en un tiempo T futuro.

Black, Scholes y Merton definieron este valor asumiento que la gestión del portafolio seguía una estrategia de autofinanciación con el objetivo de obtener un beneficio igual al que obtendríamos si la opción ya hubiese sido comprada. Además dijeron que si el precio de la opción fuera otro diferente al valor racional deducido habría arbitraje, es decir, existiría la posibilidad de obtener una cantidad infinita de beneficios sin asumir ningún riesgo.

5.3. Formulación Matemática del problema Precio Opción

Suponemos que queremos encontrar una estrategia de autofinanciamiento (a_t, b_t) y un proceso de valores asociado V_t tal que

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t = u(T-t, X_t)\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

para alguna función determinista infinitamente diferenciable $u(t,x)$. Esto claramente es una restricción, pues estamos asumiendo que el valor del portafolio V_t depende de forma infinitamente diferenciable de t y X_t. Lo que debemos encontrar es cuál es esa función $u(t,x)$. Ya que el valor V_T del portafolio al tiempo de maduración T será $\phi_1(X_T)$, tenemos la condición final

$$V_T = u(0, X_T) = \phi_1(X_T) = \max\{0, X_T - K\} \, . \tag{5.5}$$

Vamos a aplicar la formula de Itô al proceso de valores $V_t = u(T-t, X_t)$. Escribimos $f(t,x) = u(T-t,x)$ y por tanto,

$$f_1(t,x) = -u_1(T-t,x)\,, \qquad f_2(t,x) = u_2(T-t,x)\,, \qquad f_{22}(t,x) = u_{22}(T-t,x)\,.$$

Además, recordemos que X satisface la ecuación integral de Itô

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s\,.$$

Así que, aplicando la expresión equivalente de la fórmula de Itô (3.17) tenemos

$$\begin{aligned}
V_t - V_0 &= f(t, X_t) - f(0, X_0) \\
&= \int_0^t [f_1(s, X_s) + cX_s f_2(s, X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 f_{22}(s, X_s)]ds \\
&+ \int_0^t [\sigma X_s f_2(s, X_s)]dB_s \\
&= \int_0^t [-u_1(T-s, X_s) + cX_s u_2(T-s, X_s) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 u_{22}(T-s, X_s)]ds \\
&+ \int_0^t [\sigma X_s u_2(T-s, X_s)]dB_s\,.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Por otra parte, (a_t, b_t) es autofinanciada, es decir,

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s\,. \tag{5.7}$$

Además, $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$ entonces

$$d\beta_t = r\beta_0 e^{rt}dt = r\beta_t dt\,,$$

y como $V_t = a_t X_t + b_t\beta_t$ se obtiene

$$b_t = \frac{V_t - a_t X_t}{\beta_t}\,. \tag{5.8}$$

Combinando (5.7) y (5.8) junto con (5.4) obtenemos otra expresion para $V_t - V_0$ que es,

$$\begin{aligned}
V_t - V_0 &= \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t \frac{V_s - a_s X_s}{\beta_s} r\beta_s ds \\
&= \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t r(V_s - a_s X_s)ds \\
&= \int_0^t c a_s X_s ds + \int_0^t \sigma a_s X_s dB_s + \int_0^t r(V_s - a_s X_s)ds \\
&= \int_0^t [(c-r)a_s X_s + rV_s]ds + \int_0^t \sigma a_s X_s\, dB_s\,.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Comparando (5.6) y (5.9), como los coeficientes de las funciones de los procesos de Itô tienen que ser iguales, podemos identificar formalmente los integrandos de las integrales de Itô y Riemann de tal manera que

$$\begin{aligned} a_t =& u_2(T-t,x) \\ (c-r)a_tX_t + ru(T-t,X_t) =& (c-r)u_2(T-t,X_t)X_t + ru(T-t,X_t) \\ =& -u_1(T-t,X_t) + cX_tu_2(T-t,X_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2X_t^2u_{22}(T-t,X_t)\,. \end{aligned}$$

Como X_t puede tomar cualquier valor positivo, podemos escribir la última igualdad como una ecuación diferencial parcial de la forma

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{22}(t,x) + rxu_2(t,x) - ru(t,x) \quad x>0 \;\; t\in[0,T]\,. \tag{5.10}$$

Por último, recordando nuestra condición final (5.5) tenemos la condición final determinista

$$u(0,x) = \text{máx}\,\{x-K,0\} \quad x>0\,. \tag{5.11}$$

5.4. Fórmula de Black-Scholes

En general, aunque sabemos que existe una única solución para las ecuaciones diferenciales parciales, es díficil resolverlas explícitamente. Por ello, resulta sorprendente poder dar una solución a la ecuación (5.10) y de ahí la popularidad del planteamiento ideado por Black, Scholes y Merton. La ecuación (5.10) con la condicion final (5.11) ha sido estudiada en profundidad (ver [14], pág.174) y tiene la solución explícita

$$u(t,x) = x\phi(g(t,x)) - Ke^{-rt}\phi(h(t,x))\,, \tag{5.12}$$

donde

$$g(t,x) = \frac{\ln(x/K) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma t^{1/2}}\,,$$

$$h(t,x) = g(t,x) - \sigma t^{1/2}\,,$$

y

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,, \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

es la función de distribución normal estándar.

Por tanto, resolviendo el problema planteado de encontrar un precio razonable a pagar por la opción donde se cubra el riesgo que asume el vendedor tendríamos la famosa *Fórmula de Black-Scholes*

$$V_0 = u(T,X_0) = X_0\phi(g(T,X_0)) - Ke^{-rt}\phi(h(T,X_0)) \tag{5.13}$$

que es el precio racional para la opción de compra europea en el tiempo $t=0$ con precio de ejercicio K.

El proceso estocástico $V_t = u(T-t, X_t)$ es el valor del portafolio autofinanciado en el tiempo $t \in [0,T]$ y la estrategia de autofinanciamiento (a_t, b_t) viene dada por,

$$a_t = u_2(T-t, X_t) \qquad \text{y} \qquad b_t = \frac{u(T-t, X_t) - a_t X_t}{\beta_t}. \tag{5.14}$$

Vemos que al tiempo de maduración T, la *Fórmula de Black-Scholes* (5.13) nos proporciona el valor neto del portafolio, $\phi_1 = \text{máx}\{X_T - K, 0\}$. Además, podemos observar que $a_t > 0$ para todo $t \in [0,T]$ pero b_t puede tomar valores negativos, por tanto no hay ventas cortas de acciones pero si puede ser necesario perder dinero a una tasa de interés constante de bonos $r > 0$. Es decir, la opción no depende del rendimiento del activo subyacente a la opción, c. Los parámetros que aparecen en la fórmula son r que se obtiene de los bonos, preferiblemente en la misma unidad monetaria, con vencimiento T y la volatilidad σ que no es observable y se calcula generalmente una estimación del riesgo que los inversores están anticipando cuando cotizan precios para las opciones, lo que se denomina *volatilidad implícita.* Habitualmente la volatilidad implícita es suministrada por el mercado, aunque se puede estimar empleando la fórmula de Black-Scholes al revés, determinando cuál tendría que ser la volatilidad para que la prima pronosticada por la fórmula sea igual a la cotizada.

Si quisiéramos considerar $q = u(T, X_0)$, suponiendo que la opción de precio inicial $p \neq q$, como un valor racional en términos de arbitraje, si $p > q$ aplicaríamos la siguiente estrategia: En el tiempo $t = 0$

- vendemos la opción al precio p e
- invertimos q en bonos y acciones siguiendo la estrategia de autofinanciamiento (5.14).

Para acabar vamos a ver en un ejemplo de como se aplicaría el modelo de Black y Scholes en el mercado (ver [12]).

Ejemplo 5.4.1 *: Queremos calcular el valor teórico de una call europea con precio de ejercicio 1000€ dentro de nueve meses, sobre un cierto activo subyacente que actualmente cotiza a 800€ y cuya volatilidad se estima en $\sigma = 30\,\%$. Únicamente a efectos de cálculo emplearemos una tasa sin riesgo del $1\,\%$ anual. Para aplicar la fórmula de Black-Scholes, calculamos primero $g(t,x)$ y $h(t,x)$:*

$$g(T, X_0) = \frac{\ln\left(\frac{800}{1000}\right) + (0,01 + \frac{1}{2}\cdot 0,3^2)\cdot 0,75}{0,3\cdot\sqrt{0,75}} = -0,7003$$

$$h(T, X_0) = -\,0,7003 - 0,3\cdot\sqrt{0,75} = -0,9601$$

por tanto, la estimación de la prima, aplicando la fórmula (5.12) es

$$V_0 = u(0,75, 800) = 800\phi(-0,7003) - 1000\cdot e^{-0,01\cdot 0,75}\phi(-0,9601) = 26,24€.$$

Observación 5.4.2 *En la modelización original la fórmula de Black-Scholes no permite calcular opciones de venta. Sin embargo, podemos adaptar el modelo en función de relaciones de equilibrio basadas en el arbitraje del mercado o podemos recurrir a la paridad put-call, esto es*

$$P = V_0 - X_0 + K \cdot e^{-rt}\,,$$

siendo P la estimación de la prima de la opción de venta europea.
Por tanto, en las condiciones del ejemplo que acabamos de ver, la prima teórica de la opción de venta europa sería

$$P = V_0 - X_0 + K \cdot e^{-rt} = 26,24 - 800 + 1000 \cdot e^{-0,01 \cdot 0,75} = 218,81€.$$

Bibliografía

[1] BACHELIER L. *Théorie de la spéculation* [tesis doctoral]. Facultad de Ciencias de París; 1900 o Ann. Ècole Norm. Sup. **17**; 1900, 21–86.

[2] BLACK F., SCHOLES M. *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Political Economy. **81**; 1973, 635-654.

[3] CARMONA A. *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*[tesis de licenciatura]. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas; 2009.

[4] GAVILÁN RUIZ J.M. *Modelización de los mercados financieros mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. Aplicación de Técnicas no paramétricas al caso de los tipos de interés a corto plazo en España* [tesis doctoral]. Sevilla: Universidad de Sevilla, Departamento de Economía Aplicada I; 2007.

[5] JAIRO LEÓN J., MESA F., CÁRDENAS P.P. *Modelización Matemática en la valuación de opciones sobre acciones.* Scientia et Technica Año XV **41**; 2009.

[6] KNIGHT F.B. *Essentials of Brownian Motion.* American Math. Soc; 1981

[7] MARGALEF-ROIG J., MIRET-ARTES S. *Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black-Scholes-Merton y algunas generalizaciones.* Madrid: Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (IMAFF), Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC); 2000.

[8] MIKOSCH T. *Elementary Estochastic Calculus with Finance in View* (Vol. 6). 2ª ed. Singapore: World Scientific; 1999.

[9] MORO EGIDO E. *Estudio analítico y numérico de ecuaciones diferenciales estocásticas: Aplicación a la Mecánica Estadística* [tesis doctoral]. Leganés: Universidad Carlos III, Departamento de Matemáticas; 1999.

[10] OKSENDAL B. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* 6ª ed. Blindern: Springer; 2002.

[11] OLEAGA G. *Sobre la ecuación de Black-Scholes.* Bol. Mat **18** (1); 2011, 85-104.

[12] PIÑEIRO C. *Oikonomicon. Un viaje virtual a la lógica de la dirección financiera de la empresa.* A Coruña: Universidade da Coruña, Departamento de Empresa, Grupo de Investigación en Finanzas y Sistemas de Información (fysig); 2017. Recuperado de https://www.udc.es/grupos/fysig/carlos/oikonomicon/la_frmula_de_black__scholes.html

[13] WILMOTT P., HOWINSON S., DEWYNNE J. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press. 1995.

[14] ZAUDERER E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2ª ed. Singapore: Wiley; 1989.