



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO: ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Fin de Grado:

**SISTEMAS DINÁMICOS. APLICACIONES A LAS  
REDES COMPLEJAS.**

Autor:

Alberto Álvarez-Rementería Rodríguez

---

Dirigido por:

José Antonio Langa Rosado

2017 - 2018



# **Sistemas dinámicos. Aplicaciones a las redes complejas.**

Alberto Álvarez-Rementería Rodríguez

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

José Antonio Langa Rosado



# Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que me han ayudado en mi formación tanto académica como personal. En especial dar las gracias a toda mi familia, en concreto, a mis padres, Alberto e Isabel, por toda su preocupación y esfuerzo.

A todos los compañeros que han compartido estos años de estudio conmigo y que tanto me han enseñado.

Por último agradecer a todos los profesores que me han transmitido su apoyo y el amor por las matemáticas, en particular a Belén Güemes y Juan Nuñez; también agradecer de forma especial a José Antonio Langa por haberme aguantado todo el año con tanta paciencia y dedicación.



# English Abstract

This work is framed within the field of Dynamical System and their applicaitons to complex networks.

In this text we investigate the existence of global attractors for ordinary differential systems and the existence of a Lyapunov function associated to a gradient-like system, semigroups or evolution processes. Because of that, a detailed study of Morse theory plays a central rule.

The applicability of the results explained here is exemplified by studying the global attractor of an  $n$ -dimensional mutualistic model.

We also study the structure of the attractor in mutualistic systems for which we will prove that it has a Morse decomposition describing all the future scenarios in this Ecological models.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Atractores globales y problemas autónomos</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Sistemas dinámicos y disipación . . . . .	9
1.3. Conjuntos $\omega$ -límites . . . . .	11
1.4. Existencia del atractor global . . . . .	19
1.5. Las ecuaciones de Lorenz . . . . .	24
<b>2. Semigrupos Gradientes</b>	<b>29</b>
2.1. Definición de semigrupo gradiente . . . . .	29
2.2. Estructura de los semigrupos gradientes . . . . .	32
2.3. Semigrupos Dinámicamente Gradientes . . . . .	35
2.4. Existencia de atractores para semigrupos gradientes . . . . .	41
2.5. Continuidad del atractor . . . . .	46
2.5.1. Semicontinuidad superior . . . . .	47
2.5.2. Semicontinuidad inferior . . . . .	48
2.6. Teoría de Morse-Conley . . . . .	49

2.6.1.	Primeras definiciones . . . . .	49
2.6.2.	Construcción de una descomposición de Morse del atractor para un semigrupo dinámicamente gradiente . . . . .	52
2.6.3.	Equivalencia entre semigrupos gradiente y dinámicamente gradiente . . . . .	53
<b>3.</b>	<b>Modelo de redes mutualistas</b>	<b>55</b>
3.1.	Introducción . . . . .	55
3.2.	Modelo general de Lotka-Volterra . . . . .	56
3.2.1.	Sistema general Lotka-Volterra ( $L - V$ ) . . . . .	57
3.2.2.	El modelo 2D de Lotka-Volterra . . . . .	58
3.2.3.	Método de sub-super solución . . . . .	62
3.2.4.	Puntos de equilibrio . . . . .	63
3.2.5.	Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	64
3.3.	Sistema Mutualista ( $L - V$ ) . . . . .	67
3.3.1.	Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	68
3.3.2.	Estabilidad global del sistema mutualista ( $L - V$ ) . . . . .	72
3.3.3.	Comparación de los tres tipos de matrices . . . . .	82
3.4.	Estructura del atractor global en sistemas mutualistas . . . . .	84
3.4.1.	Caracterización del atractor global . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>5.</b>	<b>Anexo I</b>	<b>91</b>
<b>6.</b>	<b>Anexo II</b>	<b>99</b>

# Introducción

Gran parte de los fenómenos reales pueden ser descritos como redes, la naturaleza nos ilustra constantemente sobre esto. Por ejemplo, cualquier organismo vivo está formado por millones de células que interactúan de forma compleja entre sí, o si miramos a los insectos "sociales", los cuales, sin que ningún individuo tenga conocimiento alguno, son capaces de hacer grandes y complejas estructuras. Otro caso importante, y que va a ser central en nuestro trabajo, son las relaciones que existen entre distintas especies que comparten un mismo entorno. Si observamos cualquier ecosistema, por pequeño que sea, nos encontraremos conviviendo cientos de especies distintas las cuales mantienen un equilibrio entre ellas que es lo que mantiene vivo todo el ecosistema. En otras palabras, al observar cualquiera de estos casos nos encontramos con conjuntos de redes, las cuales vamos a intentar estudiar.

Como hemos hablado anteriormente, a la hora de estudiar la vida en la tierra nos encontramos con el hecho de que todas las especies deben interactuar unas con otras para poder sobrevivir. Todas las especies compiten, cooperan y devoran unas a otras tejiendo una red de relaciones entre ellas.

Para estudiar cualquiera de estos fenómenos es habitual aproximarlos como sistemas complejos, normalmente representados como un conjunto de nodos (variables) y sus relaciones (conexiones entre variables), lo cual produce un grafo generalmente muy elaborado. Por ello, cualquiera de estos sistemas pueden describirse por medio de una red que tejen sus nodos y enlaces.

Desde hace décadas ésta es la manera en la que se procede en Ecología a la hora de estudiar las interacciones entre especies de un mismo ecosistema en diferentes partes de la tierra. Los sistemas estudiados son de tipo mutualista, es decir, determinados por relaciones de cooperación entre las distintas especies o nodos presentes. Como ejemplo tenemos las distintas relaciones entre plantas y animales, donde las plantas dependen de los animales para su polinización y dispersión de las semillas y a la vez

la mayoría de los animales dependen directamente de las plantas para su supervivencia. Por consiguiente, la red de interacciones muestra una combinación de relaciones mutualistas y antagonistas que varía entre las especies y ecosistemas en un mundo que constantemente está cambiando.

Estos ecosistemas pueden ser descritos a partir de grafos bipartitos, donde dominan las relaciones de competición entre las especies de cada subgrafo, y las relaciones de cooperación las establecidas entre las especies de los dos grupos que constituyen el sistema completo.

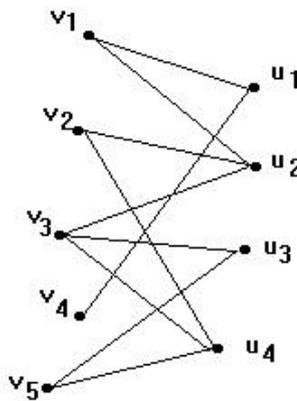


Figura 1: Grafo bipartito.

La pregunta que nos haremos a continuación es si estas, a veces complejas, redes de interacción pueden estudiarse desde un punto de vista del Análisis Diferencial. Y como respuesta veremos que todos estos sistemas pueden ser estudiados a través de un Sistema Diferencial Ordinario (SDO), el cual nos ayudará a predecir los distintos comportamientos de las poblaciones.

A lo largo de este trabajo abordaremos los siguientes problemas:

1. El problema de existencia y unicidad de nuestro sistema.
2. Definiremos y estudiaremos la existencia del atractor global.
3. La estabilidad global del SDO.
4. La estructura del atractor global del sistema mutualista. Para ello nos basaremos en la Teoría de Morse-Conley.

Nuestro trabajo se divide fundamentalmente en dos partes. En los dos primeros capítulos haremos el estudio teórico acerca de los SDO, donde hablaremos de los atrac-

tores globales y los semigrupos gradientes para abordar los problemas que hemos descrito arriba. En el capítulo 3 aplicaremos este estudio a los sistemas mutualistas, de forma concreta veremos el ejemplo de Lotka-Volterra para  $n$ -especies.

## Capítulo 1

En el primer capítulo definiremos el concepto de atractor, el cual se define como un compacto invariante que atrae todas las trayectorias del SDO. Este concepto es de vital importancia, ya que ante un SDO con unos datos iniciales concretos no solamente nos interesa hallar la solución de dicho problema, sino también cómo se comportan las trayectorias ante pequeñas variaciones en los datos iniciales.

Para poder hablar sobre atractores antes será necesario definir otros conceptos. Por ello comenzaremos el capítulo definiendo los semigrupos, que se definen como una familia de aplicaciones  $\{T(t) : t \geq 0\}$  que verifican una serie de condiciones (ver Definición 1.1). Los semigrupos no sólo nos ayudarán a dar la definición de atractor, sino que serán de suma importancia en los siguientes capítulos.

Otro concepto importante es la semidistancia de Hausdorff (ver Definición 1.2), la cual, dada dos conjuntos, mide "cuanto de un conjunto está dentro de otro". Esta definición nos ayudará a ver cuando un conjunto atrae a otro (ver Definición 1.3). Junto con la anterior definición hablaremos sobre conjuntos invariantes, ya que será una de las características de nuestro atractor global.

Con todo lo anterior, hemos ido construyendo paso a paso y de forma constructiva la definición de atractor global (ver Definición 1.6).

Una vez que hemos definido el atractor global, nos propondremos demostrar la existencia y unicidad. El problema de unicidad lo veremos a través de la Proposición 1.1. Para dar condiciones suficientes para la existencia necesitaremos el resto del capítulo.

Dedicaremos la Sección 1.3 para hablar sobre conjuntos  $\omega$ -límites. Veremos que un conjunto  $\omega$ -límite de un conjunto  $B$  es el conjunto que contiene todos los puntos de la solución de dicho conjunto (ver Definición 1.7). Estudiaremos también su comportamiento con semigrupos asintóticamente compactos (ver Teorema 1.1) ya que nos será de gran utilidad para abordar los teoremas de existencia de atractor global.

En la Sección 1.4 analizaremos el problema de establecer condiciones suficientes que garanticen la existencia de atractor global. Para ello enunciaremos y probaremos varios teoremas. El más relevante será el Teorema 1.5 en el cual observamos una doble

implicación para los semigrupos no lineales que poseen asintóticamente compactos y los semigrupos no lineales que poseen un atractor.

Para acabar este capítulo analizaremos el caso del atractor para el modelo de Lorenz.

## Capítulo 2

En el segundo capítulo trabajaremos con los semigrupos gradientes, los cuales presentan una dinámica que queda descrita por una función auxiliar, de vital importancia, llamada función de Lyapunov.

Para la construcción de la función de Lyapunov demostraremos que la familia disjunta de los conjuntos invariantes puede ser reordenada de forma que da lugar a una Descomposición de Morse del atractor. Lo cual nos ayudará más tarde a entender la estructura del atractor global para redes mutualistas.

Definiremos también el concepto de semigrupos dinámicamente gradientes (ver Definición 2.6). La importancia de estos semigrupos reside en que se puede probar su estabilidad bajo perturbación sin hacer uso de la función de Lyapunov. En otras palabras, la existencia de la función de Lyapunov puede ser suprimida si el objeto de interés en estudio es, por ejemplo, la estructura del atractor.

Continuaremos el capítulo estableciendo un criterio de existencia de atractores para semigrupos gradientes, para el cual nos apoyaremos en los resultados dados en el capítulo anterior sobre existencia de atractores globales.

Una vez demostrada la existencia del atractor global nos interesará estudiar su continuidad, es decir, su comportamiento bajo perturbaciones. En otras palabras, que ante pequeños cambios en los datos o en el problema de partida esperamos un comportamiento similar, obteniendo un objeto robusto y fiable. Esta robustez viene marcada por la semicontinuidad superior e inferior. Por ello dedicaremos la Sección 2.5 a este estudio.

Expondremos también detalladamente los conceptos y resultados de Teoría de Morse-Conley que nos ayudará a desarrollar una descripción del atractor en términos de las parejas atractor-repulsor. La importancia de este estudio reside en poder construir una función de Lyapunov para un par atractor-repulsor (ver Proposición 2.6) con propiedades muy especiales. Tras esto, probaremos que la reordenación de los conjuntos invariantes aislados produce una descomposición de Morse para el atractor de un semigrupo dinámicamente gradiente.

Para acabar este capítulo veremos un resultado, de vital importancia, que nos establece una relación de equivalencia entre los semigrupos gradientes y dinámicamente gradientes.

### Capítulo 3

En la segunda parte aplicaremos este estudio teórico a los modelos mutualistas en Ecología, que intentan describir las relaciones de cooperación entre las especies que conviven en un determinado ecosistema. Un modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales para un sistema mutualista en Ecología ha sido el propuesto por Bastolla, el cual hace referencia a numerosos ecosistemas reales en distintos lugares del mundo (véase [7]).

El modelo supone que  $P$  es el número total de plantas y  $A$  el número total de animales; tanto plantas como animales están, por sí solos, en competición y además las plantas y los animales tienen relación de cooperación. Entonces, describimos el siguiente sistema de  $P + A$  ecuaciones diferenciales para  $S_{p_i}$  y  $S_{a_i}$ , variables de densidad de especies para las  $i$ -ésimas especies de plantas y animales, respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{dS_{p_i}}{dt} = S_{p_i} \left( \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^P \beta_{p_{ij}} S_{p_j} + \sum_{k=1}^A \frac{\gamma_{ik} S_{ak}}{1 + h_P \sum_{l=1}^A \gamma_{p_{il}} S_{al}} \right) \\ \frac{dS_{a_i}}{dt} = S_{a_i} \left( \alpha_{a_i} - \sum_{j=1}^A \beta_{a_{ij}} S_{a_j} + \sum_{k=1}^P \frac{\gamma_{a_{ik}} S_{p_k}}{1 + h_A \sum_{l=1}^P \gamma_{a_{il}} S_{pl}} \right) \\ S_{p_i}(0) = S_{p_{i0}}, \\ S_{a_i}(0) = S_{a_{i0}}, \end{cases} \quad (1)$$

Partiendo de este sistema haremos un estudio en profundidad acerca del modelo Lotka-Volterra de tipo competición-cooperador para  $n$ -especies. Cuyo sistema viene definido de la siguiente forma

$$\dot{u} = \frac{du_i}{dt} = \left( b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Aplicaremos este sistema al caso particular del modelo de Lotka-Volterra para dos especies para ayudar a una comprensión general.

Luego haremos un estudio en profundidad sobre los puntos de equilibrio del modelo Lotka-Volterra y la estabilidad en cada uno de ellos. Para ello daremos las defi-

niciones de punto estable, asintóticamente estable, inestable, dominio de atracción y globalmente estable (ver Definición 3.4).

A continuación haremos un estudio del sistema mutualista (L-V) en el caso en el que los tiempos de manipulación son nulos, es decir,  $h_p = h_A = 0$  en (1). Comenzaremos estudiando la existencia y unicidad de soluciones, para lo cual presentaremos y demostraremos el Teorema de existencia y unicidad de solución (ver Teorema 3.4). Tras esto, estudiaremos la estabilidad de global del sistema mutualista (L-V), donde veremos que estudiar muchos de los resultados de la estabilidad del sistema mutualista es equivalente a estudiar las características de una matriz  $\mathbb{M}$ , que se define como matriz de Lyapunov-estable. Tras estudiar varios resultados llegaremos a un Teorema que dada unas condiciones concretas, nuestra matriz  $\mathbb{M}$ , y con lo cual nuestro sistema, tiene un punto de equilibrio globalmente estable.

Para acabar este capítulo estudiaremos resultados sobre la estructura geométrica del atractor global. Describiremos una red compleja de nodos y conexiones dentro del atractor, entendiendo así el atractor como una nueva red dinámica que contiene todos los posibles comportamientos factibles. Para ello usaremos un teorema de vital importancia que nos describe el conjunto de puntos estacionarios (ver Teorema 3.13). Con todo esto llegaremos a la conclusión de que los puntos estacionarios definen una descomposición de Morse para el atractor global.

Para terminar el trabajo, expondremos las conclusiones a las que hemos llegado con nuestro estudio.

# 1 | Atractores globales y problemas autónomos

En este capítulo vamos a mostrar los distintos resultados más relevantes sobre atractores globales para sistemas dinámicos en dimensión infinita.

## 1.1 Introducción

Para comenzar este capítulo introduciremos el marco de modelos autónomos, explicando los problemas que aparecen en el estudio de estos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y cómo la dinámica asintótica arroja información relevante para su comprensión.

Sabemos que las ecuaciones en derivadas de evolución consiguen modelar muchas de las realidades que describimos como sistemas dinámicos. Algunos ejemplos los encontramos en fenómenos de la mecánica celeste, crecimiento de poblaciones, en ciertos procesos químicos, o incluso la neurociencia.

De forma abstracta, podemos expresar estas ecuación de evolución de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = F(u(t))$$

donde  $u(t) \in X$  es la incógnita cuyo desarrollo en el tiempo, en el espacio de fases  $X$ , queremos conocer.

Generalmente complementamos esta ecuación con una serie de datos iniciales que nos permitirán abordar el problema de existencia y unicidad de soluciones. Además nos servirán de elemento de referencia en la evolución del sistema.

Muchos de los modelos que suelen abordarse bien pueden ser lineales, es decir, basados en transformaciones del tipo  $au+b$  de la incógnita  $u$  ( $a$  y  $b$  tendrán significados muy distintos si estamos en el caso de ecuaciones diferenciales (EDOs) o en el caso de ecuaciones de derivadas parciales (EDPs)). La dinámica de estos modelos lineales está perfectamente estudiada y es conocida una gran cantidad de resultados acerca de soluciones, comportamiento, estabilidad, etc.

El problema es que la mayoría de los modelos que nos encontramos en la realidad no tienen un crecimiento de la forma  $au + b$ . A poco que estudiemos un problema del que queramos obtener algunas ecuaciones que predigan su comportamiento vemos que en muchos casos son modelos no lineales los que mejor describen la realidad que estamos estudiando.

El primer problema que nos encontramos es que de los sistemas no lineales podemos obtener poquísimos resultados generales que nos ayuden a resolver otros problemas también no lineales. Por ello, a veces cada problema no lineal debe ser estudiado aparte como una realidad particular y compleja.

Una vez conocida la existencia de solución, uno de los principales problemas a estudiar en cualquier sistema es el comportamiento de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ . Pero como hemos dicho anteriormente, los problemas no lineales presentan una dificultad, ya que obedecen a complicadas leyes que, en general, hacen difícil predecir la evolución del sistema.

Además, existen muchos modelos que tienen un comportamiento sensible respecto a los datos iniciales, es decir, una pequeña variación el dato inicial provoca un gran cambio en el comportamiento del modelo. Estos sistemas son frecuentes en múltiples campos como la Física, la Química, la Biología, la Economía, etc.

Podemos llegar a pensar que en estos modelos vamos a ser incapaces de obtener alguna información acerca del comportamiento de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo este pensamiento dista mucho de la realidad, pues en muchos casos las trayectorias convergen hacia un conjunto, en ocasiones bastante extraño, al que llamaremos **atractor** del sistema (esta idea de atractor será la parte fundamental de nuestro estudio).

De esta forma, el comportamiento caótico de ciertos sistemas dinámicos podrán ser explicados por la existencia de un (a veces complicado) conjunto atrayente compacto hacia el que convergen las trayectorias cuando  $t \rightarrow \infty$ . En este sentido es en el que podemos hablar de los atractores como explicación del caos.

## 1.2 Sistemas dinámicos y disipación

Las ecuaciones autónomas son aquellas en las cuales no aparece una dependencia explícita del tiempo en el término no lineal, es decir, podemos expresarlas como

$$\frac{\partial}{\partial t}u = F(u(t)).$$

Esta viene marcada únicamente por el tiempo transcurrido. Por tanto, si  $u(t, s; x_s)$  es una solución que comienza en  $u_s$  en el tiempo  $s$  y evoluciona hasta el tiempo  $t$ , su dinámica es la misma que la de la solución  $u(t - s, 0; x_s)$ .

Comencemos con una de las definiciones más importantes de este trabajo.

**| Definición 1.1.** Sea  $X$  un espacio métrico. La familia de aplicaciones  $\{T(t) : t \geq 0\}$  de  $X$  en sí mismo se denomina semigrupo si verifica,

1.  $T(0) = Id$ ,
2.  $T(t)T(s) = T(s)T(t) = T(s + t)$ , para todo  $t, s \geq 0$
3.  $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \times X \ni (t, x) \rightarrow T(t)x \in X$  es continuo

En el apartado 3. de la definición anterior se está considerando el conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \times X$  dotado de la topología producto.

Consideremos un problema autónomo

$$\frac{\partial}{\partial t}u = F(u)$$

con unicidad de solución denotada por  $u(t; u_0)$  con valor inicial  $u_0$  en  $t = 0$ ; vemos que el semigrupo  $T(t)u_0 = u(t; u_0)$  representa la solución que comenzó en  $u_0$  cuando ha transcurrido un tiempo  $t$ .

Ahora vamos a definir la semidistancia de Hausdorff para conjuntos, la cual mide, dicho de forma sencilla, "cuanto de un conjunto está dentro de otro" y que nos ayudará en nuestro proceso de definición de atractor global.

**| Definición 1.2.** Sea  $(Y, d_Y)$  un espacio métrico y  $A, B \subseteq Y$  dos subconjuntos de dicho espacio. La semidistancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$ , denotada por  $dist(A, B)$ , se define como

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d_Y(a, b)$$

o, equivalentemente,

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq N(B, \varepsilon) \}$$

donde  $N(B, \varepsilon) = \{y \in Y : d_Y(y, B) < \varepsilon\}$  denota un  $\varepsilon$ -entorno de  $B$ .

Hay que tener en cuenta que esta distancia no define una métrica ya que si  $\text{dist}(A, B) = 0$  lo único que sabemos es que  $A \subseteq \overline{B}$ . La distancia de Hausdorff se define como

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \{ \text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A) \}$$

Veamos algunas propiedades:

1.  $\text{dist}(\emptyset, Y) = 0$ , mientras que  $\text{dist}(X, \emptyset)$  no está definida;
2.  $\text{dist}(X, Y) = \text{dist}(\overline{X}, Y)$ ;
3. si  $Y_1 \subseteq Y_2$ , entonces  $\text{dist}(X, Y_1) \geq \text{dist}(X, Y_2)$ ;
4. si  $X_1 \subseteq X_2$ , se verifica que  $\text{dist}(X_1, Y) \leq \text{dist}(X_2, Y)$ ;

**| Definición 1.3.** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$  y  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo en  $X$ . Diremos que  $A$  atrae a  $B$  si

$$\text{dist}(T(t)B, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Sabemos que un sistema es disipativo si sus soluciones convergen a un conjunto acotado dentro del espacio  $X$ , es decir, no explotan en tiempo finito, y están acotadas en todo tiempo.

**| Definición 1.4.** Diremos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es disipativo acotado (disipativo compacto) (disipativo puntual) si existe un conjunto acotado  $B \subseteq X$  tal que para todo  $D \subseteq X$  acotado (conjunto compacto  $K \subseteq X$ ) (punto  $x \in X$ ), existe  $t_0 = t_0(D)$  ( $t_0 = t_0(K)$ ) ( $t_0 = t_0(x)$ ) tal que  $T(t)D \subseteq B$  ( $T(t)K \subseteq B$ ) ( $T(t)x \in B$ ) para todo  $t \geq t_0$ .

Ahora procederemos a definir el concepto de invarianza, el cual es fundamental dentro del marco de los atractores globales ya que son conjuntos que guardan en su interior toda su dinámica.

**| Definición 1.5.** Diremos que un conjunto  $D$  es invariante bajo el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  si  $T(t)D = D$  para todo  $t \geq 0$ .

Tras esta definición nos disponemos a dar la definición de atractor global.

**| Definición 1.6.** *El conjunto  $\mathcal{A} \subseteq X$  es el atractor global para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  si*

1. *es compacto*
2. *atrae acotados de  $X$*
3. *es invariante bajo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .*

Obsérvese que, de la manera en la que hemos definido el atractor global, a priori, parece que un cierto semigrupo pudiera poseer más de un atractor global. No obstante, se puede probar fácilmente que un semigrupo posee, a lo más, un único atractor global.

**Proposición 1.1.** *Si existe un atractor global para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , entonces dicho atractor es único.*

**Demostración.** En efecto, sean  $A_1$  y  $A_2$  atractores globales para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Entonces, como  $A_2$  es un compacto, es un subconjunto acotado de  $X$ , y usando que  $A_1$  es un atractor global, tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)A_2, A_1) = 0.$$

Pero, la invarianza de  $A_2$  por  $T(\cdot)$  implica que  $T(t)A_2 = A_2$  cualquiera que sea  $t \geq 0$ . Teniendo en cuenta, la igualdad precedente queda

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)A_2, A_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(A_2, A_1) = \text{dist}(A_2, A_1),$$

o sea,  $\text{dist}(A_2, A_1) = 0$ , luego como hemos visto antes, esto implica que  $A_2 \subset \overline{A_1} = A_1$ , ya que  $A_1$  es cerrado.

Cambiando los papeles de  $A_1$  y  $A_2$  en el argumento anterior, se concluye la otra inclusión  $A_1 \subset A_2$ , mostrando la igualdad entre los dos conjuntos. |

### 1.3 Conjuntos $\omega$ -límites

Introducimos en esta sección el importante concepto de conjunto  $\omega$ -límite, que va a jugar un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de los atractores globales.

**| Definición 1.7.** Denominamos conjunto  $\omega$ -límite de un conjunto  $B$  al conjunto que contiene todos los puntos límite de las soluciones de dicho conjunto,

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} T(\tau)B} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}. \quad (1.1)$$

Donde  $\gamma^+(B)$  es su semiórbita positiva respecto del semigrupo  $T(\cdot)$ , definida por

$$\gamma^+(B) := \{T(t)x : t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x)$$

y

$$\gamma_\tau^+(B) := \{T(t)x : t \geq \tau, x \in B\}.$$

Vemos que el conjunto  $\omega$ -límite de cualquier subconjunto  $B$  de  $X$  es un conjunto cerrado, por ser intersección de cerrados.

Esta definición que acabamos de dar se puede cambiar por otra más manejable en términos de límites de sucesiones, como nos muestra la siguiente caracterización.

**Lema 1.1.** El conjunto  $\omega$ -límite de un subconjunto  $B \subset X$  está caracterizado por

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{existen sucesiones } t_n \rightarrow \infty, \{x_n\} \in B \text{ tales que } T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y\}, \quad (1.2)$$

**Demostración.** En efecto, sea  $\omega'(B)$  el conjunto definido por (1.2). Por una parte, dado  $x \in \omega(B)$ , para cada natural  $n$  se tiene que  $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$ . Luego, para cada  $n$  debe existir  $z_n \in \gamma_n^+(B)$  tal que  $d(x, z_n) < \frac{1}{n}$ , pero, por la definición de  $\gamma_n^+(B)$ , existen  $t_n \geq n$  y  $x_n \in B$  de manera que  $z_n = T(t_n)x_n$ . Así se tiene evidentemente que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ , es decir,  $x \in \omega'(B)$ .

Por otra parte, sea  $x \in \omega'(B)$ , entonces  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ , para ciertas sucesiones  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ , y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $B$ .

Ahora, dado  $t \geq 0$  cualquiera, escogiendo un natural  $n(t)$  de modo que  $t_n \geq t$  para  $n \geq n(t)$ , se ve fácilmente que  $T(t_n)x_n \in \gamma_t(B)$  toda vez que  $n \geq n(t)$ , de donde resulta que  $x \in \overline{\gamma_t(B)}$ , y de la arbitrariedad con la que fue tomado  $t \geq 0$ , concluimos que  $x \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ , es decir,  $x \in \omega(B)$  y el lema queda demostrado. |

A continuación veamos una característica acerca del conjunto  $\omega$ -límite que nos será de mucha utilidad.

**Proposición 1.2.** Sea  $B \subseteq X$ . Si para algún  $t_0 > 0$  el conjunto

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B}$$

es compacto, entonces  $\omega(B)$  es no vacío, compacto e invariante.

**Demostración.** Para  $t \geq 0$  tenemos que los conjuntos

$$B(t) = \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B}$$

son una familia de compactos encajados, por tanto tienen intersección no vacía y compacta. Así,  $\omega(B)$  es no vacío y compacto si usamos la caracterización en (1.1).

Para demostrar la invarianza del conjunto, usaremos la caracterización en (1.2). Sea  $T(t)y \in T(t)\omega(B)$  con  $y \in \omega(B)$ ; existen dos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$  y  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  de modo que  $T(t_n)x_n$  converge a  $y$ . Basta aplicar ahora el semigrupo, obteniendo

$$T(t)T(t_n)x_n = T(t + t_n)x_n = T(\tau_n)x_n.$$

Como  $T(t_n)x_n$  converge a  $y$ , tenemos que  $T(\tau_n)x_n$  converge a  $T(t)y$  y por tanto está en  $\omega(B)$ . Con lo que hemos probado que  $T(t)\omega(B) \subseteq \omega(B)$ .

Tomemos ahora un elemento  $y \in \omega(B)$ . Por definición, existirán unos  $t_n$  que convergen a infinito y unos  $\{x_n \in B$  tales que  $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ .

Sea ahora  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \geq t + t_0$ , para todo  $n > n_0$ . Por tanto,

$$\{T(t_n - t)x_n\} \subseteq B(t) = \overline{\bigcup_{s \geq t_0} T(s)B}.$$

Al ser este conjunto compacto por hipótesis, existe una subsucesión convergente (que denotaremos igual) a un punto  $z$ , el cual está en  $\omega(B)$  por (1.2). Por continuidad del semigrupo,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)T(t_n - t)x_n = T(t)z. \quad (1.3)$$

Por tanto, tenemos que  $y \in T(t)\omega(B)$ , y por consiguiente el doble contenido. |

**| Definición 1.8.** Llamaremos *solución global para el semigrupo*  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en  $X$  (o también *órbita completa*) a toda familia  $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$  tal que cualquier  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\xi(t) = T(t+s)\xi(s)$  para todo  $s < t$ .

Es muy sencillo ver a partir del lema 1.1 que, si  $B \subset C$  entonces  $\omega(B) \subset \omega(C)$  y si  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es una solución global de  $T(\cdot)$  se tiene que  $\omega(\xi(t)) = \omega(\xi(s))$  para cualesquiera  $s, t \in \mathbb{R}$ .

En algunos casos podemos tratar un concepto semejante al de conjunto  $\omega$ -límite, pero donde el tiempo transcurre hacia atrás, definiendo lo que se conoce como conjunto  $\alpha$ -límite asociados a una solución (es decir, no consideraremos conjuntos  $\alpha$ -límites asociados a un subconjunto arbitrario  $B$  de  $X$ ).

**| Definición 1.9.** Sea  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  una solución global del semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Definimos su conjunto  $\alpha$ -límite como:

$$\alpha(\xi) := \{x \in X : \text{existe } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n)\}$$

Las principales propiedades de los conjuntos  $\omega$ -límites necesarias en el estudio de los atractores globales se verifican siempre para los semigrupos asintóticamente compactos.

**| Definición 1.10.** Diremos que el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es *asintóticamente compacto* si para cualesquiera sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  acotada y  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  existe una subsucesión convergente a un punto de  $X$  de la sucesión  $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**| Definición 1.11.** Se dice que un semigrupo no lineal  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en un espacio métrico  $X$  es **eventualmente compacto**, si existe un  $t_0 > 0$  tal que la aplicación  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta, es decir, si para cada subconjunto acotado  $B$  de  $X$  su imagen por  $T(t_0)$ ,  $T(t_0)B$ , es un conjunto relativamente compacto de  $X$ .

Supongamos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un semigrupo eventualmente compacto y sea  $t_0 > 0$  tal que  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta. Entonces, del hecho de que una aplicación continua transforma conjuntos compactos en conjuntos compactos y de la propiedad de semigrupo, se deduce que para todo  $t \geq t_0$ ,  $T(t) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta, pues  $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ .

Para ver que un semigrupo eventualmente compacto  $\{T(t) : t \geq 0\}$  y eventualmente acotado es asintóticamente compacto, sean  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números con  $t_n \rightarrow \infty$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de puntos de  $X$ . Sea, por la compacidad

eventual,  $t_0 > 0$  tal que  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta y, por la acotación eventual de  $T(\cdot)$ ,  $\tau \geq 0$  de manera que la semiórbita,  $\gamma_\tau^+(B_0)$ , del subconjunto acotado  $B_0 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , es acotada. Finalmente, escogiendo un número real  $t' > t_0 + \tau$ , consideremos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \geq t'$  para todo  $n \geq n_0$ . Definiendo el conjunto acotado  $B := \{T(t_n - t')x_n : n \geq n_0\} \subset \gamma_\tau^+(B_0)$ , de la observación que sigue a la definición de compacto eventual, resulta inmediato que  $T(t')B$  es relativamente compacto y siendo  $\{T(t_n)x_n : n \geq n_0\}$  un subconjunto de  $T(t')B$ , se sigue la conclusión.

Presentamos ahora las principales propiedades de los conjuntos  $\omega$ -límites para semigrupos asintóticamente compactos, resumidas en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** *Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico  $X$ . Para todo subconjunto acotado no vacío  $B \subset X$  se tiene que su conjunto  $\omega$ -límite satisface las siguientes propiedades:*

1.  $\omega(B)$  es no vacío, compacto, invariante y atrae a  $B$  por la acción de  $T(\cdot)$ .
2.  $\omega(B)$  es el menor conjunto cerrado de  $X$  que atrae a  $B$ .
3. Si  $B$  es conexo o existe un conexo  $C$  que contiene a  $B$  y que es atraído por  $\omega(B)$ , entonces  $\omega(B)$  es conexo.

*Demostración.*

1. Para ver que  $\omega(B)$  es no vacío, escojamos una sucesión cualquiera de números reales no negativos  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_n \rightarrow \infty$  y una sucesión cualquiera  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $B$ . De la compacidad asintótica se deduce que la sucesión  $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión convergente y el Lema (1.1) nos dice que este límite pertenece a  $\omega(B)$ .

La compacidad se puede probar así. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos en  $\omega(B)$ . Gracias al lema 1.1, a cada  $n \in \mathbb{N}$  está acotado un par de sucesiones  $(t_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ , con  $t_j^{(n)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ , y  $(x_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$  en  $B$  tales que  $x_n = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_j^{(n)})x_j^{(n)}$ . De donde se puede concluir que, para cada natural  $n$  existe un natural  $j_n$  tal que

$$d\left(x_n, T\left(t_{j_n}^{(n)}\right)x_{j_n}^{(n)}\right) < \frac{1}{n}, \text{ con } t_{j_n}^{(n)} \geq n. \quad (1.4)$$

Como  $t_{j_n}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , por la compacidad asintótica, podemos extraer una subsucesión convergente de  $(T(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , que vamos a denotar por

$$\left(T\left(t_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right)x_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

y por  $x$  a su límite. El lema 1.1 implica ahora que  $x \in \omega(B)$ , y de (1.4) obtenemos que

$$d\left(x_{n_k}, T\left(t_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right)x_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right) < \frac{1}{n_k},$$

de donde resulta, después de tomar límite para  $k \rightarrow \infty$ , que  $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ , lo que demuestra la compacidad de  $\omega(B)$ .

Probemos ahora que  $\omega(B)$  es invariante. En primer lugar, sean  $x \in \omega(B)$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ , y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $B$  de manera que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ . Entonces, si  $t \geq 0$  es dado, de la continuidad y del operador  $T(t) : X \rightarrow X$  y de la propiedad de semigrupo se sigue que

$$T(t)x = T(t)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t+t_n)x_n,$$

con  $t+t_n \rightarrow \infty$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $B$ , lo que significa que  $T(t)x \in \omega(B)$  y establece la inclusión  $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ . Recíprocamente, sean  $x \in \omega(B)$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ , y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $B$  de manera que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ . Fijado  $t \geq 0$  vemos que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t+(t_n-t))x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)(T(t_n-t)x_n). \quad (1.5)$$

Por otro lado, usando la compacidad asintótica, obtenemos un punto  $z \in X$  y una subsucesión  $(T(t_{n_j}-t)x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  de  $(T(t_n-t)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$z = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j}-t)x_{n_j},$$

de donde, junto con el Lema 1.1, se sigue que  $z \in \omega(B)$ , y usando la continuidad de  $T(t) : X \rightarrow X$  en (1.5) y el hecho de que toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, obtenemos que

$$x = T(t)\left(\lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j}-t)x_{n_j}\right) = T(t)z,$$

lo que demuestra que  $x \in T(t)\omega(B)$ , concluyendo la inclusión  $T(t)\omega(B) \supset \omega(B)$  y, por lo tanto, la invarianza de  $\omega(B)$ .

Veamos que  $\omega(B)$  atrae a  $B$ , es decir, que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, \omega(B)) = 0$ . Supongamos que esto no sea cierto, entonces existe  $\epsilon > 0$  y podemos construir una sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos con  $t_n \rightarrow \infty$  tales que

$$\text{dist}(T(t_n)B, \omega(B)) > \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, la definición de la semidistancia nos dice que para cada natural  $n$  se puede hallar  $x_n \in B$  tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon \quad (1.6)$$

pero, la compacidad asintótica de  $T(\cdot)$  nos permite extraer una subsucesión de  $(T(t_n)x_n)$  que converge a un punto  $x$  que obligatoriamente está en  $\omega(B)$ . Entonces la continuidad de la función distancia de un punto a un conjunto y (1.6) nos garantizan que  $d(x, \omega(B)) \geq \epsilon$ , contradiciendo que  $x \in \omega(B)$ , estableciendo que  $\omega(B)$  atrae a  $B$  completando la prueba del apartado (1.)

2. De la definición de  $\omega(B)$ , se sigue que el mismo es cerrado y, por el apartado anterior, tenemos que atrae a  $B$  por  $T(\cdot)$ . Para probar que es el menor cerrado con estas propiedades, consideremos un conjunto cerrado  $F$  de  $X$  que atraiga a  $B$  por  $T(\cdot)$ , y mostremos que  $\omega(B) \subset F$ .

En efecto, en caso contrario, existirá un punto  $x \in \omega(B)$  tal que  $x \notin F$ . Como  $F$  es un conjunto cerrado, se tiene que  $d(x, F) > \delta > 0$ , para algún  $\delta$  positivo. Ahora, sean  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ , con  $t_n \rightarrow \infty$ , y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $B$  tales que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ . Por otra parte, como  $F$  atrae a  $B$ , podemos encontrar  $t^* > 0$  tal que

$$dist(T(t)B, F) < \delta \text{ siempre que } t \geq t^*$$

Luego

$$d(T(t)z, F) < \delta \text{ para todo } z \in B \text{ y todo } t \geq t^*$$

Pero, escogiendo  $n(t^*) \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \geq t^*$  siempre que  $n \geq n(t^*)$ , concluimos que para todo  $n \geq n(t^*)$  se verifica

$$d(T(t_n)x_n, F) < \delta,$$

de donde, por la continuidad de la función  $X \ni w \rightarrow d(w, F) \in \mathbb{R}$ , y después de pasar el límite en  $n$ , se deduce que  $d(x, F) \leq \delta$ , lo que contradice la elección de  $x$  y demuestra el apartado (2.).

3. Supongamos que exista un conjunto conexo  $C$  conteniendo a  $B$  y que sea atraído por  $\omega(B)$ , pero que  $\omega(B)$  no sea conexo. Entonces, se puede escribir  $\omega(B)$  como la unión de dos conjuntos no vacíos cerrados (en  $\omega(B)$  y por lo tanto en  $X$ , ya que  $\omega(B)$  es cerrado en  $X$ ) y disjuntos  $F_1$  y  $F_2$ . Se sigue del apartado (1) que  $F_1$  y  $F_2$  son compactos, luego  $d(F_1, F_2) =: \delta > 0$ , donde

$$d(F_1, F_2) := \inf \{d(a, b) : a \in F_1, b \in F_2\}$$

Ahora, como  $\omega(B)$  atrae a  $C$ , existe  $t^* > 0$  tal que

$$T(t)C \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) \text{ para todo } t \geq t^*$$

es decir,

$$\gamma_{t^*}^+(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) = \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1) \cup \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2).$$

Pero,  $\gamma_{t^*}^+(C)$  es la imagen del conjunto conexo  $[t^*, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ , por lo tanto  $\gamma_{t^*}^+(C)$  es conexo y como  $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$  y  $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2)$  son disjuntos, obligatoriamente  $\gamma_{t^*}^+(C)$  sólo puede estar contenido en uno de estos dos conjuntos. Supongamos, por fijar ideas, que sea  $\gamma_{t^*}^+(C) \subset \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$ . Entonces,

$$F_2 \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma_{t^*}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t^*}^+(C)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)},$$

con lo que  $d(F_2, F_1) \leq \frac{\delta}{2}$ , que no puede ser cierto teniendo en cuenta la definición de  $\delta$ , y permite concluir que  $\omega(B)$  es conexo cuando  $\omega(B)$  atrae a un conexo que contiene a  $B$ .

En el caso en que  $B$  sea conexo, el resultado se deduce de lo que hemos probado arriba simplemente escogiendo  $C = B$ , terminando la demostración.

■

Se puede demostrar para los conjuntos  $\alpha$ -límites de las soluciones globales acotadas de los semigrupos asintóticamente compactos en el pasado, y con demostraciones enteramente análogas, propiedades similares a las presentadas en el lema anterior, es decir, se verifica el siguiente resultado:

**Lema 1.2.** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo asintóticamente compacto en un espacio métrico  $X$  y  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  una solución global acotada suya. Entonces, el conjunto  $\alpha$ -límite de  $\xi$ ,  $\alpha(\xi)$ , es no vacío, compacto, conexo, invariante y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \alpha(\xi)) = 0. \quad (1.7)$$

**Demostración.** Probemos simplemente que  $\alpha(\xi)$  es no vacío y que se tiene la convergencia en (1.7), pues el resto de propiedades se demuestran análogamente al caso del conjunto  $\omega$ -límite.

En efecto, sea  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión arbitraria de números no positivos con  $t_n \rightarrow -\infty$ . Escribiendo para cada natural  $n$

$$\xi(t_n) = T(-t_n)\xi(2t_n),$$

como  $-t_n \rightarrow \infty$ , y  $(\xi(2t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada de puntos de  $X$ , la compacidad asintótica asegura que  $(T(-t_n)\xi(2t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión convergente, o sea,  $(\xi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión convergente y, por definición, un tal límite debe pertenecer a  $\alpha(\xi) \neq \emptyset$ .

Por otra parte, supongamos que no se tenga la atracción hacia atrás en (1.7). Entonces, existen  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números no positivos con  $t_n \rightarrow -\infty$  de modo que

$$d(\xi(t_n), \alpha(\xi)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

Pero, repitiendo el argumento que hemos usado para probar que  $\alpha(\xi) \neq \emptyset$ , se concluye que la sucesión  $(\xi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión convergente hacia un punto  $x \in X$ , y dicho punto deberá pertenecer a  $\alpha(\xi)$ , lo que contradice a (1.8) y, por lo tanto, (1.7) es cierto. |

Vamos a terminar la sección probando un resultado bastante útil, acerca de de conjuntos  $\omega$ -límites.

**Lema 1.3.** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $A \subset X$  cerrado e invariante por  $T(\cdot)$ . Entonces

$$\omega(A) = A.$$

**Demostración.** En efecto, sea  $x \in A$ , entonces, por la invarianza de  $A$ , se tiene que para cada natural  $n$  existe un punto  $x_n \in A$  tal que  $x = T(n)x_n$  y, evidentemente,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(n)x_n$ , luego  $x \in \omega(A)$  por el Lema 1.1, estableciendo la inclusión  $A \subset \omega(A)$ .

Por otro lado, sean  $x \in \omega(A)$ ,  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}_0^+$  y  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $A$  tales que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$ . Usando la invarianza de  $A$  vemos que  $T(t_n)x_n \in A$  para todo natural  $n$ , de donde  $x \in \overline{A} = A$ , lo que significa que  $\omega(A) \subset A$ . |

## 1.4 Existencia del atractor global

En esta sección vamos a analizar el problema de establecer condiciones suficientes que garanticen la existencia de atractor global. Para ello vamos a mostrar dos resultados clásicos sobre existencia de atractores basados en compactos atrayentes o en semigrupos asintóticamente compactos.

**Proposición 1.3.** Sean  $A, B \subseteq X$  con  $A$  acotado que atrae a  $B$ . Entonces  $\omega(B) \subseteq \overline{A}$ .

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $A$  atrae a  $B$ , existe un tiempo  $T = T(\varepsilon, B)$  tal que  $T(t)B \subseteq \overline{N}(A, \varepsilon)$ . Por tanto,

$$\overline{\bigcup_{t \geq T} T(t)B} \subseteq \overline{N}(A, \varepsilon)$$

Por (1.1),

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{N}(A, \varepsilon) \subseteq \overline{A}.$$

**Teorema 1.2.** Supongamos que el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es disipativo acotado, siendo  $K \subseteq X$  un conjunto absorbente. Si  $K$  es compacto, entonces existe el atractor global  $\mathcal{A}$  que viene dado por  $\mathcal{A} = \omega(K)$ .

Además si  $K$  es conexo  $\mathcal{A}$  también es conexo.

**Demostración.** Veamos que el conjunto  $\omega(K)$  está bien definido.

Como  $K$  es un conjunto absorbente, y es compacto (y por tanto cerrado y acotado) tenemos que existe un tiempo  $t_0$  de modo que para tiempos superiores a él, el conjunto  $T(t)K \subseteq K$ . Por tanto

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K} \subseteq K.$$

Como  $K$  es compacto, tenemos que el conjunto  $\omega(K)$  es no vacío, invariante y compacto por la Proposición 1.2

Para demostrar que atrae acotados razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que no es así, es decir, existe un conjunto  $B$  acotado, un  $\delta > 0$  y unos  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  de forma que  $dist(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geq \delta$ . Como  $K$  es un conjunto absorbente, existe un tiempo  $t_B$  de forma que  $T(t)B \subseteq K$ , para todo  $t \geq t_B$ , y, por tanto, existe un  $n_0$  suficientemente grande a partir del cual  $\{T(t_n)x_n : n > n_0\} \subseteq K$ . Por compacidad, existe una subsucesión que converge dentro del conjunto a un valor que llamaremos  $\beta$ . Por la continuidad del semigrupo,  $dist(\beta, \mathcal{A}) \geq \delta$ . Por otro lado,

$$\beta = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j})x_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j} - t_B)T(t_B)x_{n_j}.$$

Como  $t_{n_j} - t_B$  converge a  $\infty$  y  $T(t_B)x_{n_j} \in K$ , tenemos que  $\beta \in \omega(K) = \mathcal{A}$ , lo que es una contradicción. Probemos ahora que el atractor es conexo, también por reducción

al absurdo. Supongamos que existen dos abiertos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  tales que  $N(\omega(K), \epsilon) \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , con  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$  y  $N(\omega(K), \epsilon) \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2$ . Como  $\omega(K)$  atrae a  $K$ , para tiempos grandes  $T(t)K \subseteq N(\omega(K), \epsilon)$ . Al ser el conjunto  $T(t)K$  conexo por la continuidad del semigrupo, tenemos que ha de estar contenido en, por ejemplo,  $\mathcal{O}_1$ . Usando la Proposición 1.3, tenemos que  $\mathcal{A} = \omega(K) \subseteq \mathcal{O}_1$ , lo que es una contradicción. |

A continuación vamos a dar dos teoremas que son fundamentales para el problema de existencia de atractor global. Para ello usaremos el concepto, que definimos anteriormente, de semigrupo asintóticamente compacto.

**| Teorema 1.3.** *Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo en  $X$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1.  $\{T(t) : t \geq 0\}$  posee atractor global  $\mathcal{A}$ .
2.  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es disipativo acotado y asintóticamente compacto.

Además, si es  $B$  el conjunto absorbente del semigrupo, entonces el atractor global es el conjunto  $\omega$ -límite de  $B$ , es decir,

$$\mathcal{A} = \omega(B).$$

*Demostración.* La prueba de este teorema es una aplicación directa al Teorema 1.1. |

El siguiente teorema nos dará una caracterización muy útil para los grupos asintóticamente compactos en espacios de Banach. Se basa en la descomposición de éstos en dos semigrupos que cumplen determinadas características.

**| Teorema 1.4.** *Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo acotado, es decir, dado un conjunto acotado  $B$  en  $X$ , el conjunto  $\{T(t)B : t > 0\}$  es acotado. Supongamos que  $T(t) = W(t) + U(t)$  donde:*

1.  $\{W(t) : t > 0\}$  es una familia de operadores de  $X$  tales que para todo  $B \subseteq X$  acotado se tiene que

$$\|W(t)B\|_X \leq m_1(t)m_2(\|B\|_X)$$

con

$$m_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_1(t) = 0$$

donde definimos  $\|B\|_X = \sup\{\|b\|_X : b \in B\}$ .

2.  $\{U(t) : t > 0\}$  son tales que para todo  $B \subseteq X$  acotado, existe un tiempo  $T(B) > 0$  de forma que el conjunto  $\{U(t)B : t \geq T(B)\}$  es relativamente compacto, es decir, dada una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$  y  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , existe una subsucesión convergente de  $\{U(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Entonces el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es asintóticamente compacto.

**Demostración.** Sea  $B \subseteq X$  acotado. Por hipótesis, tenemos que  $\{T(t)B : t \geq 0\}$  es acotado. Veamos que el conjunto  $B_1 = \{T(t_n)x_n : n \geq 1\}$  con  $x_n \in B$  y  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  posee una subsucesión convergente. Para ello bastará con que el conjunto sea relativamente compacto por medio de la existencia de una  $\epsilon$ -malla finita, siendo  $\epsilon > 0$  cualquiera.

Sea  $\epsilon > 0$  y tomemos un  $l > T(B)$  de forma que

$$m_1(l) \leq \frac{\epsilon}{2m_2(\|\bigcup_{t \geq 0} T(t)B\|)},$$

lo cual nos lo garantiza la condición de que la función  $m_1(t)$  vaya a cero cuando el tiempo va a infinito. Descomponemos  $B_1$  en dos conjuntos

$$B'_1 = \{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{k_1}, \quad B''_1 = \{T(t_k)x_k\}_{k=k_1+1}^{\infty}$$

con  $t_{k_1} < l \leq t_{k_1+1}$ ,

Tenemos que el conjunto  $B''_1$  es un subconjunto del conjunto acotado  $T(l)(\{T(t)B : t \geq 0\})$ . Aplicando ahora la descomposición del semigrupo a dicho conjunto obtenemos que el conjunto  $U(l)(\{T(t)B : t \geq 0\})$  es relativamente compacto por hipótesis. Por tanto, podemos recubrirlo con una familia  $\frac{\epsilon}{2}$ -malla finita. Por otro lado, la norma del operador  $W(t)$  queda como

$$\left\| W(l) \left( \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \right) \right\|_X \leq m_1(l) m_2 \left( \left\| \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \right\|_X \right)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2m_2 \left( \left\| \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \right\|_X \right)} m_2 \left( \left\| \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \right\|_X \right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Por consiguiente podemos recubrir al conjunto  $B_1$  por una  $\epsilon$ -malla finita, llegando a la conclusión de que es precompacto. |

**Teorema 1.5.** *Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$ . Entonces,  $\{T(t) : t \geq 0\}$  posee atractor global  $\mathcal{A}$  si y sólo si es asintóticamente compacto y disipativo. Además, en este caso, si  $\mathcal{B}$  denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de  $X$ , entonces el atractor viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B) \quad (1.9)$$

**Demostración.** En primer lugar supongamos que existe el atractor global  $\mathcal{A}$  para  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Entonces, como hemos visto en la Sección 1.2 sabemos que es disipativo. Para ver que también es asintóticamente compacto, sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de puntos de  $X$  y  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números no negativos con  $t_n \rightarrow \infty$ .

Por un lado, considerando el conjunto acotado  $B := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

y, en particular, para todo  $x' \in B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(t_n)x', \mathcal{A}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0. \quad (1.10)$$

Entonces, aplicando la de definición de límite de sucesiones en (1.10), para cada  $j \in \mathbb{N}$  se puede encontrar un punto  $z_j \in \mathcal{A}$  de manera que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j) < \frac{1}{j}. \quad (1.11)$$

Ahora, como  $\mathcal{A}$  es un conjunto compacto, la sucesión  $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión convergente. Denotando dicha subsucesión de la misma manera, sea  $x \in \mathcal{A}$  su límite. Entonces por (1.11),

$$d\left(T(t_{n_j})x_{n_j}, x\right) \leq d\left(T(t_{n_j})x_{n_j}, z_j\right) + d(z_j, x) < \frac{1}{j} + d(z_j, x),$$

es decir,  $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ , probando la compacidad asintótica de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es asintóticamente compacto y disipativo. Sea

$$\mathcal{A} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$$

el conjunto definido en (1.9) y probemos que  $\mathcal{A}$  es, efectivamente, el atractor global de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .

En primer lugar, notemos gracias al Teorema 1.1, para cada  $B \in \mathcal{B}$ , el conjunto  $\omega(B)$  es no vacío, compacto, invariante y atrae a  $B$  por la acción de  $T(\cdot)$ . De ahí, vemos que  $\mathcal{A}$  es invariante, por ser unión de conjuntos invariantes, y además, atrae a todos los acotados de  $X$  por medio de  $T(\cdot)$ . Luego, el teorema quedará demostrado en cuanto probemos la compacidad de  $\mathcal{A}$ , lo que haremos usando la disipatividad de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ .

En efecto, sea  $D \subset X$  un subconjunto acotado que absorbe a todos los subconjuntos acotados de  $X$  por medio de  $T(\cdot)$ . Tomando la clausura de  $D$ , si hiciera falta, podemos suponer que  $D$  es cerrado, entonces su propiedad de absorción junto con la propiedad (2.) en el Teorema 1.1, nos dicen que  $\omega(B) \subset D$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ . Luego  $\mathcal{A} \subset D$  y por tanto  $\overline{\mathcal{A}} \subset D$  lo que implica que  $\omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D)$ . Como  $\mathcal{A}$  es invariante se tiene que  $\mathcal{A} \subset \omega(D)$  y así se puede concluir la cadena de inclusiones

$$\mathcal{A} \subset \omega(\overline{\mathcal{A}}) \subset \omega(D) \subset \mathcal{A},$$

y consecuentemente  $\omega(D) = \mathcal{A}$ , concluyendo la compacidad de  $\mathcal{A}$ , teniendo en cuenta el Teorema 1.1. |

## 1.5 Las ecuaciones de Lorenz

A continuación vamos a ver un ejemplo clásico de existencia de atractor global. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases} \quad (1.12)$$

con  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  constantes positivas.

Como estamos en  $\mathbb{R}^3$  los conjuntos cerrados y acotados son compactos, por lo tanto sólo necesitamos encontrar un conjunto cerrado, acotado y absorbente para probar la existencia del atractor global. Veamos que existe una bola centrada en  $(0, 0, r + \sigma)$  suficientemente grande que absorbe cualquier solución del sistema (1.5).

Consideramos la función  $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$ . Si consideramos ahora  $V(t) = V(x(t), y(t), z(t))$ , donde  $(x(t), y(t), z(t))$  es una solución de la ecuación de Lorenz, su derivada temporal es

$$\frac{dV}{dt} = 2xx' + 2yy' + 2(zr - \sigma)z' = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(r + \sigma)z \leq -\alpha V + b(r + \sigma)^2$$

donde  $\alpha = \min(2\sigma, b, 2)$ .

Aplicando la desigualdad de Gronwall,

$$V(t) \leq \left( V_0 - \frac{b(r + \sigma)^2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha} \leq V_0 e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}, \quad (1.13)$$

siendo  $V_0 = V(x_0, y_0, z_0)$  los datos iniciales del problema. Tenemos que si  $|z| < r + \sigma$ , entonces  $\|(x, y, z)\|_{\mathbb{R}^3} \leq V(x, y, z)$ , por lo tanto

$$\|(x(t), y(t), z(t))\|_{\mathbb{R}^3} \leq V_0 e^{-\alpha t} + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}.$$

Por consiguiente, si consideramos la bola  $B$  de centro  $(0, 0, r + \sigma)$  y radio  $\varepsilon + \frac{2b(r + \sigma)^2}{\alpha}$  (con  $\varepsilon > 0$ ), tenemos que cuando una solución entra en esta bola, permanece en ella para todo tiempo posterior. Por otro lado, si la solución comienza fuera de dicha bola, debido a (1.13), el valor de  $V(t)$  irá disminuyendo hasta que la solución entre de nuevo en  $B$ .

La Figura 1.5 nos muestra el espacio de fases de este problema, donde podemos ver la estructura del atractor global para unos valores concretos de los parámetros. En este caso, el espacio de fases es  $\mathbb{R}^3$ , en el cual no representamos la variable temporal, sino únicamente los valores de los puntos  $(x(t), y(t), z(t))$ .

Para mayor comprensión mostraremos también las trayectorias de las soluciones de la solución del sistema (1.12)

Los códigos que hemos usado vienen explicados en el Anexo.

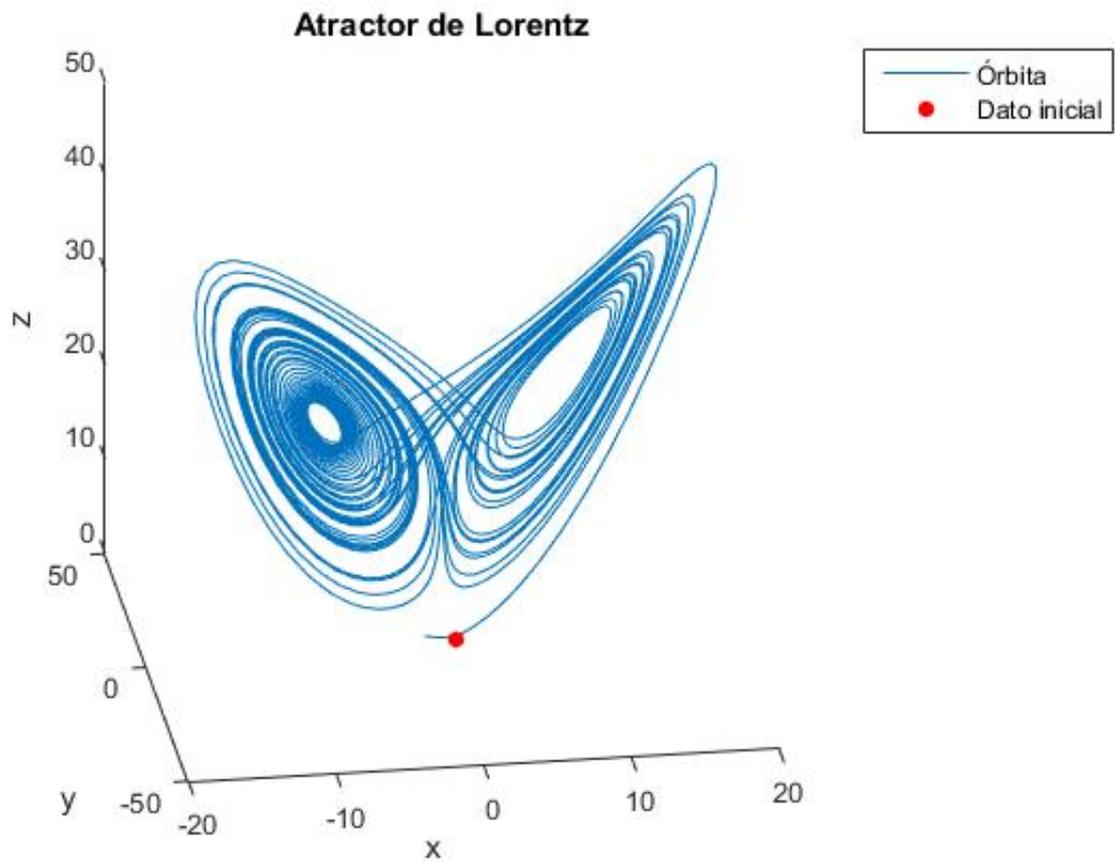


Figura 1.1: Atractor de Lorenz para el sistema (1.12) con valores  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = \frac{8}{3}$  y con valor inicial  $(-1,3,-1)$ . Podemos observar la clásica estructura de alas de mariposa con una compleja estructura. En realidad, se trata de un conjunto fractal.

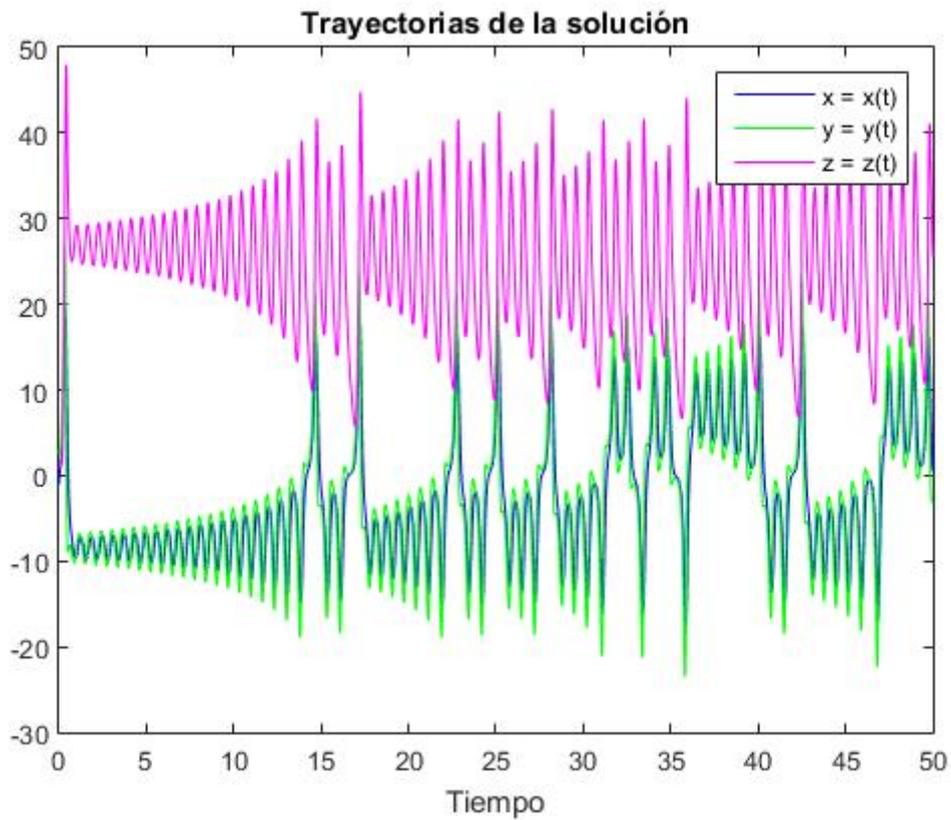


Figura 1.2: Trayectorias de Lorenz para el sistema (1.12) con valores  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = \frac{8}{3}$  y con valor inicial  $(-1, 3, -1)$ .



## 2 | Semigrupos Gradientes

Presentaremos en este capítulo la clase de semigrupos que va a ser el objetivo de nuestros resultados posteriormente, y que consiste en caracterizar los sistemas por medio de su dinámica.

La dinámica de los semigrupos gradientes queda descrita por medio de una función auxiliar llamada función de Lyapunov, que posee propiedades muy particulares y, por eso, sugiere que la clase de los sistemas gradientes debe componer una clase bastante notable de sistemas.

En este capítulo nos proponemos mostrar que, efectivamente, estos sistemas poseen una dinámica que permite ser comprendida de manera bastante detallada.

### 2.1 Definición de semigrupo gradiente

Recordemos que, dados un subconjunto  $A \subset X$  y un número positivo  $\epsilon > 0$ , su  $\epsilon$ -entorno, denotado por  $\mathcal{O}_\epsilon(A)$ , es la unión de todas las bolas abiertas centradas en sus puntos y poseyendo radio  $\epsilon$ , es decir,

$$\mathcal{O}_\epsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B(a; \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}.$$

**| Definición 2.1.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $E$  un conjunto invariante.

- a) Se dice que  $E$  es un invariante aislado si existe  $\delta$  tal que  $E$  es el invariante maximal en  $\mathcal{O}_\delta(E)$ , es decir, si  $F$  es un conjunto invariante en  $\mathcal{O}_\delta(E)$ , entonces  $F \subset E$ .
- b) Se dice que  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  es una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados si cada  $E_i$  es un conjunto invariante aislado según (a) y existe  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{O}_\delta(E_i) \cap \mathcal{O}_\delta(E_j) = \emptyset \forall i, j \in \{1 \dots n\} i \neq j$

**Observación 2.1.** Si  $E$  es un conjunto invariante,  $E \subset A$ . Además,  $\overline{E}$  es también invariante. En efecto,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n \in E, \quad T(t)x = T(t) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Como  $x \in \overline{E} \Rightarrow T(t)x \in \overline{E}$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n \in \overline{E}$  con esto llegamos a que  $T(t)\overline{E} \subseteq \overline{E}$

Como  $x \in \overline{E}$ ,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , luego  $x_n \in \overline{E}$  tenemos que  $x_n = T(t)y_n$ , con lo que  $y_n \in E$ . Sabemos que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)y_n = T(t) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , luego llegamos a que  $y \in \overline{E}$

$$\left. \begin{array}{l} x \in T(t)\overline{E} \\ \overline{E} \subseteq T(t)\overline{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{E} = T(t)\overline{E}$$

Por lo tanto, los invariantes aislados acotados son cerrados.

**Definición 2.2.** Diremos que una solución global  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es una solución estacionaria o un punto de equilibrio de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  cuando es una aplicación constante, es decir, cuando es de la forma  $\xi(t) = z^*$  para todo real  $t$  y un cierto punto  $z^* \in X$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  una familia disjunta de invariantes aislados. Diremos que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo gradiente generalizado respecto de  $E$  si existe una función  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

1.  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua
2.  $V$  es no creciente a lo largo de las soluciones, es decir, para todo  $x \in X$

$$[0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow V(T(t)x)$$

es no creciente

3. Si para algún  $x \in X$  se tiene que  $V(T(t)x) = V(x) \forall t \geq 0$ , entonces  $x \in E_i$  para algún  $E_i \in \mathbb{E}$  donde  $i \in \{1, \dots, n\}$
4.  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  es constante sobre cada  $E_i \in \mathbb{E}$ , es decir,  $\exists L_i \in \mathbb{R}$ , tal que  $V(x) = L_i, \forall x \in E_i$  donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

A  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  se le denomina función de Lyapunov generalizada.

En el caso en que  $\mathbb{E} = \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$  sean equilibrios, se dice que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo gradiente y la función  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lyapunov.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ .

Consideremos el (PC)

$$\begin{cases} x' = -\nabla f(x), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (2.1)$$

Tenemos que  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$  siendo  $\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right)$  el gradiente de  $f$  en  $x$

Supongamos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , con  $\nabla f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $(\nabla f : x \rightarrow \nabla f(x))$  que en  $C^1$  es localmente Lipschitziana, luego existe solución global única y podemos definir  $T(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$   $T(t)x_0$  solución de (2.1)

Supongamos que  $\nabla f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  posee un número finito de ceros en  $\mathbb{R}^N$ ,  $\nabla f(z^*) = 0$  que denotamos por  $\mathbb{E} = \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$

**Lema 2.1.**  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lyapunov para el semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$

*Demostración.*

1.  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, ya que es de clase  $C^1$ , y  $\mathbb{E} = \{z_1^*, \dots, z_n^*\}$  es el conjunto de todos los puntos de equilibrio de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . Luego también se verifica la propiedad (4) de la Definición 2.3. Por tanto sólo hace falta probar las propiedades (2) y (3).
2. En efecto, dado  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , tenemos que la función real  $[0, \infty) \ni t \rightarrow f(T(t)x_0) = f(x(t, x_0)) \in \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  y entonces, la regla de la cadena y el hecho de que  $x(\cdot, x_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  es la solución del problema (2.1) nos conducen a que, para todo  $t > 0$ ,

$$\frac{d}{dt}(f \circ x(\cdot, x_0))(t) = \nabla f(x(t, x_0)) \cdot \dot{x}(t, x_0) = -|\nabla f(x(t, x_0))|^2 \leq 0, \quad (2.2)$$

donde el punto " $\cdot$ " representa el producto escalar euclídeo en  $\mathbb{R}^N$  y  $|\cdot|$  su norma correspondiente.

La igualdad (2.2) implica que la derivada de la función

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow f(T(t)x_0) = f(x(t, x_0)) \in \mathbb{R}$$

es no positiva, luego dicha función debe ser no creciente, quedando establecida la condición (2) en la Definición 2.3.

3. Supongamos que  $x_0 \in \mathbb{R}N$  cumpla que  $f(T(t)x_0) = f(x_0)$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces (2.2) nos muestra que para todo  $t > 0$  se tiene

$$0 = \frac{d}{dt}f(x_0) = \frac{d}{dt}(f \circ x(\cdot, x_0))(t) = -|\nabla f(x(t, x_0))|^2 = -|\dot{x}(t, x_0)|^2,$$

o sea, que  $\dot{x}(t, x_0) = 0$  para todo  $t > 0$ , lo que implica que  $x(t, x_0) = x_0$  para todo  $t > 0$ , es decir, que  $x_0 \in \mathbb{E}$ , completando así la prueba. |

Las funciones de Lyapunov juegan un papel importante a la hora de caracterizar la estructura del atractor. Veremos que hablar de funciones de Lyapunov y de sistemas gradientes es equivalente.

## 2.2 Estructura de los semigrupos gradientes

Los sistemas dinámicos gradientes forman uno de los pocos ejemplos de sistemas que se conocen en los que se puede describir de manera bastante precisa la dinámica que poseen. Por ello desarrollaremos el comportamiento de las soluciones globales, para el cual antes definiremos el concepto de estructuras homoclinas.

**Definición 2.4.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semigrupo y  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  familia disjunta de conjuntos invariantes aislados.

*Una estructura homoclina respecto a  $\mathbb{E}$  consiste en un subconjunto*

$$\{E_{l_1}, \dots, E_{l_k}\} \subseteq \mathbb{E}$$

*junto a una familia de soluciones globales  $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : 1 \leq j \leq k\}$  tales que, poniendo  $E_{l_{k+1}} := E_{l_1}$  se cumple, para todo  $j = 1, 2, \dots, k$  que:*

1. Para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $t_j \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi_j(t_j) \notin (E_{l_j} \cup E_{l_{j+1}})$  y
- 2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_j(t), E_{l_j}) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_j(t), E_{l_{j+1}}) = 0.$$

**Proposición 2.1.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  que posee atractor global  $\mathcal{A}$  y  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  su función de Lyapunov correspondiente. Entonces, se verifican las propiedades siguientes:

1. Si  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es una solución global acotada de  $T(\cdot)$  entonces, existen  $E_{l_1}, E_{l_2} \in \mathbb{E}$  tales que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), E_{l_1}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), E_{l_2}) = 0.$$

2. No existen estructuras homoclinas asociadas a  $\mathbb{E}$ .

*Demostración.*

1. En efecto, sea  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  una solución global acotada para  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , entonces, como, por (2) de la Definición 2.3, la función  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow V(\xi(t)) \in \mathbb{R}$  es monótona, y del hecho de que  $\xi(t)$  está en el compacto  $\mathcal{A}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se sigue que existen los límites

$$L := \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\xi(t)) \quad \text{y} \quad l := \lim_{t \rightarrow \infty} V(\xi(t)). \quad (2.3)$$

Sean  $\alpha(\xi)$  y  $\omega(\xi)$ , respectivamente, los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límites asociados a la solución  $\xi$ . De (2.3) y de la caracterización de los conjuntos límites en términos de límites de sucesiones, se sigue que  $V$  restringida a  $\alpha(\xi)$  es constante e igual a  $L$  y restringida a  $\omega(\xi)$  es constante e igual a  $l$ . Entonces, dado  $x \in \omega(\xi)$ , como  $\omega(\xi)$  es invariante,  $T(t)x \in \omega(\xi)$  para todo  $t \geq 0$ , de donde se sigue que  $V(x) = V(T(t)x) = l$  para todo  $t \geq 0$  y por (3) de la Definición 2.3 esto obliga a que  $x$  esté en  $E_{i_0}$  para algún  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ahora, afirmamos que  $\omega(\xi)$  debe estar contenido en  $E_{i_0}$ . En efecto, en caso contrario, sea  $z \in \omega(\xi) \setminus E_{i_0}$ , repitiendo lo que hemos hecho antes, se concluye que  $z \in E_{i_1}$  para algún  $i_1 \neq i_0$ . Así, el conjunto  $\omega(\xi)$  posee un punto en  $E_{i_0}$  y otro en  $E_{i_1}$ . Pero, considerando  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{O}_\varepsilon(E_r) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(E_k) \neq \emptyset$  siempre que  $r \neq k$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$ , por el carácter conexo de  $\omega(\xi)$  existe un valor  $y \in \omega(\xi)$  (pues la función distancia a un subconjunto es continua) con  $\text{dist}(y, E_{i_0}) = \varepsilon$ . Como  $\text{dist}(E_{i_k}, E_{i_0}) > \varepsilon$ , se deduce que  $y$  no puede estar en ninguno de los elementos de  $E_k$ , lo cual es una contradicción, tras repetir el argumento cambiando  $x$  por  $y$ . Resultando que  $\omega(\xi) \subset E_{i_0}$ .

De manera semejante, se concluye que  $\alpha(\xi)$  está contenido en  $E_{j_0}$  para algún  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$

2. Sean  $\{E_{l_1}, \dots, E_{l_k}\} \subset S$  y  $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : j = 1, \dots, k\}$  un conjunto de soluciones globales, formando una estructura homoclina en el atractor  $\mathcal{A}$  de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , es decir, poniendo  $E_{l_{k+1}} := E_{l_1}$ , se tiene, para cada  $j = 1, 2, \dots, k$ , que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_j(t), E_{l_j}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_j(t), E_{l_{j+1}}) = 0. \quad (2.4)$$

Sean, de acuerdo a la propiedad (4), para cada  $j = 1, 2, \dots, k, k+1$ ,  $L_j$  el valor constante que la función  $V$  toma  $E_{l_j}$ . De la continuidad de  $V$  y de la propiedad (2) se sigue que, necesariamente,  $L_1 \geq L_2 \geq \dots, L_k \geq L_{k+1} = L_1$ , luego todos los  $L_j$ 's son iguales entre sí y, digamos, que valgan  $L$ .

Por otra parte, fijado  $j = 1, 2, \dots, k$  como la solución  $\xi_j$  cumple  $L_j \geq V(\xi_j(t)) \geq L_{j+1}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y  $L_j = L_{j+1} = L$ , entonces, para todo real  $s$   $V(T(t)\xi_j(s)) = V(\xi_j(t+s)) = L = V(\xi_j(s))$  para todo  $t \geq 0$ . Ahora, la condición (3) en la Definición 2.3 dice que, con estas condiciones,  $\xi_j(s) \in E$  para algún  $E \in S$ , de donde se concluye fácilmente que  $\xi(s) \in E$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Luego, por (2.4),  $E_{l_j} = E_{l_{(j+1)}} = E$ , por la arbitrariedad con la que fue elegido  $j = 1, 2, \dots, k$ , concluimos que todos los invariantes  $E_{l_1}, \dots, E_{l_k}$  son iguales entre sí, denotémoslos  $E$ , y que, por lo tanto, todas las soluciones  $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X, j = 1, \dots, k$  están contenidas en  $E$ , lo que está en contradicción con el hecho de que  $\{E_{l_1}, \dots, E_{l_k}\} \subset S$  juntamente con que  $\{\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X : j = 1, \dots, k\}$  constituyen una estructura homoclina, estableciendo la propiedad (2) y completando la demostración. |

Con la proposición que acabamos de ver y con teoremas vistos en el capítulo anterior podemos obtener alguna información más sobre la estructura geométrica de los atractores de los semigrupos gradiente. Para ello, antes vamos a definir lo que se conoce como conjuntos estables e inestables.

**| Definición 2.5.** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  y  $E$  un conjunto invariante por él. Se define:

1. El conjunto inestable de  $E$  como

$$W^u(E) := \{x \in X : \text{existe } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ solución global con } \xi(0) = x$$

$$\text{tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), E) = 0\},$$

2. El conjunto estable de  $E$  como

$$W^s(E) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, E) = 0 \right\}.$$

**Observación 2.2.** Si  $x \in W^u(E)$  y  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es una solución global para  $T(\cdot)$  con  $\xi(0) = x$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), E) = 0$ , entonces  $\xi(s) \in W^u(E)$  para todo real  $s$ , puesto que, dado  $s \in \mathbb{R}$ , definiendo  $\xi_s : \mathbb{R} \rightarrow X$  por  $\xi_s(t) := \xi(t + s)$  para cada real  $t$ , es inmediato que  $\xi_s : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global para  $T(\cdot)$ , y además cumple  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_s(t), E) = \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t + s), E) = 0$ .

**Teorema 2.1.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo gradiente generalizado respecto de la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  acotados. Si  $\{T(t) : t \geq 0\}$  posee atractor global  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{A}$  se escribe como la unión de los conjuntos inestables de los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a  $\mathbb{E}$ , es decir,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^n W^u(E_j). \quad (2.5)$$

**Demostración.**  $\mathcal{A}$  es la unión de todas las soluciones globales acotadas. Además, si  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global acotada,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), E_i) = 0$  para cierto  $i \in \{1, \dots, n\}$  de donde  $\xi(t) \in W^u(E_i)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , por lo que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^n W^u(E_i)$$

Recíprocamente, sea  $x \in W^u(E_i)$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sea  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  solución global con  $\xi(0) = x$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), E_i) = 0$ . Entonces como  $E_i$  es acotado, para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$  es acotado.

Como existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), E_j) = 0$ , para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$  es también acotado. Por tanto,  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global acotada, en particular,  $x \in \mathcal{A}$  |

Si un semigrupo no lineal  $T(\cdot)$  posee atractor global  $\mathcal{A}$  y una familia finita disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  de manera que el atractor admite la representación (2.5), se suele decir que  $T(\cdot)$  posee atractor de tipo gradiente.

## 2.3 Semigrupos Dinámicamente Gradientes

**Definición 2.6.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  que posee atractor global  $\mathcal{A}$ . Sea  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados. Diremos que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es dinámicamente gradiente respecto a  $\mathbb{E}$  si

(G1) para toda solución  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  existen  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), E_i) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), E_j)$$

(G2) No existen estructuras homoclinas.

**Observación 2.3.** Hemos visto que si  $T(t)$  es gradiente generalizado entonces  $T(t)$  es dinámicamente gradiente.

**Teorema 2.2.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  con atractor global  $\mathcal{A}$  y sea  $E = \{E_1, \dots, E_n\}$  una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados. Entonces  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo gradiente generalizado respecto a  $E$  si y solo si es dinámicamente gradiente respecto de  $E$ .

Además, la función de Lyapunov puede ser escogida de modo que para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$

$$V \in C^1(X) \quad \text{donde} \quad V(x) = k, \quad \forall x \in E_k$$

y estrictamente decreciente fuera de  $E$

**Demostración.** Ver [2] |

**Definición 2.7.**  $\{T_n(t) : t \geq 0\}_{n \in (0,1]}$  se dice colectivamente asintóticamente compacto si para toda  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , tal que  $n_k \rightarrow 0$ , entonces  $\{x_k\} \subseteq X$  acotada y  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ , con  $t_k \rightarrow \infty$  entonces,  $\{T_{n_k}(t_k)x_k\}$  es precompacta

Con esto hemos visto que los semigrupos dinámicamente gradientes son estables bajo perturbaciones

**Teorema 2.3.** Sean  $\{T_n(t)\}_{n \in (0,1], t \geq 0}$  una familia colectivamente asintóticamente compacta de semigrupos no lineales en  $X$ . Sea  $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$  un semigrupo límite, tal que

$$\limsup_{n \rightarrow 0} \sup_{x \in K} \sup_{t \in [0, \tau]} \text{dist}(T_n(t)x, T_0(t)x) = 0, \quad \forall \tau \geq 0, \forall K \subset X \text{ compacto}$$

**Demostración.** Ver [2] |

**Teorema 2.4.** Sea  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in (0,1]}$  una familia colectivamente asintóticamente compacta de semigrupos no lineales en un espacio métrico  $X$  convergiendo uniformemente sobre compactos a un semigrupo  $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ . Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

a) Para cada  $\eta \in [0, 1]$ , existe  $\mathcal{A}_\eta$  atractor global y

$$\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta \subseteq X \text{ es acotada.}$$

b) Existen  $\mathbb{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, \dots, E_{n,\eta}\} \subseteq \mathcal{A}_\eta$  familia disjunta de conjuntos invariantes aislados, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(E_{i,n}, E_{i,0}) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

c)  $\{T_0(t)\}_{t \geq 0}$  es dinámicamente gradiente respecto de la familia  $\mathbb{E}_0 = \{E_{1,0}, E_{2,0}, \dots, E_{n,0}\}$ .

Bajo estas condiciones, existe un  $\eta_0 \in (0, 1]$  tal que para todo  $\eta \in [0, \eta_0]$  el semigrupo  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$  es dinámicamente gradiente respecto de la familia  $\mathbb{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, \dots, E_{n,\eta}\}$ .

**Demostración.** Comencemos probando la propiedad (G1) es estable bajo perturbación, es decir, que existe  $\eta_1 \in (0, 1]$  de manera que para todo  $\eta \in [0, \eta_1]$  el semigrupo no lineal  $(T_\eta(\cdot), \mathbb{E})$  satisface (G1).

En efecto, en primer lugar, obsérvese que, de la hipótesis (b) se puede obtener fácilmente la existencia de un  $\delta \in (0, \delta_0)$ , donde  $\delta_0 > 0$  es tal que los  $\delta_0$ -entornos de los conjuntos  $\mathbb{E}_0$  son disjuntos entre sí, y un  $\eta' \in (0, 1]$  cumpliendo que, si para  $\eta \in [0, \eta']$ ,  $\xi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global para  $T_\eta(\cdot)$  y existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  de manera que

$$d(\xi_\eta(t), \mathbb{E}_\eta) < \delta \text{ para todo } t \geq t_0,$$

entonces, simplemente de la maximalidad de los invariantes, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_\eta(t), \mathbb{E}_\eta) = 0 \quad (2.6)$$

De esta observación, vemos que existe  $\eta_1 \in (0, \eta']$  tal que para  $\eta \in [0, \eta_1]$  si  $\xi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global para  $T_\eta(\cdot)$ , entonces existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  de modo que

$$\sup_{t \geq t_0} d(\xi_\eta(t), \mathbb{E}_0) < \delta$$

y observemos que, por lo que hemos dicho antes, si esto es cierto, la propiedad (G1) resulta estable.

Si esto no se verificase, se obtiene la existencia de una sucesión  $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $(0, 1]$  con  $\eta_k \rightarrow 0^+$  y para cada natural  $k$  una solución  $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow X$  de  $T_{\eta_k}(\cdot)$ . Con lo cual, para todo natural  $k$  y todo real  $t_0$ , se tiene que

$$\sup_{t \geq t_0} d(\xi_k(t), \mathbb{E}_0) \geq \delta \quad (2.7)$$

Por otro lado, podemos suponer la existencia de una solución global  $\xi^0 : \mathbb{R} \rightarrow X$  de  $T_0(\cdot)$  tal que  $\xi_k \rightarrow \xi^0$  uniformemente sobre compactos de la recta, y del hecho

que  $T_0(\cdot)$  es dinámicamente gradiente, se sigue la existencia de un invariante aislado  $E_{i_0,0} \in \mathbb{E}_0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^0(t), E_{i_0,0}) = 0.$$

Entonces, dado  $r \in \mathbb{N}$  (con  $\frac{1}{r} < \delta$ ) existen  $k_r \in \mathbb{N}$  y  $t_r \in \mathbb{R}$  de forma que

$$d(\xi_{k_r}, E_{i_0,0}) < \frac{1}{r} \text{ siempre que } k \geq k_r$$

y, debido a (2.7), se tiene la existencia de  $t'_r > t_r$  tal que, por el Teorema del Valor intermedio, llegamos a que

$$d(\xi_{k_r}(t), E_{i_0,0}) < \delta \text{ para todo } t \in [t_r, t'_r)$$

y

$$d(\xi_{k_r}(t'_r), E_{i_0,0}) = \delta.$$

Como  $t'_r - t_r \rightarrow \infty$ , podemos suponer la existencia de una solución global  $\xi^1 : \mathbb{R} \rightarrow X$  para  $T_0(\cdot)$  tal que, poniendo  $\xi_r^1(t) := \xi_{k_r}(t + t'_r)$  con  $t \in [-(t'_r - t_r), \infty)$ , se tiene que  $\xi_r^1(t) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xi^1(t)$  uniformemente para  $t$  en compactos de la recta. Por la forma en la que  $\xi^1 : \mathbb{R} \rightarrow X$  fue construida debemos tener

$$d(\xi^1(t), E_{i_0,0}) \geq \delta \text{ siempre que } t \leq 0,$$

y la propiedad (G1) del semigrupo de tipo gradiente  $T_0(\cdot)$  junto con la forma en la que  $\delta_0$  fue escogido, aseguran que, necesariamente,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi^1(t), E_{i_0,0}) = 0$$

y como  $d(\xi^1(0), E_{i_0,0}) = \delta$ , (G1) y (G2) obligan a que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^1(t), E_{i_1,0}) = 0, \tag{2.8}$$

para un cierto invariante aislado  $E_{i_1,0} \in \mathbb{E}_0$  con  $i_1 \neq i_0$ .

Ahora, como  $\xi_r^1(t) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xi^1(t)$  uniformemente para  $t$  en compactos de  $\mathbb{R}$ , de (2.8) se deduce que para  $m \in \mathbb{N}$  (con  $\frac{1}{m} < \delta$ ) podemos encontrar un  $r_m \in \mathbb{N}$  y un  $t_m \in \mathbb{R}$  tales que

$$d(\xi_{r_m}^1(t_m), E_{i_1,0}) < \frac{1}{m} \text{ siempre que } r \geq r_m$$

y de (2.7), igualmente al caso anterior, se sigue la existencia de  $t'_m > t_m$  de modo que

$$d(\xi_{r_m}^1(t), E_{i_1,0}) < \delta \text{ para todo } t \in [t_m, t'_m)$$

y

$$d(\xi_{r_m}^1(t'_m), E_{i_1,0}) = \delta.$$

De forma análoga a lo que hemos hecho en el caso anterior, como  $t'_m - t_m \rightarrow \infty$ , podemos suponer la existencia de una solución global  $\xi^2 : \mathbb{R} \rightarrow X$  para todo  $T_0(\cdot)$ , tal que, definiendo  $\xi_m^2(t) := \xi_{r_m}(t + t'_m)$  con  $t \in [-(t'_m - t_m), \infty)$ , se tiene que  $\xi_m^2(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi^2(t)$  uniformemente para  $t$  en compactos de la recta. Debido a la construcción de  $\xi^2 : \mathbb{R} \rightarrow X$  debemos tener

$$d(\xi^2(t), E_{i_0,0}) \geq \delta \text{ siempre que } t \leq 0,$$

y la propiedad (G1) que posee el semigrupo de tipo gradiente  $T_0(\cdot)$  conjuntamente con la manera en la que  $\delta_0$  fue elegido, implican que, necesariamente

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi^2(t), E_{i_1,0}) = 0,$$

y como  $d(\xi^2(0), E_{i_1,0}) = \delta$ , (G1) y (G2) obligan a que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^1(t), E_{i_2,0}) = 0,$$

para un cierto invariante aislado  $E_{i_2,0} \in \mathbb{E}_0$  con  $i_2 \neq i_1$ .

Observemos ahora que, si ocurriera  $i_2 = i_0$ , habríamos obtenido una estructura homoclina en el atractor del semigrupo dinámicamente gradiente  $T_0(\cdot)$ , lo que evidentemente no es posible. Luego podemos repetir todo este razonamiento, lo cual deberá parar tras un número finito de pasos ya que  $\mathbb{E}_0$  es finito, y como vimos que estamos obligados a encontrar una estructura homoclina en el atractor de  $T_0(\cdot)$  lo que es una contradicción y así vemos que nuestra afirmación inicial es cierta.

De manera análoga a como hemos hecho, cambiando el sentido hacia donde se mueve el tiempo podemos probar la siguiente afirmación:

Existe  $\eta_2 \in (0, \eta_1]$  (donde  $\eta_1$  satisface lo que acabamos de probar en el análisis anterior) tal que para  $\eta \in [0, \eta_2]$  si  $\xi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X$  es solución global para  $T_\eta(\cdot)$ , entonces existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  de modo que

$$\sup_{t \leq t_0} d(\xi_\eta(t), \mathbb{E}_0) < \delta,$$

donde  $\delta > 0$  se obtiene, igual que antes, a partir de las hipótesis (b), entonces, simplemente de la maximalidad de los invariantes, se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_\eta(t), \mathbb{E}_\eta) = 0,$$

lo que establecerá la estabilidad de (G1).

A continuación probemos que existe  $\eta_0 \in (0, \eta_2]$  ( $\eta_2 > 0$  es la estabilidad de (G1) se cumple, por lo que probamos anteriormente) tal que para todo  $\eta \in [0, \eta_0]$  el atractor del semigrupo  $T_\eta(\cdot)$  no posee estructuras homoclinas.

En caso contrario, debido a que los conjuntos  $\mathbb{E}_\eta$  son finitos y poseen el mismo número de elementos, se concluye la existencia una sucesión  $\eta_k \rightarrow 0^+$ , una sucesión  $\{\mathbb{E}'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de colecciones de conjuntos con  $\mathbb{E}'_k := \{E_{l_1, \eta_k}, \dots, E_{l_p, \eta_k}\} \subset \mathbb{E}_{\eta_k}$  para todo natural  $k$ , y una sucesión de conjuntos de soluciones  $\{\xi_{k,j} : \mathbb{R} \rightarrow X : 1 \leq j \leq p\}_{k \in \mathbb{N}}$  tales que para cada natural  $k$  y cada  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $\xi_{k,j}$  es solución global de  $T_{\eta_k}(\cdot)$  cumpliendo, para cada natural  $k$  y  $j = 1, \dots, p$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_{k,j}(t), E_{l_j, \eta_k}) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_{k,j}, E_{l_{(j+1)}, \eta_k}) = 0,$$

donde para cada  $k$  hemos puesto  $E_{l_{(p+1)}, \eta_k} := E_{l_1, \eta_k}$ .

Cambiando a una sucesión, si hiciera falta, podemos suponer que para cada natural  $k$  y cada  $j = 1, 2, \dots, p$  existe un real  $t_k^j$  de manera que

$$d(\xi_{k,j}(t_k^j), E_{l_j, 0}) < \frac{1}{k}$$

y, observando que, según la prueba de estabilidad de (G1) obligatoriamente  $E_{l_j, \eta_k} \neq E_{l_{(j+1)}, \eta_k}$  para todo  $k$  y todo  $j$ , vemos que existe también  $t_k^{j'} > t_k^j$  de modo que

$$d(\xi_{k,j}(t), E_{l_j, 0}) < \delta \text{ siempre que } t \in [t_k^j, t_k^{j'})$$

y

$$d(\xi_{k,j}(t_k^{j'}), E_{l_j, 0}) = \delta.$$

Vemos que hemos creado todas las condiciones para poner en marcha el mismo argumento que hemos usado para concluir la estabilidad de (G1) y con esto queda demostrado el Teorema. |

## 2.4 Existencia de atractores para semigrupos gradientes

A continuación plantearemos un resultado sobre existencia de atractor en el caso en que el semigrupo es gradiente.

**| Teorema 2.5.** *Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo gradiente generalizado respecto de una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados acotados  $\mathbb{E} := \{E_1, \dots, E_n\}$ . Si  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un semigrupo eventualmente compacto y eventualmente acotado, entonces posee atractor global.*

*Demostración.* Puesto que los semigrupos eventualmente compactos y eventualmente acotados son asintóticamente compactos, el teorema quedará demostrado gracias al Teorema 1.5, simplemente probando que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es disipativo.

En efecto, sea

$$D_0 := \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_1(E_j).$$

Entonces,  $D_0$  es acotado, ya que cada  $E \in \mathcal{S}$  lo es. Como  $T(\cdot)$  es eventualmente acotado, existe  $\tau^* \geq 0$  tal que el conjunto

$$D := \gamma_{\tau^*}^+(D_0)$$

es acotado.

Con estas condiciones, vamos a probar que  $D$  cumple la condición de disipatividad. En primer lugar, notemos que, usando la compacidad y la acotación eventual de  $T(\cdot)$ , y un argumento enteramente análogo al de la demostración de la Proposición 2.1, se concluye que  $D_0$  tiene la propiedad de absorber a todos los puntos de  $X$  por medio de  $T(\cdot)$ , es decir, para cada punto de  $x \in X$  existe  $\tau_x \geq 0$  de manera que

$$T(t)x \in D_0 \text{ para todo } t \geq \tau_x \tag{2.9}$$

Por un lado, dado  $K \subset X$  un conjunto compacto, para cada  $x \in K$  sea  $\tau_x \geq 0$  tal que se cumpla (2.9). Como  $D_0$  es un conjunto abierto, para cada  $x \in K$ , por la continuidad del operador  $T(\tau_x) : X \rightarrow X$ , sea  $\delta_x > 0$  de manera que

$$T(\tau_x)\mathcal{O}_{\delta_x}(x) \subset D_0.$$

Por lo tanto, la definición del conjunto  $D$  nos muestra que

$$T(t)\mathcal{O}_{\delta_x}(x) \subset D \text{ para todo } t \geq \tau_x + \tau^*. \quad (2.10)$$

Por la compacidad de  $K$ , sean  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , una cantidad finita de puntos de  $K$ , de modo que poniendo para cada  $j = 1, 2, \dots, p$ , por simplicidad,  $\delta_j := \delta_{x_j}$  y  $\tau_j = \tau_{x_j}$ , se tiene

$$K \subset \bigcup_{j=1}^p \mathcal{O}_{\delta_j}(x_j).$$

Usando esto junto con (2.10) vemos que si  $\tau_K := \max_{1 \leq j \leq p} \tau_j$  entonces

$$T(t)K \subset D \text{ para todo } t \geq \tau^* + \tau_K. \quad (2.11)$$

Finalmente, por la compacidad eventual de  $T(\cdot)$ , sabemos que existe  $t_0 > 0$  de modo que  $T(t_0) : X \rightarrow X$  es una aplicación compacta. Entonces, dado un acotado  $B \subset X$  cualquiera tenemos que el conjunto  $K := \overline{T(t_0)B}$  es un compacto que contiene a  $T(t_0)B$  y entonces (2.11) nos dice que

$$T(t)T(t_0)B \subset T(t)K \subset D \text{ para todo } t \geq \tau^* + \tau_K.$$

Luego, poniendo  $\tau(B) := t_0 + \tau_K + \tau^*$ , concluimos que

$$T(t)B \subset D \text{ para todo } t \geq \tau(B)$$

lo que demuestra que, efectivamente,  $D$  es un acotado que absorbe a todos los subconjuntos acotados de  $X$  por la acción de  $T(\cdot)$ , y consecuentemente,  $T(\cdot)$  es disipativo. |

A continuación veremos cómo relacionar el atractor global con las variedades inestables de los puntos de equilibrio del sistema. Pero antes veamos que todas las soluciones globales acotadas están en el atractor.

**| Teorema 2.6.** *Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo en  $X$  y supongamos que posee atractor global  $\mathcal{A}$ . Entonces,  $\mathcal{A}$  es unión de todas las soluciones globales acotadas.*

*Demostración.* La demostración de este teorema es directa ya que el atractor global es el acotado invariante maximal en  $X$  y el conjunto  $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$  es un invariante acotado. Que por cada punto del atractor pasa una solución global acotada es consecuencia de la invarianza del mismo. |

**| Teorema 2.7.** *Sea  $K \subseteq X$  un compacto invariante, entonces tenemos que  $W^u(K) \subseteq \mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in W^u(K)$ . Por definición,  $x$  está en una solución global acotada que llamaremos  $\xi(t)$ . Sabemos que  $\text{dist}(\xi(-t), K)$  y  $\text{dist}(\xi(t), \mathcal{A})$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , por tanto la órbita es acotada y, por el Teorema 2.6, la solución global  $\xi(t)$  está en el atractor. |

Consideremos ahora las concreciones cuando  $E$  está formado por puntos estacionarios.

*Proposición 2.2.* Sea  $E$  el conjunto de los puntos fijos del semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  y supongamos que dicho semigrupo posee una función de Lyapunov en un conjunto  $\tilde{B}$  que es positivamente invariante y absorbente. Entonces  $\omega(u_0) \subseteq E$ , para todo  $u_0 \in X$ . En particular, si  $X$  es conexo y  $E$  es discreto,  $\omega(u_0) \in E$ .

*Demostración.* Para cada  $u_0 \in X$ , existe un  $t_0$  de modo que  $u_1 = T(t_0)u_0 \in \tilde{B}$ . Como  $\omega(u_0) = \omega(u_1)$ , considerando la trayectoria que empieza en  $u_1$ ,  $u(t) = T(t)u_1$ . Esto implica que  $u(t) \in \tilde{B}$ , para todo  $t \geq 0$  y que

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s>0} \{T(t)u_0 : t \geq s\}$$

es no vacío, compacto e invariante (Proposición 1.2).

Por otro lado,  $\Phi$  es constante en el conjunto  $\omega(u_0)$  ya que, por 1.

$$\Phi|_{\omega(u_0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(T(t)u_0) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \Phi(T(t)u_0).$$

Este límite existe porque  $\Phi$  es acotada inferiormente al ser  $T(t)u_0$  un subconjunto acotado  $\Phi$  y no creciente. Por la condición (2) de la Definición 2.3, el conjunto  $\omega(u_0)$  consiste sólo en puntos fijos de  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , es decir  $\omega(u_0) \subseteq E$ . Si suponemos que  $X$  es conexo (por lo tanto lo es también el conjunto  $\omega$ -límite de  $u_0$ ) y  $E$  discreto, entonces  $\omega(u_0)$  sólo puede ser un punto. |

En el siguiente teorema se muestra cuál es la estructura del atractor cuando exista una función de Lyapunov.

**| Teorema 2.8.** *Supongamos que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  tiene una función de Lyapunov  $\Phi$  en  $\mathcal{A}$ . Entonces*

$$\mathcal{A} = W^u(E). \tag{2.12}$$

*Si además  $\mathcal{A}$  es conexo y  $E$  es discreto, se tiene*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in E} W^u(z) \tag{2.13}$$

**Demostración.** Para empezar demostremos que  $W^u(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . Gracias al Teorema 2.7, tenemos que  $W^u(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ . Para el recíproco, sea  $u \in \mathcal{A}$ , por tanto podemos definir una solución global  $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en la que se encuentre  $u$ . Como toda la solución está en el atractor (por ser invariante) tenemos que  $dist(\xi(-t)u, \mathcal{A}) = 0$  para todo tiempo  $t$ , por tanto  $u \in W^u(\mathcal{A})$ .

Tenemos que la inclusión  $W^u(\xi) \subseteq \mathcal{A}$  se verifica siempre ya que

$$W^u(\xi) \subseteq W^u(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \quad (2.14)$$

Para ver el otro contenido vamos a definir el conjunto

$$\gamma(u) = \bigcap_{s < 0} \overline{\{T(t)u : t < s\}}$$

donde  $u$  es un punto del atractor.

Vamos a intentar seguir un razonamiento similar al de la demostración del teorema anterior. Tenemos que, por construcción,  $\gamma(u)$  es un conjunto compacto, no vacío e invariante. En efecto, sea  $x \in \gamma$ , por tanto  $T(t_k)u \xrightarrow{t_k \rightarrow -\infty} x$ . Aplicando ahora el semigrupo

$$T(\tau)x = T(\tau) \lim_{t_k \rightarrow -\infty} T(t_k)u = \lim_{t_k \rightarrow -\infty} T(\tau)T(t_k)u = \lim_{t_k \rightarrow -\infty} T(\tau + t_k)u = x,$$

por tanto  $\gamma(u) \subseteq \mathcal{A}$ .

Vemos que la función  $\Phi$  es constante en  $\gamma$ .

$$\Phi|_{\gamma(u)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} T(t)u = \sup_{t \in \mathbb{R}} T(t)u,$$

pues como  $\gamma(u) \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  es un compacto y la función es no creciente, existe el supremo. Por tanto  $\Phi$  es constante y  $\gamma(u) \subseteq \xi$ . Esto demuestra (2.12).

Asumamos ahora que  $E$  es discreto y que  $\mathcal{A}$  es conexo. De esto se deduce que  $\gamma(u)$  es conexo (al serlo  $\mathcal{A}$ ). Como  $\gamma(u) \subseteq \xi$  sólo puede ser un punto, obtenemos (2.13) █

Es importante conocer la dinámica del atractor pues nos dará información sobre la dinámica global. El siguiente resultado nos muestra cómo las trayectorias fuera del atractor crean una especie de "sombra" dentro de éste ya que se acercan tanto como queramos a ciertas *trayectorias globales*.

**Proposición 2.3.** Dada una trayectoria  $u(t) = T(t)u_0$ , un  $\epsilon > 0$  y un tiempo  $T_0 > 0$ , existe un tiempo  $\tau = \tau(\epsilon, T_0) > 0$  y un punto  $v_0 \in \mathcal{A}$  tales que

$$\|u(\tau + t) - T(t)v_0\|_X \leq \epsilon$$

para todo tiempo  $t$  que verifica  $0 \leq t \leq T_0$

**Demostración.** Como las trayectorias dependen de forma continua de los datos iniciales, dado un  $\epsilon$  y un  $T_0$  positivos, existe un  $\delta(\epsilon, T_0)$  de forma que dado un  $u_0 \in X$  y un  $v_0 \in \mathcal{A}$  con  $\|u_0 - v_0\|_X < \delta$ ,  $\|u(t) - v(t)\|_X \leq \epsilon$ . Como  $\mathcal{A}$  es compacto y atractor, existe un tiempo  $\tau$  y un  $v_0 \in \mathcal{A}$  de forma que  $\text{dist}(u(\tau), \mathcal{A}) = \|u(\tau) - v_0\| < \delta$ . Como la trayectoria  $v(t) = T(t)v_0$  está en el atractor para todo tiempo, tenemos que  $\|u(\tau + t) - T(t)v_0\|_X \leq \epsilon$  con  $t \in [0, T_0]$ . |

**Corolario 2.1.** Dada una trayectoria  $u(t) = T(t)u$ , existe una sucesión  $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$  que tiende a cero, una sucesión de tiempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_{n+1} - t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y una sucesión de puntos del atractor  $\mathcal{A}$ ,  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  de modo que

$$\|u(t) - T(t - t_n)v_n\|_X \leq \epsilon, \quad (2.15)$$

para todo  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Además los saltos  $\|v_{n+1} - T(t_{n+1} - t_n)v_n\|_X$  decaen hacia cero.

**Demostración.** Sabemos por el teorema anterior que dado un  $\epsilon_1$  y un tiempo  $T_0$ , existe un tiempo  $t_1$  y un elemento  $v_1 \in \mathcal{A}$  de forma que

$$\|u(t_1 + t) - T(t)v_1\|_X \leq \epsilon_1,$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ .

Definimos  $\epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{2}$ . Por tanto, para  $\epsilon_2$  y  $2T_0$ , existe un punto  $v_2 \in \mathcal{A}$  que verifica que

$$\|u(t_2 + t) - T(t)v_2\|_X \leq \epsilon_2,$$

para todo  $t \in [0, 2T_0]$ .

Podemos iterar este proceso tantas veces como queramos. Como desde  $u(t_1)$  hasta  $u(t_2)$  podemos llegar con una serie finita de intervalos de longitud  $T_0$  y en cada intervalo ocurre lo mismo, al hacer el cambio de variable  $t' = t_n + t$  tenemos que se cumple (2.15).

Veamos que los errores decaen a cero:

$$\|v_{k+1} - T(t_{k+1} - t_k)v_k\|_X \leq \|v_{k+1} - u(t_{k+1})\|_X + \|u(t_{k+1}) - T(t_{k+1} - t_k)v_k\|_X.$$

El primer sumando del lado derecho es menor que  $\epsilon_{k+1}$  ya que estamos en la situación en la que  $t = t_{k+1}$ . Análogamente el segundo sumando es menor que  $\epsilon_k$ , por lo que tenemos que los saltos tienden a cero. |

**Ejemplo 2.2.** La ecuación de Chafee-Infante es un caso específico de la ecuación de reacción-difusión unidimensional en el intervalo  $[0, \pi]$ , en el cual se puede ver la estructura del atractor.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \lambda(u - u^3) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Este ejemplo viene descrito con detalle en [13]

**Proposición 2.4.** si  $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ , entonces existen  $2n+1$  puntos fijos  $\phi_1^\pm, \dots, \phi_n^\pm$ . Las funciones  $\phi_j^\pm$  tienen  $j$  ceros en el intervalo  $(0, \pi)$ . Además, el atractor global de la ecuación de Chafee-Infante viene descrito como la unión de variedades inestables asociadas a estos equilibrios, es decir,

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\phi_i \in E} W^u(\phi_i)},$$

siendo  $E = \{\phi_0, \phi_1^\pm, \dots, \phi_n^\pm\}$ .

## 2.5 Continuidad del atractor

Para definir el atractor debemos tener en cuenta que su comportamiento bajo perturbaciones debe estar controlado, es decir, que a pequeños cambios en los datos o en el problema de partida esperamos un comportamiento similar, obteniendo así un objeto robusto y fiable. Esta robustez nos la garantiza la semicontinuidad inferior y superior. La semicontinuidad superior se tiene con bastante generalidad, pero la inferior sólo la encontramos para ciertos tipos de sistemas, como los sistemas gradientes, los cuales poseen, como hemos visto, una estructura específica.

Sea  $\{T_0(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo en el espacio de Banach  $X$ . Supongamos que el semigrupo posee un atractor global  $\mathcal{A}_0$ . Consideremos también una familia de semigrupos  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$  que depende del parámetro  $\eta$ . Esta familia es una perturbación de  $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ , que denotaremos como problema límite ya que  $T_\eta(t)$  convergerá en cierto sentido a  $T_0(t)$  cuando  $\eta \rightarrow 0$ .

### 2.5.1 Semicontinuidad superior

La semicontinuidad superior nos asegura que los atractores  $\mathcal{A}_\eta$  de los problemas perturbados no explotan o crecen indefinidamente. Para ello, nos asegura que estos atractores van convergiendo al interior del atractor del problema límite  $\mathcal{A}_0$  por medio de la semidistancia entre ambos.

**Definición 2.8.** Diremos que la familia  $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, \eta_0]\}$  es semicontinua superiormente a  $\mathcal{A}_0$  si  $\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ .

**Teorema 2.9.** Supongamos que para todo  $\eta \in [0, \eta_0]$  el semigrupo  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$  posee un atractor global  $\mathcal{A}_\eta$  y que existe un acotado  $B$  de  $X$  de modo que

$$\bigcup_{0 \leq \eta \leq \eta_0} \mathcal{A}_\eta \subseteq B.$$

Supongamos también que los semigrupos  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$  uniformemente en acotados del espacio  $X$ , es decir que dado un conjunto acotado  $Y \subseteq X$  y un tiempo  $t > 0$ ,

$$\sup_{y \in Y} \|T_\eta(t)y - T_0(t)y\|_X \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (2.17)$$

Entonces los atractores  $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, \eta_0]\}$  son semicontinuos superiormente a  $\mathcal{A}_0$ .

**Demostración.** Dado un  $\epsilon > 0$  veamos que  $T_\eta(t)B \subseteq N(\mathcal{A}_0, \epsilon)$  para cierto  $t > 0$  y todo  $\eta \leq \eta_\epsilon$ .

Como  $T_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0(t)$ , existe un  $\eta_\epsilon$  lo suficientemente pequeño para que

$$\sup_{x \in B} \|T_\eta(t)x - T_0(t)x\|_X < \epsilon,$$

por lo tanto tenemos que  $T_\eta(t)B \subseteq N(T_0(t)B, \epsilon)$  para todo tiempo y  $\eta \leq \eta_\epsilon(t)$ . Como  $\mathcal{A}_0$  atrae a  $B$ , existe un tiempo  $\tau(B, \epsilon) > 0$  de modo que para todo  $t \geq \tau$ ,  $T_0(t)B \subseteq \mathcal{A}_0$ . Así

$$T_\eta(t)B \subseteq N(\mathcal{A}_0, \epsilon),$$

con  $t \geq \tau$  y  $\eta \leq \eta_\epsilon(t)$ .

Aplicando la invarianza de los atractores y que  $\mathcal{A}_\eta \subseteq B$ ,

$$\mathcal{A}_\eta = T_\eta(t)\mathcal{A}_\eta \subseteq T_\eta(t)B \subseteq N(\mathcal{A}_0, \epsilon).$$

Con esto podemos concluir que  $\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ . |

### 2.5.2 Semicontinuidad inferior

Para que tuviéramos continuidad necesitamos la condición  $dist(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta)$  tendiera a cero cuando  $\eta \rightarrow 0$ . Esto nos aseguraría que los atractores no se colapsan cuando el parámetro tiende a cero. Sin embargo, este resultado sólo se conoce de forma general para sistemas gradientes. En estos casos el atractor, como hemos visto en el Teorema 2.8 es la unión de las variedades inestable de los puntos fijos del sistema.

Análogamente a la Definición 2.8

**Definición 2.9.** Diremos que la familia de conjuntos  $\{A_\eta : \eta \in [0, \eta_0]\}$  es semicontinua inferiormente a  $A_0$  si  $dist(A_0, A_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ .

**Teorema 2.10.** Supongamos las condiciones del Teorema 2.9 y

$$\mathcal{A}_0 = \overline{\bigcup_{z \in E} W^u(z)},$$

siendo  $E$  el conjunto de puntos fijos del sistema. Si las variedades inestables y los puntos fijos varían de forma continua con  $\eta$  cerca de 0 en cierto entorno de cada punto, entonces

$$dist(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (2.18)$$

**Demostración.** Por el Lema 2.7 en Carvalho et al. [13] es suficiente para comprobar (2.18) ver que dado un entorno de radio  $\epsilon > 0$  de cualquier punto de  $\mathcal{A}_0$  existe un punto de  $\mathcal{A}_\eta$  en él, para todo  $\eta$  menor o igual que cierto  $\eta^* > 0$ . Como  $\mathcal{A}_0$  es compacto, bastará que probemos esta condición para unos entornos de ciertos puntos finitos  $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}_0$ . Al ser el atractor de clausura de las variedades inestables de los puntos fijos, podemos tomar unos puntos  $y_k$  de forma que

$$\|x_k - y_k\|_X \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.19)$$

con  $y_k = T_0(t_k)z_k$  y  $z_k$  dentro de un pequeño entorno de un punto fijo.

Sea  $\delta > 0$  tal que si  $\|z_k - u\|_X \leq \delta$ , entonces

$$\|T_0(t_k)z_k - T_0(t_k)u\|_X \leq \frac{\epsilon}{4}$$

para todo  $k = 1, \dots, n$  y todo  $u \in X$ . Como las variedades inestables perturban localmente de forma continua cerca de 0, para un  $\eta$  suficientemente pequeño podemos encontrar puntos  $z_k^\eta$  de las variedades inestables que forman  $\mathcal{A}_\eta$  de manera que  $\|z_k^\eta - z_k\|_X < \delta$ . Con esto y la continuidad de  $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ , y  $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$  obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
& \left\| T_\eta(t)z_k^\eta - y_k \right\|_X = \left\| T_\eta(t_k)z_k^\eta - T_0(t_k)z_k \right\|_X \\
& \leq \left\| T_\eta(t_k)z_k^\eta - T_0(t_k)z_k^\eta \right\|_X + \left\| T_0(t_k)z_k^\eta - T_0(t_k)z_k \right\|_X \\
& \leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Con esta desigualdad tenemos que

$$\left\| T_\eta(t_k)z_k^\eta - x_k \right\|_X \leq \left\| T_\eta(t_k)z_k^\eta - y_k \right\|_X + \left\| y_k - x_k \right\|_X \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon,$$

completando la prueba. |

En este teorema hemos demostrado que si estamos en un sistema gradiente, tenemos la continuidad en la métrica de Hausdorff para los atractores, es decir,  $\text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \rightarrow 0$  si  $\eta \rightarrow 0$ .

## 2.6 Teoría de Morse-Conley

Vamos a estudiar algunos conceptos y resultados de Teoría de Morse-Conley, la cual desarrolla una descripción del atractor en relación a parejas invariantes de atractores-repulsos.

### 2.6.1 Primeras definiciones

**| Definición 2.10.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  con atractor global  $\mathcal{A}$ . Decimos que un subconjunto  $A \subset \mathcal{A}$  es un atractor local para  $T(\cdot)$  cuando existe  $\epsilon > 0$  de manera que  $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A$ .

Si  $A \subset \mathcal{A}$  es un atractor local, se define su repulsor complementario, indicado por  $A^*$ , como

$$A^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \emptyset\}$$

En estas condiciones, el par  $(A, A^*)$  se llama par atractor-repulsor.

**Proposición 2.5.** Sean  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  con atractor global  $\mathcal{A}$  y  $(A, A^*)$  un par atractor-repulsor para  $T(\cdot)$ . Entonces,  $\mathcal{S} :=$

$\{A, A^*\}$  es una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados de modo que  $\{T(t) : t \geq 0\}$  es un semigrupo de tipo gradiente respecto a ella.

### Construcción de una función de Lyapunov para un par atractor-repulsor

**Proposición 2.6.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $(X, d)$  con atractor global  $\mathcal{A}$ , y sea  $(A, A^*)$  una pareja atractor-repulsor en  $\mathcal{A}$ . Entonces, existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las cuatro propiedades siguientes:

- (i)  $f$  es una función continua (en todo el espacio  $X$ ).
- (ii)  $f$  es no creciente a lo largo de soluciones de  $T(\cdot)$ .
- (iii)  $f^{-1}(0) = A$  y  $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$ .
- (iv) Dado  $x \in X$ , si  $f(T(t)x) = f(x)$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $x \in (A \cap A^*)$ .

En estas condiciones, dicha función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina función de Lyapunov asociada al par atractor-repulsor  $(A, A^*)$ .

### Descomposición de Morse

**Definición 2.11.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  poseyendo atractor global  $\mathcal{A}$ . Dada una cadena creciente formada por  $n+1$  atractores locales de la forma

$$\emptyset =: A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n := \mathcal{A},$$

y considerando la cadena decreciente de sus repulsores complementarios

$$\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \dots \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A},$$

poniendo, para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ , la  $n$ -upla ordenada

$$\mathbb{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$$

se llama una descomposición de Morse del atractor  $\mathcal{A}$  y los conjuntos  $E_j$  los conjuntos de Morse de esta descomposición.

El siguiente resultado es fundamental para construir una descomposición de Morse de un semigrupo dinámicamente gradiente.

**Teorema 2.11.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  poseyendo atractor global  $\mathcal{A}$  y que es dinámicamente gradiente respecto de la familia disjunta  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  de conjuntos invariantes aislados acotados. Entonces, alguno de los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a  $S$  es un atractor local para  $T(\cdot)$ .

*Demostración.* Ver [3] |

Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo de tipo gradiente generalizado respecto de la familia disjunta  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  de conjuntos invariantes aislados. Si, después de una posible reordenación,  $E_1$  es, por el Teorema 2.11, un atractor local para  $T(\cdot)$  y  $E_1^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap E_1 = \emptyset\}$  es su repulsor complementario entonces, como los elementos  $\mathbb{E}$  son cerrados invariantes y disjuntos entre sí, se sigue que para todo  $j \geq 2$ ,  $E_j \subset E_1^*$ .

Considerando  $\{T_1(t) : t \geq 0\}$  la restricción de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  a  $E_1^*$ , se sigue inmediatamente que  $\{T_1(t) : t \geq 0\}$  hereda de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  las propiedades que definen los semigrupos de tipo gradiente, o sea, que  $\{T_1(t) : t \geq 0\}$  es de tipo gradiente en el espacio métrico  $E_1^*$  respecto a la familia disjunta  $\mathbb{E}_1 := \{E_2, \dots, E_n\}$  de invariantes aislados. Entonces, de nuevo por la aplicación del lema anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $E_2$  es un atractor local para  $\{T_1(t) : t \geq 0\}$  en  $E_1^*$ . Sea  $E_{2,1}^*$  el repulsor complementario de  $E_2$  en  $E_1^*$ . Al igual que antes, se tiene que  $E_j \subset E_{2,1}^*$  siempre que  $j \geq 3$  se puede suponer que  $E_3$  es un atractor local para la restricción  $\{T_2(t) : t \geq 0\}$  de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  al conjunto  $E_{2,1}^*$ , que es dinámicamente gradiente en  $E_{2,1}^*$  respecto de la familia  $\mathbb{E}_2 := \{E_3, E_4, \dots, E_n\}$ . Poniendo  $E_{3,2}^*$  para indicar el repulsor de  $E_3$  en  $E_{2,1}^*$ , podemos seguir con el razonamiento hasta que se acaben todos los elementos de  $\mathbb{E}$ , donde, al final, obtendremos que  $E_1$  es un atractor local para  $\{T(t) : t \geq 0\}$  en  $X$  y, poniendo  $E_{1,0}^* := E_1^*$ , para cada  $j \geq 2$ ,  $E_j$  es un atractor local para la restricción de  $\{T(t) : t \geq 0\}$  al repulsor  $E_{j-1,j-2}^*$ .

Observamos, por otro lado, que si la familia disjunta de conjuntos invariantes aislados  $\mathbb{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  está ordenada por medio de la construcción que hemos descrito arriba, o sea, tal que, para todo  $j = 2, \dots, n$ ,  $E_j$  es un atractor local para el semigrupo  $\{T(t) : t \geq 0\}$  restringido a  $E_{j-1,j-2}^*$ , con  $E_{1,0} := E_1$  (recordemos que con esta ordenación tenemos que  $E_k \subset E_{j-1,j-2}^*$  siempre que  $k \geq j$ ), entonces para toda solución acotada  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  con

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), E_i) = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), E_j) = 0, \quad (2.20)$$

obligatoriamente se tiene  $i \geq j$ .

En efecto, en primer lugar, observemos que si  $E$  es un atractor en  $\mathcal{A}$  y  $E^*$  es su repulsor complementario, entonces para toda solución global  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  con  $\xi(0) \in E^*$ , se cumple que  $\xi(t) \in E^*$  para todo  $t$ , simplemente porque para todo  $t$  se cumple que  $\omega(\xi(t)) = \omega(\xi(0))$ .

Ahora, notemos que si  $j = 1$  no hay nada que demostrar.

Si  $j = 2$ , necesariamente  $\xi(0) \in E_1^*$ , porque, como  $\xi(0) \in \mathcal{A}$ , si  $\xi(0) \notin E_1^*$  entonces  $\omega(\xi(0)) \cap E_1 \neq \emptyset$  y por tanto, como hemos observado arriba,  $\xi(t) \in E_1^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Así, como  $E_k \subset E_1^*$  para todo  $k \geq 2$ , obligatoriamente  $i \geq 2 = j$ .

Para probar el caso general, primero probemos que, si  $j \geq 3$ ,  $3 \leq k \leq j$ , (2.20) se cumple y  $\xi(0) \in E_{k-2, k-3}^*$ , pero  $\xi(0) \notin E_{2,1}^*$  entonces, como  $\xi(t) \in E_1^*$  para todo  $t$  y  $E_{k-1, k-2}^*$  es el repulsor de  $E_{k-1}$ , sigue que  $\omega(\xi(0)) \subset E_{k-1}$ , obligando a  $E_{k-1} = E_j$ , o sea,  $k-1 = j$  lo que contradice  $k \leq j$ .

De estos hechos, resulta que si (2.20) se cumple, se tiene que para todo  $k$  con  $3 \leq k \leq j$  si  $\xi(0) \in E_{k-2, k-3}^*$ , entonces  $\xi(0) \in E_{k-1, k-2}^*$ , de donde, en particular, vemos que  $\xi(0) \in E_{j-1, j-2}^*$  y por tanto  $\xi(t) \in E_{j-1, j-2}^*$  y como  $E_l \subset E_{j-1, j-2}^*$  siempre que  $l \geq j$ , obligatoriamente  $i \geq j$ , estableciendo el caso general.

## 2.6.2 Construcción de una descomposición de Morse del atractor para un semigrupo dinámicamente gradiente

A continuación vamos a probar que la reordenación de los conjuntos  $\mathbb{E}$  produce una descomposición de Morse para el atractor  $\mathcal{A}$  de un semigrupo dinámicamente gradiente respecto de  $\mathbb{E}$ . Primero fijemos algunas notaciones.

Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  poseyendo atractor global  $\mathcal{A}$  que es de tipo gradiente respecto de la familia disjunta  $\mathbb{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  de conjuntos invariantes aislados que está, reordenada según explicamos arriba. Pongamos

$A_0 := \emptyset$ ,  $A_1 := E_1$  y para  $j = 2, 3, \dots, n$

$$A_j := A_{j-1} \cup W^u(E_j). \quad (2.21)$$

Obsérvese que, con estas definiciones, para  $j = 1, 2, \dots, n$

$$A_j = \bigcup_{i=1}^j W^u(E_i),$$

de donde, en particular, se tiene que  $A_n = \bigcup_{i=1}^n W^u(E_i) = \mathcal{A}$ .

Ahora tenemos el siguiente resultado

**| Teorema 2.12.** Sea  $\{T(t) : t \geq 0\}$  un semigrupo no lineal en un espacio métrico  $X$  poseyendo atractor global  $\mathcal{A}$  siendo dinámicamente gradiente respecto a la familia disjunta  $\mathbb{E} = \{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{A}$  de conjuntos invariantes aislados que está reordenada de manera que  $E_1$  es un atractor local para  $T(\cdot)$  restringido a  $E_{j-1, j-2}^*$ , con  $E_{1,0}^* := E_1^*$ , según hemos mostrado anteriormente. Entonces, para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ , el conjunto  $A_j$  definido como  $A_j = \bigcup_{i=1}^j W^u(E_i)$ , es un atractor local para  $T(\cdot)$  en  $X$ . Además, para todo  $j = 1, 2, \dots, n$  se verifica que

$$A_j \cap A_{j-1}^* = E_j.$$

Es decir, los conjuntos de Morse de la descomposición son precisamente los conjuntos invariantes aislados pertenecientes a  $S$

### 2.6.3 Equivalencia entre semigrupos gradiente y dinámicamente gradiente

Dada la familia  $\mathbb{E}$ , y el conjunto de pares atractor-repulsor  $(A, A^*)$  del Teorema 2.12, se construye la función de Lyapunov  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la Proposición 2.6. Entonces, dada la familia disjunta  $\mathbb{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \mathcal{A}$  de conjuntos invariantes aislados, la función de Lyapunov  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por el Teorema 2.2 viene dada por

$$V(x) := \sum_{j=0}^n f_j(x), \quad x \in X$$

Con el siguiente resultado damos la posibilidad de obtener una función de Lyapunov para un par atractor-repulsor que es diferenciable a lo largo de soluciones de  $T(\cdot)$ , de donde se puede concluir la existencia de una función de Lyapunov para los semigrupos de tipo gradiente que es diferenciable a lo largo de soluciones.



## 3 | Modelo de redes mutualistas

### 3.1 Introducción

A la hora de abordar el problema de la dinámica de redes mutualistas en Ecología nos encontramos con varios sistemas de ecuaciones diferenciales. En concreto en [7] se estudia cómo la estructura compleja de interacciones de cooperaciones entre grupos de plantas y polinizadores o dispersores de semilla afecta a toda la red. En otros ejemplos se analizan los ecosistemas a partir de la modelización por medio de la red de conexiones que genera un grafo bipartito, el cual representa dos tipos de especies (por ejemplo plantas y animales) y sus interrelaciones mutualistas.

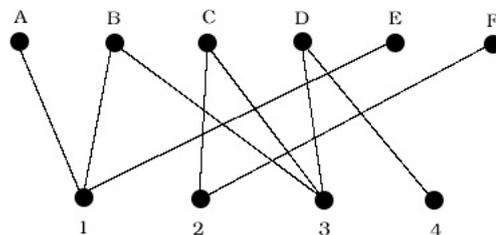


Figura 3.1: Grafo bipartito para una red tipo mutualista. Los dos conjuntos de nodos ( $A, B, C, D, E, F$ ) y  $(1, 2, 3, 4)$  representan los grupos de animales y plantas, respectivamente. Los enlaces indican la relación entre las plantas y animales de cada grupo

Para el estudio de las propiedades dinámicas de una red se propone el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. Denotaremos por  $P$  el número real de plantas y por  $A$  el número total de animales. Ambos están en competición entre sí, y también cooperan entre ellos. Podemos así escribir un sistema de  $P + A$  ecuaciones diferenciales, donde  $S_{p_i}$  y  $S_{a_i}$  son las densidades de la población para la  $i$ -ésima especie de planta y animal, respectivamente, como:

$$\begin{cases} \frac{dS_{p_i}}{dt} = S_{p_i} \left( \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^P \beta_{p_{ij}} S_{p_j} + \sum_{k=1}^A \frac{\gamma_{ik} S_{ak}}{1 + h_P \sum_{l=1}^A \gamma_{p_{il}} S_{al}} \right) \\ \frac{dS_{a_i}}{dt} = S_{a_i} \left( \alpha_{a_i} - \sum_{j=1}^A \beta_{a_{ij}} S_{a_j} + \sum_{k=1}^P \frac{\gamma_{a_{ik}} S_{p_k}}{1 + h_A \sum_{l=1}^P \gamma_{a_{il}} S_{pl}} \right) \\ S_{p_i}(0) = S_{p_{i0}}, \\ S_{a_i}(0) = S_{a_{i0}}, \end{cases} \quad (3.1)$$

para cada  $p_i$  con  $1 \leq i \leq P$  y  $a_i$  con  $1 \leq i \leq A$ . Los números reales  $\alpha_{p_i}$  y  $\alpha_{a_i}$  representan las tasas de crecimiento intrínseco en ausencia de competición y mutualismo para las plantas y animales, respectivamente,  $\beta_{p_{ij}} \geq 0$  y  $\beta_{a_{ij}} \geq 0$  denotan las intensidades de las interacciones competitivas,  $\gamma_{p_{ij}} \geq 0$  y  $\gamma_{a_{ij}} \geq 0$  las intensidades mutualistas, y los parámetros  $h_P$  y  $h_A$  se pueden interpretar como tiempos de manipulación, es decir, el tiempo utilizado en capturar, someter y consumir la presa, más los tiempos que necesita el depredador para recuperar hacia las presas.  $S_{p_{i0}} \geq 0$  y  $S_{a_{i0}} \geq 0$  representan los valores iniciales de la  $i$ -ésima especie de planta y animal, respectivamente.

En lo que sigue vamos a considerar que los tiempos de manipulación  $h_P = h_A = 0$ , de forma que (3.1) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dS_{p_i}}{dt} = S_{p_i} \left( \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^P \beta_{p_{ij}} S_{p_j} + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} S_{ak} \right) \\ \frac{dS_{a_i}}{dt} = S_{a_i} \left( \alpha_{a_i} - \sum_{j=1}^A \beta_{a_{ij}} S_{a_j} + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} S_{p_k} \right) \\ S_{p_i}(0) = S_{p_{i0}}, \\ S_{a_i}(0) = S_{a_{i0}}, \end{cases} \quad (3.2)$$

## 3.2 Modelo general de Lotka-Volterra

El sistema (3.2) se puede escribir como un modelo general para  $n$  especies *Lotka-Volterra* de tipo competición-cooperativo. A continuación presentaremos algunos conceptos que emplearemos a lo largo de este capítulo.

### 3.2.1 Sistema general Lotka-Volterra ( $L - V$ )

El primer modelo para especies interactuantes fue introducido por Lotka (1925) [14] y Volterra (1931) [19].

Estos modelos vienen dados por la fórmula general

$$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = \left( b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

done  $u_i(t)$  denota la densidad de población, o biomasa, de la  $i$ -ésima especie en el tiempo  $t$ . Los coeficientes  $b_i$  son la diferencia entre las tasas de nacimiento y muerte de cada especie, es decir, las tasas de crecimiento (o decrecimiento) de la especie  $i$ . Las entradas de la matriz  $A = (a_{ij})$  representan el efecto de la interacción interespecífica si  $i \neq j$  o intraespecífica si  $i = j$ . La naturaleza de la interacción, competición, mutualismo o depredador-presa, determina el signo de los coeficientes  $a_{ij}$ . Si las especies compiten entonces  $a_{ij}, a_{ji} < 0$ . Si las especies  $i$  y  $j$  están en mutualismo, entonces  $a_{ij}, a_{ji} > 0$ .

Normalmente los modelos de Lotka-Volterra suponen que  $a_{ii} < 0$  para cada  $i$ , así la densidad de cada especie tiene un crecimiento logístico en ausencia de otras especies.

Llamaremos **matriz de interacción, matriz de adyacencia o de la comunidad** a la matriz  $A = (a_{ij})$ , y, por lo general, es una matriz no simétrica.

Es evidente que la ecuación (3.3) tiene sentido biológico para densidades  $u_i \geq 0$ , con  $1 \leq i \leq n$ .

El espacio de estados para (3.3) es el ortante no negativo

$$\mathbb{R}_+^n = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

Los puntos frontera de  $\mathbb{R}_+^n$  están sobre los planos coordenados  $u_i = 0$ , que corresponden a estados donde la especie  $i$  no se encuentra, es decir, se ha extinguido.

Vemos que cero es solución, por lo que  $\mathbb{R}_+^n$  es invariante, lo que significa que cualquier solución que comienza en un punto de  $\mathbb{R}_+^n$ , permanece en  $\mathbb{R}_+^n$  para todo tiempo para el cual la solución está definida.

### 3.2.2 El modelo 2D de Lotka-Volterra

Para comenzar este estudio recordamos algunos resultados importantes de sistemas de dos especies, que nos ayudarán en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones para sistemas con más de dos especies (3.2).

Consideramos el modelo ( $L - V$ ) para dos especies interactuantes:

$$\begin{cases} u' = u(\lambda - au - bv) \\ v' = v(\mu - dv - cu) \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (3.4)$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $a, d > 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  y  $u_0, v_0 \geq 0$ . Para este modelo tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.1.**

1. Suponemos que  $b, c > 0$  (**caso competitivo**) y  $bc < ad$ .

(a) Si  $\lambda, \mu < 0$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (0, 0) \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

(b) Si  $\lambda > 0$  y  $\mu < \lambda c/a$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (\lambda/a, 0) \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

(c) Si  $\mu > 0$  y  $\lambda < \mu b/d$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (0, \mu/d) \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

(d) Si  $\mu > \lambda c/a$ , y  $\lambda > \mu b/d$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow \left( \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bd}, \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} \right) \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

2. Supongamos que  $b, c < 0$  (**caso cooperativo**)

(a) Si  $bc > ad$ , entonces para  $\lambda, \mu > 0$  existe explosión en tiempo finito de ambas poblaciones, esto es, existen valores  $0 < t_1^*, t_2^* < \infty$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^*} u(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_2^*} v(t) = \infty.$$

(b) Supongamos que  $bc < ad$ .

(i) Si  $\lambda, \mu < 0$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (0, 0) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

(ii) Si  $\lambda > 0$  y  $\mu < \lambda c/a$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (\lambda/a, 0) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

(iii) Si  $\mu > 0$  y  $\lambda < \mu b/d$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow (0, \mu/d) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

(iv) Si  $\mu > \lambda c/a$  y  $\lambda > \mu b/d$ , entonces

$$(u, v) \rightarrow \left( \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc}, \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} \right) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Calculemos primero los puntos de equilibrio; para ello resolvemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0 \\ f_2(u, v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(\lambda - au - bv) = 0 \\ v(\mu - dv - cu) = 0 \end{cases}$$

si  $u = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \frac{\mu}{d} \end{cases}$ ; si  $v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\lambda}{a} \end{cases}$ ; por último, para el caso en que ninguna de las dos variables sean nulas, tenemos

$$u = \frac{\lambda - bv}{a}$$

que sustituyendo en la otra ecuación nos queda,

$$\mu - dv - \frac{c\lambda - cbv}{a} = 0 \iff v = \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc}.$$

Y resolviendo ahora en la ecuación de  $u$  tenemos

$$u = \frac{\lambda - b \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc}}{a} = \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc}$$

Con lo cual queda probado que efectivamente los puntos de equilibrio que hemos definido en el Lema son todos los estacionarios del sistema (3.4). Los nombraremos de la siguiente forma  $E_{00} = (0, 0)$ ;  $E_{10} = \left(\frac{\lambda}{a}, 0\right)$ ;  $E_{01} = \left(0, \frac{\mu}{d}\right)$ ;  $E_{11} = \left(\frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc}, \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc}\right)$ .

Ahora vemos que bajo las condiciones ya enunciadas estos puntos son localmente estables. Para ello analizaremos los autovalores de la matriz jacobiana en cada punto  $E_{ij}$ , con  $i, j = 0, 1$ .

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda - 2au - bv & -bu \\ -cv & \mu - cu - 2dv \end{pmatrix}.$$

Supongamos que estamos en el caso competitivo, es decir, que  $a, b, c, d > 0$  y  $bc < ad$ .

- a) Estudiemos los autovalores de la matriz  $J$  en el punto  $E_{00}$ .

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como por hipótesis tenemos que  $\lambda$  y  $\mu$ , autovalores de la matriz  $J$ , son dos números reales negativos; entonces podemos afirmar que para este caso  $E_{00}$  es localmente estable.

- b) Teniendo en cuenta que  $\lambda > 0$  y que  $\mu < \frac{c\lambda}{a}$ , analicemos el signo de los autovalores de la matriz  $J\left(\frac{\lambda}{a}, 0\right)$ .

$$J\left(\frac{\lambda}{a}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{b\lambda}{a} \\ 0 & \mu - \frac{c\lambda}{a} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz es fácil ver que son  $-\lambda$  y  $\mu - \frac{c\lambda}{a}$  que por las hipótesis de este apartado sabemos que son dos números reales negativos; con lo cual,  $E_{10}$  es localmente estable.

- c) Este caso podemos comprobar que es similar al anterior, pues teniendo en cuenta ahora que  $\mu > 0$  y que  $\lambda < \frac{b\mu}{d}$ , resulta,

$$J\left(0, \frac{\mu}{d}\right) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{b\mu}{d} & 0 \\ -\frac{c\mu}{d} & -\mu \end{pmatrix}.$$

De nuevo, es fácil comprobar que los autovalores de la matriz, que son  $\lambda - \frac{b\mu}{d}$  y  $-\mu$ , que gracias a la hipótesis de nuestro caso son dos números reales negativos, así que  $E_{01}$  es localmente estable.

d) Finalmente comprobemos que en este caso también es cierta la afirmación del lema, por ello hallemos los autovalores de

$$A_4 = J \left( \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc}, \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc} \right) = \begin{pmatrix} \frac{a(-d\lambda + b\mu)}{ad - bc} & \frac{b(-d\lambda + b\mu)}{ad - bc} \\ \frac{c(c\lambda - a\mu)}{ad - bc} & \frac{d(-a\mu + c\lambda)}{ad - bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -au^* & -bu^* \\ -cv^* & -dv^* \end{pmatrix}$$

con lo cual nos queda que

$$J \left( \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc}, \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc} \right) = - \begin{pmatrix} u^* & v^* \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Esta vez para hallar los autovalores, debemos calcular el siguiente determinante

$$|\alpha Id - A_4| = \begin{vmatrix} \alpha + au^* & bu^* \\ cv^* & \alpha + dv^* \end{vmatrix}$$

Si calculamos este determinante vemos que resulta

$$(\alpha + au^*)(\alpha + dv^*) - bcu^*v^* = \alpha^2 + \alpha(au^* + dv^*) + (ad - bc)u^*v^* = 0$$

Es fácil observar que cada miembro de la ecuación anterior es positivo ya que  $a, d, u^*, v^* > 0$  y  $ad > bc$ , ( $u^*$  y  $v^*$  son positivos gracias a las hipótesis de nuestro apartado), con lo cual, los autovalores de la matriz  $A_4$  tienen parte real negativa, como necesitábamos. Así concluimos que también  $E_{11}$  es localmente estable y con ello acabamos la demostración del lema, pues el caso cooperativo está también demostrado, ya que no hemos usado en ninguna parte el signo de  $b$  y de  $c$ .

|

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario

**Corolario 3.1.** Suponemos que  $b, c < 0$ ,  $bc < ad$ ,  $\mu > \lambda c/a$  y  $\lambda > \mu b/d$ . Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que, para  $t \geq t_0$ , se tiene

$$u \leq \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc} + \varepsilon, \quad v \leq \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} + \varepsilon.$$

**Demostración.** Gracias al Lema 3.1, se tiene que

$$(u, v) \rightarrow \left( \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc}, \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} \right) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por tanto, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que para todo  $t \geq t_0$  se tiene

$$\left| u - \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc} \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| v - \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} \right| < \varepsilon,$$

y por tanto

$$u \leq \frac{\lambda d - b\mu}{ad - bc} + \varepsilon, \quad v \leq \frac{\mu a - c\lambda}{ad - bc} + \varepsilon.$$

### 3.2.3 Método de sub-super solución

El método de sub-super solución nos permite en muchas ocasiones demostrar la existencia de una solución de una EDO u obtener cotas superiores e inferiores de las soluciones. A continuación, detallamos dicho método para el sistema (3.4) en los casos cooperativo, esto es  $b, c < 0$  y competitivo  $b, c > 0$ .

**| Definición 3.1.** Supongamos  $b, c > 0$ . Una pareja de funciones  $(\underline{u}, \underline{v}) \in (C^1(I))^2$  se llama una sub-solución para el sistema (3.4) si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \underline{u}' \leq \underline{u} (\lambda - a\underline{u} - b\underline{v}) \\ \underline{v}' \leq \underline{v} (\mu - d\underline{v} - c\underline{u}) \\ \underline{u}(0) \leq u_0, \underline{v}(0) \leq v_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Análogamente, se define una pareja super-solución de (3.4) con  $b, c < 0$ ; esto es una pareja de funciones  $(\bar{u}, \bar{v}) \in (C^1(I))^2$  que verifica

$$\begin{cases} \bar{u}' \geq \bar{u} (\lambda - a\bar{u} - b\bar{v}) \\ \bar{v}' \geq \bar{v} (\mu - d\bar{v} - c\bar{u}) \\ \bar{u}(0) \geq u_0, \bar{v}(0) \geq v_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ahora consideramos el caso de competición:

**| Definición 3.2.** Supongamos  $b, c > 0$ . Un par de parejas de funciones  $(\underline{u}, \underline{v}) \in (C^1(I))^2, (\bar{u}, \bar{v}) \in (C^1(I))^2$ , se llaman sub y super-solución para el sistema (3.4) si se

verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \underline{u}' \leq \underline{u} (\lambda - a\underline{u} - b\underline{v}) \\ \underline{v}' \leq \underline{v} (\mu - d\underline{v} - c\underline{u}) \\ \bar{u}' \geq \bar{u} (\lambda - a\bar{u} - b\underline{v}) \\ \bar{v}' \geq \bar{v} (\mu - d\bar{v} - c\underline{u}) \\ \underline{u}(0) \leq u_0, \underline{v}(0) \leq v_0, \\ \bar{u}(0) \geq u_0, \bar{v}(0) \geq v_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Con esta definición, tenemos el siguiente resultado

**Teorema 3.1.** Consideremos el problema (3.4).

1. Si existen  $(\underline{u}, \underline{v})$ ,  $(\bar{u}, \bar{v})$ , par de sub-super-solución de (3.4), entonces existe una única solución de (3.4)  $(u, v)$  tal que

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t), \quad \underline{v}(t) \leq v(t) \leq \bar{v}(t).$$

2. Si existen  $(\underline{u}, \underline{v})$ ,  $(\bar{u}, \bar{v})$ , par de sub-super-solución de (3.4), entonces si  $(u, v)$  es solución de (3.4) se tiene que

$$\underline{u}(t) \leq u(t), \quad \underline{v}(t) \leq v(t),$$

y

$$\bar{u}(t) \geq u(t), \quad \bar{v} \geq v(t)$$

para todo  $t$  donde exista tal solución.

### 3.2.4 Puntos de equilibrio

Para el modelo general  $(L - V)$  dado por (3.3) los puntos de equilibrio (o puntos de soporte fijos o estacionarios) son puntos  $n$ -dimensionales soluciones del sistema de ecuaciones

$$u_i \left( b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

a los cuales se los notará como  $u^*$ . En estos puntos, que son soluciones del sistema, decimos que éste está en reposo.

**| Definición 3.3.** Los puntos de **equilibrio no triviales** son aquellas soluciones de (3.8),  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  donde  $u^* \neq 0$ . Un punto de equilibrio no trivial se denomina **factible** (posible), o equilibrio interior, si está en el interior de  $\mathbb{R}_+^n$ , es decir,

$$u_i^* > 0 \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

y **parcialmente factible** si,

$$u_i^* \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

**Observación 3.1.** En general (3.8) admitirá una solución en el interior de  $\mathbb{R}_+^n$ , o ninguna. Si la solución está en el interior, puesto que  $u_i^* > 0$ , se verifica que

$$b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^* = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Únicamente en el caso degenerado donde se tiene que  $\det(A) = 0$ , el problema (3.8) puede tener más de una solución estrictamente positiva, formando incluso un continuo conjunto de puntos de equilibrio. Además, si cada menor principal de  $A$  es no singular, existirán a lo más  $2^n$  puntos de equilibrio, no necesariamente distintos.

### 3.2.5 Estabilidad de los puntos de equilibrio

Al tomar un punto inicial  $u_0$  en el entorno de un punto de equilibrio  $u^*$  podemos encontrarnos con tres situaciones distintas.

A continuación vamos a definir estas tres situaciones

**| Definición 3.4.**

1. El punto  $u^*$  se dice que es **estable** si para cualquier entorno  $U$  de  $u^*$ , existe un entorno  $W$  de  $u^*$  tal que cualquier solución de (3.3) que se inicia en  $W$  en el tiempo  $t = 0$ , permanece en  $U$  para todo  $t \geq 0$  (es decir,  $u_0 \in W$  implica que  $u(t) \in U$  para todo  $t \geq 0$ ).
2. Se dice que **asintóticamente estable** si es estable y la solución converge a  $u^*$  (es decir,  $u(t) \rightarrow u^*$  para todo  $u_0 \in W$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ). La respuesta a una pequeña perturbación tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

3. Si  $u^*$  no es estable, se dice **inestable**. Las condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio generan soluciones que se alejan del punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito.
4. La **cuenca o dominio de atracción** de  $u^*$  está definida por el conjunto de puntos de  $u(0)$  que satisfacen  $u(t) \rightarrow u^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
5. Cuando la cuenca de atracción de  $u^*$  es todo el espacio de estados o al menos su interior y  $u^*$  es estable,  $u^*$  se dice **globalmente estable**.

A continuación vamos a introducir un teorema de gran importancia conocido como el Teorema de LaSalle, el cual, siempre que exista una función de Lyapunov, nos permite conocer el comportamiento de las soluciones de un sistema de EDOs.

### **| Teorema 3.2 (Teorema de LaSalle).**

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

y suponemos que  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  es un punto de equilibrio y que además existe una función de diferenciable  $V(u_1, \dots, u_n)$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $V(u_1, \dots, u_n)$  tiene un mínimo estricto en  $(u_1^*, \dots, u_n^*)$ , es decir,  $V > 0$  y  $V = 0$  para  $u_i = u_i^*, i = 1, \dots, n$ .
2. La derivada de  $V$  a lo largo de las soluciones de (3.11) satisface

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i} f_i \leq 0,$$

y fuera de un entorno arbitrariamente pequeño de  $(u_1^*, \dots, u_n^*)$  se tiene que

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

Entonces el punto de equilibrio  $u^*$  es globalmente asintóticamente estable.

A continuación vamos a enunciar un teorema de mucha utilidad ya que nos relacionará la estabilidad de un punto estacionario  $u^*$  con los autovalores de la matriz Jacobiana procedente de la ecuación.

**| Teorema 3.3.** Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.11) y sea  $u^*$  un punto de equilibrio. Denotemos por  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  los autovalores del Jacobiano de  $f$  en  $u^*$ . Se tiene:

1. Si todos los  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tienen su parte real negativa, entonces  $u^*$  es asintóticamente estable.
2. Si para algún  $i = 1, \dots, n$ , la parte real de  $\lambda_i$  es positiva, entonces  $u^*$  es inestable.

Observemos que la matriz Jacobiana de (3.3) tiene la siguiente expresión

$$J = (u^*) = \begin{pmatrix} A_{11}^* & u_1^* a_{12} & \cdots & u_1^* a_{1n} \\ u_2^* a_{21} & A_{22}^* & \cdots & u_2^* a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^* a_{n1} & u_n^* a_{n2} & \cdots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{ii}^* = b_i + 2a_{ii}u_i^* + \sum_{j \neq i} a_{ij}u_j^* = b_i + a_{ii}u_i^* + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j^*.$$

De forma que, en el caso donde  $u^* = 0$ , tenemos que

$$J(u^*) = \text{diag}(b_i),$$

luego podemos ver que el origen es inestable cuando al menos uno de los  $b_i$  es positivo; y es estable cuando todos los  $b_i$  son negativos.

Por otro lado, en el caso del estado de equilibrio interior, esto es  $u_i^* > 0$  para todo  $i$  puesto que

$$b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j^* = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

de donde

$$A_{ii}^* = a_{ii}u_i^*,$$

y se obtiene

$$J(u^*) = \text{diag}(u_i^*) A.$$

Cuando el punto de equilibrio  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$  es no negativo, se definen los subconjuntos  $I$  y  $J$  de  $N = \{1, \dots, n\}$  tal que  $u_i^* = 0$  para  $i \in I$  y  $J = N \setminus I$ .

Se define también

$$\mathbb{R}_I^N = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid u_i \geq 0 \text{ para } i \in I \text{ y } u_j > 0 \text{ para } j \in J\}. \quad (3.12)$$

Vemos que  $\mathbb{R}_I^N = \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  si  $u^* > 0$ , es decir, si  $I = \emptyset$  y por tanto  $J = N$ . Para el sistema (3.3), diremos que  $u^*$  es asintóticamente estable o globalmente estable, si  $u^*$  lo es respecto a  $\mathbb{R}_I^N$ .

### 3.3 Sistema Mutualista ( $L - V$ )

Tras haber dado varios resultados sobre la estabilidad en el modelo Lotka-Volterra, volvemos a considerar el sistema (3.1) en el caso donde los tiempos de manipulación son nulos, es decir,  $h_p = h_A = 0$ , así el sistema (3.2), el cual está compuesto de dos subsistemas, los cuales tienen interacciones mutualistas entre ellos. Cada subsistema tendrá una población de  $P$  plantas y de  $A$  animales.

Recordamos que este sistema viene descrito por las siguientes ( $P + A$ ) EDOs.

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = u_i \left( \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^P \beta_{p_{ij}} u_j + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} v_k \right) & i = 1, \dots, P, \\ \frac{dv_i}{dt} = v_i \left( \alpha_{a_i} - \sum_{j=1}^A \beta_{a_{ij}} v_j + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} u_k \right) & i = 1, \dots, A, \\ u_i(0) = u_{i0} & i = 1, \dots, P, \\ v_i(0) = v_{i0} & i = 1, \dots, A, \end{cases} \quad (3.13)$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  representan las biomásas de las plantas y los animales.  $\alpha_{p_i}, \alpha_{a_i} \in \mathbb{R}$  son las tasas de natalidad,  $\beta_{p_{ij}}, \beta_{a_{ij}} \geq 0$  las tasas de competencia de cada subsistema, y  $\gamma_{p_{ik}}, \gamma_{a_{ik}} \geq 0$  la intensidad de la interacción mutualista entre las especies de los dos subsistemas. Además, tras un cambio de variable podemos suponer que

$$\beta_{p_{ii}} = \beta_{a_{jj}} = 1, \quad i = 1, \dots, P; \quad j = 1, \dots, A.$$

Finalmente, suponemos que  $u_{i0}, v_{j0} > 0, i = 1, \dots, P; j = 1, \dots, A$ .

A la matriz de coeficientes de (3.13) la denotaremos como  $\mathbb{M}$ , la cual es una matriz de orden  $n = P + A$  que, definida por bloques, la podemos escribir de la siguiente forma

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{bmatrix}_{(A+P) \times (P+A)} \quad (3.14)$$

donde cada bloque se escribe

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\beta_{p_{12}} & \cdots & -\beta_{p_{1P}} \\ -\beta_{p_{21}} & -1 & \cdots & -\beta_{p_{2P}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{p_{P1}} & \beta_{p_{P2}} & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{P \times P}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\beta_{a_{12}} & \cdots & -\beta_{a_{1A}} \\ -\beta_{a_{21}} & -1 & \cdots & -\beta_{a_{2A}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{a_{A1}} & \beta_{a_{A2}} & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{A \times A}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{p_{11}} & \gamma_{p_{12}} & \cdots & \gamma_{p_{1A}} \\ \gamma_{p_{21}} & \gamma_{p_{22}} & \cdots & \gamma_{p_{2A}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p_{P1}} & \gamma_{p_{P2}} & \cdots & \gamma_{p_{PA}} \end{bmatrix}_{P \times A}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{a_{11}} & \gamma_{a_{12}} & \cdots & \gamma_{a_{1P}} \\ \gamma_{a_{21}} & \gamma_{a_{22}} & \cdots & \gamma_{a_{2P}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{a_{A1}} & \gamma_{a_{A2}} & \cdots & \gamma_{a_{AP}} \end{bmatrix}_{A \times P}$$

### 3.3.1 Existencia y unicidad de soluciones

Para comenzar vamos a dar las condiciones necesarias para asegurar la existencia y unicidad de una solución positiva de (3.13). Para ello necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 3.2.** Supongamos que  $\beta < 1$ . Entonces,

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 + 2\beta \sum_{i<j}^n u_i u_j \geq \frac{1 + \beta(n-1)}{n} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2. \quad (3.15)$$

**Demostración.** Antes de probar (3.15), probemos que

$$\frac{2}{n-1} \sum_{i<j}^n u_i u_j \leq \sum_{i=1}^n u_i^2. \quad (3.16)$$

En efecto, es claro que

$$\sum_{i<j}^n (u_i - u_j)^2 \geq 0,$$

y, por tanto,

$$(u_1 - u_2)^2 + \cdots + (u_1 - u_n)^2 + (u_2 - u_3)^2 + \cdots + (u_2 - u_n)^2 + \cdots + (u_{n-1} - u_n)^2 \geq 0,$$

de donde se sigue que

$$(n-1)(u_1^2 + \cdots + u_n^2) - 2(u_1 u_2 + \cdots + u_1 u_n + u_2 u_3 + \cdots + u_2 u_n + \cdots + u_{n-1} u_n) \geq 0,$$

y se verifica (3.16).

Probemos ahora (3.15). En primer lugar, (3.15) es equivalente a

$$\left(1 - \frac{1 + \beta(n-1)}{n}\right) \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2 \left(\beta - \frac{1 + \beta(n-1)}{n}\right) \sum_{i<j}^n u_i u_j \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1-\beta)(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 + \frac{2}{n}(\beta-1) \sum_{i<j}^n u_i u_j \geq 0,$$

que es equivalente a (3.16) ya que  $\beta < 1$  |

Ahora enunciaremos y demostraremos el resultado principal de existencia y unicidad de solución positiva para (3.13). En primer lugar demostraremos una condición suficiente para la existencia y unicidad de la solución global, luego daremos una condición bajo la cual las soluciones explotan en tiempo finito.

**| Teorema 3.4 (Existencia y unicidad de solución).**

1. Supongamos  $\beta_1 = \min\{\beta_{p_{ij}}\} < 1$ ,  $\beta_2 = \min\{\beta_{a_{ij}}\} < 1$ ,  $\gamma_1 = \max\{\gamma_{p_{ij}}\}$ ,  $\gamma_2 = \max\{\gamma_{a_{ij}}\}$ , para todo  $i, j$  y se tiene que

$$\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta_1 (P - 1)}{P} \frac{1 + \beta_2 (A - 1)}{A}. \quad (3.17)$$

Entonces existe una única solución positiva acotada de (3.13), para todo  $t > 0$ .

2. Supongamos  $\beta = \beta_{p_{ij}} = \beta_{a_{ij}}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{p_{ij}}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_{a_{ij}}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{p_i}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{a_i} > 0$  para todo  $i, j$ , y se cumple que

$$\gamma_1 \gamma_2 > \frac{1 + \beta (P - 1)}{P} \frac{1 + \beta (A - 1)}{A}. \quad (3.18)$$

Entonces la solución de (3.13) explota en tiempo finito.

**Demostración.**

1. En primer lugar, observemos que si  $u_{i0} > 0$  entonces  $u_i(t) > 0$  para todo  $t > 0$  en el que exista solución.

Denotando por

$$w := \sum_{i=1}^P u_i, \quad z := \sum_{i=1}^A v_i,$$

se tiene que

$$w' \leq \alpha_1 w - (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_P^2 + 2\beta_1 (u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{P-1} u_P)) + \gamma_1 w z,$$

$$z' \leq \alpha_2 z - (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_A^2 + 2\beta_2 (v_1 v_2 + v_1 v_3 + \dots + v_{A-1} v_A)) + \gamma_2 w z,$$

donde  $\alpha_1 = \max\{\alpha_{p_i}\}$  y  $\alpha_2 = \max\{\alpha_{a_i}\}$  o, equivalentemente,

$$w' \leq \alpha_1 w - \left( \sum_{i=1}^P u_i^2 + 2\beta_1 \sum_{i<j}^P u_i u_j \right) + \gamma_1 w z,$$

$$z' \leq \alpha_2 z - \left( \sum_{i=1}^A v_i^2 + 2\beta_2 \sum_{i<j}^A v_i v_j \right) + \gamma_2 w z,$$

y usando (3.15), se tiene que

$$w' \leq \alpha_1 w - \frac{1 + \beta_1 (P - 1)}{P} w^2 + \gamma_1 w z,$$

$$z' \leq \alpha_2 z - \frac{1 + \beta_2(A-1)}{A} z^2 + \gamma_2 w z.$$

Ahora basta considerar el sistema

$$\begin{cases} p' = p \left( \alpha_1 - \frac{1 + \beta_1(P-1)}{P} p + \gamma_1 q \right), \\ q' = q \left( \alpha_2 - \frac{1 + \beta_2(A-1)}{A} q + \gamma_2 p \right), \\ p(0) = p_0, q(0) = q_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

con  $p_0, q_0$  números positivos a elegir.

Es claro que, tomando

$$p_0 = \sum_{i=1}^P u_{i0}, \quad q_0 = \sum_{i=1}^A v_{i0}$$

se tiene que  $(w, z)$  es sub-solución de (3.19) en el sentido de la Definición 3.1 y, por tanto, por el Teorema 3.1 se sigue que

$$(w, z) \leq (p, q) \quad (3.20)$$

y  $(p, q)$  está acotado si se satisface (3.17) por el Lema 3.1.

2. Supongamos que se verifica (3.18) con  $\alpha_1 = \alpha_{p_i} > 0$  y  $\alpha_2 = \alpha_{a_i} > 0$ . Llamamos  $(p, q)$  a la única solución positiva de (3.19). Es conocido (ver Lema 3.1) que, bajo la condición (3.18),  $(p, q)$  explota en tiempo finito.

A continuación, se verifica que

$$(u_1, \dots, u_P, v_1, \dots, v_A) = \left( \frac{p}{P}, \dots, \frac{p}{P}, \frac{q}{A}, \dots, \frac{q}{A} \right),$$

es solución del sistema (3.13) con  $u_0 = p_0/P$  y  $v_{i0} = q_0/A$ , por lo que también explota en tiempo finito.

Veamos que

$$u'_i = u_i \left( \alpha_1 - u_i - \beta_1 (u_2 + \dots + u_P) + \gamma_1 (v_1 + \dots + v_A) \right).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{p'}{P} &= \frac{p}{P} \left( \alpha_1 - \frac{p}{P} - \beta \left( \frac{p}{P} + \dots + \frac{p}{P} \right) + \gamma_1 \left( \frac{q}{A} + \dots + \frac{q}{A} \right) \right) \Leftrightarrow \\ p' &= p \left( \alpha_1 - p \left( \frac{1 + \beta(P-1)}{P} \right) + \gamma_1 q \right), \end{aligned}$$

lo que es cierto por (3.19). Lo mismo se cumple con  $q/A$ . Esto concluye la demostración.

|

### 3.3.2 Estabilidad global del sistema mutualista ( $L - V$ )

Muchos de los resultados sobre la estabilidad global del sistema mutualista (L-V) se estudiarán a partir de una matriz  $A$ , que se definirá como matriz de Lyapunov-estable. Por tanto es necesario dar algunas definiciones.

**Definición 3.5.** Una matriz cuadrada de orden  $n$  se dice definida negativa si  $u^T A u < 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Definición 3.6.** Supongamos que  $A$  es una matriz real de orden  $n$ :

1. Se dice que  $A$  es de clase  $S_\omega$  o Lyapunov-estable,  $A \in S_\omega$ , si existe una matriz diagonal positiva  $W$  tal que, la matriz simétrica  $W A + A^T W$  es definida negativa.
2. Se dice que  $A$  es una matriz diagonal dominante negativa,  $A \in NDD$ , si y sólo si, existen  $n$  números positivos  $r_i > 0$  tal que

$$-r_i a_{ii} > \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}| r_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vemos algunos teoremas importantes acerca de esta clase de matrices.

**Teorema 3.5.** Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , entonces  $A$  es de clase  $S_\omega$  si una de las siguientes condiciones se satisface:

1.  $A$  es una matriz diagonal dominante negativa;
2.  $A$  es definida negativa

*Demostración.* Ver [18] |

**Teorema 3.6.** Supongamos que  $A \in S_\omega$ . Entonces el sistema (L-V) (3.3) tiene un punto de equilibrio  $u^*$  para cada  $b \in \mathbb{R}^n$  que, además, es globalmente estable en  $\mathbb{R}_+^n$

*Demostración.* La demostración viene detallada en [12] |

**Corolario 3.2.** Si  $A \in S_\omega$ , entonces el sistema ( $L - V$ ) y cada uno de sus subistemas tienen un punto de equilibrio no negativo y globalmente estable para cada  $b \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Ver [18] |

Hemos comprobado que la estabilidad de (3.13) está garantizada por el Teorema 3.6, que nos asegura la existencia de un punto  $u^*$  globalmente estable siempre que la matriz de la comunidad sea de clase  $S_\omega$ . Por tanto, necesitamos dar condiciones para

que la matriz de (3.13) cumpla con esta condición. Veremos que hay tres posibles condiciones.

### Condición Tipo I

Según el Teorema (3.5), una condición suficiente para que la matriz  $\mathbb{M}$  sea de clase  $S_w$  es que tenga una diagonal dominante negativa. Tomando  $r_i = 1$  para todo  $i$  en la Definición (3.6) y recordando que  $\beta_{p_{ii}} = \beta_{a_{ii}} = 1$  se tiene

**Proposición 3.1.** Supongamos que para  $\mathbb{M}$ , definida como en (3.14), se tiene que

$$\sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} + \sum_{j \neq i}^P \beta_{p_{ij}} < 1, \quad \forall i = 1, \dots, P,$$

$$\sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} + \sum_{j \neq i}^A \beta_{a_{ij}} < 1, \quad \forall i = 1, \dots, A.$$

Entonces la matriz  $\mathbb{M} \in S_w$ .

A la matriz  $\mathbb{M}$  que cumpla esta condición la llamaremos matriz de **Tipo I**. Como se puede observar, la restricción obliga a que los parámetros sean muy pequeños y mucho más en matrices de gran tamaño, por lo que intentaremos mejorar esta condición.

### Condición Tipo II

Según la Definición (3.6), para que la matriz  $\mathbb{M}$  sea de clase  $S_w$  debe existir una matriz  $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$  con  $w_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$  sea definida negativa. Obsérvese que esta matriz es simétrica, por lo que para que sea definida negativa necesitamos que los autovalores de la matriz sean negativos. Restringiremos el conjunto de sus autovalores, su espectro  $\sigma(W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W)$ , a la parte negativa de la recta real. Para ello aplicaremos el Teorema de los círculos de Gershgorin a la matriz  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$ .

### | Teorema 3.7 (Teorema de los círculos de Gershgorin).

*Todo autovalor  $\lambda$  de una matriz  $A$  de orden  $n$  satisface la condición*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{para algún } i = 1, \dots, n.$$

Como consecuencia de este resultado tenemos

**| Teorema 3.8.** Si la matriz  $\mathbb{M}$ , definida como en (3.14), satisface las condiciones:

$$2 - \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) - \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, P, \quad (3.21)$$

$$2 - \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) - \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, A, \quad (3.22)$$

$$\sup_{i=1, \dots, A} \frac{\sum_{k=1}^P \gamma_{p_{ki}}}{2 - \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) - \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}}} < \inf_{i=1, \dots, P} \frac{2 - \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) - \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}}}{\sum_{k=1}^A \gamma_{a_{ki}}}. \quad (3.23)$$

Entonces la matriz  $\mathbb{M}$  es de clase  $S_w$ .

*Demostración.* Para la matriz  $\mathbb{M}$ , escrita por bloques como (3.14), se tiene que

$$\mathbb{M}^T = \begin{bmatrix} B_1^T & \Gamma_2^T \\ \Gamma_1^T & B_2^T \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}.$$

Escribimos la matriz  $W$  de la siguiente manera

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & \emptyset \\ \emptyset & W_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)} \quad (3.24)$$

donde las matrices  $W_1$  y  $W_2$  se consideran como

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_1 \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_2 \end{bmatrix}_{A \times A},$$

con  $w_1 > 0$ ,  $w_2 > 0$ .

Se obtiene

$$C = WM + M^T W = \begin{bmatrix} D_1 & C_1 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)},$$

con

$$D_1 = w_1 \begin{bmatrix} -2 & -(\beta_{p_{12}} + \beta_{p_{21}}) & \cdots & -(\beta_{p_{1P}} + \beta_{p_{P1}}) \\ -(\beta_{p_{12}} + \beta_{p_{21}}) & -2 & \cdots & -(\beta_{p_{2P}} + \beta_{p_{P2}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\beta_{p_{1P}} + \beta_{p_{P1}}) & -(\beta_{p_{2P}} + \beta_{p_{P2}}) & \cdots & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = w_2 \begin{bmatrix} -2 & -(\beta_{a_{12}} + \beta_{a_{21}}) & \cdots & -(\beta_{a_{1A}} + \beta_{a_{A1}}) \\ -(\beta_{a_{12}} + \beta_{a_{21}}) & -2 & \cdots & -(\beta_{a_{2A}} + \beta_{a_{A2}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\beta_{a_{1A}} + \beta_{a_{A1}}) & -(\beta_{a_{2A}} + \beta_{a_{A2}}) & \cdots & -2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \omega_1 \gamma_{p_{11}} + \omega_2 \gamma_{a_{11}} & \omega_1 \gamma_{p_{12}} + \omega_2 \gamma_{a_{21}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{1A}} + \omega_2 \gamma_{a_{A1}} \\ \omega_1 \gamma_{p_{21}} + \omega_2 \gamma_{a_{12}} & \omega_1 \gamma_{p_{22}} + \omega_2 \gamma_{a_{22}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{2A}} + \omega_2 \gamma_{a_{A2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 \gamma_{p_{P1}} + \omega_2 \gamma_{a_{1P}} & \omega_1 \gamma_{p_{P2}} + \omega_2 \gamma_{a_{2P}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{PA}} + \omega_2 \gamma_{a_{AP}} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \omega_1 \gamma_{p_{11}} + \omega_2 \gamma_{a_{11}} & \omega_1 \gamma_{p_{21}} + \omega_2 \gamma_{a_{12}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{P1}} + \omega_2 \gamma_{a_{1P}} \\ \omega_1 \gamma_{p_{12}} + \omega_2 \gamma_{a_{21}} & \omega_1 \gamma_{p_{22}} + \omega_2 \gamma_{a_{22}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{P2}} + \omega_2 \gamma_{a_{2P}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 \gamma_{p_{1A}} + \omega_2 \gamma_{a_{A1}} & \omega_1 \gamma_{p_{2A}} + \omega_2 \gamma_{a_{A2}} & \cdots & \omega_1 \gamma_{p_{PA}} + \omega_2 \gamma_{a_{AP}} \end{bmatrix}$$

Luego, por el Teorema de los círculos de Gershgorin de la matriz  $C$  se generan  $P$  desigualdades de la forma

$$|\lambda + 2\omega_1| \leq \omega_1 \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) + \omega_1 \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} + \omega_2 \sum_{k=1}^A \gamma_{a_{ki}}, \quad \text{con } i = 1, \dots, P$$

y  $A$  desigualdades

$$|\lambda + 2\omega_2| \leq \omega_2 \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) + \omega_2 \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} + \omega_1 \sum_{k=1}^P \gamma_{p_{ki}}, \quad \text{con } i = 1, \dots, A.$$

Como se desea que los autovalores  $\lambda$  sean negativos, reescribimos  $P$  y  $A$  desigualdades anteriores como

$$\lambda \leq \omega_1 \left( \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} - 2 \right) + \omega_2 \sum_{k=1}^A \gamma_{a_{ki}} < 0, \quad \text{para toda } i = 1, \dots, P$$

$$\lambda \leq \omega_1 \sum_{k=1}^P \gamma_{p_{ki}} + \omega_2 \left( \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} - 2 \right) < 0, \text{ para toda } i = 1, \dots, A.$$

Obtenemos el siguiente sistema de  $P + A$  desigualdades con variables  $\omega_1$  y  $\omega_2$

$$\left( \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} - 2 \right) \omega_1 + \left( \sum_{k=1}^A \gamma_{a_{ki}} \right) \omega_2 < 0, \text{ para toda } i = 1, \dots, P \quad (3.25)$$

$$\left( \sum_{k=1}^P \gamma_{p_{ki}} \right) \omega_1 + \left( \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} - 2 \right) \omega_2 < 0 \text{ para toda } i = 1, \dots, A. \quad (3.26)$$

Resolviendo las desigualdades en (3.25) para  $\omega_2$  y considerando que  $\omega_2 > 0$ , se tiene

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} < - \frac{\left( \sum_{j \neq i}^P (\beta_{p_{ij}} + \beta_{p_{ji}}) + \sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} - 2 \right)}{\sum_{k=1}^A \gamma_{a_{ki}}}, \text{ para toda } i = 1, \dots, P. \quad (3.27)$$

Ahora resolvemos (3.26) también para  $\omega_2 > 0$ .

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} > - \frac{\sum_{k=1}^P \gamma_{p_{ki}}}{\left( \sum_{j \neq i}^A (\beta_{a_{ij}} + \beta_{a_{ji}}) + \sum_{k=1}^P \gamma_{a_{ik}} - 2 \right)}, \text{ para toda } i = 1, \dots, A. \quad (3.28)$$

Por tanto, podemos encontrar la matriz  $W$  si fijamos un valor para  $\omega_1 > 0$  y  $\omega_2$  que cumplan (3.27) y (3.28), si suponemos (3.23). |

A las matrices  $\mathbb{M}$  que cumplen con esta condición, las llamaremos matrices de **Tipo II**.

Observemos que las condiciones (3.21) y (3.22) pueden escribirse de la siguiente forma

$$\sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} + \sum_{j \neq i}^P \beta_{p_{ij}} < 2 - \sum_{j \neq i}^P \beta_{p_{ji}} \quad (3.29)$$

$$\sum_{k=1}^A \gamma_{p_{ik}} + \sum_{j \neq i}^P \beta_{p_{ij}} < 2 - \sum_{j \neq i}^P \beta_{p_{ji}} \quad (3.30)$$

Si comparamos las condiciones del **Tipo I** y **Tipo II**, podemos observar que las del **Tipo II** son menos restrictivas para los parámetros de la matriz de la comunidad.

### Condición Tipo III. Caso campo medio

Supongamos que todos los coeficientes de la matriz  $\mathbb{M}$  son no nulos, de forma que los coeficientes de competición entre las especies y las plantas y los coeficientes de mutualismos entre ellos son iguales. En este caso decimos que el sistema (3.13) es de **campo medio**, garantizando la conectividad total de las relaciones mutualistas entre plantas y animales.

**Teorema 3.9.** *Supongamos que la matriz  $\mathbb{M}$ , definida como en (3.14), con*

$$\beta_1 = \beta_{p_{ij}} < 1, \quad \beta_2 = \beta_{a_{ij}} < 1, \quad \gamma_1 = \gamma_{p_{ij}}, \quad \gamma_2 = \gamma_{a_{ij}},$$

para todo  $i = 1, \dots, P$  y todo  $j = 1, \dots, A$ , satisface la condición (3.17), que viene dada por

$$\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta_1 (P - 1)}{P} \frac{1 + \beta_2 (A - 1)}{A}.$$

Entonces la matriz  $\mathbb{M}$  es de clase  $S_\omega$ .

**Demostración.** Tomamos  $\beta_1 = \beta_{p_{ij}} < 1$ ,  $\beta_2 = \beta_{a_{ij}} < 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{p_{ij}}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_{a_{ij}}$ , para todo  $i = 1, \dots, P$  y para todo  $j = 1, \dots, A$ . Nuevamente consideramos la matriz  $\mathbb{M}$  de orden  $(P + A)$ , escrita por bloques como en (3.14), donde ahora las matrices  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  están definidas por

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\beta_1 & \dots & -\beta_1 \\ -\beta_1 & -1 & \dots & -\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_1 & -\beta_1 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\beta_2 & \dots & -\beta_2 \\ -\beta_2 & -1 & \dots & -\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_2 & -\beta_2 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{A \times A} \quad (3.31)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix}_{P \times A}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

con  $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ .

La matriz  $W$  la definimos en bloques,

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & \emptyset \\ \emptyset & W_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

donde las matrices  $W_1$  y  $W_2$  son como en (3.24).

Como antes

$$C = W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W = \begin{bmatrix} D_1 & C_1 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

donde (ver anexo para la notación)

$$D_1 = D(-2\omega_1, -2\omega_1\beta_1; P), \quad D_2 = D(-2\omega_2, -2\omega_2\beta_2; A), \\ C_1 = (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) I_{P \times A}, \quad C_2 = (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) I_{A \times P}.$$

Nos planteamos encontrar la condición para que los autovalores de  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$  sean negativos. Para eso, calculamos las soluciones del polinomio característico de  $C$

$$p(\lambda) = |C(\lambda)| = |C - \lambda I_{A \times P}| = |W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W - \lambda I_{A \times P}| = 0,$$

donde  $I_{A \times P}$  denota la matriz identidad de orden  $A \times P$ . La matriz  $C(\lambda)$  se puede escribir de la siguiente forma

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} F_1 & C_1 \\ C_2 & F_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)},$$

donde

$$F_1 = D(-2\omega_1 - \lambda, -2\omega_1\beta_1; P), \quad F_2 = D(-2\omega_2 - \lambda, -2\omega_2\beta_2; A)$$

Por tanto, aplicando la Proposición 5.1 (ver anexo), se tiene

$$p(\lambda) = (-2\omega_1 - \lambda + 2\omega_1\beta_1)^{P-1} (-2\omega_2 - \lambda + 2\omega_2\beta_2)^{A-1} \cdot q(\lambda)$$

donde

$$q(\lambda) = \left( (-2\omega_1 - \lambda - 2\omega_1\beta_1(P-1)) (-2\omega_2 - \lambda - 2\omega_2\beta_2(A-1)) - PA(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2 \right) \\ = 4 \left[ \left( \omega_1 + \frac{\lambda}{2} + \omega_1\beta_1(P-1) \right) \left( \omega_2 + \frac{\lambda}{2} + \omega_2\beta_2(A-1) \right) - \frac{PA}{4} (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2 \right].$$

Los autovalores de la matriz  $C$  son:

$$\begin{cases} \lambda = 2\omega_1(\beta_1 - 1) \text{ con multiplicidad } P - 1, \\ \lambda = 2\omega_2(\beta_2 - 1) \text{ con multiplicidad } A - 1, \\ \text{las raíces de } q(\lambda). \end{cases}$$

Las raíces de  $q(\lambda)$  son las raíces del siguiente polinomio de grado 2,

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} + R_1(\omega_1, \omega_2) \frac{\lambda}{2} + R_2(\omega_1, \omega_2)$$

donde

$$R_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1(1 + \beta_1(P - 1)) + \omega_2(1 + \beta_2(A - 1)),$$

$$R_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_1\omega_2(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1)) - \frac{PA}{4}(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2.$$

Teniendo en cuenta que  $R_1 > 0$ , para que las raíces de  $m(\lambda)$  sean negativas, se necesita que

$$R_2(\omega_1, \omega_2) > 0.$$

Esto es equivalente a

$$\omega_1\omega_2(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1)) > \frac{PA}{4}(\omega_1^2\gamma_1^2 + \omega_2^2\gamma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\gamma_1\gamma_2),$$

de donde,

$$0 > \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \gamma_2^2 + 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \left(\gamma_1\gamma_2 - \frac{2}{PA}(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1))\right) + \gamma_1^2$$

Teniendo en cuenta (3.17), para que existan  $\omega_1, \omega_2 > 0$  que verifiquen la desigualdad anterior, es suficiente que

$$\left(\gamma_1\gamma_2 - \frac{2}{PA}(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1))\right)^2 > \gamma_1^2\gamma_2^2$$

$$\gamma_1\gamma_2 < \frac{(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1))}{PA}$$

que es la condición (3.17) |

A estas matrices  $\mathbb{M}$  las llamaremos matrices de **Tipo III**.

De todo lo anterior llegamos al siguiente teorema.

**| Teorema 3.10.** *Supongamos que  $\mathbb{M}$  es la matriz de la comunidad del sistema (3.13) y es de Tipo I, II, o III. Entonces, el sistema (3.13) tiene un punto de equilibrio globalmente estable no negativo  $u^*$ .*

*Demostración.* Por el teorema (3.6), si la matriz de la comunidad  $\mathbb{M}$  es de clase  $S_\omega$ , el sistema (3.13) tendrá un punto de equilibrio  $u^*$  globalmente estable. Como  $\mathbb{M}$  al ser de Tipo I, II o III es de clase  $S_\omega$ , el sistema (3.13) tiene un punto de equilibrio globalmente estable no negativo  $u^*$ . |

Vemos ahora un caso particular

No es difícil ver que el razonamiento aplicando a las matrices de **Tipo III** se puede repetir cuando una, o varias filas, son nulas (y sus correspondientes columnas). En este caso

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix}_{P \times A}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2 \end{bmatrix}_{A \times P}, \quad (3.33)$$

y  $B_1$  y  $B_2$  están definidas en (3.31).

**| Teorema 3.11.** *Supongamos que  $\beta_1, \beta_2 < 1$  y consideramos la matriz  $\mathbb{M}$  de (3.14) con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como en (3.33) y  $B_1$  y  $B_2$  como en (3.31). Supongamos que se cumple la condición*

$$A(P-1)\gamma_1\gamma_2 < (1-\beta_1)(1+(P-1)\beta_1)(1+(A-1)\beta_2). \quad (3.34)$$

Entonces  $\mathbb{M} \in S_\omega$

**Demostración.** Con la misma idea de la prueba del Teorema 3.10, tenemos claro que

$$W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W = \begin{bmatrix} D_1 & C_1^0 \\ C_2^0 & D_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)},$$

donde

$$D_1 = D(-2\omega_1, -2\omega_1\beta_1; P), \quad D_2 = D(-2\omega_2, -2\omega_2\beta_2; A), \\ C_1^0 = (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) \mathbf{I}_{P \times A}^0, \quad C_2^0 = (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) (\mathbf{I}_{P \times A}^0)^T$$

(ver anexo para la notación).

Calculemos los autovalores de la matriz  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$  para encontrar la condición para que sean negativos. Calculemos primero sus autovalores, esto es, calculemos las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = |W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W - \lambda I|.$$

Observemos que esta nueva matriz  $C$  se puede escribir de la siguiente forma

$$W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W - \lambda I = \begin{bmatrix} F_1 & C_1^0 \\ C_2^0 & F_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)},$$

donde

$$F_1 = D(-2\omega_1 - \lambda, -2\omega_1\beta_1; P), \quad F_2 = D(-2\omega_2 - \lambda, -2\omega_2\beta_2; A).$$

Por tanto, el determinante de  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W - \lambda I$  es

$$p(\lambda) = (-2\omega_1 - \lambda + 2\omega_1\beta_1)^{P-2} (-2\omega_2 - \lambda + 2\omega_2\beta_2)^{A-1} \cdot q(\lambda)$$

donde

$$q(\lambda) = -(\lambda + 2\omega_1(1 + \beta_1(P-1))) (\lambda + 2\omega_2(1 + \beta_2(A-1))) (\lambda + 2\omega_1(1 - \beta_1)) \\ + (\lambda + 2\omega_1)(P-1)A(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2.$$

Por lo tanto, las raíces de  $p(\lambda)$ , los autovalores de  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$ , son

$$\begin{cases} \lambda = 2\omega_1(\beta_1 - 1) \text{ con multiplicidad } P - 2, \\ \lambda = 2\omega_2(\beta_2 - 1) \text{ con multiplicidad } A - 1, \\ \text{las raíces de } q(\lambda). \end{cases}$$

Observemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} q(\lambda) = +\infty$$

y

$$q(-2\omega_1(1 - \beta_1)) > 0, \quad q(-2\omega_1(1 + \beta_1(P-1))),$$

con

$$-2\omega_1(1 + \beta_1(P-1)) < -2\omega_1(1 - \beta_1) < 0.$$

Por lo tanto, para que las raíces de  $q$  sean negativas es suficiente que  $q(0) < 0$ , esto es,

$$(P-1)A(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2 < 4\omega_1\omega_2(1 - \beta_1)(1 + \beta_1(P-1))(1 + \beta_2(A-1))$$

o, equivalentemente,

$$0 > \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \gamma_2^2 + 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \left(\gamma_1\gamma_2 - \frac{2}{(P-1)A}(1 - \beta_1)(1 + \beta_1(P-1))(1 + \beta_2(A-1))\right) + \gamma_1^2.$$

Razonando como en el Teorema 3.10, esto es cierto si

$$\gamma_1\gamma_2 < \frac{1}{(P-1)A}(1 - \beta_1)(1 + \beta_1(P-1))(1 + \beta_2(A-1)).$$

**Observación 3.2.** Si se tienen  $p$  filas nulas, para  $1 \leq p \leq P$ , la condición es:

$$\gamma_1\gamma_2(P-p)A(1 + (p-1)\beta_1) < (1 - \beta_1)(1 + (P-1)\beta_1)(1 + (A-1)\beta_2).$$

### 3.3.3 Comparación de los tres tipos de matrices

Hemos visto que las matrices de campo medio se asocian a la red completa de conexiones. Esta red contiene todos los enlaces mutualistas posibles entre las diferentes especies de plantas y animales. A partir de esta red podemos generar otras en las cuales al menos un enlace o conexión se ha eliminado, en las cuales a las matrices asociadas las denominaremos **matrices de anidamientos** y se denotarán como  $\mathbb{A}$ .

Una vez obtenida las condiciones de **Tipo I, II** o **III** para que nuestra matriz de campo medio  $\mathbb{M}$  sea de clase  $S_\omega$ , necesitamos que la matriz de anidamiento también sea de clase  $S_\omega$ . Es decir, que la matriz de campo transmita esta característica a una matriz de anidamiento que se genere a partir de ella.

Vimos que para las matrices de **Tipo III** esta condición se encontró al calcular los autovalores de la matriz  $W\mathbb{M} + \mathbb{M}^T W$ . Si escogemos este método para estudiar la matriz de anidamiento sería muy complicado debido a la gran cantidad de posibilidades de generar una matriz de anidamiento a partir de una de campo medio. Por otro lado, si una matriz es de clase  $S_\omega$  no necesariamente posee una matriz diagonal dominante negativa, lo cual quiere decir que la matriz de anidamiento no sería necesariamente de **Tipo I**.

Veamos ahora que ocurre si la matriz de campo medio  $\mathbb{M}$  es de **Tipo II**. En este caso es fácil ver que la matriz de anidamiento  $\mathbb{A}$  también lo será, ya que la ubicación de los autovalores en la parte izquierda del plano complejo está garantizada por el mayor número de conexiones en la red.

Por tanto, cuando trabajemos con matrices de campo medio y de anidamiento, ambas serán de **Tipo II**.

En esta sección queremos comparar las tres condiciones estudiadas anteriormente. Para ello, nos situaremos en el caso de campo medio.

$$\beta_{p_{ii}} = \beta_{a_{ii}} = 1, \quad \beta_1 = \beta_{p_{ij}}, \quad \beta_2 = \beta_{a_{ij}}, \quad i \neq j, \quad \gamma_1 = \gamma_{p_{ij}}, \quad \gamma_2 = \gamma_{a_{ij}}.$$

Con esta notación la condición de las matrices **Tipo I** se lee de la siguiente forma:

$$\gamma_1 A + \beta_1 (P - 1) < 1, \quad \gamma_2 P + \beta_2 (A - 1) < 1. \quad (3.35)$$

Las condiciones de las matrices **Tipo II** son:

$$\gamma_1 A + 2\beta_1 (P - 1) < 2, \quad \gamma_2 P + 2\beta_2 (A - 1) < 2, \quad (3.36)$$

y

$$AP\gamma_1\gamma_2 < (2(1 - \beta_1(P - 1)) - \gamma_1A)(2(1 - \beta_2(A - 1)) - \gamma_2P). \quad (3.37)$$

Por último, la condición para matrices **Tipo III**, esto es, (3.17) es equivalente a

$$\gamma_2 < \frac{1}{\gamma_1} \frac{(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1))}{PA}. \quad (3.38)$$

Comparemos estas condiciones, es decir, veamos el conjunto de pares  $(\gamma_1, \gamma_2)$  que verifican las condiciones anteriores. Es fácil ver que (3.35) restringe los valores de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de la forma

$$\gamma_1 < \frac{R_1}{A}, \quad \gamma_2 < \frac{R_2}{P}$$

donde  $R_1 = 1 - (P - 1)\beta_1$  y  $R_2 = 1 - (A - 1)\beta_2$ .

Por otro lado, (3.36) es equivalente a

$$\gamma_1 < \frac{2R_1}{A}, \quad \gamma_2 < \frac{2R_2}{P},$$

Mientras que la condición (3.37) exige que los valores  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  estén por debajo de la recta

$$\gamma_2 = (2R_1 - A\gamma_1) \frac{R_2}{R_1P}$$

Además, vemos que el valor de la recta en  $\gamma_1 = R_1/A$  es exactamente  $\gamma_2 = R_2/P$  (ver figura 3.2), con lo cual vemos que el conjunto de pares  $(\gamma_1, \gamma_2)$  que verifican (3.35) está estrictamente contenido en los que verifican (3.36) y (3.37).

Ahora vamos a comparar las condiciones (3.36) y (3.37) con la condición (3.38). Observamos que la condición (3.38) define la hipérbola

$$\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{(1 + \beta_1(P - 1))(1 + \beta_2(A - 1))}{PA} = \frac{2 - R_1}{P} \frac{2 - R_2}{A} \frac{1}{\gamma_1}.$$

Por otro lado, suponiendo (3.36) es fácil probar que estas curvas no se cortan y, por tanto, la región definida por (3.38) es la mayor de todas, ver figura 3.2

Por tanto, vemos que en el caso de campo medio, la condición (3.17) es la mejor de todas.

**Observación 3.3.** Observemos, no obstante, que la condición de ser Tipo III sólo puede aplicarse a las matrices de campo medio, mientras que las otras dos condiciones pueden aplicarse a cualquier tipo de matrices.

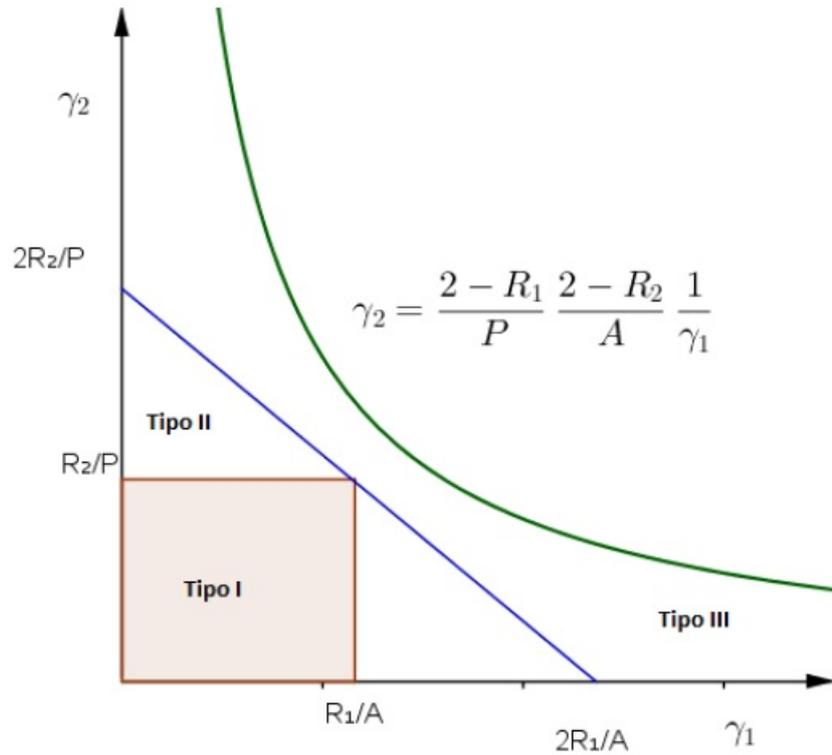


Figura 3.2: Comparación de Tipos de matrices. La región por debajo de la hipérbola (Tipo III) definida por (3.17) es la más amplia. Le sigue la región bajo la recta (Tipo II). Por último, la región delimitada por el rectángulo es la definida por las matrices Tipo I.

### 3.4 Estructura del atractor global en sistemas mutualistas

Como vimos en el capítulo primero, sabemos que un atractor global determina el comportamiento de todas las soluciones de un sistema dinámico para tiempos grandes. Y es precisamente este concepto de atractor el que usaremos para estudiar el sistema (3.13) como un sistema dinámico.

**| Teorema 3.12.** *Consideremos el modelo (3.13), y supongamos que se verifica (3.17), es decir,  $\beta_1 = \min\{\beta_{p_{ij}}\} < 1$ ,  $\beta_2 = \min\{\beta_{a_{ij}}\} < 1$ ,  $\gamma_1 = \max\{\gamma_{p_{ij}}\}$ ,  $\gamma_2 = \max\{\gamma_{a_{ij}}\}$ , para*

todo  $i, j$ , y se tiene que

$$\gamma_1 \gamma_2 < \frac{1 + \beta_1 (P - 1)}{P} \frac{1 + \beta_2 (A - 1)}{A}. \quad (3.39)$$

Entonces, (3.13) tiene un atractor global  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{P+A}$ .

**Demostración.** El Teorema 3.4 provee en (3.20) la acotación de las soluciones globales por medio de un sistema Lotka-Volterra cooperativo 2D, ver (3.19). Como este último sistema tiene un conjunto compacto atrayente, según el Teorema 1.1, lo mismo se cumple para el par  $(\omega, z)$ , de donde, por el Teorema 1.5, se obtiene el resultado.  $\blacksquare$

### 3.4.1 Caracterización del atractor global

En esta sección estudiaremos resultados sobre la estructura geométrica del atractor global para nuestro sistema (3.13). Para ello describiremos una red compleja de nodos y conexiones dentro del atractor. Por tanto, podemos entender el atractor como una nueva red dinámica compleja que contiene todos los posibles comportamientos factibles para tiempos grandes. En particular, contiene toda la información abstracta acerca de los escenarios futuros de biodiversidad.

El resultado que tenemos a continuación nos describe el conjunto de puntos estacionarios  $E$ , el cual, nos permite definir una función de Lyapunov para nuestro sistema. La prueba, aunque algo complicada, nos describe la manera en que los puntos estacionarios quedan estratificados en el atractor, es decir, nos muestra la manera concreta en la que podemos ir construyendo la nueva red compleja constituida por el atractor global.

**Teorema 3.13.** *Supongamos que  $A \in S_\omega$  y  $E := \{u_1^*, \dots, u_m^*\} \subset \mathbb{R}_+^n$  es el conjunto de puntos estacionarios no negativos para (3.3). Entonces  $E$  define una descomposición de Morse para el atractor global  $\mathcal{A}$  de (3.3). Como consecuencia, (3.3) es un sistema dinámicamente gradiente y, por tanto, gradiente. En particular, dado  $z \in \mathcal{A} \setminus E$  existen  $i < j \in \{1, \dots, m\}$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t; z) - u_j^*\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t; z) - u_i^*\| = 0. \quad (3.40)$$

**Demostración.** Construiremos una sucesión creciente de atractores locales

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m = \mathcal{A}.$$

Hay señalar que una descomposición de Morse estará dada por

$$E_i = A_i \cap A_{i-1}^*.$$

La forma en la que se construye  $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, m$ , implicará que  $E_i \in E$ , el conjunto de equilibrios no negativos de (3.3).

**Paso 1:**

Llamaremos  $u_1^*$  al punto estacionario dado por el Teorema 3.10, es decir, el que es globalmente asintóticamente estable  $\mathbb{R}_+^n$ , y lo denotaremos por  $u_1^* = (u_1^*(1), \dots, u_1^*(n))$ . Sea  $N = \{1, \dots, n\}$ , y

$$I_1 = \{i \in N / u_1^*(i) = 0\},$$

$$J_1 = N \setminus I_1 = \{j \in N / u_1^*(j) > 0\}$$

Suponemos  $J_1 \neq \emptyset$ , en otro caso el resultado es trivial, pues entonces  $\mathcal{A} = \{0\}$ . Ordenamos los  $m_1 \leq n$  elementos del conjunto  $J_1$  como:

$$j_1 < j_2 \cdots < j_{m_1}.$$

Definimos los hiperplanos abiertos  $E_{j_k}$ , con  $k \in \{1, \dots, m_1\}$ , como

$$E_{j_k} = \{u \in \mathbb{R}_+^n / u(j_k) = 0 \text{ y todas las otras componentes } u(i) > 0\}.$$

También definimos  $A_1 = \{u_1^*\}$ . Entonces  $A_1$  es un atractor global, el cual atrae cada solución que comienza en

$$\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{\bigcup_{k=1}^{m_1} E_{j_k}}.$$

Entonces, su repulsor asociado en  $\mathcal{R}_n^+$  está dado por

$$A_1^* = \overline{\bigcup_{k=1}^{m_1} E_{j_k}}.$$

**Paso 2:**

Como cada  $E_{j_k}$  es un conjunto positivamente invariante, el Teorema 3.6 y el corolario 3.2 pueden ser aplicados una vez más. Sea  $u_{j_k}^*$  el punto globalmente asintóticamente estable en  $E_{j_k}$ ,  $k \in \{1, \dots, m_1\}$ . En particular,  $u_{j_1}^*$  es un atractor local en  $E_{j_1}$ .

Sea

$$A_2 = A_1 \cup W^u(u_{j_1}^*),$$

es decir,  $A_2$  contiene  $A_1$ , y todas las conexiones de  $u_{j_1}^*$  a  $u_1^*$ , en el sentido de (3.40), es decir,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t; z) - u_{j_1}^*\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t; z) - u_{j_1}^*\| = 0$$

Se construye el repulsor asociado a  $\mathcal{A}_2$ .

Para  $u_{j_1}^*$ , sea

$$I_{j_1} = \{i \in L / u_{j_1}^*(i) = 0\}; \text{ en particular } j_1 \in I_{j_1},$$

$$J_{j_1} = L \setminus I_{j_1} = \{j \in L / u_{j_1}^*(j) > 0\}.$$

Ordenamos, para  $m_2 < n$ ,  $J_{j_1}$  como

$$j_{1,j_1} < j_{2,j_1} < \dots < j_{m_2,j_1}$$

y consideramos

$$E_{j_{1,j_1}} = \{u \in E_{j_1} / u(j_{1,j_1}) = 0 \text{ y todas las otras componentes } u(i) > 0\}.$$

Entonces  $u_{j_1}^*$  es un atractor local en  $E_{j_1}$ , el cual atrae cada solución que comienza en

$$\overline{E_{j_1}} \setminus \bigcup_{k=1}^{m_2} \overline{E_{j_{k,j_1}}}.$$

Repetimos este mismo argumento en el Paso 2 para cada  $E_{j_k}$ , para  $k \in \{2, \dots, m_1\}$ .

### Paso 3:

Nuevamente repetimos los argumentos del Paso 2 para los hiperplanos  $E_{1,j_1}$ , y desde el que podemos definir

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup W^u(u_{j_{1,j_1}}^*),$$

el cual posee un repulsor asociado a  $\mathcal{A}_3^*$ .

Una vez más, repetimos los argumentos del Paso 2 para el hiperplano  $E_{j_{k,j_1}}$ , para  $k \in \{2, \dots, m_2\}$ .

### Paso m:

En general, construimos, para alguna solución estacionaria,

$$\mathcal{A}_{m+1} = \mathcal{A}_m \cup W^u \left( u_{j_1, \dots, j_1}^* \right)$$

y su repulsor asociado  $\mathcal{A}_{m+1}^*$ .

Observemos que, por su propia construcción, los  $\mathcal{A}_m^*$  son

- i) Conjuntos cerrados invariantes
- ii) No intersecan con  $\bigcup_{k=1}^m \mathcal{A}_k$ .
- iii) Contiene el resto de puntos estacionarios que no están en  $\bigcup_{k=1}^m \mathcal{A}_k$ .

En  $m$  pasos el proceso finaliza



## 4 | Conclusiones

En este trabajo hemos comenzado por hacer un estudio detallado sobre los atractores globales. Su existencia y unicidad, visto en el capítulo 1, hasta su comportamiento bajo perturbaciones, visto en el capítulo 2. Si estudiamos diferentes fenómenos en la naturaleza vemos que, a veces, están regidos por SDO complejos y con una sensibilidad muy grande respecto a los datos iniciales. Gracias a todo lo anterior podemos observar que dada unas condiciones específicas existe un atractor global para estos sistemas y que, de hecho, es único. Con lo cual podemos concluir que problemas que a "simple vista" tienen un comportamiento caótico e imprevisible, sus trayectorias cuando  $t \rightarrow \infty$  acaban convergiendo a un atractor que dota de un orden a ese aparente caos.

En el caso particular aplicado a la Ecología, en concreto sistemas mutualistas, hemos demostrado que ese sistema tiene un atractor, y que de hecho, como vimos al estudiar la continuidad del atractor global, es un objeto robusto y sólido, es decir, que tiene un comportamiento similar ante pequeños cambios en los datos. Con esto, vemos que éste es un estudio fiable. Ya que en la Ecología es habitual los cambios respecto a los datos iniciales dados por los individuos de las especies que interactúan.

En cuanto al estudio del atractor hemos visto que se relaciona con una descomposición de Morse. Con lo cual llegamos a que ese atractor está formado por puntos estacionarios que están relacionados entre sí, donde se encuentra el  $(0,0)$ , un punto inestable, y otro punto que es globalmente estable atrayendo a todas las trayectorias. El resto podemos concluir que son puntos de silla. Con lo cual vemos que algo tan aparentemente complejo como un ecosistema, acaba tendiendo a un punto de equilibrio entre las distintas especies. Este atractor, y en concreto el punto de equilibrio guardan toda la información acerca de las variaciones en el número de individuos y la biodiversidad del ecosistema.



## 5 | Anexo I

En este anexo veremos los resultados que han sido necesarios para las pruebas de los Teoremas 3.9, 3.10 y 3.11

**Definición 5.1.** Dados  $M, N \in \mathbb{N}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , denotamos por

$$D(a, b; M) = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{M \times M}$$

y

$$\mathcal{I}_{M \times N} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N.$$

Con esta notación, la matriz  $C$  de (3.13) es una matriz de orden  $P + A$  definida por

$$C = \begin{bmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}, \quad (5.1)$$

donde

$$B_1 = D(-1, \beta_1; P), \quad B_2 = D(-1, \beta_2; A), \quad \Gamma_1 = \gamma_1 \mathcal{I}_{P \times A}, \quad \Gamma_2 = \gamma_2 \mathcal{I}_{A \times P},$$

esto es, las matrices definidas en (3.31).

A continuación presentamos un resultado donde estudiamos la matriz  $D(a, b; M)$ .

**Lema 5.1.** Consideramos  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $M \in \mathbb{N}$ .

1. Se tiene que

$$|D(a, b; M)| = (a + (M - 1)b)(a - b)^{M-1} \quad (5.2)$$

2. Se cumple

$$D(a, b; M)^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(M-1)b)} D(d, -b; M)$$

donde

$$d = a + (M-2)b.$$

*Demostración.* 1. Resultando la primera fila de las otras, tenemos

$$|D(a, b; M)| = \begin{vmatrix} a & b & b & b & \dots & b \\ b-a & b-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}_{M \times M}$$

Ahora, sumando todas las columnas a la primera, se obtiene

$$\begin{aligned} |D(a, b; M)| &= \begin{vmatrix} a+(M-1)b & b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}_{M \times M} = \\ &= (a+(M-1)b)(a-b)^{M-1}. \end{aligned}$$

2. Es fácil demostrar que  $D(a, b; M) \cdot D(a, b; M)^{-1} = I_P$ , donde  $I_P$  denota la matriz identidad de orden  $P$ .



A continuación veremos un resultado donde calculamos los autovalores para matrices generales  $C$ . Consideramos la matriz más general

$$C = \begin{bmatrix} D_P & C_1 \\ C_2 & D_A \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

donde

$$D_P = D(a_1, d_1; P), \quad D_A = D(a_2, d_2; A), \quad C_1 = c_1 I_{P \times A}, \quad C_2 = c_2 I_{A \times P},$$

y  $a_1, d_1, a_2, d_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Tenemos el siguiente resultado.

*Proposición 5.1.* Se cumple que

$$|C| = (a_1 - d_1)^{P-1} (a_2 - d_2)^{A-1} \left( (a_1 + (P-1)d_1) (a_2 + (A-1)d_2) - c_1 c_2 A P \right).$$

*Demostración.*

Caso 1: Suponemos que  $D_P^{-1}$  existe, esto es  $a_1 \neq d_1$  y  $a_1 \neq d_1(1-P)$ . En este caso obtenemos que

$$|C| = |D_P| \left| D_A - C_2 D_P^{-1} C_1 \right|. \quad (5.3)$$

Primero, calculamos  $D_2 D_P^{-1} C_1$ . No es difícil demostrar que

$$C_2 D_P^{-1} C_1 = c_2 c_1 \mathcal{I}_{A \times P} D_P^{-1} \mathcal{I}_{P \times A}.$$

Usando ahora el Lema 5.1 para la expresión  $D_P^{-1}$ , obtenemos

$$D_P^{-1} \mathcal{I}_{P \times A} = \frac{1}{(a_1 + (P-1)d_1)} \mathcal{I}_{P \times A},$$

y entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A \times P} D_P^{-1} \mathcal{I}_{P \times A} &= \frac{1}{(a_1 + (P-1)d_1)} \mathcal{I}_{A \times P} \mathcal{I}_{P \times A} \\ &= \frac{P}{(a_1 + (P-1)d_1)} \mathcal{I}_{A \times A}, \end{aligned}$$

de donde se puede deducir que

$$C_2 D_P^{-1} C_1 = \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P-1)d_1)} \mathcal{I}_{A \times A}.$$

Denotamos por

$$D = D_A - C_2 D_P^{-1} C_1$$

y obtenemos que

$$D = D \left( a_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P-1)d_1)}, d_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P-1)d_1)}; A \right).$$

Usando nuevamente el Lema 5.1, obtenemos

$$|C| = (a_2 - d_2)^{A-1} \left( a_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P-1)d_1)} + (A-1) \left( d_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P-1)d_1)} \right) \right).$$

Entonces, usando (5.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}
 |C| &= (a_1 - d_1)^{P-1} (a_1 + (P - 1) d_1) (a_2 - d_2)^{A-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( a_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P - 1) d_1)} + (A - 1) \left( d_2 - \frac{c_1 c_2 P}{(a_1 + (P - 1) d_1)} \right) \right) \\
 &= (a_1 - d_1)^{P-1} (a_2 - d_2)^{A-1} ((a_1 + (P - 1) d_1) (a_2 + (A - 1) d_2) - c_1 c_2 A P).
 \end{aligned}$$

Esto completa la prueba.

Caso 2:  $a_1 = d_1$ . En este caso, las  $P$ -primeras filas son similares, y por tanto  $|C| = 0$ .

Caso 3:  $a_1 = d_1 (1 - P)$ . Restamos a la fila  $P$ -ésima las otras  $P - 1$  filas,

$$|C| = \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Pd_1 & \dots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_1 & \dots & d_1 & d_1 & d_1(1 - P) & c_1 & c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & a_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & a_2 & \dots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & d_2 & \dots & a_2 \end{vmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

restamos la columna  $(P + 1)$ -ésima, a las siguientes  $A - 1$  columnas, y se tiene que:

$$|C| = \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Pd_1 & \dots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_1 & \dots & d_1 & d_1 & d_1(1 - P) & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & a_2 & d_2 - a_2 & \dots & d_2 - a_2 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & a_2 - d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & a_2 - d_2 \end{vmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

y entonces,

$$|C| = \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Pd_1 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & d_1 & d_1(1-P) & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2c_2 & 2c_2 & \cdots & 2c_2 & 2c_2 & 2c_2 & a_2 + d_2 & d_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_2 & \cdots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & a_2 - d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_2 & \cdots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & a_2 - d_2 \end{vmatrix}_{(P+A) \times (P+A)}$$

Se desarrolla el determinante por la última columna, obteniendo

$$|C| = (a_2 - d_2) \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Pd_1 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & d_1 & d_1(1-P) & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2c_2 & 2c_2 & \cdots & 2c_2 & 2c_2 & 2c_2 & a_2 + d_2 & d_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_2 & \cdots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & a_2 - d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_2 & \cdots & c_2 & c_2 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & a_2 - d_2 \end{vmatrix}_{(P+A-1) \times (P+A-1)}$$

Repitiendo este proceso  $A - 1$  veces, llegamos a

$$|C| = (a_2 - d_2)^{A-1} \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 \\ 0 & Pd_1 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 & 0 \\ d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & d_1 & d_1(1-P) & c_1 \\ Ac_2 & Ac_2 & \cdots & Ac_2 & Ac_2 & Ac_2 & a_2 + (A-1)d_2 \end{vmatrix}_{(P+1) \times (P+1)}$$

Ahora, continuamos desarrollando el determinante, por la última columna y teniendo en cuenta que

$$\begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 \\ 0 & Pd_1 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 \\ d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & d_1 & d_1(1-P) \end{vmatrix}_{(P+1) \times (P+1)} = 0,$$

se tiene

$$|C| = -c_1 (a_2 - d_2)^{A-1} \begin{vmatrix} Pd_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 \\ 0 & Pd_1 & \cdots & 0 & 0 & -Pd_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Pd_1 & -Pd_1 \\ Ac_2 & Ac_2 & \cdots & Ac_2 & Ac_2 & Ac_2 \end{vmatrix}_{P \times P}$$

Restamos las columnas a la última columna,

$$|C| = -c_1 (a_2 - d_2)^{A-1} \begin{vmatrix} -2Pd_1 & -Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -Pd_1 & -Pd_1 \\ -Pd_1 & -2Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -Pd_1 & -Pd_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Pd_1 & -Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -2Pd_1 & -Pd_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & Ac_2 \end{vmatrix}_{P \times P},$$

y desarrollamos el determinante por la última columna,

$$|C| = -c_1 c_2 A (a_2 - d_2)^{A-1} \begin{vmatrix} -2Pd_1 & -Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -Pd_1 & -Pd_1 \\ -Pd_1 & -2Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -Pd_1 & -Pd_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Pd_1 & -Pd_1 & \cdots & -Pd_1 & -Pd_1 & -2Pd_1 \end{vmatrix}_{(P-1) \times (P-1)},$$

y así,

$$|C| = -c_1 c_2 A (-Pd_1)^{P-1} (a_2 - d_2)^{A-1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(P-1) \times (P-1)},$$

Finalmente, usando el Lema 5.1, obtenemos

$$|C| = (-1)^P c_1 c_2 A (Pd_1)^{P-1} (a_2 - d_2)^{A-1} P = (-1)^P Ad_1^{P-1} (a_2 - d_2)^{A-1} P^P c_1 c_2.$$

Con esto concluye la prueba. |

Probemos a continuación el resultado necesario para la prueba del Teorema 3.11. Definamos

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} D_P & C_1^0 \\ C_2^0 & D_A \end{bmatrix}_{(P+A) \times (P+A)} \quad (5.4)$$

donde

$$D_P = D(a_1, d_1; P), \quad D_A = D(a_2, d_2; A), \quad C_1^0 = c_1 \mathcal{I}_{P \times A}^0, \quad C_2^0 = c_2 (\mathcal{I}_{P \times A}^0)^T,$$

$a_1, d_1, a_2, d_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  y hemos denotado  $\mathcal{I}_{P \times A}^0 = a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, P, j = 1, \dots, A$  y

$$\begin{cases} 0 & i = 1, j = 1, \dots, A, \\ 1 & i = 2, \dots, P; j = 1, \dots, A, \end{cases}$$

Tenemos el siguiente resultado

**Proposición 5.2.** Par la matriz (5.4) se cumple que

$$|\mathcal{A}_0| = (a_1 - d_1)^{P-2} (a_2 - d_2)^{A-1} \left( (a_1 + (P-1)d_1) (a_2 + (A-1)d_2) (a_1 - d_1) - c_1 c_2 a_1 A (P-1) \right).$$

**Demostración.** Se sigue exactamente la Proposición 5.1. Veamos las principales diferencias.

Observemos que

$$C_2^0 D_P^{-1} C_1^0 = \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1)}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)} \mathbf{I}_{A \times A}.$$

Denotando en este caso

$$D_0 = D_A - C_2^0 D_P^{-1} C_1^0,$$

se obtiene que

$$D_0 = D \left( a_2 - \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1)}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)}, d_2 - \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1)}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)}; A \right).$$

Usando el Lema 5.1, se tiene que

$$\begin{aligned} |D_0| &= (a_2 - d_2)^{A-1} \left( a_2 - \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1)}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)} + \right. \\ &\quad \left. (A-1) \left( d_2 - \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1)}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)} \right) \right) \\ &= (a_2 - d_2)^{A-1} \left( a_2 + d_2 (A-1) - \frac{a_1 c_1 c_2 (P-1) A}{(a_1 - d_1) (a_1 + (P-1)d_1)} \right). \end{aligned}$$

Y, por tanto, usando que

$$|\mathcal{A}_0| = |D_A - C_2^0 D_P^{-1} C_1^0|$$

se llega a que

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0| &= \\ &= (a_1 - d_1)^{A-1} \left( (a_1 + (P-1)d_1) (a_2 + (A-1)d_2) (a_1 - d_1) - c_1 c_2 a_1 A (P-1) \right), \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. |



## 6 | Anexo II

En este anexo mostramos los códigos del fichero Matlab que hemos usado para resolver el problema de las ecuaciones de Lorentz.

Este fichero nos devuelve dos figuras. En la figura (1) vemos como las órbitas van dando forma al atractor. En la figura (2) observamos las trayectorias del sistema.

```
function Lorentz(a, b, c)
```

Preparación

```
T = 50;  
u0 = [1;1;1];  
f = @(t,u) [a*(u(2)-u(1)); u(1)*(b-u(3))-u(2);u(1)*u(2)-c*u(3)];  
u(3))-u(2);u(1)*u(2)-c*u(3)];
```

Resolución

```
[t,u] = ode45(f,[0,T],u0);
```

Gráficas

```
close all  
figure(1)  
plot3(u(:,1),u(:,2),u(:,3))  
view(-8,26)  
hold on  
plot3(1,1,1,'r.','MarkerSize',20)  
legend('Órbita','Dato inicial')  
title('Atractor de Lorentz')  
xlabel('x')  
ylabel('y')  
zlabel('z')
```

### Trayectorias

```
figure(2)
plot(t, u(:,1), 'b')
hold on
plot(t, u(:,2), 'g')
plot(t, u(:,3), 'm')
legend('x = x(t)', 'y = y(t)', 'z = z(t)')
title('Trayectorias de la solución')
xlabel('Tiempo')
end
```

# Bibliografía

- [1] S. ALLESIMA, S. TANG, *Stability criteria for complex ecosystems*, Nature, 483(2012), 205-208.
- [2] É.R. ARAGÃO-COSTA, *Descomposición de Morse para sistemas gradientes en dimensión infinita*, Tesis Doctoral Universidad de Sevilla, (2012).
- [3] E.R. ARAGÃO-COSTA, T. CARABALLO, A.N. CARVALHO, J.A. LANGA, *Stability of gradient semigroups under perturbation*, Nonlinearity 24 (2011), 2099-2117.
- [4] J. BASCOMPTE, P. JORDANO, *The structure of plant-animal mutualistic networks: the architecture of biodiversity*, Annu. Rev. Ecol. Evol. Syst. 38 (2007).
- [5] J. BASCOMPTE, P. JORDANO, C.J. MELIÁN, J. M. OLESEN, *The nested assembly of plant-animal mutualistic networks*, Proc. Natl Acad. Sci. USA
- [6] J. BASCOMPTE, P. JORDANO, *Asymmetric coevolutionary networks facilitate biodiversity maintenance*, Science 312 (2006).
- [7] U. BASTOLLA, M. A. FORTUNA, A. PASCUAL-GARCÍA, A. FERRERA, B. LUQUE, J. BASCOMPTE, *The architecture of mutualistic networks minimizes competition and increases biodiversity*, Nature 458.
- [8] M.S. BAZARAA, J.J. JARVIS y H.D. SHERALI, *Programación lineal y flujo en redes*, segunda edición, Limusa, México, DF, 2004.
- [9] A.N. CARVALHO, J.A. LANGA, *An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation*, J. Differential Equations 246 (2009).
- [10] C. CONLEY, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society (2002).

- [11] G.B. DANTZIG y P. WOLFE, *Decomposition principle for linear programs*, Operations Research, **8**, págs. 101–111, 1960.
- [12] G.F. GUERRERO SUÁREZ *Dinámica de Redes Mutualistas en Ecosistemas Complejos* Tesis Doctoral Universidad de Sevilla.
- [13] J.A. LANGA, F. RIVERO, *Introducción a los sistemas dinámicos no-autónomos* Publicaciones Universidad de Sevilla (2014).
- [14] J. LOTKA, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, Dover, New York, (1924).
- [15] D.E. NORTON, *The fundamental theorem of dynamical system*, Comment. Math, Univ. Caroline 36(3) (1995), 586-597.
- [16] K.P. RYBAKOWSKI, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1988; second edition 1996).
- [17] S. SAAVEDRA, F. REED-TSOCHAS, B. UZZI, *A simple model of bipartite cooperation for ecological and organisational networks*, Nature 47 (2009).
- [18] Y. TAKEUCHI, *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.. Singapore (1996)
- [19] V. VOLTERRA, *Lecons sur It theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gauthiers-Villars, Paris, (1931).