PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS DE PROBLEMAS ELÍPTICOS CON COEFICIENTE DE DIFUSIÓN NO-LOCAL

Tarcyana do Socorro Figueiredo de Sousa

Directores : Prof. Dr. Cristian Morales Rodrigo

Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todos que me participaran direta y indirectamente en la construcción de esta memoria.

Mi agradecimiento al Prof. Antonio Suárez por haber orientado al largo de estos 4 años. Agradezco su paciencia, su disponibilidad y atención. En todos los momentos de dificuldad siempre ha estado para ayudarme. ¡Muchas Gracias!

Agradezco al Prof. Cristian Morales por toda ayuda que me ha proporcionado y además por la amizade que hemos construido.

Al Prof. Giovany Figueiredo, mi tio y profesor, quien me introduziu y animou en el mundo de la investiagión matemática.

Quiero agradecer a todos los profesores del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico (EDAN).

A todos los becários del EDAN por la inumeras ayudas y por todos los desayunos.

A todos mis amigos brasileños que han estado en Sevilla durante estos 4 años.

A mi familia que mismo de lejos me han dado su apoio. En especial a mi hija, Tayra, que me alegra con su sorisa. Y a mi marido, que esta a mi lado siempre que necesito.

Al Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)-Brasil, por el apoio financeiro y la oportunidad de estudio en la Universidad de Sevilla.

Índice

Notación

- $|\cdot|_p$ - Norma del espacio $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$.
- $|\cdot|_{W^{2,p}}$ - Norma del espacio $W^{2,p}(\Omega)$ con $1 < p < \infty$.
- $|\cdot|_{H_0^1}$ - Norma del espacio $H_0^1(\Omega)$.
- Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$, denotaremos

$$a_L := \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s), \qquad a_M := \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s), \qquad a(\infty) = \lim_{s\to+\infty} a(s).$$

- Dado un espacio de Banach E y la ecuación $F(\lambda, u) = 0$ en $\mathbb{R} \times E$, con F una función continua y $F(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

  1. λ_0 es un punto de bifurcación para F desde la solución trivial si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times E$ con $u_n \neq 0$ y $F(\lambda_n, u_n) = 0$ tal que

  $$(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, 0) \quad \text{en } \mathbb{R} \times E.$$

  2. Si λ_0 es un punto de bifurcación, diremos que la dirección de bifurcación es supercrítica (resp. subcrítica) si para cualquier sucesión de soluciones (λ_n, u_n) tal que $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, 0)$, entonces $\lambda_n > \lambda_0$ (resp. $\lambda_n < \lambda_0$).
  3. Denotemos por $\mathcal{S}$ la clausura del conjunto de soluciones no triviales de $F(\lambda, u) = 0$. Llamaremos continuo $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ a un conjunto cerrado, conexo y maximal (maximal en el sentido que no es subconjunto propio de otro cerrado y conexo de $\mathcal{S}$).
  4. Diremos que un continuo $\mathcal{C}$ se va a infinito si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$, $\lambda^* \in [-\infty, \infty]$ y $\|u_n\| \to \infty$.
  5. Dado un elemento $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$, denotamos por

  $$\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\lambda, u) = \lambda.$$

Introducción

El objetivo de esta Memoria es estudiar teóricamente ecuaciones elípticas del tipo

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(x,u)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, es un dominio acotado y con frontera regular, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que será detallada posteriormente, y $\mathcal{A} : \Omega \times L^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ continua y

$$0 \leq \mathcal{A}(x,u) \leq \infty.$$

La novedad de (1) es precisamente la inclusión de este término $\mathcal{A}(x,u)$ en la difusión, en concreto, como coeficiente de difusión, lo que permite incluir coeficientes de difusión no lineales y no-locales, es decir, términos que dependen del valor de la variable en todo el dominio y no sólo en el punto $x \in \Omega$.

La ecuación (1) ha sido usada para modelar diversos fenómenos, citaremos el reciente libro [41] donde se hace un análisis de la inclusión de términos no-locales tanto en la función de reacción como en la de difusión.

En nuestro caso, nuestro interés se centra en las soluciones positivas de (1) ya que estamos considerando que la ecuación modela el comportamiento de una especie, por ejemplo, el crecimiento de una bacteria, habitando Ω. En este contexto, ver [12], $u(x)$ representa la densidad de la población en el punto $x \in \Omega$, Ω representa el hábitat de la especie, al que estamos suponiendo que está rodeado por una región inhóspita debido a la condición de contorno de tipo Dirichlet homogénea. La función $f(x,u)$ es el término reacción y será detallado posteriormente y la función $\mathcal{A}$ es la tasa de difusión. Recordemos que la difusión espacial de la especie está modelada por el operador Laplaciano, lo que indica que su movimiento espacial es aleatorio. Sin embargo, la inclusión del término $\mathcal{A}(x,u)$ implica que la velocidad de la difusión depende de la propia densidad de la especie de forma no-local, esto es, su difusión en un punto del hábitat no sólo depende de la densidad de población en ese punto, sino en todo un entorno o en todo el hábitat de la especie. Este tipo de término fue incluido en dinámica de poblaciones en [37], ya que parece claro que hay evidencias reales en las que la especie no se difunde de forma aleatoria.

El problema (1) ha sido bastante estudiado cuando $\mathcal{A}$ satisface la condición

$$0 < a_0 \leq \mathcal{A}(x,u) \leq a_\infty < \infty.$$

Citemos a continuación algunos trabajos relacionados con este problema, para posteriormente, concretizar en los problemas que abordaremos en esta Memoria. M. Chipot y colaboradores en diversos trabajos, por ejemplo [15], [18], [21], [19], ha considerado el caso en el que la función de reacción es lineal, esto es, $f(x,u) = f(x)$, lo que le permitió probar la equivalencia entre resolver (1) y una ecuación real no lineal.

En [24] y [27] se usan argumentos topológicos, como el índice de punto fijo, combinados con el método de sub-supersolución para probar existencia de solución de (1). Nos gustaría remarcar que es bien conocido que el principio del máximo no se verifica en general en ecuaciones que incluyen términos no-locales, pero que imponiendo ciertas restricciones de monotonía a las funciones $\mathcal{A}(x,u)$ y $f(x,u)$ se puede usar el método de sub-supersolución, ver [1] donde un estudio detallado de este método es realizado.

En [28] se usa el método de Galerkin para el estudio de (1). Diferentes teoremas de Punto Fijo han sido usados en [17], [22] y [48] para obtener resultados de existencia de solución de (1).

Una interesante combinación de métodos de bifurcación y del Teorema de Bolzano es usado en [7]. Igualmente métodos de bifurcación, sub-supersolución y grado topológico han sido utilizados en [50] y [51] para problemas con funciones de reacción concretas.

Por último, en [26] se usan argumentos variacionales similares a [32] para estudiar (1).

A partir de ahora nos centraremos en los problemas que hemos estudiado en la Memoria. Con respecto a la función de reacción, consideraremos cuatro tipos:

f_1. $f(x,u) = \lambda u$;

f_2. $f(x,u) = \lambda u^q$ con $0 < q < 1$ (caso cóncavo);

f_3. $f(x,u) = \lambda u - b(x)u^2$ (caso logístico);

f_4. $f(x,u) = \lambda u^q + u^r$ con $0 < q \leq 1 < r$ (caso superlineal),

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y consideramos dos casos para la función $b(x)$:

(Hb_1) $b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$,

(Hb_2) $b(x) \geq 0$, $b(x) \not\equiv 0$ en Ω y definimos el conjunto

$$\Omega_0 := int\{x \in \Omega : b(x) = 0\},$$

y suponemos que Ω_0 es un subdominio propio y regular de Ω.

En esta Memoria tenemos como objetivo principal buscar soluciones positivas para (1), para las diferentes funciones de reacción f, en particular nos centraremos en las que han sida mencionadas anteriormente. Para ello necesitamos algunos conocimientos previos.

En el Capítulo 1, estudiaremos algunas propiedades del autovalor principal del siguiente problema

$$\begin{cases} -m_1(x)\Delta u + m_2(x)u = \lambda m_3(x)u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde $m_1, m_2, m_3 \in L^\infty(\Omega)$ con $m_3 \geq 0$ y $m_1 \geq m_0 > 0$ para alguna constante positiva m_0. Denotaremos por

$$\lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)]$$

al autovalor principal de (2). Mostraremos las principales propiedades de este autovalor principal que serán necesarias a lo largo de la Memoria. Para simplificar la notación, usaremos

$$\lambda_1 := \lambda_1^\Omega[-\Delta; 1] \quad \text{y} \quad \lambda_1^D := \lambda_1^D[-\Delta; 1],$$

donde $D \subset \Omega$. Además, en este primer Capítulo estudiamos problemas locales que usaremos igualmente al estudiar los problemas no-locales. En concreto, estudiamos ecuaciones elípticas no-lineales donde el término de reacción es una función cóncava, la ecuación logística, una función superlineal y por último el caso cóncavo-convexo.

Comenzamos ahora a describir los principales resultados de esta Memoria. En cada Capítulo describiremos los principales resultados conocidos en el caso en que el término no local es constante, esto es $\mathcal{A} \equiv 1$, para después estudiar lo que ocurre al introducir el coeficiente de difusión no-local, describiendo nuestros resultados, y comparándolos con los ya existentes.

En el Capítulo 2 consideramos

$$\mathcal{A}(x,u) = a\left(x, \int_\Omega u^p\right),$$

y como función de reacción $f = f_1$ y $f = f_2$, o sea, la ecuación (1) es equivalente al problema

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega u^p\right)\Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

donde $p > 0$, $0 < q \leq 1$ y $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ con $a \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

En el caso $a \equiv 1$ es bien conocido que:

1. Si $q = 1$, existe solución positiva si y sólo si $\lambda = \lambda_1$. En este caso, existen infinitas soluciones positivas.

2. Si $0 < q < 1$, existe solución positiva si y sólo si $\lambda > 0$. En este caso, existe una única solución positiva.

En el caso de coeficiente de difusión no local, este tipo de ecuación ha sido estudiada previamente cuando la función a no depende de la variable x y está acotada superior e inferiormente, esto es cuando a verifica

$$0 < a_L \leq a(\xi) \leq a_M < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

En este caso particular, en [28] se prueba la existencia de solución positiva en el caso $0 < q < 1$ para todo $\lambda > 0$ cuando a es una función creciente. En [51], para $0 < q < 1$ los autores probaron la existencia de solución positiva si $\lambda \in (0, \lambda_0)$ para algún λ_0, de nuevo para a estrictamente positiva. También, en [7] resultados similares pueden ser deducidos para a independiente de x. Finalmente, en [11] la existencia de solución positiva es establecida para $a(s) = s^\gamma$, $\gamma > 0$, bajo la restricción $0 < \gamma + q < 1$.

En el caso $q = 1$, y con $\mathcal{A}(x,u)$ general y acotado, en [48] se prueba la existencia de solución positiva para algún $\lambda = \lambda_0 > 0$.

Dividiremos el Capítulo 2 en dos casos: el caso homogéneo donde

$$a\left(x, \int_\Omega u^p\right) = a\left(\int_\Omega u^p\right),$$

y el caso heterogéneo, en el que a depende de x, lo que trae como consecuencia que algunas técnicas utilizadas en el caso homogéneo no pueden ser usadas en este caso.

En el caso homogéneo estudiamos el siguiente problema

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

donde $0 < q \leq 1$. Primeramente, definimos

$$a_L := \inf_{s\in[0,\infty)} a(s), \quad a_M := \sup_{s\in[0,\infty)} a(s),$$

donde $a_L \geq 0$ y $a_M \leq \infty$.

Primero analizamos el caso $q = 1$. En el siguiente resultado se muestra la existencia de solución positiva de (5), así como la unicidad de solución positiva con a bajo cierta condición. Para ello hemos usado principalmente propiedades del autovalor principal.

Teorema 0.1 *Supongamos que $q = 1$.*

i) Si (5) tiene solución positiva, entonces $\lambda \in [a_L\lambda_1, a_M\lambda_1]$.

ii) Si $\lambda \in (a_L\lambda_1, a_M\lambda_1)$, entonces existe una solución positiva de (5).

iii) Si $a_L = \min_{s\in[0,\infty)} a(s) > 0$ ó $a_M = \max_{s\in[0,\infty)} a(s)$, entonces existe solución positiva para $\lambda = a_L\lambda_1$ ó $\lambda = a_M\lambda_1$.

iv) Si a es una función estrictamente monótona, entonces (5) tiene una única solución positiva.

Cuando $0 < q < 1$, definimos la función

$$g(s) := a(s)s^{\frac{1-q}{p}}R, \quad s \in [0, \infty),$$

con

$$R = \left(\int_\Omega w_{[1,1]}^p \right)^{\frac{q-1}{p}},$$

y $w_{[1,1]}$ es la única solución positiva del problema

$$-\Delta w = w^q \quad \text{en } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Probaremos que resolver la ecuación (5) es equivalente a resolver la siguiente ecuación real

$$g(s) = \lambda. \tag{6}$$

Como consecuencia el conjunto de soluciones depende del comportamiento de la función g, y obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 0.2 *Supongamos que* $0 < q < 1$.

i) Si

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = +\infty, \tag{H_∞}$$

entonces existe solución positiva de (5) para todo $\lambda \in (0, \infty)$.

ii) Si

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = c > 0, \tag{H_c}$$

entonces existe $0 < \lambda^*$ *tal que (5) tiene al menos una solución positiva si* $0 < \lambda < \lambda^*$ *y no existe solución positiva para* $\lambda > \lambda^*$.

iii) Si

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = 0, \tag{H_0}$$

entonces existe $0 < \lambda^*$ *tal que (5) tiene al menos una solución positiva si y solo si* $0 < \lambda \leq \lambda^*$. *Además, para* $\lambda < \lambda^*$ *(5) tiene al menos dos soluciones positivas.*

Además, si g *es creciente entonces (5) posee una única solución positiva.*

En las Figuras 1, 2 y 3 hemos representado la función g y el diagrama de bifurcación correspondiente para los distintos casos de g.

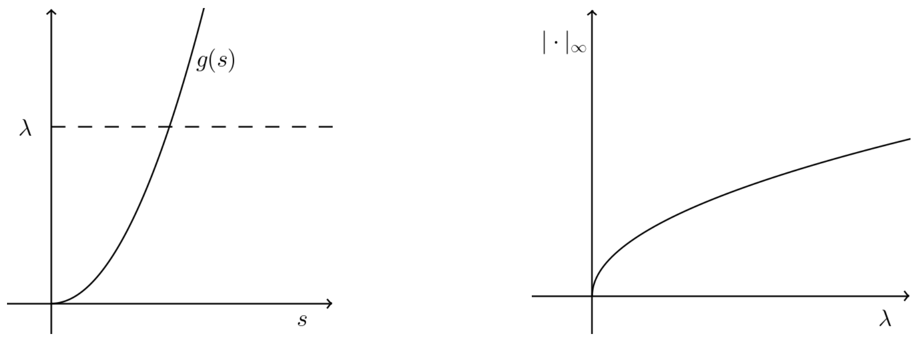

Figura 1: Función g y diagrama de bifurcación del caso el que g verifica (H_∞).

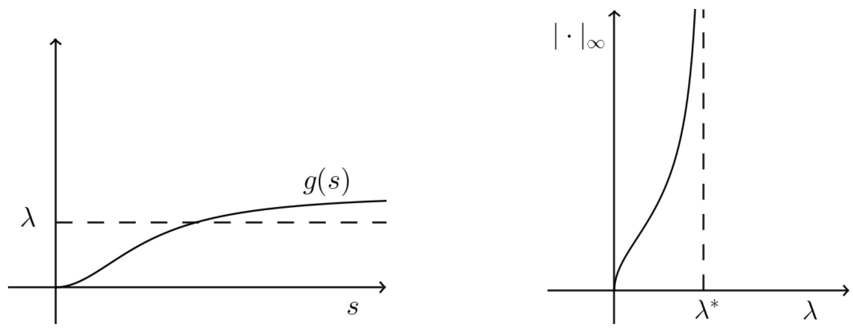

Figura 2: Función g y diagrama de bifurcación del caso el que g verifica (H_c).

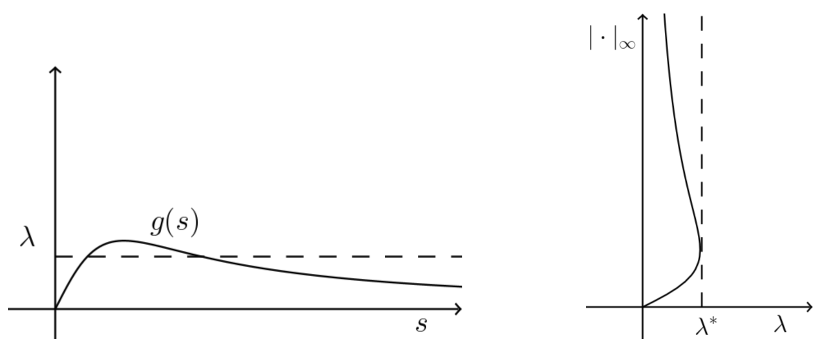

Figura 3: Función g y diagrama de bifurcación del caso el que g verifica (H_0).

A continuación estudiamos el caso heterogéneo, o sea, el siguiente problema

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega u^p\right) \Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

donde $0 < q \leq 1$.

En el caso $q = 1$ de nuevo usamos propiedades de autovalores principales para obtener nuestros resultados. En concreto, definimos

$$\underline{\lambda} := \inf_{t>0} \lambda_1(t), \qquad \overline{\lambda} := \sup_{t\geq 0} \lambda_1(t),$$

donde $\lambda_1(t) := \lambda_1[-a(x,t)\Delta; 1]$. Observemos que $0 \leq \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} \leq \infty$.

En el caso $q = 1$ los resultados son similares al caso homogéneo, si bien las técnicas son diferentes.

Teorema 0.3 *Supongamos $q = 1$.*

1. *Si u es una solución positiva de (7), entonces $\lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$.*

2. *Si $\lambda \in (\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, entonces existe al menos una solución positiva de (7).*

3. *Si la aplicación $t \mapsto a(x,t)$ es una función estrictamente monótona, entonces (7) tiene una única solución positiva.*

4. *Si $a(x,0) = 0$, entonces $\underline{\lambda} = 0$.*

5. *Si*
$$\lim_{s\to\infty} a(x,s) = \infty, \quad \text{uniformemente en } \Omega,$$
entonces $\overline{\lambda} = \infty$.

Consideremos ahora el caso $0 < q < 1$. Dividiremos nuevamente nuestro estudio en otros dos casos, el caso no degenerado para lo cual consideramos $a(x,r) > 0$, para todo $r \geq 0$; y el caso degenerado donde $a(x,r) = 0$ si solo si $r = 0$.

Estudiemos primero el caso no degenerado, esto es,

$$a(x,s) > 0, \quad s \in [0, \infty).$$

Para este caso usamos el método de bifurcación para probar la existencia de un continuo $\mathcal{C}$ no acotado en $\mathbb{R} \times L^\infty(\Omega)$ de soluciones positivas de (7) que emana desde $(\lambda, u) = (0,0)$. El comportamiento de este continuo depende del comportamiento de a en infinito.

El principal Teorema del caso no degenerado es:

Teorema 0.4 *Suponamos $0 < q < 1$ y a no degenerado.*

i) Existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas de (7) que emana desde $(\lambda, u) = (0,0)$.

ii) Si

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = \infty, \qquad \textit{uniformemente en } \Omega, \tag{A_∞}$$

entonces existe solución positiva de (7) para todo $\lambda > 0$. En este caso,

$$Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (0, +\infty).$$

iii) Si

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = c(x), \qquad \textit{uniformemente en } \Omega, \tag{A_c}$$

con $c(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces existen $0 \leq \lambda_* \leq \lambda_{**} \leq \lambda_{***} < \infty$, $\lambda_{**} > 0$, tales que

(a) Si $\lambda > \lambda_{***}$, entonces no existe solución positiva de (7).

(b) Si $\lambda \in (0, \lambda_{**})$, entonces existe al menos una solución positiva, denotada por u_λ, de (7).

En este caso, $(0, \lambda_{**}) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$. Además, tenemos $|u_\lambda|_\infty \to \infty$ para $\lambda \to \lambda_*$. Además,

- *Si $c(x) \geq c_0 > 0$ para alguna constante c_0, entonces $\lambda_* > 0$, por lo que el continuo $\mathcal{C}$ se va a infinito en $\lambda = \lambda_*$.*
- *Si $c \equiv 0$ en Ω, entonces $\lambda_* = 0$, por lo que el continuo $\mathcal{C}$ se va a infinito en $\lambda = 0$.*

Por último, si $s \mapsto a(x,s)$ es creciente, existe a lo más una solución positiva de (7).

Obsérvese que las Figuras 1, 2 y 3 también representan los diagramas de bifurcación para a verificando (A_∞), (A_c) con $c \geq c_0 > 0$ y con $c \equiv 0$, respectivamente.

El caso degenerado es estudiado haciendo una perturbación en a y pasando convenientemente al límite.

Teorema 0.5 *Supongamos* $0 < q < 1$ *y* $a(x, 0) = 0$.

i) Si a *verifica* (A_∞)*, entonces existe al menos una solución positiva de (7) para* $\lambda > 0$.

ii) Si a *verifica* (A_c) *con* $c \geq c_0 > 0$*, entonces existen* $0 < \lambda^* < \lambda^{**}$*, tales que existe al menos una solución positiva de (7) para* $0 < \lambda < \lambda^*$ *y no posee solución positiva para* $\lambda > \lambda^{**}$.

Es claro que cuando a verifica (A_∞) los resultados de existencia son similares al caso local. Sin embargo, en el caso no-local, cuando a se va a cero lo suficientemente rápido en infinito, entonces (7) no tiene solución positiva para λ grande. Gran parte de los resultados de este Capítulo están incluidos en [34].

En el Capítulo 3 estudiaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

a es una función continua y positiva, $p > 0$, q es una función acotada, no-negativa y no-trivial en Ω, y b verificando (Hb_1) o (Hb_2).

El término de reacción es el clásico término logístico: λ denota la razón de crecimiento de la especie, $-b(x)u^2$ es un término que modela el límite de crecimiento de la especie, que considera la falta de alimentos, de espacio, etc, de la especie u y que evita un crecimiento descontrolado de la especie. Sin embargo, cuando b verifica (Hb_2), hay una región, Ω_0, donde la especie crece indefinidamente; ese conjunto es denominado el *refugio* de u.

En el caso local, esto es, $a \equiv 1$, los principales resultados conocidos son (ver Capítulo 1):

1. Si b verifica (Hb_1), entonces existe solución positiva si y solo si $\lambda > \lambda_1$. En tal caso, existe una única solución positiva.

2. Si b verifica (Hb_2), entonces existe solución positiva si y solo si $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^{\Omega_0})$. En tal caso, existe una única solución positiva, y si la denotamos u_λ, verifica

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1} |u_\lambda|_\infty = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda\to\lambda_1^{\Omega_0}} |u_\lambda|_r = \infty,$$

para cualquier $1 \leq r \leq \infty$. En concreto,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1^{\Omega_0}} u_\lambda = \mathcal{M}(x),$$

donde $\mathcal{M}$ es la denominada “metasolución”, esto es,

$$\mathcal{M}(x) := \begin{cases} \infty & \text{in } \overline{\Omega}_0, \\ L(x) & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0. \end{cases} \tag{9}$$

y L es la solución minimal de

$$\begin{cases} -\Delta L(x) = \lambda_1^{\Omega_0} L(x) - b(x)L(x)^2 & \text{en } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \\ L(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ L(x) = \infty & \text{sobre } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Luego, en ambos casos, si la razón de crecimiento es pequeña, la única solución es la trivial. Además, cuando existe el refugio, para valores grandes de la razón de crecimiento, la especie no existe, “explota” en el conjunto Ω_0.

Por tanto, el objetivo es estudiar el comportamiento de esta ecuación cuando se introduce un término de difusión no-local. Como veremos, dependiendo del crecimiento de la función de difusión a y de la función $q(x)$, la estructura del conjunto de soluciones positivas variará mucho del caso local, apareciendo una riqueza de soluciones muy amplia.

Recordemos los resultados conocidos para (8). Notemos en primer lugar que dicha ecuación sólo ha sido estudiada para el caso en el b verifica (Hb_1) en [17], [22] y [50] (ver también [51]). En [22] fue probada la existencia de solución positiva para λ grande y a verifica (4). Este resultado fue mejorado en [17] mostrando la existencia de solución positiva $\lambda > a_M \lambda_1$. En ambos trabajos, el teorema de punto fijo de Schauder fue usado. En [50], el método de bifurcación fue utilizado para estudiar (8) cuando

$$a(s) = c_1 + c_2 s^\alpha, \quad c_i > 0,\ \alpha > 0.$$

Para esta particular elección de a, los autores en [50] probaron la existencia de solución positiva para $\lambda > c_1\lambda_1$ suponiendo que $2 > \max\{\alpha p + 1, p - 1\}$.

Nuestros resultados mejoran a los anteriores en varios aspectos: no suponemos que $a_L > 0$ ni $a_M < \infty$; no imponemos ninguna condición en p; estudiamos el caso en el que b verifica (Hb_2), no estudiado anteriormente; incluimos el peso q en el término no-local que nos dará una riqueza amplia de soluciones y determinamos exactamente desde el valor de λ para el que existe solución.

Para ello, de nuevo aplicaremos el método de bifurcación. Mostraremos que desde la solución trivial bifurca un continuo de soluciones positivas $\mathcal{C}$ que es no acotado en $\mathbb{R} \times L^\infty(\Omega)$. Dependiendo de b, a y q, el comportamiento de este continuo difiere notablemente.

Primero, tratamos el caso en el que $b(x)$ satisface (Hb_1), donde los resultados son muy similares al caso local.

Teorema 0.6 *Si $b(x)$ satisface (Hb_1). Entonces existe solución positiva de (8) si $\lambda > a(0)\lambda_1$. Además, si b es constante y a creciente, entonces la solución positiva es única.*

El caso en el que b verifica (Hb_2) los resultados dependen de varias cantidades. Definimos

$$I := \int_\Omega q(x)(\mathcal{M}(x))^p dx. \tag{10}$$

donde $\mathcal{M}(x)$ es la llamada *metasolución* definida en (9).

Estudiaremos dos casos para I, primer cuando $I = \infty$ y después cuando $I < \infty$. En este último caso, combinamos los resultados de bifurcación con otros de punto fijo.

Teorema 0.7 *1. Existe un continuo no acotado $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times L^\infty(\Omega)$ de soluciones positivas de (8) que emana desde la solución trivial en $\lambda = a(0)\lambda_1$.*

2. Si $I = \infty$, entonces existe solución positiva de (8) si

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}, \max\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}).$$

En este caso, los valores $a(\infty) = 0$ y $a(\infty) = \infty$ son admitidos. De hecho, el continuo $\mathcal{C}$ se va a infinito en $\lambda = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$.

3. Supongamos que $I < \infty$ *y consideramos la ecuación real*

$$g(s) := \frac{s}{(a(s))^p} = I. \tag{11}$$

(a) Supongamos que (11) no tiene solución, o sea, $g(s) < I$ *para todo* $s \geq 0$*. Entonces, (8) tiene al menos una solución positiva para* $\lambda \in (a(0)\lambda_1, \infty)$*.*

(b) Supongamos que existen $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$*,* $m \geq 1$ *raíces simples de (11) y consideramos*

$$\Lambda_i = \lambda_1^{\Omega_0} \left(\frac{s_i}{I}\right)^{1/p}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Entonces,

i. El continuo no acotado $\mathcal{C}$ *de soluciones positivas de (8) que bifurca desde la solución trivial en* $\lambda = a(0)\lambda_1$ *se va al infinito en* $\lambda = \Lambda_1$*. Como consecuencia, existe al menos una solución positiva si*

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}, \max\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}).$$

ii. Si $m = 2k+1$*,* $k \geq 0$*, (8) posee al menos una solución positiva para*

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^{k} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}),$$

y (8) no posee solución positiva para λ *grande.*

iii. Si $m = 2k$*,* $k \geq 1$*, (3.1) posee al menos una solución positiva para*

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^{k-1} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}) \cup (\Lambda_{2k}, \infty). \tag{12}$$

En las Figuras 4-9 hemos representado diferentes formas de la función g así como los diagramas de bifurcación que aparecen.

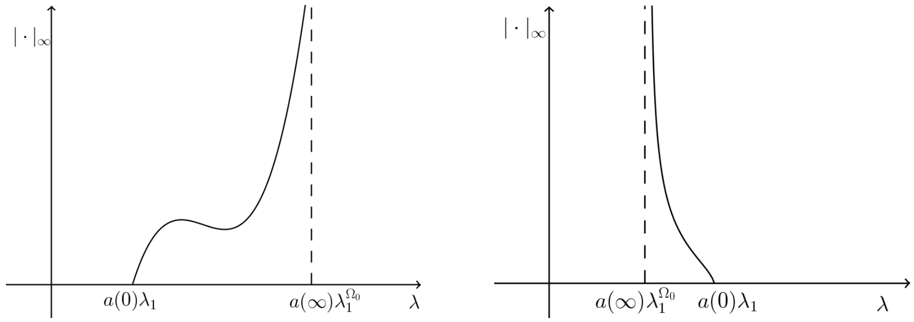

Figura 4: Diagramas de bifurcación en el caso que b verifies (Hb_2), $I = \infty$ y $0 < a(\infty) < \infty$. A la izquierda, $a(0)\lambda_1 < a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$ y a la derecha $a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0} < a(0)\lambda_1$.

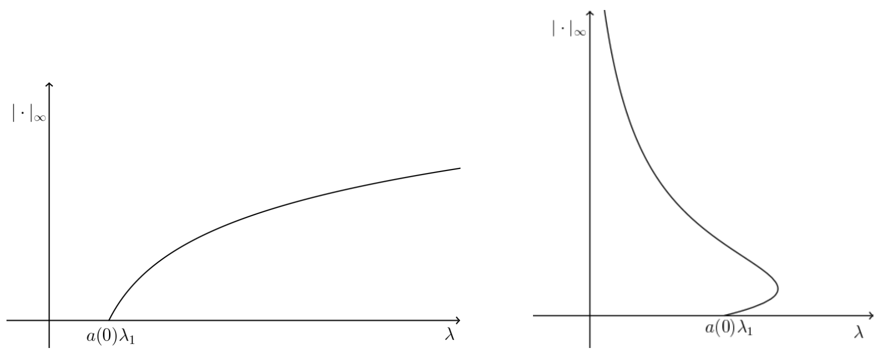

Figura 5: Diagramas de bifurcación en el caso que b verifies (Hb_2) e $I = \infty$. A la izquierda, $a(\infty) = \infty$, a la derecha $a(\infty) = 0$. El primer diagrama aparece también cuando b verifica (Hb_1).

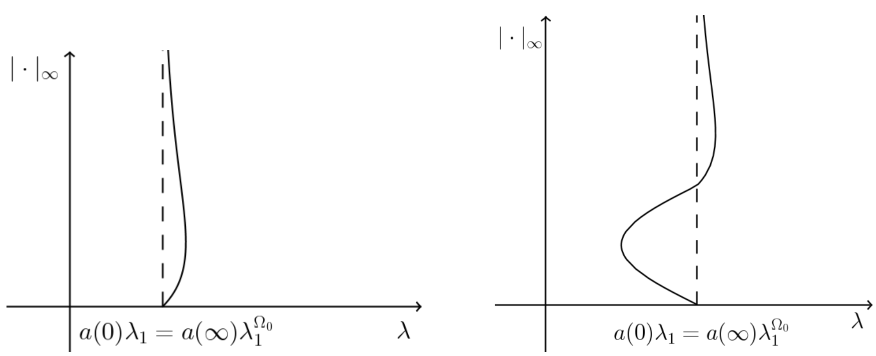

Figura 6: Posible diagrama de bifurcación cuando b verifica (Hb_2), $I = \infty$ y $a(0)\lambda_1 = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$. En el primer caso, la dirección de bifurcación es supercrítica mientras que en el segundo subcrítica.

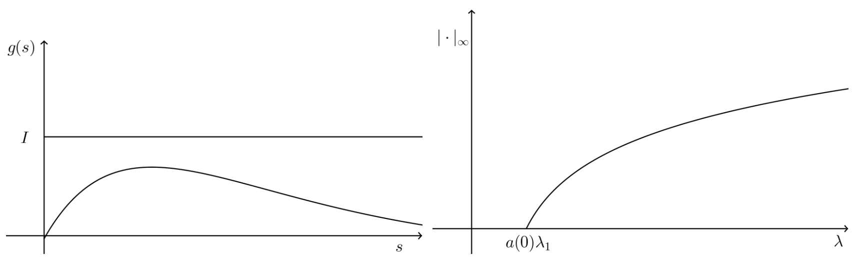

Figura 7: Representación de la función $g(s)$ y diagrama de bifurcación para $g(s) < I$.

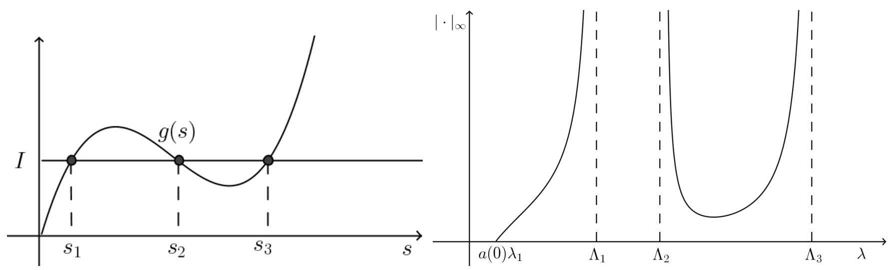

Figura 8: Caso $I < \infty$: Representación de la función $g(s)$ y del diagrama de bifurcación para $g(s) = I$ en un número impar de veces.

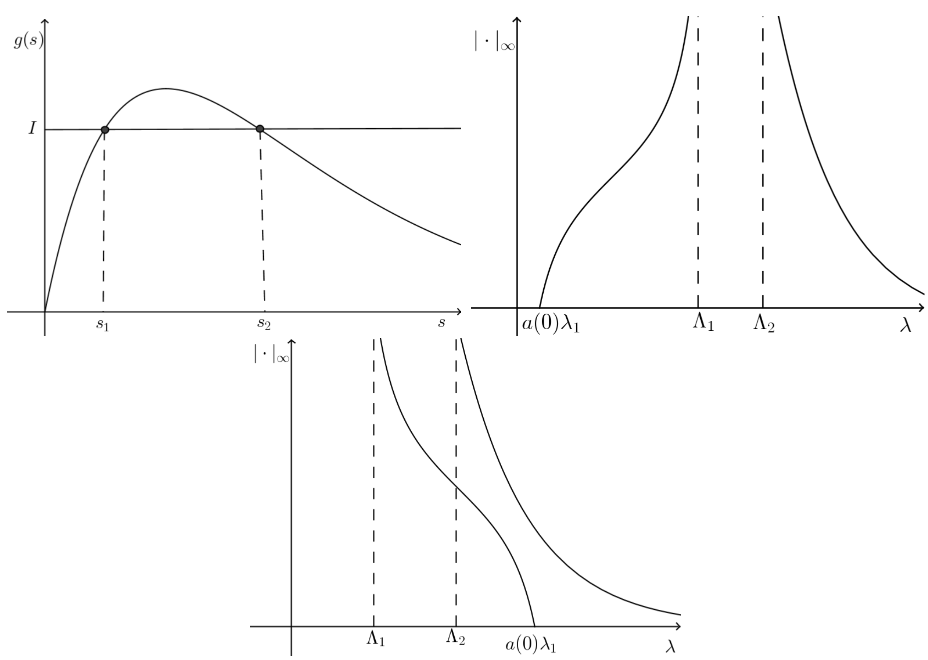

Figura 9: Caso $I < \infty$: Diagrama de bifurcación para $g(s) = I$ en un número par de veces. En el primer diagrama $a(0)\lambda_1 < \Lambda_1$ y en el segundo $a(0)\lambda_1 > \Lambda_2$.

Además, hemos estudiado la dirección de bifurcación desde la solución trivial y hemos analizado en detalle los casos cuando a es creciente o a es decreciente, mostrando en estos casos los diagramas de bifurcación exactos, así como la unicidad de solución positiva.

Comparemos los resultados con el caso local:

1. En el caso que b verifica (Hb_1) los resultados de existencia de solución positiva son bastante similares (en ambos casos existe solución positiva para $\lambda > a(0)\lambda_1$); sin embargo en el caso no-local puede haber múltiples soluciones como así lo asegura los resultados sobre las direcciones de bifurcación.

2. Supongamos que b verifica (Hb_2). En este caso, distinguiremos dos casos: $I = \infty$ e $I < \infty$.

   (a) $I = \infty$. Este caso ocurre cuando

   $$Q_+ := \{x \in \Omega : q(x) > 0\} \cap \Omega_0 \neq \emptyset,$$

   esto es, el coeficiente de difusión no-local tiene en cuenta el refugio de la especie. A diferencia del caso local, puede existir solución para λ pequeño (si el coeficiente de difusión es pequeño para valores grandes de la población, $a(\infty) = 0$) y para valores grandes de λ (si el coeficiente de difusión es grande para valores grandes de la población, $a(\infty) = \infty$).

   (b) $I < \infty$. Este caso ocurre cuando

   $$Q_+ \cap \Omega_0 = \emptyset,$$

   esto es, el refugio no es visto por la difusión. En este caso, la estructura del conjunto de soluciones positivas es complejo, pero en ningún caso existe solución positiva para λ pequeño. Además, para probar la existencia de solución para λ grande es necesario que a vaya a infinito más rápido que $s^{1/p}$. En otro caso, no hay solución positiva para λ grande.

Los resultados de este Capítulo están incluidos en el trabajo [35].

En el Capítulo 4 vamos a estudiar la ecuación

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} a\left(\int_\Omega u^p\right)\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, $p > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $D_1, D_2 \subset \Omega$ son dos subdominios regulares tales que

$$\overline{\Omega} = \overline{D_1 \cup D_2}, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

y como consecuencia $\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ con Γ un conjunto de medida nula. Hemos denotado

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Consideraremos la función f en los casos f_1, f_2 y f_3 citados anteriormente.

Observemos que en este caso, la especie se difunde de forma aleatoria en el conjunto D_1 y, por otra parte, su velocidad de difusión depende de la población total, de forma no lineal, en D_2. Este caso, al menos en nuestro conocimiento, no había sido analizado anteriormente y ha sido introducido en un contexto ligeramente diferente en [44].

De nuevo, usaremos resultados de bifurcación para probar al existencia de un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas no acotado en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ que emana desde la solución trivial en λ_0, donde

$$\lambda_0 = \begin{cases} \lambda_1[-(\chi_{D_1} + a(0)\chi_{D_2})\Delta; 1] & \text{si } f = f_1 \text{ o } f = f_3, \\ 0 & \text{si } f = f_2. \end{cases}$$

El comportamiento global del continuo $\mathcal{C}$ depende en gran medida de la función de reacción. En el caso $f = f_1$, el principal resultado es:

Teorema 0.8 *Sea $D_1 \neq \emptyset \neq D_2$ y supongamos que $f(u) = \lambda u$. Entonces, existe $0 \leq \lambda_\infty < \infty$ tal que (13) tiene solución positiva si*

$$\lambda \in (\min\{\lambda_0, \lambda_\infty\}, \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}).$$

Además,

$$\lambda_\infty = \begin{cases} \lambda_1[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1] & \text{si } 0 < a(\infty) < \infty, \\ \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}] & \text{si } a(\infty) = \infty, \\ 0 & \text{si } a(\infty) = 0. \end{cases}$$

Además, λ_0 y λ_∞ son puntos de bifurcación desde la solución trivial y al infinito, respectivamente.

Comparemos nuestros resultados con los conocidos anteriormente.

1. Supongamos $D_2 = \emptyset$. En este caso, el problema (13) se reduce al problemas lineal de autovalores, para el que se sabe que existe solución positiva si y sólo si $\lambda = \lambda_1$. Además, en este caso existen infinitas soluciones positivas.

2. Supongamos $D_1 = \emptyset$. Este caso ha sido tratado con detalle en el Capítulo 2.

Así, la gran diferencia en el caso general $D_1 \neq \emptyset \neq D_2$ es que no existe solución positiva para λ grande, ni incluso cuando $a(\infty) = \infty$.

En el casos $f(u) = f_2(u) = \lambda u^q$, $0 < q < 1$, los resultados son muy similares a los obtenidos en el Capítulo, en concreto al Teorema 0.4.

Estudiemos finalmente el caso $f(u) = f_3(u) = \lambda u - b(x)u^2$, donde los resultados dependen de la posición relativa entre D_1, D_2 y Ω_0. El resultado principal es:

Teorema 0.9 *Supongamos $f(u) = \lambda u - b(x)u^2$, con b verificando (Hb_2) y $p > 1$. Entonces existe $\lambda_\infty \in [0, \infty]$ tal que (13) tiene solución positiva para*

$$\lambda \in (\min\{\lambda_0, \lambda_\infty\}, \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}).$$

1. *Si $0 < a(\infty) < \infty$, entonces $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1]$.*

2. *Si $\Omega_0 \subset D_1$, entonces $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}$.*

3. *Si $\Omega_0 \subset D_2$, entonces $\lambda_\infty = +\infty$ si $a(\infty) = \infty$ y $\lambda_\infty = 0$ si $a(\infty) = 0$.*

4. *En el caso general, $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset \neq \Omega_0 \cap D_2$, entonces $\lambda_\infty = 0$ si $a(\infty) = 0$ y $\lambda_\infty \geq \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$ cuando $a(\infty) = \infty$. Además, en este caso, si uno de los siguientes casos ocurre:*

(a) $D_2 \subset \Omega_0$,

(b) $p \geq 2$ *y* $a(s)/s^{1/p}$ *acotado inferiormente para* s *grande,*

(c)
$$\lim_{s\to\infty} \frac{a(s)}{s^{1/p}} = \infty,$$

entonces
$$\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

En todos los casos, λ_0 *y* λ_∞ *son puntos de bifurcación desde la solución trivial y del infinito, respectivamente.*

Notemos que $\lambda_0 < \lambda_\infty$ si y sólo si $a(0) < a(\infty)$. Igualmente observemos que, en general, no somos capaces de asegurar quién es el punto de bifurcación λ_∞ en el caso general. Sólo conocemos que $\lambda_\infty \geq \lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$ y, en algún caso particular, $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$.

Como consecuencia inmediata tenemos (tomando $\Omega_0 = \emptyset$ en el resultado anterior):

Corolario 0.10 *Supongamos que* b *verifica* (Hb_1). *Entonces, existe al menos una solución positiva de (13) si*
$$\lambda \in (a(0)\lambda_1, \infty).$$

Recordemos los resultados conocidos para $f(u) = f_3(u) = \lambda u - b(x)u^2$.

1. Supongamos que $D_2 = \emptyset$ (caso local puro). Entonces, existe solución positiva si y sólo si
$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^{\Omega_0}).$$
En este caso, la solución es única y λ_1 y $\lambda_1^{\Omega_0}$ son puntos de bifurcación desde la solución trivial y desde infinito, respectivamente.

2. Supongamos que $D_1 = \emptyset$ (caso no-local puro). Entonces, existe al menos una solución positiva de (4.1) si
$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}, \max\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}).$$

Los casos $a(\infty) = \infty$ y $a(\infty) = 0$ son permitidos. De nuevo, $a(0)\lambda_1$ y $a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$ son puntos de bifurcación desde la solución trivial y desde infinito, respectivamente.

3. Supongamos que $b(x) \geq b_0 > 0$ para alguna constante positiva b_0. Entonces,

   (a) Supongamos que $D_2 = \emptyset$. Entonces, existe solución positiva si y sólo si

   $$\lambda \in (\lambda_1, \infty).$$

   Además, en este caso existe a lo más una única solución positiva.

   (b) Supongamos que $D_1 = \emptyset$. Entonces, existe al menos una solución positiva de (4.1) si

   $$\lambda \in (a(0)\lambda_1, \infty).$$

Comparemos e interpretemos nuestros resultados en el caso de la existencia del refugio Ω_0.

- En el caso local, $D_2 = \emptyset$, la especie tiende a la extinción cuando la razón de crecimiento es pequeña ($\lambda \leq \lambda_1$), la especie sobrevive para valores intermedios de λ y no existe solución positiva para para valores grandes de λ ($\lambda > \lambda_1^{\Omega_0}$). En efecto, la presencia del refugio trae consigo que la especie crezca libremente en el refugio, y por tanto la población crece indefinidamente

- En el caso puro no-local, $D_1 = \emptyset$, la especie puede coexistir incluso para una tasa de natalidad pequeña si el coeficiente de difusión es pequeño ($a(\infty) = 0$) o para tasas de natalidad altas si el coeficiente de difusión es grande ($a(\infty) = \infty$). Esto es, cuando la tasa de natalidad es pequeña la especie sobrevive si la velocidad de difusión es también pequeña para grandes valores de la población total. Por otro lado, la presencia de un refugio y una tasa de natalidad grande no implican que la población crezca indefinidamente si la velocidad de difusión es alta para grandes valores de la población total.

- Supongamos ahora que $D_1 \neq \emptyset \neq D_2$, esto es, tenemos difusión local y no-local simultáneamente. Entonces:

1. Si el coeficiente no-local está acotado superior e inferiormente o el refugio está contenido enteramente en la región de difusión local, los resultados son similares al caso de difusión local pura.
2. Si el refugio está contenido en la región de difusión local, los resultados son similares al caso de difusión local pura.
3. Si el refugio está contenido en la región de difusión no-local, los resultados son similares al caso de difusión no-local pura.
4. Supongamos ahora que el refugio tiene parte incluida en donde la difusión es local, es aleatoria. Entonces, para valores grandes de la tasa de natalidad la especie no existe ya que crece indefinidamente. En este caso, una velocidad de difusión grande no evita el desproporcionado crecimiento de la población.

La mayor parte de los resultados de este Capítulo está incluida en el trabajo [33].

En el Capítulo 5 estudiamos la ecuación

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq 1$ y $1 < r < (N+2)/(N-2)$ ($1 < r < \infty$ si $N \leq 2$).

Recordemos en primer lugar los resultados para el caso local, esto es $a \equiv 1$:

1. Si $q = 1$, (14) posee solución positiva si y sólo si
$$\lambda \in (-\infty, \lambda_1).$$
2. Si $0 < q < 1$, existe $\lambda^* > 0$ tal que (14) posee solución positiva si y sólo si
$$\lambda \in (-\infty, \lambda^*],$$
y al menos dos soluciones positivas para $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Para presentar nuestros resultados en el caso no-local necesitamos alguna notación. En efecto, consideremos la ecuación local

$$-\Delta u = u^r \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{15}$$

Demostraremos que cuando $p > \max\left\{r, \frac{N(r-1)}{2}\right\}$ entonces existe $M_1 > 0$ tal que

$$0 < M_1 \leq \int_\Omega u^p, \quad \text{para toda } u \text{ solución positiva de (15).}$$

En este caso nuestro resultado principal es (ver Figuras 10 y 11):

Teorema 0.11 *1. Existe un continuo no acotado $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas de (14) que emana desde la solución trivial $u \equiv 0$ en $\lambda = \lambda_0$ donde:*

$$\lambda_0 = \begin{cases} a(0)\lambda_1 & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{si } 0 < q < 1. \end{cases}$$

2. Si

$$\lim_{s \to \infty} \frac{a(s)}{s^{\frac{r-1}{p}}} = 0, \tag{16}$$

entonces existen

$$\lambda_0 \leq \lambda^* \leq \lambda^{**} < \infty,$$

tal que

(a) Si $\lambda > \lambda^{**}$, entonces no existe solución positiva de (14).

(b) Si $0 < \lambda < \lambda^*$, entonces existe solución positiva de (14). Por tanto, en este caso

$$(0, \lambda^*) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}).$$

Además, si $a(\infty) > 0$, entonces existe solución positiva de (14) para $\lambda < \lambda^*$, y por tanto en este caso

$$(-\infty, \lambda^*) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}).$$

3. Si $p > \max\left\{r, \frac{N(r-1)}{2}\right\}$ *y*

$$\frac{a(s)}{s^{\frac{r-1}{p}}} > \frac{1}{M_1^{\frac{r-1}{p}}}, \quad \forall s > 0, \tag{17}$$

entonces:

(a) si $q = 1$, *existe* $\lambda^* \in (0, a(0)\lambda_1]$ *tal que existe solución positiva de (14) si* $\lambda^* < \lambda$; *esto es*

$$(\lambda^*, +\infty) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}).$$

(b) si $0 < q < 1$, *existe solución positiva de (14) si* $\lambda > 0$, *esto es,*

$$(0, +\infty) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}).$$

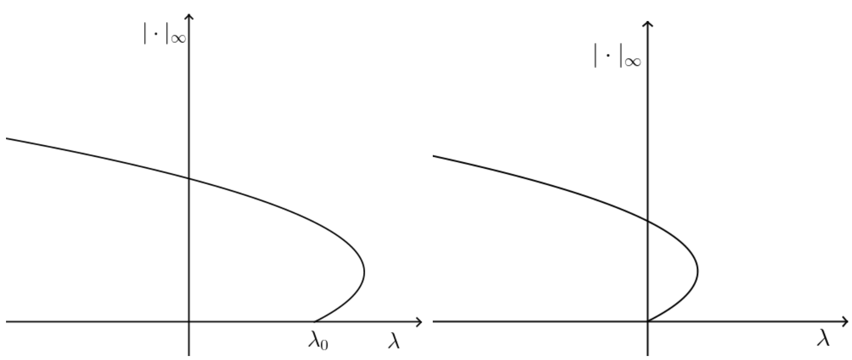

Figura 10: Diagramas de bifurcación para $q = 1$ y $0 < q < 1$ respectivamente, con a verificando (16).

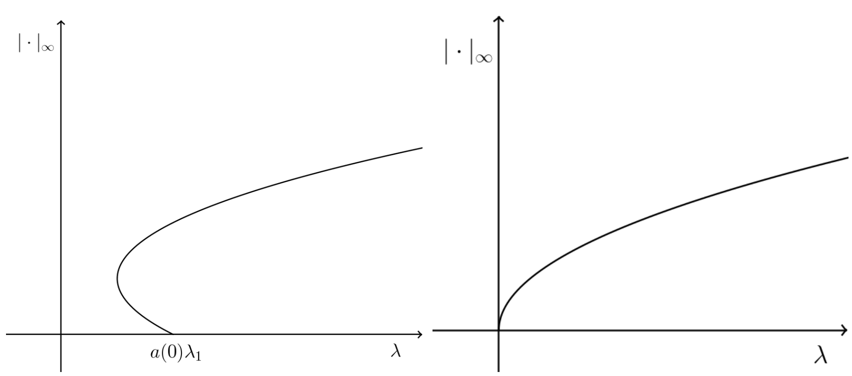

Figura 11: Diagramas de bifurcación para $q = 1$ y $0 < q < 1$ respectivamente, con a verificando (17).

Como consecuencia, en el caso no-local, los resultados son similares cuando a verifica (16), que incluye el caso en el que a está acotada superiormente.

En nuestro conocimiento, sólo el caso $0 < q < 1$ y a verificando (16) ha sido estudiado previamente, ver [50]. En este trabajo, además se impone que a sea una función creciente, y sólo el caso $\lambda > 0$ es estudiado. El caso $\lambda = 0$ ha sido analizado en [7]. Sin embargo, al menos en nuestro conocimiento, el caso general $q = 1$ no ha sido estudiado previamente ni el caso en el que a verifica (17). Este caso es de especial interés ya que se prueba que cuando a crece muy rápidamente la estructura del conjunto de soluciones cambia drásticamente, apareciendo soluciones positivas para λ grande. Debemos notar que la cantidad M_1 que aparece en (17) no es fácil de calcular. En el caso de que Ω sea un dominio radial, el problema (15) tiene una única solución positiva (ver por ejemplo [38], [45] y [54]) y por tanto M_1 podría ser calculado.

Los resultados de este Capítulo están incluidos en el trabajo [36].

Para finalizar, exponemos algunos de los **problemas abiertos** que quedaron a lo largo de la Memoria, así como posibles líneas de investigación futuras.

1. En todos los problemas estudiados en la Memoria, salvo el considerado en el Capítulo 2, suponemos que a es no-degenerada en el 0, esto es,

$$a(0) > 0,$$

lo que es usado principalmente para poder mostrar la existencia de un punto de bifurcación desde la solución trivial.

Es por tanto interesante estudiar nuestros problemas para $a(0) = 0$. Podríamos actuar de dos maneras:

(a) Perturbar conveniente el problema y tener una ecuación donde $a_\varepsilon(0) > 0$, aplicar los resultados a este problema perturbado y pasar al límite convenientemente. Este razonamiento es el que hemos seguido en el Capítulo 2.

(b) De nuevo perturbar el problema para tener una ecuación donde $a_\varepsilon(0) > 0$. Concluir la existencia de un continuo $\mathcal{C}_\varepsilon$ no acotado de soluciones positivas del problema no acotado. Aplicar a continuación el Lema de Whyburn ([52]) para poder concluir la existencia de un continuo no acotado $\mathcal{C} = \cup\mathcal{C}_\varepsilon$ de soluciones positivas del problema original.

2. En la ecuación logística estudiada en el Capítulo 3 sólo hemos podido probar que los puntos Λ_j son puntos de bifurcación a infinito en el caso en el que a es creciente. Creemos que debería ser posible mostrar este resultado independientemente de la monotonía de la función a.

3. Igualmente en la ecuación logística en la que se combinan difusión local y no-local estudiada en el Capítulo 4 hemos sido capaz de determinar el punto de bifurcación a infinito en algunos casos concretos tanto de la función a como en el valor de p. Conocer si ese es el punto de bifurcación en el caso general es un problema interesante.

4. En el caso superlineal estudiado en el Capítulo 5 no hemos sido capaces de estudiar los casos en el que el coeficiente a verifica

$$\frac{a(s)}{s^{(r-1)/p}} \to \infty \quad \text{o} \quad \frac{a(s)}{s^{(r-1)/p}} \to c > 0 \quad \text{cuando } s \to \infty.$$

5. Es bien conocido el resultado de Gidas-Spruck [39] que proporciona cotas a priori de las soluciones de un problema elíptico de la forma

$$-\Delta u = f(x,u)$$

donde f verifica

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,t)}{t^r} = h(x) > 0 \quad \text{para toda } x \in \overline{\Omega},$$

y $1 < r < (N+2)/(N-2)$. No existe una resultado similar para una ecuación de la forma

$$-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u = f(x,u)$$

o en general

$$-\Delta u = f\left(x, u, \int_\Omega u^p\right),$$

debido a que la técnica usada en [39] no puede ser reproducida cuando hay un término no-local. Este resultado daría interesantes consecuencias y nos ayudaría a analizar si la existencia de un término no-local eviataría la pérdida de cotas a priori en algunos problemas locales, ver [29].

6. Si bien el objetivo de la Memoria era el estudio del problema estacionario, es un problema muy interesante estudiar la estabilidad (al menos local) de los puntos estacionarios con respecto al problema parabólico asociado. Para alguna no-linealidad concreta, se ha estudiado la existencia y propiedades del atractor asociado al problema parabólico (ver por ejemplo [13] y [14]) pero no la estabilidad de los posibles puntos estacionarios. Existen algunos resultados en el caso de que la función de reacción sea lineal (ver por ejemplo [18], [20], [23]) pero no en el caso no-lineal. Esto nos llevaría al estudio de problemas de autovalores no-locales para los que no se conocen aún con detalle la estructura del conjunto de autovalores.

7. En todos los problemas estudiados, el término no local aparece como un coeficiente de difusión. Puede plantearse igualmente el caso en el que dicho término aparezca dentro de la divergencia de un operador, esto es problemas de la forma

   $$-div\left(a\left(\int_\Omega K(x,y)u^p(y)dy\right)\nabla u\right) = f(x,u),$$

   que incluye los problemas

   $$-div\left(a\left(\int_{\Omega(x,r)} u^p(y)dy\right)\nabla u\right) = f(x,u),$$

   y el problema intermedio entre local y no local

   $$-div\left(a\left(\frac{1}{|\Omega(x,r)|}\int_{\Omega(x,r)} u^p(y)dy\right)\nabla u\right) = f(x,u),$$

   donde $\Omega(x,r) := \Omega \cap B(x,r)$, $r > 0$.

   Aunque realmente hay pocos trabajos sobre estas ecuaciones, ya se han dado unos primeros pasos en [16], [46] y [2].

Capítulo

1

Resultados Previos

En este Capítulo introducimos resultados que serán usados a lo largo de esta Memoria. La mayoría de ellos son bien conocidos y no presentaremos sus pruebas, en otros las hemos incluido por conveniencia del lector; y algunos resultados son nuevos. Distribuimos el contenido de este capítulo de la siguiente manera: en la Sección 1.1 presentaremos algunos resultados referentes a problemas de autovalores locales. En la Sección 1.2 estudiamos una ecuación elíptica con término de reacción cóncavo. En las Secciones 1.3 y 1.4 presentaremos resultados conocidos sobre la ecuación logística, un problema superlineal y el caso cóncavo-convexo. Por último, en la Sección 1.5 presentaremos el método de sub-supersolución para un problema no-local.

1.1 Problema de autovalor local

En primer lugar analizamos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -m_1(x)\Delta u + m_2(x)u = \lambda m_3(x)u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $m_1, m_2, m_3 \in L^\infty(\Omega), m_1 \geq m > 0$, para alguna constante $m > 0$, y $m_3 \geq 0$ en Ω.

El siguiente resultado nos proporciona las principales propiedades del autovalor principal de (1.1). Los resultados son bien conocidos, citemos por ejemplo [42] donde se realiza un estudio exhaustivo de (1.1).

Proposición 1.1 *El problema (1.1) tiene un autovalor principal, $\lambda \in \mathbb{R}$, denotado por*

$$\lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)],$$

que tiene asociado una autofunción positiva, $\varphi_1 \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $q > 1$, y por tanto

$\varphi_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha \in (0,1)$. Además, es el único autovalor que tiene asociada una autofunción con signo definido. Por último, las siguientes propiedades son satisfechas:

1. *La aplicación $m_2 \in L^\infty(\Omega) \mapsto \lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)]$ en $\mathbb{R}$, es continua y creciente.*

2. *La aplicación $m_1 \in L^\infty(\Omega) \mapsto \lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)]$ en $\mathbb{R}$, es continua. Además, si $m_2 \leq 0$ en Ω, la aplicación es también creciente.*

3. *El autovalor principal $\lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)]$ es continuo y decreciente con respecto a Ω en el siguiente sentido:*

   (a) Si $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$, entonces

$$\lambda_1^{\Omega_2}[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)] < \lambda_1^{\Omega_1}[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)].$$

   (b) Si definimos los conjuntos

$$\Omega_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^N;\ \mathit{dist}(x, \Omega) < \gamma\},$$

   donde $\gamma > 0$, entonces

$$\lim_{\gamma \to 0} \lambda_1^{\Omega_\gamma}[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)] = \lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)].$$

Nota 1.2 *1. Si $\Omega = \emptyset$ o $m_3 \equiv 0$ en Ω, por convenio diremos que $\lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)] = \infty$.*

2. *Cuando no haya confusión, suprimiremos el superíndice Ω en el autovalor, esto es, escribiremos*

$$\lambda_1^\Omega[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)] = \lambda_1[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)].$$

3. *Obsérvese que $\lambda_1[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)]$ se puede escribir de la siguiente forma*

$$\lambda_1[-m_1(x)\Delta + m_2(x); m_3(x)] \quad = \quad \lambda_1\left[-\Delta + \frac{m_2(x)}{m_1(x)}; \frac{m_3(x)}{m_1(x)}\right].$$

Al largo de esta memoria denotaremos, para $m_1 \equiv 1, m_2 \equiv 0$ y $m_3 \equiv 1$, los siguientes autovalores

$$\lambda_1 := \lambda_1^{\Omega}[-\Delta; 1], \quad \lambda_1^{D} := \lambda_1^{D}[-\Delta; 1],$$

con $D \subset\subset \Omega$ un subdominio propio de Ω.

A continuación estudiaremos un caso particular de (1.1) que jugará un papel fundamental en el Capítulo 4. Consideramos

$$m_1 = \chi_{D_1} + d\chi_{D_2}, \quad m_2 \equiv 0 \quad \text{y} \quad m_3 \equiv 1,$$

o sea, el problema de autovalor local

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $d > 0$, $D_1, D_2 \subset \Omega$ son dos subdominios regulares tales que

$$\overline{\Omega} = \overline{D_1 \cup D_2}, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

y como consecuencia $\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ con Γ un conjunto de medida nula. Hemos denotado

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Definimos las funciones:

$$g(d) := \lambda_1\left[-\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta; 1\right], \quad g_0(d) := \lambda_1^{\Omega_0}\left[\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta; 1\right], \tag{1.3}$$

donde $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ es un subdominio propio de Ω.

En el siguente resultado mostramos el comportamiento del autovalor $g(d)$ con respecto a d.

Proposición 1.3 *1. La función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ es creciente y continua.*

2. $\lim_{d \downarrow 0} g(d) = 0.$

3. $\lim_{d\uparrow\infty} g(d) = \lambda_1[-\Delta;\chi_{D_1}]$.

Prueba:

1. Sigue de la Proposición 1.1 que $g(d)$ es creciente y continua.

2. Por la Proposición 1.1, tenemos

$$0 < g(d) = \lambda_1[-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta; 1] < \lambda_1^{D_2}[-d\Delta; 1] = d\lambda_1^{D_2}.$$

Tomando el límite cuando $d \downarrow 0$, tenemos $\lim_{d\downarrow 0} g(d) = 0$.

3. Sea φ_d la autofunción positiva asociada a $g(d)$, con $|\varphi_d|_2 = 1$. Tenemos que

$$0 < g(d) = \lambda_1[-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta; 1] < \lambda_1^{D_1},$$

y por tanto, $g(d)$ es acotada y existe $\lim_{d\to\infty} g(d) = g(\infty)$. Multiplicando (1.2) por φ_d, obtenemos que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_d|^2 = g(d)\int_\Omega \frac{\varphi_d^2}{\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}} = g(d)\left[\int_{D_1}\varphi_d^2 + \frac{1}{d}\int_{D_2}\varphi_d^2\right] \le C. \tag{1.4}$$

Luego, $|\varphi_d|_{H_0^1} \le C$. Entonces, por el Teorema de inyección de Sobolev, existe $\varphi^* \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi^* \ge 0$, $\varphi^* \not\equiv 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_d &\rightharpoonup \varphi^* \text{ en } H_0^1(\Omega),\\ \varphi_d &\to \varphi^* \text{ en } L^2(\Omega) \quad \text{cuando } d\to\infty. \end{aligned}$$

Probemos que $\varphi^* > 0$ en D_1. Supongamos que $\int_{D_1}\varphi_d^2 \to 0$ cuando $d\to\infty$. Por (1.4) tenemos claramente una contradicción. Por otro lado, de la definición de φ_d se tiene

$$\int_\Omega \nabla\varphi_d\cdot\nabla\varphi = g(d)\left[\int_{D_1}\varphi_d\varphi + \frac{1}{d}\int_{D_2}\varphi_d\varphi\right], \quad \varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Tomando límite cuando $d \to \infty$ en (1.5), obtenemos

$$\int_\Omega \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi = g(\infty) \int_{D_1} \varphi^* \varphi = g(\infty) \int_\Omega \chi_{D_1} \varphi^* \varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces, φ^* es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta \varphi^* = g(\infty)\chi_{D_1}\varphi^* & \text{en } \Omega, \\ \varphi^* = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por tanto, como $\varphi^* \geq 0$, $\varphi^* \not\equiv 0$, sigue que $g(\infty) = \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$. ■

En la Figura 1.1 hemos representado la función $g(d)$.

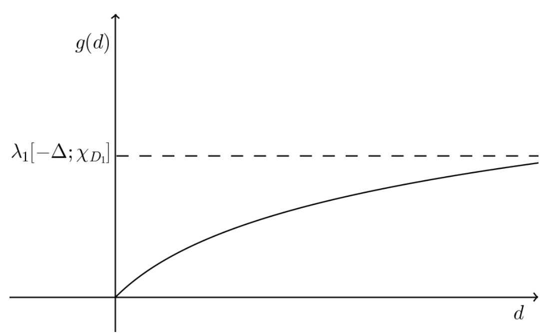

Figura 1.1: Comportamiento del autovalor $g(d)$.

El siguiente resultado muestra el comportamiento del autovalor $g_0(d)$ con respecto a d, que depende de la posición relativa de los conjuntos Ω_0, D_1 y D_2.

Proposición 1.4 *1. La función $g_0 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ es continua y no decreciente.*

2. Si $\Omega_0 \cap D_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\lim_{d \downarrow 0} g_0(d) = 0.$$

3. Si $\Omega_0 \cap D_2 = \emptyset$, entonces

$$\lim_{d \downarrow 0} g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}.$$

4. Si $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, entonces

$$\lim_{d \uparrow \infty} g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1 \cap \Omega_0}].$$

5. *Si* $\Omega_0 \cap D_1 = \emptyset$*, entonces*
$$\lim_{d\uparrow\infty} g_0(d) = \infty.$$

Prueba:

1. El primer apartado sigue nuevamente de la Proposición 1.1.

2. Por la Proposición 1.1 y la definición de $g_0(d)$, tenemos

$$0 < g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}\left[-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta; 1\right] = \lambda_1^{\Omega_0\cap D_2}[-d\Delta; 1] = d\lambda_1^{\Omega_0\cap D_2}.$$

   Tomando el límite cuando $d \to 0$, obtenemos el resultado.

3. Como $\Omega_0 \cap D_2 = \emptyset$, entonces $\Omega_0 \subseteq D_1$ y tenemos

$$g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}\left[-\Delta; 1\right] = \lambda_1^{\Omega_0}.$$

   Por tanto, concluimos el apartado.

4. En este apartado podemos usar exactamente el mismo razonamiento del apartado 3 de la Proposición 1.3.

5. Como $\Omega_0 \subseteq D_2$, tenemos
$$g_0(d) = d\lambda_1^{\Omega_0}.$$

   Tomando el límite cuando $d \to \infty$, obtenemos el resultado. ■

En las Figuras 1.2-1.4 se muestra la función $g_0(d)$ en diferentes situaciones.

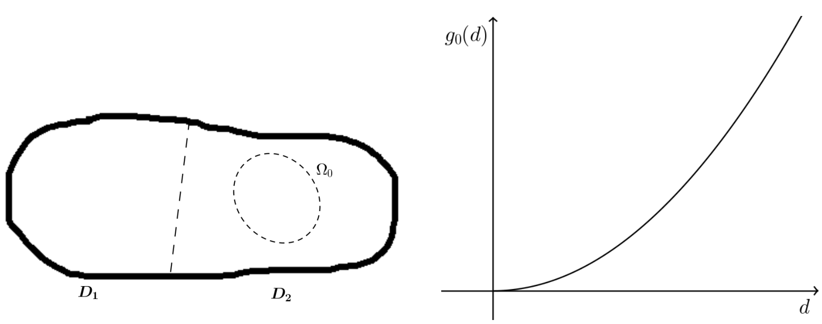

Figura 1.2: Comportamiento $g_0(d)$ cuando $\Omega_0 \cap D_2 \neq \emptyset$ y $\Omega_0 \cap D_1 = \emptyset$.

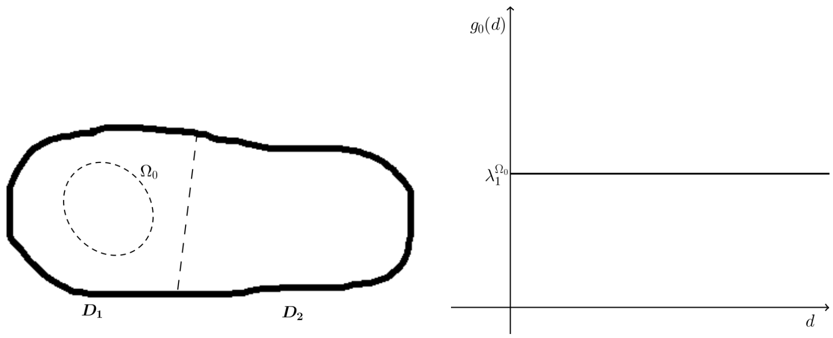

Figura 1.3: Comportamiento $g_0(d)$ cuando $\Omega_0 \cap D_2 = \emptyset$ y $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset$.

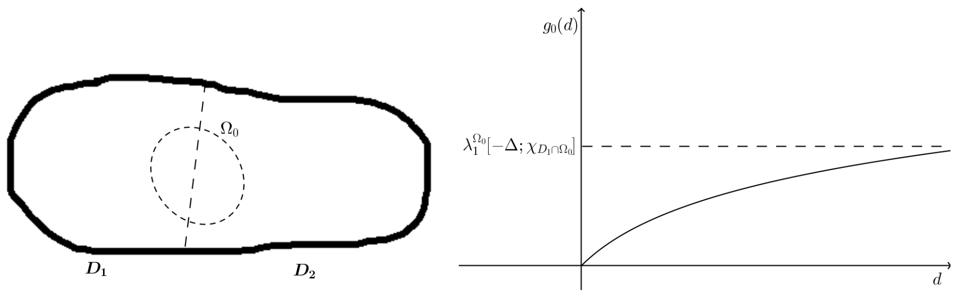

Figura 1.4: Comportamiento $g_0(d)$ cuando $\Omega_0 \cap D_2 \neq \emptyset$ y $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset$.

1.2 Ecuación local con término de reacción cóncavo

Consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \sigma m(x) w^q & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, con $m \geq 0$, $m \not\equiv 0$ y $0 < q < 1$.

En el siguiente resultado probamos la existencia y unicidad de solución positiva para (1.6). Aunque el resultado es bastante conocido, ver por ejemplo [8] y [3], introducimos su prueba por completitud.

Teorema 1.5 *El problema (1.6) tiene una única solución positiva, denotada por* $w_{[\sigma,m]} \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, *con* $\gamma \in (0,1)$, *si y sólo si* $\sigma > 0$. *Además,*

$$w_{[\sigma,m]} = \sigma^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,m]}. \tag{1.7}$$

Prueba: $\Rightarrow$) Sea w solución positiva de (1.6) y supongamos que $\sigma \leq 0$. Entonces

$$-\Delta w \leq 0 \text{ en } \Omega, \quad w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Por el Principio del Máximo, tenemos que $w \equiv 0$ en Ω. Contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que $m(x) \geq 0$, $m \not\equiv 0$ en Ω. Entonces existen $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ y $m_0 > 0$ tales que $m(x) \geq m_0 > 0$ para todo $x \in \overline{B}$, donde $B = B(x_0, r) \subset \Omega$.

Sea φ_1^B la autofunción positiva asociada a λ_1^B en B con $|\varphi_1^B|_\infty = 1$. Consideramos φ la prolongación de φ_1^B por cero en Ω, definida por

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1^B & \text{en } B, \\ 0 & \text{en } \Omega \backslash \overline{B}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Obsérvese que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Tomemos como pareja de sub-supersoluciones $(\underline{w}, \overline{w}) = (\epsilon\varphi, Ke)$ donde e es la única solución positiva de

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{en } \Omega, \\ e = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

y ϵ, K serán constantes positivas elegidas más adelante.

En efecto, $\overline{w}$ es supersolución de (1.6) si

$$-\Delta\overline{w} \geq \sigma m(x)\overline{w}^q \quad \Leftrightarrow \quad K^{1-q} \geq \sigma |m|_\infty |e|_\infty^q.$$

Por otro lado, obsérvese que gracias a que $\partial_\eta \varphi_1^B < 0$ en ∂B, donde η es la normal exterior de B, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla\underline{w} \cdot \nabla\psi \leq \sigma \int_\Omega m(x)\underline{w}^q\psi \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega),\ \psi \geq 0,$$

si

$$\epsilon^{1-q} \leq \frac{\sigma}{\lambda_1^B} m_L,$$

donde $m_L = \min_{x \in \overline{B}} m(x) > 0$. Ya que $\sigma > 0$, tenemos que elegir ϵ pequeño para que la anterior desigualdad sea cierta y K grande tal que $\underline{w} \leq \overline{w}$ en Ω. Por tanto, podemos aplicar [9] y concluir que existe w solución de (1.6) tal que $\underline{w} \leq w \leq \overline{w} \quad$ en Ω.

Además, gracias al Principio del Máximo Fuerte, $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Para probar la unicidad tomamos $f(x,s) = \sigma m(x) s^q$, $0 < q < 1$. Como

$$\frac{f(x,s)}{s} = \sigma m(x) s^{q-1} \quad \text{y } q-1 < 0,$$

entonces $s \mapsto \dfrac{f(x,s)}{s}$ es decreciente y estrictamente decreciente en el conjunto donde m es positiva. Por lo tanto, sigue la unicidad de solución positiva de (1.6), ver [10].

La igualdad (1.7) sigue de un cálculo directo. ■

El siguiente resultado nos permite comparar una subsolución o supersolución de (1.6) con su solución.

Proposición 1.6 *Si $\underline{w} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ es una subsolución (respectivamente $\overline{w}$ es una supersolución) de (1.6) positiva, entonces $\underline{w} \leq w_{[\sigma,m]}$ (respectivamente $w_{[\sigma,m]} \leq \overline{w}$).*

Prueba: Si $\underline{w}$ es una subsolución de (1.6). Tomamos $\overline{w} = Ke$ con K grande y e la solución positiva de (1.9) tal que $\overline{w}$ sea supersolución, entonces, gracias a la unicidad de solución positiva,

$$\underline{w} \leq w_{[\sigma,m]} \leq Ke \quad \text{en } \Omega.$$

Análogamente, supongamos que $\overline{w}$ es supersolución positiva de (1.6), y tomamos $\underline{w} = \epsilon\varphi$ con $\epsilon > 0$ pequeño donde φ está definida en (1.8), tal que $\underline{w}$ sea subsolución. Entonces

$$\epsilon\varphi \leq w_{[\sigma,m]} \leq \overline{w} \quad \text{en } \Omega.$$ ■

1.3 Problema logístico local

En esta Sección estudiamos la siguiente ecuación logística

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u - b(x)u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

donde $b \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, $b \geq 0$ y $b \not\equiv 0$ en Ω. Consideremos dos casos para $b(x)$:

(Hb_1) $b(x) \geq b_0 > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

(Hb_2) $b(x) \geq 0$ en Ω, $b(x) \not\equiv 0$ y definimos el conjunto

$$\Omega_0 := \mathrm{int}\{x \in \Omega; b(x) = 0\}.$$

Supondremos, por simplicidad, que Ω_0 es un conjunto conexo, regular y $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

La ecuación (1.10) ha sido bastante estudiada, véase por ejemplo [43], donde se hace un estudio detallado de la ecuación.

El siguiente resultado nos garantiza la existencia y unicidad de solución positiva para el problema (1.10), así como resume las propiedades más importantes de dicha solución.

Teorema 1.7 *1. Si $b(x)$ safisface (Hb_1), existe una única solución positiva de (1.10) si sólo si $\mu > \lambda_1$.*

2. Si $b(x)$ satisface (Hb_2), existe una única solución positiva de (1.10) si y sólo si

$$\lambda_1 < \mu < \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Además, si denotamos la única solución positiva de (1.10) por $\theta_{[\mu,b]}$, tenemos que la aplicación $\mu \in (\lambda_1, \lambda^{\Omega_0}) \to \theta_{[\mu,b]} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha \in (0,1)$, es continua, creciente, diferenciable y

$$\lim_{\mu \downarrow \lambda_1} |\theta_{[\mu,b]}|_\infty = 0, \quad \lim_{\mu \uparrow \lambda_1^{\Omega_0}} |\theta_{[\mu,b]}|_r = \infty, \tag{1.11}$$

para cualquier $1 \leq r \leq \infty$. Además,

$$\lim_{\mu \uparrow \lambda_1^{\Omega_0}} \theta_{[\mu,b]}(x) \begin{cases} +\infty & si\ x \in \overline{\Omega}_0, \\ < \infty & si\ x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0. \end{cases}$$

De hecho, para cualquier conjunto abierto $D \subset \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ se tiene

$$\lim_{\mu \uparrow \lambda_1^{\Omega_0}} \theta_{[\mu,b]} = L \quad en\ C^2(\overline{D}),$$

donde L es una solución minimal de

$$\begin{cases} -\Delta L(x) = \lambda_1^{\Omega_0} L(x) - b(x)L(x)^2 & \textit{en } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \\ L(x) = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \\ L(x) = \infty & \textit{sobre } \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Nota 1.8 *A una solución de (1.12) se le denomina solución "larga" o singular. Cuando se escribe $L(x) = \infty$ sobre $\partial\Omega_0$, significa que*

$$\lim_{dist(x,\partial\Omega_0)\to 0} L(x) = \infty.$$

1.4 Problema superlineal local

Estudiaremos en esta Sección las soluciones clásicas del siguiente problema superlineal local

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v^q + v^r & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $0 < q \leq 1 < r$.

El próximo resultado nos muestra que las soluciones positivas de (1.13) están acotadas en $L^\infty(\Omega)$ si μ pertenece a un compacto de $\mathbb{R}$ y

$$1 < r < \begin{cases} +\infty & \text{si } N \leq 2, \\ \dfrac{N+2}{N-2} & \text{si } N > 3. \end{cases}$$

A partir de ahora cuando escribamos $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$ entenderemos $r < \dfrac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$ y $r < \infty$ si $N \leq 2$.

Proposición 1.9 *Sea $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$. Si v es solución clásica positiva de (1.13) y $\mu \in K \subset \mathbb{R}$ (un intervalo compacto), entonces existe una constante $C(K, \Omega)$ tal que*

$$|v|_\infty \leq C, \quad \forall (\mu, v) \textit{ solución de positiva } (1.13) \textit{ y } \mu \in K.$$

Prueba: Llamamos $f(x,s)=\mu s^q+s^r$. Luego,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(x,s)}{s^r}=1>0.$$

Por el Teorema 1.1 de [39] existe una constante positiva C que depende de K y Ω, tal que $|v|_\infty\le C$. ■

La siguiente Proposición resume los principales resultados de (1.13) en el caso $q=1$, ver por ejemplo [49], [6].

Proposición 1.10 *Sea $q=1$.*

1. *Si v es solución positiva de (1.13), entonces $\mu<\lambda_1$.*
2. *Si $1<r<\dfrac{N+2}{N-2}$, entonces existe solución positiva de (1.13) si y sólo si $\mu\in(-\infty,\lambda_1)$.*

Además, desde $\lambda=\lambda_1$ bifurca desde la solución trivial un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (1.13) que es no acotado en $\mathbb{R}\times C(\overline{\Omega})$ y tal que

$$Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})=(-\infty,\lambda_1).$$

En el caso $r\ge\dfrac{N+2}{N-2}$ es conocido que no existe solución positiva de (1.13) para μ pequeño. La siguiente Proposición muestra este resultado, que incluimos para conveniencia del lector.

Definición 1.11 *Un dominio Ω se dice estrellado si toda semi-recta que parte de la origen intesecta la frontera de Ω en un único punto.*

Proposición 1.12 *Sea Ω estrellado y $q=1$. Si $r\ge\dfrac{N+2}{N-2}$ y*

$$\mu\le\lambda_1\left(\frac{(N-2)(r+2)-2N}{N(r-1)}\right), \tag{1.14}$$

entonces (1.13) no posee solución positiva.

Prueba: Consideremos $g(s)=\mu s+s^r$. Es claro

$$G(s)=\frac{\mu}{2}s^2+\frac{1}{r+1}s^{r+1}.$$

De la Identidad de Pohozaev, ver por ejemplo [53],

$$\frac{N-2}{2N}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2 x\cdot \eta dS_x = \int_\Omega G(v),$$

donde η es el vector normal exterior en el punto $x \in \partial\Omega$. Por ser Ω un dominio estrellado, tenemos $x \cdot \eta > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, ver [49], luego

$$\frac{N-2}{2N}\int_\Omega |\nabla v|^2 < \int_\Omega G(v). \tag{1.15}$$

Por (1.13),

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = \mu \int_\Omega v^2 + \int_\Omega v^{r+1}$$

y sustituyendo en (1.15), obtenemos

$$\frac{N-2}{2N}\left(\mu\int_\Omega v^2 + \int_\Omega v^{r+1}\right) < \frac{\mu}{2}\int_\Omega v^2 + \frac{1}{r+1}\int_\Omega v^{r+1}.$$

Reagrupando, tenemos

$$\left(\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{r+1}\right)\int_\Omega v^{r+1} < \mu\left(\frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N}\right)\int_\Omega v^2 = \frac{\mu}{N}\int_\Omega v^2. \tag{1.16}$$

Si $r = \frac{N+2}{N-2}$, entonces por (1.16) tenemos

$$0 < \frac{\mu}{N}\int_\Omega v^2,$$

lo que es una contradicción pues (1.14) con $r = \frac{N+2}{N-2}$ implica $\mu \leq 0$.

Ahora, si $r > \frac{N+2}{N-2}$

$$\int_\Omega v^{r+1} < \frac{\mu}{N}\left(\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{r+1}\right)^{-1}\int_\Omega v^2. \tag{1.17}$$

Por otro lado, debido a la desigualdad de Poincaré, tenemos

$$\lambda_1 \int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 = \mu\int_\Omega v^2 + \int_\Omega v^{r+1}.$$

Debido a (1.17), obtenemos

$$\lambda_1 \int_\Omega v^2 < \mu \int_\Omega v^2 \left[1 + \frac{1}{N} \left(\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} \right],$$

que implica,

$$\mu > \lambda_1 \left[1 + \frac{1}{N} \left(\frac{N-2}{2N} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} \right]^{-1} = \lambda_1 \left[\frac{(N-2)(r+1) - 2N}{N(r-1)} \right],$$

lo que es una contradicción con (1.14). ■

En el siguiente resultado analizamos (1.13) con $q < 1$, ver por ejemplo [3] y [31].

Proposición 1.13 *Sea* $0 < q < 1$.

1. *Existe* $\overline{\mu} > 0$ *tal que para* $\mu > \overline{\mu}$, *(1.13) no tiene solución positiva.*
2. *Si* $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$, *entonces existe solución positiva de (1.13) si y sólo si* $\mu \in (-\infty, \overline{\mu}]$.

Además, (1.13) tiene al menos dos soluciones positivas si $\mu \in (0, \overline{\mu})$.

Por último, desde la solución trivial bifurca en $\mu = 0$ *un continuo* $\mathcal{C}$ *de soluciones positivas de (1.13) que es no acotado en* $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ *y tal que*

$$Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (-\infty, \overline{\mu}].$$

En el resto de la Sección nos dedicamos a dar resultados que serán usados en los Capítulos posteriores al estudiar problemas no-locales. En el primer resultado, estudiamos el comportamiento de las soluciones de (1.13) cerca del punto de bifurcación en el caso $0 < q < 1$.

Proposición 1.14 *Sea* $0 < q < 1$ *y* (μ_n, v_n) *una sucesión de soluciones positivas de (1.13) tales que* $\mu_n \to 0$ *y* $|v_n|_\infty \to 0$. *Entonces,*

$$\frac{v_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \to w_{[1,1]} \quad en\ L^\infty(\Omega).$$

Prueba: Como $|v_n|_\infty \to 0$ y la dirección de bifurcación de soluciones positivas de (1.13) es supercrítica, ver [31], sigue que $\mu_n > 0$. Por otro lado, como $v_n \geq 0$, tenemos que

$$-\Delta v_n = \mu_n v_n^q + v_n^r \geq \mu_n v_n^q,$$

luego v_n es supersolución de (1.6) con $\sigma = \mu_n$ y $m \equiv 1$, por tanto

$$v_n \geq \mu_n^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]}. \tag{1.18}$$

Por otro lado, por el Teorema 2.2 de [3], existe $\beta > 0$ tal que para todo $\mu \in (0, \overline{\mu})$ el problema (1.13) tiene una única solución positiva que satisface

$$|v|_\infty \leq \beta.$$

Gracias a la unicidad de solución, para encontrar una cota superior de v_n basta encontrar una supersolución. Tomemos como supersolución de (1.13) $\overline{w} = R_n w_{[1,1]}$ con R_n a elegir. En efecto,

$$-\Delta \overline{w} \geq \mu_n \overline{w}^q + \overline{w}^r \Leftrightarrow R_n^{1-q} \geq \mu_n + R_n^{r-q} w_{[1,1]}^{r-q}.$$

Ahora, basta tomar R_n que satisfaga

$$R_n^{1-q} - R_n^{r-q} W = \mu_n, \tag{1.19}$$

donde $W = |w_{[1,1]}|_\infty^{r-q}$. Reescribiendo (1.19) como

$$\left(\frac{R_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \right)^{1-q} - \left(\frac{R_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \right)^{r-q} W \mu_n^{\frac{r-1}{1-q}} = 1, \tag{1.20}$$

y tomando límite en (1.20), obtenemos

$$\frac{R_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \to 1.$$

Por (1.18) y la supersolución $\overline{w}$, obtenemos

$$w_{[1,1]} \leq \frac{v_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \leq \frac{R_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} w_{[1,1]} \quad \text{en } \Omega.$$

Esto concluye la prueba. ■

En el siguiente resultado establece condiciones para garantizar que si una sucesión de soluciones de (1.13) converge a 0 en norma L^p, entonces lo hace también en norma L^∞.

Proposición 1.15 *Supongamos $p > \max\{\frac{N(r-1)}{2}, r\}$ y $0 < q \leq 1$. Sea (μ_n, v_n) soluciones positivas de (1.13) con $|\mu_n| \leq C$, con C una constante positiva. Si $\int_\Omega v_n^p \to 0$, entonces $|v_n|_\infty \to 0$.*

Prueba: Como $v_n \to 0$ en $L^p(\Omega)$, entonces

$$v_n^r \to 0 \quad \text{en } L^{\frac{p}{r}}(\Omega) \quad \text{y} \quad v_n^q \to 0 \quad \text{en } L^{\frac{p}{q}}(\Omega).$$

Como μ_n está acotado, tenemos que

$$\mu_n v_n^q + v_n^r \to 0 \text{ en } L^{\frac{p}{r}}(\Omega).$$

Por regularidad elíptica, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|v_n|_{W^{2,\frac{p}{r}}} \leq M|\mu_n v_n^q + v_n^r|_{p/r} \to 0.$$

Ahora, consideramos tres casos:

$$1.\ \frac{p}{r} > \frac{N}{2}, \qquad 2.\ \frac{p}{r} = \frac{N}{2}, \qquad 3.\ \frac{p}{r} < \frac{N}{2}.$$

Supongamos el caso 1, esto es $p > r(N/2)$. Por inyección continua de $W^{2,\frac{p}{r}}(\Omega)$ en $L^\infty(\Omega)$, tenemos que $|v_n|_\infty \to 0$.

Supongamos el caso 2, $p = r(N/2)$. También por inyección continua de $W^{2,\frac{p}{r}}(\Omega)$ en $L^s(\Omega)$ para todo $s > 1$, tenemos que $v_n \to 0$ en $L^s(\Omega)$, para todo $s > 1$. Por tanto, usando de nuevo la regularidad elíptica, $|v_n|_\infty \to 0$.

Ahora, supongamos el caso 3, esto es $p < r(N/2)$. Por inyección continua, tenemos

$$W^{2,\frac{p}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega),$$

donde $t_1 = \frac{pN}{rN-2p}$. Luego,

$$v_n^r \to 0 \quad \text{ en } L^{\frac{t_1}{r}}(\Omega) \quad \text{y} \quad v_n^q \to 0 \quad \text{ en } L^{\frac{t_1}{q}}(\Omega),$$

que implica,

$$|v_n|_{W^{2,\frac{t_1}{r}}} \leq M|\mu_n u_n^q + v_n^r|_{t_1/r} \to 0.$$

De nuevo, si $t_1/r \geq N/2$, esto es,

$$p \geq \frac{r^2 N}{2(r+1)},$$

llegamos a que $|v_n|_\infty \to 0$.

Por otro lado, si $\frac{t_1}{r} < \frac{N}{2}$,

$$W^{2,\frac{t_1}{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega),$$

donde

$$t_2 = \frac{pN}{r^2 N - 2p(r+1)}.$$

Repitiendo este razonamiento k veces llegamos a que

$$|v_n|_{W^{2,\frac{t_k}{r}}} \to 0,$$

donde

$$t_k = \frac{pN}{r^k N - 2p\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} r^j}, \quad k \geq 0.$$

Por tanto, si existe k tal que $t_k/r \geq N/2$ llegamos a un absurdo pues $|v_n|_\infty \to 0$.

Por un cálculo directo, decir que $t_k/r \geq N/2$ es equivalente a decir

$$p \geq \frac{N}{2}\frac{r^{k+1}(r-1)}{r^{k+1}-1} = \frac{N}{2}\frac{(r-1)}{1-r^{-k-1}},$$

para lo que es suficiente que $p > \frac{N(r-1)}{2}$. Esto concluye la prueba. ■

En el siguiente resultado probamos que para $q = 1$ el punto $(\mu, v) = (0, 0)$ no es un punto de bifurcación de (1.13) desde la solución trivial.

Proposición 1.16 *Sea (μ_n, v_n) una sucesión de soluciones positivas de (1.13) con $\mu_n \to 0$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$|v_n|_\infty \geq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba: Supongamos por contradicción que $|v_n|_\infty \to 0$. Hacemos el cambio de variable

$$w_n = \frac{v_n}{|v_n|_\infty}$$

en (1.13). Por lo tanto, como $q = 1$ tenemos

$$-\Delta w_n = \mu_n w_n + w_n^r |v_n|_\infty^{r-1}, \quad \text{in } \Omega. \tag{1.21}$$

Por definición w_n está acotado en $L^q(\Omega)$ para todo $q > 1$, y por regularidad elíptica, tenemos

$$|w_n|_{W^{2,q}} \leq C, \quad q > 1.$$

Por lo tanto, existe $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $w \not\equiv 0$ tal que

$$w_n \to w \quad \text{en } C^1(\overline{\Omega}).$$

Pasando el límite en (1.21), tenemos

$$-\Delta w = 0 \text{ en } \Omega, \quad w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

que lo implica $w \equiv 0$. Esto nos conduce a una contradicción ya que $|w_n|_\infty = 1$. ■

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene:

Proposición 1.17 *Supongamos $p > \max\{\frac{N(r-1)}{2}, r\}$, $q = 1$ y $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$. Sea (μ_n, v_n) una* *sucesión de soluciones positivas de (1.13) con $\mu_n \to 0$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega v_n^p \geq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba: Supongamos por contradicción que $\int_\Omega v_n^p \to 0$. Por la Proposición 1.15, tenemos que $|v_n|_\infty \to 0$, lo que es un absurdo por Proposición 1.16. ■

Observemos que en el caso $\mu = 0$ no necesitamos imponer $q = 1$. Por tanto, tenemos el siguiente resultado para las soluciones positivas de (1.13) para el caso concreto $\mu = 0$, esto es, para la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta v = v^r & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

Corolario 1.18 *Sea $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$ y $p > \max\{\frac{N(r-1)}{2}, r\}$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda v solución positiva de (1.22) se tiene que:*

$$C \leq \int_\Omega v^p. \tag{1.23}$$

Como consecuencia, podemos definir

$$M_1 := \sup\{C > 0 : C \leq \int_\Omega v^p \quad \textit{para toda } v \textit{ solución positiva de (1.22) }\}.$$

Los siguientes resultados son consecuencia inmediata de la Proposición 1.9.

Proposición 1.19 *Sea $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$ y $0 < q \leq 1$. Si (μ_n, v_n) es una sucesión de soluciones positivas de (1.13), con $|\mu_n| \leq C$, entonces existe C_1 tal que*

$$\int_\Omega v_n^p \leq C_1.$$

1.5 Método de sub-supersolución para una ecuación no-local

Introducimos el método de sub-supersolución para la siguiente ecuación no-local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.24}$$

donde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, a es una función positiva y continua, $p > 0$ y $q \in L^\infty(\Omega)$.

Existen diferentes definiciones de sub-supersolución para (1.24) dependiendo de las propiedades de a y f, ver por ejemplo [1]. Usaremos el método de sub-supersolución de [25], que permite más generalidad en a y f.

Definición 1.20 *Decimos que la pareja de funciones $(\underline{u}, \overline{u})$, con $\underline{u}, \overline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, es una pareja de sub-supersoluciones de (1.24) si*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$ *en* Ω,

b) $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ *sobre* $\partial\Omega$,

c)

$$a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi \leq 0 \leq a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ *en* Ω *y para todo* $u \in [\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$.

El resultado principal dice lo siguiente:

Teorema 1.21 *Supongamos que existe una pareja $(\underline{u}, \overline{u})$ de sub-supersoluciones de (1.24). Entonces, existe una solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (1.24) tal que*

$$u \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Capítulo

2

Ecuación con coeficiente de difusión no-local: caso lineal y sublineal

En este Capítulo presentaremos los resultados obtenidos en [34]. Estudiaremos el siguiente problema no-local

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega u^p\right) \Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ es un dominio acotado y regular, $p > 0$, $0 < q \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ con $a \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Dividiremos este Capítulo en el caso homogéneo, esto es, $a\left(x, \int_\Omega u^p\right) = a\left(\int_\Omega u^p\right)$, y el caso heterogéneo.

La estructura del Capítulo 2 es: En la Sección 2.1 estudiaremos la ecuación (2.1) considerando el caso homogéneo, donde la función a no depende de la variable x. La Sección 2.2 la dedicamos en estudiar el caso heterogéneo. El estudio del comportamiento de las soluciones positivas de (2.1) depende fuertemente del comportamiento de la función $a(x, s)s^{\frac{1-q}{p}}$ en el infinito.

2.1 Caso homogéneo

Tenemos como objetivo probar la existencia de soluciones positivas para el siguiente problema no-local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u^p\right) \Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Debido a las técnicas usadas, separaremos nuevamente nuestro problema en dos casos, primero el caso $q = 1$ y posteriormente el caso $0 < q < 1$. Para probar la existencia de solución positiva, en el primer caso, usaremos argumentos relacionados con el problema de autovalores y para el caso $0 < q < 1$ usaremos un argumento de punto fijo.

2.1.1 Caso $q = 1$

Recordamos las siguientes definiciones

$$a_L := \inf_{s\in[0,\infty)} a(s), \quad a_M := \sup_{s\in[0,\infty)} a(s),$$

donde $a_L \geq 0$ y $a_M \leq \infty$.

El resultado principal para este caso es:

Teorema 2.1 *i) Si (2.2) tiene solución positiva, entonces $\lambda \in [a_L\lambda_1, a_M\lambda_1]$.*

ii) Si $\lambda \in (a_L\lambda_1, a_M\lambda_1)$, entonces existe una solución positiva de (2.2).

iii) Si $a_L = \min_{s\in[0,\infty)} a(s) > 0$ ó $a_M = \max_{s\in[0,\infty)} a(s)$, entonces existe solución positiva para $\lambda = a_L\lambda_1$ ó $\lambda = a_M\lambda_1$.

iv) Si a es una función estrictamente monótona, entonces (2.2) tiene una única solución positiva.

Prueba: i) Si u es solución positiva de (2.2), entonces $\lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta; 1\right]$ y por la monotonía del autovalor (ver Proposición 1.1)

$$a_L\lambda_1 = \lambda_1[-a_L\Delta; 1] \leq \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta; 1\right] \leq \lambda_1[-a_M\Delta; 1] = a_M\lambda_1,$$

de donde sigue el apartado.

ii) Sea $\lambda \in (a_L\lambda_1, a_M\lambda_1)$, entonces

$$a_L < \frac{\lambda}{\lambda_1} < a_M.$$

Por la continuidad de la función a, existe $d > 0$ tal que

$$a(d) = \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Sea $\varphi_1 > 0$ la autofunción positiva asociada a λ_1 con $\displaystyle\int_\Omega (\varphi_1)^p = 1$. Luego $u = d^{\frac{1}{p}}\varphi_1$ es solución de (2.2). En efecto, se tiene que

$$-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u \;\; = \;\; a(d)d^{\frac{1}{p}}\lambda_1\varphi_1 = \lambda u.$$

iii) Si $0 < a_L = \min\limits_{s\in[0,\infty)} a(s)$ ó $a_M = \max\limits_{s\in[0,\infty)} a(s)$, entonces existe $d > 0$ tal que

$$a(d) = \frac{\lambda}{\lambda_1},$$

como en el apartado ii) tenemos la existencia de solución.
iv) Sean u y v dos soluciones positivas de (2.2), con $u \neq v$. El problema (2.2), con $q = 1$, puede ser visto como un problema de autovalores, luego u es proporcional a v, o sea, existe $k > 0$ tal que

$$u = kv.$$

Si $\displaystyle\int_\Omega u^p = \int_\Omega v^p$. Entonces $k = 1$ y por lo tanto $u = v$.
Si $\displaystyle\int_\Omega u^p < \int_\Omega v^p$. Como u y v son soluciones, entonces

$$\lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta; 1\right] \qquad \text{y} \qquad \lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega v^p\right)\Delta; 1\right].$$

Supongamos que a es estrictamente creciente. Entonces

$$a\left(\int_\Omega u^p\right) < a\left(\int_\Omega v^p\right).$$

Luego, por la monotonía del autovalor

$$\lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta; 1\right] \;\; < \;\; \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega v^p\right)\Delta; 1\right] = \lambda$$

lo que es una contradicción. En el caso en el que a es estrictamente decreciente, se razona de forma similar. $\blacksquare$

2.1.2 Caso $0 < q < 1$

Analicemos (2.2) con $0 < q < 1$. Para esto, definimos en primer lugar la función

$$g(s) := a(s)s^{\frac{1-q}{p}}R, \quad s \in [0, \infty),$$

con

$$R = \left(\int_\Omega w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{q-1}{p}},$$

donde recordemos que $w_{[1,1]}$ es la única solución positiva (ver Teorema 1.5) de

$$-\Delta w = w^q \quad \text{en } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Proposición 2.2 *Resolver (2.2) es equivalente a resolver la ecuación real*

$$g(s) = \lambda. \tag{2.3}$$

Prueba: Sea u solución positiva de (2.2). Denotamos $\displaystyle\int_\Omega u^p = s$. Sigue que

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{a(s)}u^q.$$

Por tanto, u es solución del problema (1.6) con $\sigma = \dfrac{\lambda}{a(s)}$ y $m(x) \equiv 1$. Así,

$$u = \left(\frac{\lambda}{a(s)}\right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]},$$

elevando a p y integrando sobre Ω, tenemos

$$\int_\Omega u^p = \left(\frac{\lambda}{a(s)}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p,$$

luego,

$$a(s)^{\frac{p}{1-q}} s = \lambda^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p.$$

Concluimos que

$$g(s) = \lambda. \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado sigue del principio del Máximo.

Proposición 2.3 *Si $\lambda \leq 0$ entonces (2.2) no tiene solución positiva.*

En el siguiente resultado probamos la unicidad de solución positiva en el caso de que g sea creciente.

Proposición 2.4 *Si g es creciente, entonces (2.2) tiene una única solución positiva.*

Prueba: Supongamos u y v, $u \neq v$, soluciones positivas de (2.2). Entonces u y v satisfacen

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)} u^q, \quad \text{en } \Omega, \quad -\Delta v = \frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega v^p\right)} v^q, \quad \text{en } \Omega, \quad u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Si $\int_\Omega u^p = \int_\Omega v^p$ entonces $a\left(\int_\Omega u^p\right) = a\left(\int_\Omega v^p\right)$ y u y v soluciones positivas de (1.6) con

$$\sigma = \frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}, \quad m \equiv 1.$$

Como (1.6) tiene única solución positiva entonces $u = v$.

Si $\int_\Omega u^p < \int_\Omega v^p$ entonces u y v son soluciones de (1.6) con $\sigma = \dfrac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}$ y $\sigma = \dfrac{\lambda}{a\left(\int_\Omega v^p\right)}$, luego

$$u = \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}\right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]}, \qquad v = \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega v^p\right)}\right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]}.$$

Elevando a p y integrando sobre Ω cada una de estas igualdades, obtenemos

$$\int_\Omega u^p = \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p, \qquad \int_\Omega v^p = \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega v^p\right)}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p,$$

luego

$$\lambda = \frac{a\left(\int_\Omega u^p\right)\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{1-q}{p}}}{\left(\int_\Omega w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}}} < \frac{a\left(\int_\Omega v^p\right)\left(\int_\Omega v^p\right)^{\frac{1-q}{p}}}{\left(\int_\Omega w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}}} = \lambda. \qquad \blacksquare$$

A partir de la Proposición 2.2 la estructura del conjunto de soluciones positivas de (2.2) depende del comportamiento de $g(s)$. En el siguiente resultado mostramos diferentes estructuras del conjunto de soluciones dependiendo del valor de $g(s)$ cuando $s \to \infty$.

Teorema 2.5 *i) Si*

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = +\infty, \tag{H_∞}$$

entonces existe solución positiva de (2.2) para todo $\lambda \in (0,\infty)$.

ii) Si

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = c > 0, \tag{H_c}$$

entonces existe $\lambda^* > 0$ *tal que (2.2) tiene al menos una solución positiva si* $0 < \lambda < \lambda^*$ *y no existe solución positiva para* $\lambda > \lambda^*$.

iii) Si

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = 0, \tag{H_0}$$

entonces existe $0 < \lambda^*$ *tal que (2.2) tiene al menos dos soluciones positivas para* $0 < \lambda < \lambda^*$, *y no tiene solución positiva para* $\lambda > \lambda^*$.

Prueba: Tenemos que g es una función continua y

$$\lim_{s\to 0} g(s) = 0. \tag{2.4}$$

Por la Proposición 2.3 no existe solución positiva para $\lambda \leq 0$.

i) Supongamos (H_∞). Por (2.4) y la continuidad de g, tenemos que para todo $\lambda > 0$ existe $s \in [0,\infty)$ tal que $g(s) = \lambda$.

ii) Supongamos (H_c). Por (2.4) y la continuidad de g, tenemos que existe $0 < \lambda^*$ con

$$\lambda^* = \sup_{s\in[0,\infty)} g(s). \tag{2.5}$$

Luego por (2.3) existe solución positiva para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ y no existe solución positiva para $\lambda > \lambda^*$.

iii) Supongamos (H_0). Nuevamente, por (2.4) y la continuidad de g, existe λ^* definido en (2.5). Luego para $\lambda < \lambda^*$ existen $s_1 < s_2 \in [0,\infty)$ tal que $g(s_1) = \lambda = g(s_2)$. Por tanto, existen dos soluciones positivas u_1, u_2 de (2.2) tales que

$$s_i = \int_\Omega u_i^p, \quad i = 1, 2,$$

y por lo tanto $u_1 \neq u_2$. Esto concluye la prueba. ■

Nota 2.6 *Observemos que en este caso no es necesario suponer que $g(0) = 0$, ni que $a(0)$ sea finito; sólo es necesario estudiar la ecuación $g(s) = \lambda$.*

2.2 Caso heterogéneo

Dividiremos de nuevo nuestro estudio en dos casos: el caso el $q = 1$ y $0 < q < 1$. En el caso $0 < q < 1$ dividiremos nuevamente en otros dos subcasos. El caso no degenerado en el que $a(x,r) > 0$, para todo $r \geq 0$; y el caso degenerado donde $a(x,r) = 0$ si y solo si $r = 0$.

2.2.1 Caso $q = 1$

Definimos

$$\underline{\lambda} := \inf_{t>0} \lambda_1(t), \qquad \overline{\lambda} := \sup_{t\geq 0} \lambda_1(t),$$

donde $\lambda_1(t) := \lambda_1[-a(x,t)\Delta; 1]$. Obsérvese que $0 \leq \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} \leq \infty$.

La prueba del resultado que sigue es bastante similar a la del Teorema 2.1, la incluimos aquí para la conveniencia del lector.

Teorema 2.7 *1. Si u es una solución positiva de (2.1), entonces $\lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$.*

2. Si $\lambda \in (\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, entonces existe al menos una solución positiva de (2.1).

3. Si la aplicación $t \mapsto a(x,t)$ es una función estrictamente monótona, entonces (2.1) tiene una única solución positiva.

4. Si $a(x,0) = 0$, entonces $\underline{\lambda} = 0$.

5. Si

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s) = \infty, \quad \textit{uniformemente en } \Omega, \tag{2.6}$$

entonces $\overline{\lambda} = \infty$.

Prueba: 1. Si u es una solución positiva de (2.1), entonces

$$\lambda = \lambda_1 \left[-a\left(x, \int_\Omega u^p\right)\Delta; 1 \right].$$

Por la monotonía del autovalor principal (ver Proposicion 1.1) deducimos que $\lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$.
2. Supongamos que $\lambda \in (\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$. Entonces, por la continuidad del autovalor principal existe $t_0 > 0$, tal que

$$\lambda = \lambda_1(t_0).$$

Sea φ_0 una autofunción positiva asociada a $\lambda_1(t_0)$ con $\displaystyle\int_\Omega \varphi_0^p = 1$. Por tanto, $u = K\varphi_0$ es una solución, con $K^p = t_0$. En efecto, se tiene que

$$-a\left(x, \int_\Omega u^p\right)\Delta u = -a\left(x, K^p \int_\Omega \varphi_0^p\right)\Delta(K\varphi_0) = -a(x,t_0)\Delta(K\varphi_0) = \lambda_1(t_0)K\varphi_0 = \lambda u \quad \text{en } \Omega.$$

3. Omitimos este apartado ya que su prueba es similar al apartado iv) del Teorema 2.1.
4. Supongamos que $a(x,0) = 0$. Por la continuidad de la función a, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo $t \in (0,\delta)$

$$a(x,t) \leq \epsilon.$$

Supongamos por contradicción que $\underline{\lambda} > 0$. Por tanto, existe $\gamma > 0$ tal que $\lambda_1(t) \geq \gamma > 0$ para todo $t \in (0,\delta)$. Por la monotonía del autovalor principal con respecto a m_1 (ver Proposición 1.1), tenemos para $t \in (0, \delta)$ que

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 \left[-a(x,t)\Delta; 1\right] \leq \lambda_1 \left[-\epsilon\Delta; 1\right] = \epsilon\lambda_1.$$

Tomando ϵ bastante pequeño, tenemos una contradicción.
5. Supongamos por contradicción que $\overline{\lambda} < \infty$, entonces dada $C > 0$ existe t_0 tal que $\lambda_1(t) \leq C$, para todo $t \geq t_0$. Por (2.6), para todo $M > 0$ existe $t_1 > 0$ tal que

$$a(x,t) \geq M, \quad \forall t \geq t_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por tanto, para $t \geq \max\{t_0, t_1\}$, obtenemos que

$$C \geq \lambda_1(t) = \lambda_1 \left[-a(x,t)\Delta; 1\right] \geq \lambda_1 \left[-M\Delta; 1\right] = M\lambda_1.$$

Para M suficientemente grande, tenemos una contradicción. ■

2.2.2 Caso $0 < q < 1$

Ahora consideramos el problema (2.1) con $0 < q < 1$. En este caso dividiremos nuevamente en dos casos, el caso no degenerado en el que $a(x,s) > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$ y el caso degenerado, que es, $a(x,r) = 0$ si y sólo si $r = 0$.

Caso no degenerado

En este caso consideramos

$$a(x,s) > 0, \quad s \in [0, \infty). \tag{2.7}$$

Primeramente, introducimos el operador $\mathcal{L} : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$, definido por

$$\mathcal{L}(f) := u, \tag{2.8}$$

donde u es la única solución de la ecuación lineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

El siguiente resultado es conocido y es consecuencia de las inyecciones de Sobolev y del principio del Máximo Fuerte, ver [40].

Lema 2.8 *El operador $\mathcal{L}$ es compacto y estrictamente positivo. Además, si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$|\mathcal{L}f|_\infty \le C|f|_\infty.$$

Para probar la existencia de solución usaremos el método de bifurcación. Para eso definimos la aplicación

$$K_\lambda : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega}); \qquad K_\lambda(u) := u - \lambda T(u)$$

donde

$$T(u) := \mathcal{L}\left(\frac{(u^+)^q}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)} \right).$$

donde $u^+ = \max\{0, u\}$.

Proposición 2.9 *u es solución no negativa de (2.1), si y solo si, u es cero de la aplicación K_λ.*

Prueba: $\Leftarrow$) Sea u un cero de K_λ. Entonces por la definición de K_λ, tenemos

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)} (u^+)^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

Multiplicamos (2.9) por u^- y integrando por partes, obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 = 0$$

Por tanto $u^- \equiv C$, C constante. Como $u^- = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $u^- \equiv 0$. Luego $u \ge 0$ en Ω y es solución de (2.1).

$\Rightarrow$) Sea u solución no negativa de (2.1), entonces

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega u^p\right)\Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

y por definición de K_λ, u es cero de K_λ. ■

Proposición 2.10 *La aplicación de $T : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ es compacta.*

Prueba: La aplicación $u \mapsto \dfrac{(u^+)^q}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)}$ es continua, y claramente por $\mathcal{L}$, sigue que T es compacto. ■

Ahora, probaremos que de la solución trivial emana un continuo no acotado de soluciones positivas en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de (2.1). Usaremos el grado de Leray-Schauder de K_λ en

$$B_\rho := \{u \in C(\overline{\Omega}) : |u|_\infty < \rho\},$$

con respecto a cero, denotado por $deg(K_\lambda, B_\rho)$, y el índice de una solución aislada u de K_λ, denotado por $i(K_\lambda, u)$.

Para probar el siguiente resultado usaremos argumento similares a los usados en [5] y [6].

Teorema 2.11 *$\lambda = 0$ es el único punto de bifurcación desde la solución trivial de (2.1). Además, existe un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (2.1) no acotado en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ que emana desde $(\lambda, u) = (0, 0)$.*

Prueba: Paso 1: Si $\lambda < 0$ entonces $i(K_\lambda, 0) = 1$.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &: [0,1] \times C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}) \\ \mathcal{H}_1(t,u) &:= \mathcal{L}\left(t \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)} (u^+)^q \right). \end{aligned}$$

Probemos que la homotopía definida por $\mathcal{H}_1$ es admisible, para lo que es suficiente probar que existe $\gamma > 0$ tal que

$$u \neq \mathcal{H}_1(t,u) \quad \forall u \in \overline{B}_\gamma, u \neq 0 \text{ y } t \in [0,1].$$

Supongamos que existe $u_n \in C(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$ con $|u_n|_\infty \to 0$ y $t_n \in [0,1]$, tal que

$$u_n = \mathcal{H}_1(t_n, u_n)$$

o sea,

$$\begin{cases} -a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right) \Delta u_n = \lambda t_n (u_n^+)^q \leq 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por lo tanto $u_n \leq 0$ en Ω, luego $u_n^+ = 0$. Por tanto $u_n \equiv 0$, absurdo.

Tomando $\epsilon \in (0, \delta]$, tenemos

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= \deg(K_\lambda, B_\epsilon) = \deg(I - \mathcal{H}_1(1,\cdot), B_\epsilon) \\ &= \deg(I - \mathcal{H}_1(0,\cdot), B_\epsilon) = \deg(I, B_\epsilon) = 1. \end{aligned}$$

Paso 2: Si $\lambda > 0$ entonces $i(K_\lambda, 0) = 0$.

Sea $\phi > 0$ una autofunción asociada al autovalor principal λ_1. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &: [0,1] \times C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}) \\ \mathcal{H}_2(t,u) &:= \mathcal{L}\left(\frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)} (u^+)^q\right) + t\phi \end{aligned}$$

Vamos a probar que $\mathcal{H}_2$ es una homotopía admisible. Supongamos que existe $u_n \in C(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$, con $|u_n|_\infty \to 0$, y $t_n \in [0,1]$, tal que

$$u_n = \mathcal{H}_2(t_n, u_n).$$

Por tanto,

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right)} (u_n^+)^q + t_n \lambda_1 \phi \text{ en } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Como $t_n\phi \geq 0$, por el principio del Máximo Fuerte tenemos que $u_n > 0$ en Ω.

Por otro lado, como $0 < q < 1$, para todo M, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\lambda(u_n^+)^q > Mu_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Además, como $|u_n|_\infty \to 0$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega u_n^p \leq C.$$

Por tanto, definimos $A = \max\limits_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[0,C]} a(x,s) > 0$, luego,

$$-\Delta u_n = \lambda \frac{(u_n^+)^q}{a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right)} + t\lambda_1\phi \geq \frac{\lambda}{A}(u_n^+)^q + t\lambda_1\phi > Mu_n.$$

Entonces $\lambda_1[-\Delta - M; 1] > 0$, lo que para todo $M \geq \lambda_1$ es un absurdo. Luego $\mathcal{H}_2$ es admisible. Tomando $\epsilon \in (0, \gamma]$, tenemos

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= \deg(K_\lambda, B_\epsilon) = \deg(I - \mathcal{H}_2(0,\cdot), B_\epsilon) \\ &= \deg(I - \mathcal{H}_2(1,\cdot), B_\epsilon) = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta pues hemos probado que la ecuación

$$-\Delta u = \left(\frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)}(u^+)^q\right) + \phi \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

no tiene solución en $\overline{B}_\epsilon$.

Ahora, nuestro objetivo es aplicar el Teorema 1.3 en [47]. Sin embargo, nuestra ecuación

$$u = \lambda T(u) \tag{2.10}$$

no se puede escribir como la ecuación (0.1) en [47], es decir,

$$u = \lambda L u + H(\lambda, u),$$

con L un operador compacto y $H(\lambda, u)$ una función continua con $H(\lambda, u) = o(|u|_\infty)$ cuando $|u|_\infty \to 0$. Por tanto, no podemos aplicar directamente el Teorema 1.3 en [47]. A pesar de ello, mostraremos que existe un continuo de soluciones positivas que emana desde $(0,0)$.

En efecto, denotamos por $\mathcal{S}$ la clausura de soluciones no triviales de (2.10) y $\mathcal{C}$ subconjunto conexo maximal de $\mathcal{S} \cup \{(0,0)\}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es no acotado en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es acotado. Primero, probamos que $\mathcal{C}$ no posee $(\lambda, 0)$ para cualquier $\lambda \neq 0$. Para $\lambda \leq 0$, (2.10) no posee solución positiva. Supongamos que existen $\lambda_0 > 0$ y una sucesión de soluciones positivas tales que $\lambda_n \to \lambda_0$ y $|u_n|_\infty \to 0$. Entonces, fijado ϵ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, tenemos

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right)} (u_n^+)^q \geq \frac{M}{A} u_n,$$

donde $\dfrac{M}{A}$ fue definido anteriormente y llegamos a una contradicción para M grande.

Entonces, $\mathcal{C}$ verifica la hipótesis del Lema 1.2 en [47]. Luego, existe un conjunto acotado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ tal que $(0,0) \in \mathcal{O}$, con $\partial\mathcal{O} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, y tal que $\mathcal{O}$ solo contiene las soluciones triviales que pertenence al entorno de $(0,0)$.

Ahora, siguiendo el Teorema 1.3 en [47] concluimos la existencia de $\epsilon > 0$ y valores $\underline{\lambda}$ y $\overline{\lambda}$ tales que $-\epsilon < \underline{\lambda} < 0 < \overline{\lambda} < \epsilon$ y (ver (1.11) en [47])

$$i(K_{\underline{\lambda}}, 0) = i(K_{\overline{\lambda}}, 0),$$

que es absurdo pues hemos probado que $i(K_{\underline{\lambda}}, 0) = 1$ y $i(K_{\overline{\lambda}}, 0) = 0$. Por tanto, concluimos que existe en continuo de $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones (2.1) desde $(0,0)$. ■

Ahora, estudiaremos el comportamiento global del continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (2.1).

Proposición 2.12 *Sea $\{(\lambda_n, u_n)\}$ una sucesión de soluciones positivas de (2.1) con $|\lambda_n| \leq C$. Si $|u_n|_\infty \to \infty$, entonces $\int_\Omega u_n^p \to \infty$.*

Prueba: Supongamos que $|u_n|_\infty \to \infty$ y $\int_\Omega u_n^p \leq M$ para alguna constante $M > 0$. Como

$a_0 \leq a(x,s)$, para todo $(x,s) \in \Omega \times [0,M]$, entonces

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right)} u_n^q \leq \frac{C}{a_0} u_n^q \quad \text{ en } \Omega.$$

Luego u_n es subsolución de (1.6) para $\sigma = \dfrac{C}{a_0}$ y $m \equiv 1$, por lo tanto

$$u_n \leq \left(\frac{C}{a_0}\right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]}.$$

Así, $|u_n|_\infty \leq C_1$, para alguna constante $C_1 > 0$, que es absurdo. ■

Ahora, probaremos la existencia de solución positiva de (2.1) bajo ciertas condiciones de la función a en el infinito.

Proposición 2.13 *Si*

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = \infty, \qquad \textit{uniformemente en } \Omega, \tag{A_∞}$$

entonces existe al menos una solución positiva para todo $\lambda > 0$.

Prueba: Por el Teorema 2.11 sabemos que existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas de (2.1) que emana desde $(\lambda, u) = (0,0)$. Supongamos $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ está acotado en $\mathbb{R}$, y por tanto existe una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de (2.1) tal que $\lambda_n \to \lambda_0$ y $|u_n|_\infty \to \infty$ para algún $0 < \lambda_0 < \infty$. Por la Proposición 2.12, se tiene que

$$\int_\Omega u_n^p \to \infty.$$

Por (A_∞) tenemos que para todo $M > 0$ existe s_0 tal que, para $s \geq s_0 > 0$,

$$a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} > M, \quad x \in \Omega,$$

luego $\dfrac{1}{a(x,s)} < \dfrac{1}{M} s^{\frac{1-q}{p}}$, para $s \geq s_0 > 0$. Entonces

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right)} u_n^q < \frac{\lambda_n}{M} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} u_n^q \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto, u_n es subsolución de (1.6) con $\sigma = \dfrac{\lambda_n}{M}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}$ y $m \equiv 1$, entonces

$$u_n \leq \left(\frac{\lambda_n}{M}\right)^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} w_{[1,1]} \quad \text{en } \Omega.$$

Lo que implica

$$1 \leq \left(\frac{\lambda_n}{M}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p \leq \left(\frac{\lambda_0 + \epsilon}{M}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p.$$

Para M suficientemente grande, es una contradicción. Esto prueba por tanto que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (0, \infty)$ y concluimos el resultado. ■

Proposición 2.14 *Si*

$$\lim_{s \to \infty} a(x,s) s^{\frac{1-q}{p}} = c(x), \qquad \textit{uniformemente en } \Omega, \tag{A_c}$$

con $c(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces no hay solución positiva de (2.1) para λ grande.

Prueba: Supongamos por absurdo que existe una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones positivas para $\lambda_n \to \infty$. Dividiremos la demostración en dos casos:

Caso 1: Supongamos $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Entonces $|u_n|_\infty \to \infty$. Debido a (A_c), tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$a(x,s) s^{\frac{1-q}{p}} \leq c(x) + \epsilon \qquad \forall s \geq s_0 > 0.$$

Por lo tanto,

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right)} u_n^q \geq \frac{\lambda_n}{c(x) + \epsilon} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} u_n^q,$$

luego u_n es supersolución de (1.6) con $\sigma = \lambda_n \left(\int_\Omega u_n^p \right)^{\frac{1-q}{p}}$, y $m(x) = \frac{1}{c(x)+\epsilon}$. Por tanto

$$u_n \geq \lambda_n^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_\Omega u_n^p \right)^{\frac{1}{p}} w_{[1,m]}.$$

Lo que implica

$$1 \geq \lambda_n^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,m]}^p,$$

una contradicción para $\lambda_n \to \infty$.

Caso 2: Supongamos que $\int_\Omega u_n^p \leq C$, para alguna constante $C > 0$. Por tanto

$$a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right) \leq a_C = \sup_{\substack{s\in[0,C]\\ x\in\Omega}} a(x,s),$$

entonces

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right)} u_n^q \geq \frac{\lambda_n}{a_C} u_n^q.$$

Luego u_n es supersolución de (1.6) con $\sigma = \dfrac{\lambda_n}{a_C}$ y $m \equiv 1$. Por lo tanto,

$$u_n \geq \left(\frac{\lambda_n}{a_C}\right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]} \text{ en } \Omega.$$

luego para $\lambda_n \to \infty$, tenemos $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Absurdo. $\blacksquare$

Nota 2.15 *Obsérvese que el resultado anterior es cierto suponiendo solamente que $a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}}$ es acotado en ∞.*

Podemos ya enunciar y probar el resultado principal en el caso en el que a satisface (A_c).

Teorema 2.16 *Si a satisface (A_c), entonces existen $0 \leq \lambda_* \leq \lambda_{**} \leq \lambda_{***} < \infty$, $\lambda_{**} > 0$, tales que:*

1. *Si $\lambda > \lambda_{***}$, entonces no existe solución positiva de (2.1).*

2. *Si $\lambda \in (0, \lambda_{**})$, entonces existe al menos una solución positiva, denotada por u_λ, de (2.1).*

Además, tenemos $|u_\lambda|_\infty \to \infty$ *para* $\lambda \to \lambda_*$.

Además, si

- *Si* $c(x) \geq c_0 > 0$ *para alguna constante* c_0*, entonces* $\lambda_* > 0$.
- *Si* $c \equiv 0$ *en* Ω*, entonces* $\lambda_* = 0$.

Prueba: Por el Teorema 2.11 existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas de (2.1) que bifurca desde $\lambda = 0$.

Por la Proposición 2.14, existe $\lambda_{***} > 0$ para el cual no hay soluciones positivas de (2.1) para $\lambda > \lambda_{***}$, lo que implica que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ está acotado. Luego, existe $\lambda_{**} > 0$ tal que (2.1) posee al menos una solución positiva para $0 < \lambda < \lambda_{**}$. Como $\mathcal{C}$ es no acotado, existe λ_* con $\lambda_* \leq \lambda_{**}$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_*} |u_\lambda|_\infty = \infty.$$

Supongamos que $c \geq c_0 > 0$ y $\lambda_* = 0$, o sea, existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de soluciones positivas de (2.1) tal que $\lambda_n \to 0$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Por la Proposición 2.12, tenemos que $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Entonces, para $n \geq n_0$ tenemos que

$$a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right) \geq \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{-(1-q)/p} \frac{c_0}{2}.$$

Entonces,

$$-\Delta u_n \leq \lambda_n \frac{2}{c_0} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{(1-q)/p} u_n^q,$$

luego u_n es subsolución de (1.6) con $\sigma = \frac{2\lambda_n}{c_0}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{(1-q)/p}$ y $m \equiv 1$, tenemos que

$$u_n \leq \left(\lambda_n \frac{2}{c_0}\right)^{1/(1-q)} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{1/p} w_{[1,1]},$$

entonces,

$$1 \leq \left(\lambda_n \frac{2}{c_0}\right)^{p/(1-q)} \int_\Omega w_{[1,1]}^p,$$

una contradicción para $\lambda_n \to 0$.

Supongamos ahora que $c \equiv 0$ en Ω. Supongamos por contradicción que $\lambda_* > 0$ y que existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de soluciones positivas de (2.1) tal que $\lambda_n \to \lambda_*$, $|u_n|_\infty \to \infty$. Por

(H_c) con $c \equiv 0$ y como $\lambda_n \to \lambda_*$, para todo $\epsilon, \delta > 0$, existen $s_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que tenemos que

$$a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} < \epsilon \qquad \forall s \geq s_0 > 0,$$

y

$$0 < \lambda_* - \delta < \lambda_n \qquad \forall n \geq n_0 > 0.$$

Por tanto,

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{a\left(x, \int_\Omega u_n^p\right)} u_n^q \geq \frac{(\lambda_* - \delta)}{\epsilon} u_n^q \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}.$$

Luego, u_n es una supersolución de (1.6), con $\sigma = \dfrac{(\lambda_* - \delta)}{\epsilon}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}$ and $m \equiv 1$. Por tanto

$$1 \geq \left(\frac{\lambda_* - \delta}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p.$$

Eso es una contradicción para ϵ y δ pequeño.

El siguiente resultado muestra la unicidad de solución positiva de (2.1).

Proposición 2.17 *Si $a(x,s)$ es una función creciente en s, entonces el problema (2.1) con $0 < q < 1$ tiene solución positiva única.*

Prueba: Sea u y v dos soluciones de (2.1), donde $u \neq v$.

Supongamos que $\int_\Omega u^p = \int_\Omega v^p$, entonces u y v son soluciones positivas de (1.6), con $m(x) = \dfrac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u^p\right)}$ y $m(x) = \dfrac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega v^p\right)}$, respectivamente. Como (1.6) tiene una única solución positiva sigue que $u = v$.

Ahora, supongamos que $\int_\Omega u^p > \int_\Omega v^p$ entonces,

$$-\Delta u = \frac{\lambda u^q}{a\left(x, \int_\Omega u^p\right)} < \frac{\lambda v^q}{a\left(x, \int_\Omega v^p\right)}$$

luego u es subsolución de

$$\begin{cases} -\Delta w = \dfrac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega v^p\right)} w^q & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya única solución positiva es v. Así, $u < v$ en Ω, lo que es un absurdo. ■

Nota 2.18 *Observemos que este resultado de unicidad es más débil que el obtenido en el caso homogéneo, Proposición 2.4. En efecto, si a es creciente, entonces g es creciente; pero el inverso no es cierto en general.*

Caso Degenerado

Recordamos que en el caso degenarado consideramos

$$a(x, 0) = 0. \tag{2.11}$$

Para afrontar el problema de $a(x, 0) = 0$ introducimos una pertubación $\epsilon > 0$ en el problema (2.1), estudiamos el problema perturbado, que ya es no degenerado, y después hacemos tender ϵ a 0.

Definimos u_ϵ una solución del problema

$$\begin{cases} -\left(a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon\right) \Delta u_\epsilon = \lambda u_\epsilon^q & \text{en } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

Llamamos

$$a_\epsilon(x, s) = a(x, s) + \epsilon > 0.$$

Obsérvese que

$$\lim_{s\to\infty} a_\epsilon(x, s) s^{\frac{1-q}{p}} = \infty, \qquad \text{uniformemente en } \Omega.$$

Luego a_ϵ satisface (A_∞). Por tanto, por la Proposición 2.13, para cada $\epsilon > 0$ existe una solución positiva u_ϵ de (2.12) para todo $\lambda \in (0, \infty)$.

Nuestro objetivo es pasar al límite con $\epsilon \to 0$ en (2.12). Para eso, necesitamos conocer el comportamiento de $\int_\Omega u_\epsilon^p$ cuando $\epsilon \to 0$.

Lema 2.19 *Si u_ϵ es solución de (2.12), entonces $\int_\Omega u_\epsilon^p \nrightarrow 0$ cuando $\epsilon \to 0$.*

Prueba: Supongamos que $\int_\Omega u_\epsilon^p \to 0$. Entonces, por (2.11) para todo $M > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon} > M \qquad \text{para } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Así,

$$-\Delta u_\epsilon > \lambda M u_\epsilon^q$$

Por tanto, u_ϵ es supersolución del problema (1.6) con $\sigma = \lambda M$ y $m \equiv 1$, luego

$$\int_\Omega u_\epsilon^p \geq (\lambda M)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p.$$

Una contradicción. ■

Lema 2.20 *i) Si a satisface (A_∞), entonces $\int_\Omega u_\epsilon^p \nrightarrow \infty$ cuando $\epsilon \to 0$.*

ii) Si a satisface (A_c) con $c \geq c_0 > 0$, entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda < \lambda^*$, $\int_\Omega u_\epsilon^p \nrightarrow \infty$ cuando $\epsilon \to 0$.

Prueba: Supongamos que $\int_\Omega u_\epsilon^p \to \infty$, luego para todo $M > 0$ existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $\epsilon < \epsilon_0$

$$\int_\Omega u_\epsilon^p \geq M.$$

i) Por (A_∞) para todo $M_1 > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que $s \geq s_0 > 0$,

$$a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} \quad > \quad M_1.$$

Tomando $M = s_0$, concluimos

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_\epsilon &= \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon} u_\epsilon^q \leq \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right)} u_\epsilon^q \\
&\leq \frac{\lambda}{M_1} \left(\int_\Omega u_\epsilon^p\right)^{\frac{1-q}{p}} u_\epsilon^q
\end{aligned}
$$

Luego, u_ϵ es subsolución del problema (1.6) con $\sigma = \dfrac{\lambda}{M_1} \left(\int_\Omega u_\epsilon^p\right)^{\frac{1-q}{p}}$ y $m \equiv 1$, por tanto

$$
u_\epsilon \leq \left(\frac{\lambda}{M_1}\right)^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_\Omega u_\epsilon\right)^{\frac{1}{p}} w_{[1,1]},
$$

luego

$$
1 \leq \left(\frac{\lambda}{M_1}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p
$$

Para M_1 suficientemente grande tenemos una contradicción.

ii) Como a satisface (A_c) y $c \geq c_0 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $c(x) - \delta > 0$ para todo $x \in \Omega$. Para todo δ, por (A_c) existe $s_0 > 0$ tal que

$$
a(x, s) s^{\frac{1-q}{p}} \geq c(x) - \delta > 0.
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_\epsilon &= \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon} u_\epsilon^q \leq \frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right)} u_\epsilon^q \\
&\leq \frac{\lambda}{c(x) - \delta} \left(\int_\Omega u_\epsilon^p\right)^{\frac{1-q}{p}} u_\epsilon^q
\end{aligned}
$$

Luego u_ϵ es subsolución del problema (1.6) con $\sigma = \lambda \left(\int_\Omega u_\epsilon^p\right)^{\frac{1-q}{p}}$ y $m(x) = \dfrac{1}{c(x) - \delta}$, así,

$$
u_\epsilon \leq \lambda^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_\Omega u_\epsilon\right)^{\frac{1}{p}} w_{[1,m]}.
$$

Por tanto,

$$1 \leq \lambda^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,m]}^p.$$

Está expresión es un absurdo si

$$\lambda < \left(\frac{1}{\int_\Omega w_{[1,m]}^p} \right)^{\frac{1-q}{p}} := \lambda^*. \qquad \blacksquare$$

Podemos enunciar y probar el resultado principal en el caso degenarado.

Teorema 2.21 *Supongamos $a(x,0) = 0$.*

i) Si a satisface (A_∞), entonces existe al menos una solución positiva de (2.1) para $\lambda > 0$.

ii) Si a satisface (A_c) con $c \geq c_0 > 0$, entonces existen $0 < \lambda^* < \lambda^{**}$, tales que existe al menos una solución positiva de (2.1) para $0 < \lambda < \lambda^*$ y no posee solución positiva para $\lambda > \lambda^{**}$.

Prueba: Fijamos $\lambda > 0$ cuando a verifica (A_∞) y $\lambda \in (0, \lambda^*)$ cuando a verifica (A_c). Sea u_ϵ solución positiva de (2.12). Entonces por los Lemas 2.19 y 2.20, existen $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tales que

$$0 < \gamma_1 \leq \int_\Omega u_\epsilon^p \leq \gamma_2 < \infty.$$

Por tanto, por la continuidad de a, existen $m_1, m_2 > 0$ tales que

$$0 < m_1 \leq a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon \leq m_2 < \infty.$$

Así,

$$-\Delta u_\epsilon \leq \frac{\lambda}{m_1} u_\epsilon^q,$$

tenemos que u_ϵ está acotado en $L^\infty(\Omega)$. Luego

$$\frac{\lambda}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon} u_\epsilon^q \quad \text{está acotada en } L^r(\Omega), \text{ para todo } r > 1.$$

Por resultados de regularidad, u_ϵ es acotada en $W^{2,r}(\Omega)$ para todo $r > 1$. Por inyección continua, existe $u_0 \geq 0$ tal que

$$u_\epsilon \to u_0 \qquad \text{en } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha \in (0,1). \tag{2.13}$$

Entonces

$$\int_\Omega u_\epsilon^p \to \int_\Omega u_0^p \neq 0. \tag{2.14}$$

Por los Lemas 2.19 y 2.20, tenemos

$$0 \neq \int_\Omega u_0^p < \infty. \tag{2.15}$$

Concluimos que $u_0 \gneq 0$. Multiplicamos (2.12) por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y integramos por partes, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega \frac{u_\epsilon^q}{a\left(x, \int_\Omega u_\epsilon^p\right) + \epsilon} \varphi.$$

Por (2.13), (2.14) y (2.15), tenemos

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega \frac{u_0^q}{a\left(x, \int_\Omega u_0^p\right)} \varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Luego u_0 es solución positiva de (2.1). ■

Capítulo

3

Ecuación logística con coeficiente de difusión no-local

En este Capítulo presentaremos los resultados obtenidos en [35]. Tenemos el objetivo de estudiar la existencia de solución positiva para la siguiente ecuación no-local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ es un dominio acotado y regular, $p > 0$, $q \in L^\infty(\Omega)$, no negativa y no trivial en Ω y $b \in C(\overline{\Omega})$ que verifica una de las dos siguientes hipótesis:

(Hb_1) $b(x) \geq b_0 > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

(Hb_2) $b(x) \geq 0$ en Ω, $b(x) \neq 0$ y definimos el conjunto

$$\Omega_0 := \text{int}\{x \in \Omega; b(x) = 0\}.$$

Supondremos, por simplicidad, que Ω_0 es un conjunto conexo, regular y $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

Este Capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 3.1, probaremos la existencia de un continuo no acotado de soluciones positivas de (3.1) usando el método de bifurcación, así como, la dirección de bifurcación de este continuo. En la Sección 3.2 presentamos resultados de no existencia de solución positiva. En las Secciones 3.3 y 3.4 se analizan con detalle los casos (Hb_1) y (Hb_2), respectivamente, usando en el segundo caso, además de resultados de bifurcación, argumentos de punto fijo.

3.1 Bifurcación global y local

En primer lugar, probaremos la existencia de un continuo no acotado de soluciones positivas de (3.1).

Teorema 3.1 *Existe un continuo no acotada $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas para el problema (3.1) que emana a partir de* $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$.

Prueba: Obsérvese que (3.1) es equivalente a

$$u = T_\lambda(u) := \frac{\lambda}{a(0)} \mathcal{L}u + h(\lambda, u),$$

donde

$$h(\lambda, u) = \lambda \mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega (u^+)^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u^+ \right) - \mathcal{L} \left(\frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega (u^+)^p\right)} u^2 \right),$$

$u^+ = \max\{u, 0\}$, y $\mathcal{L}$ está definido en (2.8).

Obsérvese que u es una solución no negativa de (3.1), si y sólo si $u = T_\lambda(u)$. Por el Lema 2.8, tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(\lambda, u)}{u} \right|_\infty &\leq \frac{1}{|u|_\infty} \left| \lambda \mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)(u^+)^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u^+ \right) \right|_\infty \\
&\quad + \frac{1}{|u|_\infty} \left| \mathcal{L} \left(\frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)(u^+)^p\right)} u^2 \right) \right|_\infty \\
&\leq C \left(\lambda \left| \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)(u^+)^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right| + \frac{|b(x)|_\infty}{\left| a\left(\int_\Omega q(x)(u^+)^p\right) \right|} |u|_\infty \right) \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $|u|_\infty \to 0$. Aplicando el Teorema 1.3 en [47], podemos concluir que existe una componente conexa de soluciones no negativas y no triviales $\mathcal{C}$ que emana desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ que es no acotada. Por el Principio del Máximo, las soluciones no negativas y no triviales son positivas en Ω. ∎

Obsérvese que, por regularidad elíptica, cualquier solución $u \in L^\infty(\Omega)$, pertenece a $W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$, y entonces, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha \in (0,1)$.

En el siguiente resultado estudiamos la dirección de bifurcación del continuo que emana desde $\lambda = a(0)\lambda_1$.

Teorema 3.2 *Sea $a \in C^1(\mathbb{R})$. Denotamos φ_1 la autofunción positiva asociada a λ_1, con norma $|\varphi_1|_2 = 1$. El sentido de la bifurcación en el punto $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ es el siguiente:*

a) Supongamos $p = 1$, entonces:

a_1) Si $a'(0) > -\dfrac{\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \int_\Omega q(x)\varphi_1}$, el sentido es supercrítico.

a_2) Si $a'(0) < -\dfrac{\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \int_\Omega q(x)\varphi_1}$, el sentido es subcrítico.

b) Supongamos $p > 1$, entonces el sentido es supercrítico.

c) Supongamos $p < 1$, entonces:

c_1) Si $a'(0) > 0$, el sentido es supercrítico.

c_2) Si $a'(0) < 0$, el sentido es subcrítico.

Prueba: Para $p \geq 1$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: \mathbb{R} \times C^2(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}), \\ \mathcal{F}(\lambda, u) &= a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u + \lambda u - b(x)u^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se tiene que $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R} \times C^2(\overline{\Omega}); C(\overline{\Omega}))$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\lambda, u)(v) &= a'\left(\int_\Omega q(x)u^p\right) p \left(\int_\Omega q(x)u^{p-1}v\right)\Delta u \\ &+ a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta v + \lambda v - 2b(x)uv, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda, u)v = v. \tag{3.4}$$

Por definición de $\mathcal{F}$, (3.3) y (3.4), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda, 0) = 0, &\qquad \forall \lambda \in \mathrm{I\!R}, \\ L_0 := \mathcal{F}_u(\lambda, 0)(v) &= a(0)\Delta v + \lambda v, \\ L_1 := \mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda, 0)(v) &= v. \end{aligned}$$

También tenemos que

$$Ker(L_0) = \{v \in C_0^2(\overline{\Omega}) \setminus \{0\};\ a(0)\Delta v + \lambda v = 0\} \neq \emptyset.$$

Como $a(0)\lambda_1$ es un autovalor simple de $(-a(0)\Delta)$, entonces

$$Ker(\mathcal{F}_u(a(0)\lambda_1, 0)) = \langle \varphi_1 \rangle,$$

y

$$\dim\ (Ker(\mathcal{F}_u(a(0)\lambda_1, 0))) = \mathrm{cod}\ (\mathrm{Rg}\ (Ker(\mathcal{F}_u(a(0)\lambda_1, 0))) = 1.$$

Por el Teorema de la Alternativa de Fredholm, tenemos

$$\mathrm{Rg}\ (\mathcal{F}_u(a(0)\lambda_1, 0)) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_\Omega \varphi_1 u = 0 \right\}.$$

Por otro lado, tenemos

$$\mathcal{F}_{u\lambda}(a(0)\lambda_1, 0)(\varphi_1) = \varphi_1.$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}_{u\lambda}(a(0)\lambda_1, 0)(\varphi) \notin \mathrm{Rg}\ (\mathcal{F}_u(a(0)\lambda_1, 0)),$$

debido a $|\varphi_1|_2 = 1$.

Entonces podemos aplicar el Teorema de Crandall-Rabinowitz (ver [30]) y concluir que existe $\epsilon > 0$ y dos aplicaciones C^1

$$\mu : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{I\!R}, \qquad v : (-\epsilon, \epsilon) \to Z,$$

donde Z es el complementario topológico del $Ker(L_0)$ en $C_0^2(\overline{\Omega})$, tales que $\mu(0)=0$, $v(0)=0$, y para cada $s\in(-\epsilon,\epsilon)$

$$\begin{cases} \lambda(s)=a(0)\lambda_1+\mu(s), \\ u(s)=s(\varphi_1+v(s)), \end{cases} \tag{3.5}$$

tales que $(\lambda(s),u(s))$ son soluciones no-triviales de (3.1), o sea

$$\mathcal{F}(\lambda(s),u(s))=0 \quad s\in(-\epsilon,\epsilon).$$

Además, existe $\rho>0$ tal que si $\mathcal{F}(\lambda,u)=0$ y $(\lambda,u)\in B((a(0)\lambda_1,0),\rho)$, o bien $u\equiv 0$ en Ω, o $(\lambda,u)=(\lambda(s),u(s))$ para algún $s\in(-\epsilon,\epsilon)$; $B((a(0)\lambda_1,0),\rho)$ denota a bola centrada en $(a(0)\lambda_1,0)$ y radio $\rho>0$ en $\mathbb{R}\times C_0^2(\overline{\Omega})$. Obsérvese que $u(s)$ es positiva para $s\in(0,\epsilon)$.

Por otro lado, el desarollo de Taylor de la función $a\,(t)$ es dado por

$$a\,(t)=a(0)+ta'(0)+\mathrm{o}(t). \tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.5) y (3.6) en (3.1), obtenemos

$$\begin{aligned} -\left(a(0)+s^p a'(0)\int_\Omega q(x)(\varphi_1+v(s))^p+\mathrm{o}(s^p)\right)\Delta(s\varphi_1+sv(s))= \\ (a(0)\lambda_1+\mu(s))(s(\varphi_1+v(s))-b(x)(s(\varphi_1+v(s)))^2. \end{aligned}$$

Multiplicamos por φ_1, integrando en Ω y reorganizando los términos, tenemos que

$$\begin{aligned} s^p a'(0)\lambda_1\int_\Omega q(x)(\varphi_1+v(s))^p \quad &+ \quad s^p a'(0)\lambda_1\int_\Omega q(x)(\varphi_1+v(s))^p\int_\Omega\varphi_1 v(s)+\mathrm{o}(s^p) \\ &= \quad \mu(s)\int_\Omega(\varphi_1+v(s))\varphi_1-s\int_\Omega b(x)(\varphi_1+v(s))^2\varphi_1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\mu(s)}{s^p}=\frac{a'(0)\lambda_1\int_\Omega q(x)(\varphi_1+v(s))^p\left(1+\int_\Omega\varphi_1 v(s)\right)+s^{1-p}\int_\Omega b(x)(\varphi_1+v(s))^2\varphi_1}{\int_\Omega(\varphi_1+v(s))\varphi_1}+o(s). \tag{3.7}$$

Tomando límite en s, tenemos;

a) Si $p = 1$, entonces

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(s)}{s} = a'(0)\lambda_1 \int_\Omega q(x)\varphi_1 + b(x)\varphi_1^3,$$

de donde se deduce el primer apartado.

b) Si $p > 1$, entonces por (3.7), tenemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(s)}{s^p} = \infty,$$

por lo que $\mu(s) > 0$ para $s > 0$ y pequeño, y entonces $\lambda(s) > a(0)\lambda_1$ y como consecuencia la dirección es supercríitica.

c) Supongamos $p < 1$. Al no poder aplicar el Teorema de Crandall-Rabinowitz, usaremos un argumento distinto para estudiar la dirección de bifurcación.

c_1) Supongamos $a'(0) > 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$a(s) > a(0) \quad 0 < s < \epsilon. \tag{3.8}$$

También supongamos que existen $\{(\lambda_n, u_n)\}$, tal que

$$\lambda_n \to a(0)\lambda_1 \quad \text{y} \quad |u_n|_\infty \to 0.$$

Como $\epsilon > \int_\Omega q(x)u_n^p > 0$, para n grande, por (3.8), tenemos

$$a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right) > a(0).$$

Por la Proposición 1.1, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right)\Delta + b(x)u_n; 1\right] \\ &> \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right)\Delta; 1\right] \\ &> \lambda_1[-a(0)\Delta; 1] = a(0)\lambda_1. \end{aligned}$$

Luego, $\lambda_n > a(0)\lambda_1$, o sea, el sentido es supercrítico.

c$_2$) Ahora, supongamos que $a'(0) < 0$. Supongamos que existe (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (3.1) tal que

$$\lambda_n \to a(0)\lambda_1 \quad \text{y} \quad |u_n|_\infty \to 0,$$

con $\lambda_n > a(0)\lambda_1$. Sea $C > 0$, con C suficientemente grande, tal que

$$a'(0) < -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{C\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1}. \tag{3.9}$$

Definimos el problema

$$\begin{cases} -a\left(C\displaystyle\int_\Omega q(x)w\right)\Delta w = w(\mu - b(x)w) & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Obsérvese que $p = 1$ en (3.10), luego podemos usar el apartado a$_2$) y concluir que la dirección de bifurcación de (3.10) es subcrítica. Por tanto, $\mu < a(0)\lambda_1$ en un entorno de $a(0)\lambda_1$. Ahora, probemos que existe una sucesión (μ_n, w_n) de soluciones positivas de (3.10) con $\mu_n > a(0)\lambda_1$, $\mu_n \to a(0)\lambda_1$ y $|w_n|_\infty \to 0$, lo que nos llevará a una contradicción.

Tomamos $\mu_n = \lambda_n$. Por $a'(0) < 0$, tenemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$a(0) > a(s), \quad 0 < s < \epsilon_0. \tag{3.11}$$

Como $p < 1$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q(x)u_n^p > Cq(x)u_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $a'(0) < 0$, entonces a es decreciente en 0. Entonces, como $|u_n|_\infty \to 0$, tenemos

$$a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right) < a\left(C\int_\Omega q(x)u_n\right). \tag{3.12}$$

Ahora, vamos aplicar el método de sub-supersoluciones a (3.10). Tomemos

$$\overline{u} = u_n, \quad \underline{u} = \epsilon\varphi_1,$$

donde ϵ será escogido posteriormente. Obsérvese que como $\lambda_n \geq \lambda_0 > 0$ para algún λ_0, tenemos

$$f(x, s) = s(\lambda_n - b(x)s) > 0, \quad s \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Entonces, como a es decreciente en $[\underline{u}, \overline{u}]$ y $f(x, s) > 0$, la Definición 1.20 es equivalente a

$$-a\left(\int_\Omega Cq(x)\underline{u}\right)\Delta\underline{u} - f(x, \underline{u}) \leq 0 \leq -a\left(\int_\Omega Cq(x)\overline{u}\right)\Delta\overline{u} - f(x, \overline{u}).$$

Veamos que $\overline{u} = u_n$ es supersolución de (3.10). En efecto, por (3.12)

$$-a\left(C\int_\Omega q(x)u_n\right)\Delta u_n > -a\left(\int_\Omega q(x)u_n\right)\Delta u_n = u_n(\lambda_n - b(x)u_n).$$

Ahora, veremos que $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ es subsolución de (3.10). De hecho, $\epsilon\varphi_1$ es subsolución si

$$b(x)\epsilon\varphi_1 + a\left(\epsilon\int_\Omega Cq(x)\varphi_1\right)\lambda_1 \leq \lambda_n.$$

Por (3.11), para ϵ pequeño, tenemos que

$$\begin{aligned} b(x)\epsilon\varphi_1 + a\left(C\epsilon\int_\Omega \varphi_1\right)\lambda_1 &\leq b_M\epsilon + a(0)\lambda_1 < \lambda_n \\ \Leftrightarrow \epsilon &\leq \frac{\lambda_n - a(0)\lambda_1}{b_M}, \end{aligned}$$

donde $b_M = \max_{x\in\overline{\Omega}} b(x)$. Así, existe solución positiva de (3.10) para $\lambda_n > a(0)\lambda_1$ tal que

$$\epsilon\varphi_1 \leq w_n \leq u_n, \text{ en } \Omega,$$

lo que es contradicción como comentamos anteriormente. ■

3.2 Resultados de no existencia de solución positiva

Una vez estudiada la bifurcación con detalle, empezamos a estudiar la ecuación para conocer el comportamiento global del continuo.

Proposición 3.3 *Sea* (λ, u) *solución positiva de (3.1).*

1. *Si denotamos*
$$d = a\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right),$$
entonces,
$$\frac{u}{d} = \theta_{[\lambda/d,b]}.$$
donde $\theta_{[\lambda/d,b]}$ *es la única solución positiva de (1.10).*

2. *Si* u *es solución positiva de (3.1), entonces*
$$a\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)\lambda_1 < \lambda < a\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)\lambda_1^{\Omega_0}. \tag{3.13}$$

Prueba:

1. Dividiendo (3.1) por d^2, obtenemos
$$-\Delta\left(\frac{u}{d}\right) = \frac{\lambda}{d}\left(\frac{u}{d}\right) - b(x)\left(\frac{u}{d}\right)^2,$$
luego,
$$\frac{u}{d} = \theta_{[\lambda/d,b]}.$$

2. Por la Proposición 1.1, obtenemos que
$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta + b(x)u\right] &> \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta\right] \\ &= a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\lambda_1.\end{aligned}$$

Usando nuevamente la Proposición 1.1, tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda = \lambda_1\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta + b(x)u\right] &< \lambda_1^{\Omega_0}\left[-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta\right] \\
&= a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\lambda_1^{\Omega_0}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente resultado es un resultado de no existencia de solución para valores de λ grande o pequeño.

Proposición 3.4 *Sea* (λ, u) *solución positiva de (3.1).*

1. *Si* $b(x)$ *verifica* (Hb_1)*, entonces* $\lambda > a_L\lambda_1$*;*

2. *Si* $b(x)$ *verifica* (Hb_2)*, entonces*

$$a_L\lambda_1 < \lambda < a_M\lambda_1^{\Omega_0}.$$

Prueba: Los resultados son consecuencia de (3.13) y la Proposición 1.1. ■

Nota 3.5 *Cabe recordar que, a diferencia de la mayoría de los resultados en la literatura, no asumimos que* a *está acotada superiormente y tampoco* a *es estrictamente positivo. Por tanto, por ejemplo, cuando* a *es no acotado el resultado anterior se tiene con* $a_M = \infty$*.*

3.3 Caso que b verifica (Hb_1)

Estudiemos primer el caso (Hb_1), es decir, cuando $b(x)$ es una función estrictamente positiva en todo el dominio.

Teorema 3.6 *Si b(x) satisface* (Hb_1)*. Entonces existe solución positiva de (3.1) si* $\lambda > a(0)\lambda_1$*.*

Prueba: Obsérvese que

$$u < \frac{\lambda}{b_0} \text{ en } \Omega. \tag{3.14}$$

En efecto, sea

$$\Omega_1 = \left\{x \in \Omega; u(x) > \frac{\lambda}{b_0}\right\}.$$

Entonces,

$$-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2 \le 0 \quad \text{ en } \Omega_1, \quad u = \frac{\lambda}{b_0} \quad \text{ sobre } \partial\Omega_1,$$

implicando que $u \le \dfrac{\lambda}{b_0}$ en Ω_1; lo que es una contradicción. Por tanto, $\Omega_1 = \emptyset$, y gracias al Principio del máximo fuerte sigue (3.14). Por tanto, por el Teorema 3.1 existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas que bifurca desde $\lambda = a(0)\lambda_1$. Además, (3.1) no existe solución positiva para $\lambda \le a_L\lambda_1$. Como consecuencia de (3.14) tenemos que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \supset (a(0)\lambda_1, \infty)$ y sigue la existencia de solución positiva para $\lambda > a(0)\lambda_1$. ■

Corolario 3.7 *Si a es creciente y b constante, entonces existe una única solución positiva de (3.1) si $\lambda > a(0)\lambda_1$.*

Prueba: Por el Teorema 3.6 tenemos la existencia de solución. Ahora, probaremos que la solución es única.

Supongamos que a es creciente y b constante. Sea u y v soluciones positivas de (3.1), con $u \neq v$. Dividiremos en dos casos:

1.- Supongamos que $\int_\Omega q(x)u^p = \int_\Omega q(x)v^p$. Entonces, u y v son soluciones positivas de

$$-\Delta v = \frac{\lambda v - bv^2}{a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)} \quad \text{ en } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{3.15}$$

Por tanto, como (3.15) tiene una única solución positiva, sigue que $u = v$ en Ω.

2.- Supongamos ahora que $\int_\Omega q(x)u^p < \int_\Omega q(x)v^p$. Obsérvese que como b es constante, sigue por (3.14) que

$$\lambda v - bv^2 > 0 \text{ en } \Omega. \tag{3.16}$$

Además, como a es creciente y por (3.16), obtenemos que

$$-\Delta v = \frac{\lambda v - bv^2}{a\left(\int_\Omega q(x)v^p\right)} < \frac{\lambda v - bv^2}{a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)}.$$

Por tanto, v es subsolución de (3.15), que implica $u > v$, una contradicción. ■

3.4 Caso que b verifica (Hb_2)

Ahora estudiaremos el caso en que b satisface (Hb_2). Para ello, definimos

$$I := \int_\Omega q(x)(\mathcal{M}(x))^p dx \tag{3.17}$$

donde $\mathcal{M}(x)$ está definida como sigue

$$\mathcal{M}(x) := \begin{cases} \infty & \text{in } \overline{\Omega}_0, \\ L(x) & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

y $L(x)$ está definida en el Capítulo 1. $\mathcal{M}(x)$ es la llamada *metasolution*, (ver [43]).

Nuestro primer resultado trata el caso en el que $I = \infty$.

Teorema 3.8 *Supongamos que $b(x)$ satisface (Hb_2) y que $I = \infty$.*

1. *Si $0 < a(\infty) < \infty$, entonces existe solución positiva de (3.1) si*

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}, \max\{a(0)\lambda_1, a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}\}).$$

2. *Si $a(\infty) = \infty$, entonces existe solución positiva de (3.1) para $\lambda > a(0)\lambda_1$.*

3. *Si $a(\infty) = 0$, entonces existe solución positiva de (3.1) para $\lambda \in (0, a(0)\lambda_1)$.*

Además, existen sucesiones $(\lambda_n, u_{\lambda_n}), (\lambda'_n, u_{\lambda'_n}) \in \mathcal{C}$, tales que

$$\lim_{\lambda_n \to a(0)\lambda_1} |u_{\lambda_n}|_\infty = 0, \qquad \lim_{\lambda'_n \to a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}} |u_{\lambda'_n}|_\infty = \infty,$$

donde $\mathcal{C}$ es el continuo no acotado que bifurca desde $u = 0$ en $\lambda = a(0)\lambda_1$.

Prueba: Por el Teorema 3.1 existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado en $\mathbb{R} \times L^\infty(\Omega)$ de soluciones positivas de (3.1) que emana desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$. Por la Proposición 3.4, (3.1) no posee soluciones positivas para $\lambda \leq a_L\lambda_1$.

1. Supongamos que $0 < a(\infty) < \infty$, entonces $0 < a_L \leq a_M < \infty$. De nuevo, por la Proposición 3.4, si existe solución positiva de (3.1) entonces $\lambda < a_M\lambda_1^{\Omega_0}$, y por tanto,

como $\mathcal{C}$ es no acotada y $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ es acotado, existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de soluciones positivas de (3.1), con $\lambda_n \to \lambda^* \in (0, \infty)$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Definimos

$$d_n = a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right).$$

Entonces, por la Proposición 3.3

$$\frac{u_n}{d_n} = \theta_{[\lambda_n/d_n, b]}. \tag{3.19}$$

Así,

$$d_n = a\left(d_n^p \int_\Omega q(x)\theta^p_{[\lambda_n/d_n, b]}\right). \tag{3.20}$$

Por otro lado, como u_n es una solución positiva de (3.1), por la Proposición 3.3 tenemos que

$$\lambda_1 < \frac{\lambda_n}{d_n} < \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Como $\lambda_n \to \lambda^* \in (0, \infty)$, sigue que d_n es acotado. Entonces, como $|u_n|_\infty \to \infty$ y usando (3.19), concluimos que $|\theta_{[\lambda_n/d_n, b]}|_\infty \to +\infty$, y por tanto

$$\frac{\lambda_n}{d_n} \to \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Así, por el Teorema 1.7

$$d_n \to \frac{\lambda^*}{\lambda_1^{\Omega_0}} \text{ en } \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \theta_{[\lambda_n/d_n, b]} \to \mathcal{M} \text{ en } C^2(\Omega).$$

Pasando el límite en (3.20), obtenemos

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_1^{\Omega_0}} = a\left(\left(\frac{\lambda^*}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I\right) = a(\infty) \Rightarrow \lambda^* = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}. \tag{3.21}$$

2. Supongamos que $a(\infty) = \infty$. En este caso, $a_L > 0$ y entonces si (λ, u) es una solución positiva de (3.1) tenemos por la Proposición 3.4 que $0 < a_L\lambda_1 < \lambda$. Supongamos por contradicción que existe una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de (3.1) tal que $\lambda_n \to \lambda^* < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Con un argumento similar al usado en el primer apartado,

usando (3.21), obtenemos que $\lambda^* = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0} < \infty$. Contradicción.

3. Supongamos por último que $a(\infty) = 0$, por tanto, $a_M < \infty$. Entonces por la Proposición 3.4, si (λ, u) es una solución positiva de (3.1) tenemos que $\lambda < a_M\lambda_1^{\Omega_0}$. Supongamos ahora por contradicción que existe una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de (3.1) tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$ con $\lambda^* > 0$. De nuevo, por (3.21), podemos concluir que $\lambda^* = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0} = 0$; de nuevo llegamos a una contradicción. ■

Nota 3.9 *En el caso $a(0)\lambda_1 = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$, el resultado anterior sólo asegura que el continuo $\mathcal{C}$ bifurca desde la solución trivial en $\lambda = a(0)\lambda_1$ y se va a infinito en el mismo valor $\lambda = a(\infty)\lambda_1^{\Omega_0}$. Por tanto, dependiendo de su dirección de bifurcación, existe solución positiva en un entorno, a la derecha o a al izquierda, de $a(0)\lambda_1$.*

Ahora, estudiaremos el caso $I < \infty$. En este caso, la estructura del conjunto soluciones positivas de (3.1) depende de las soluciones de la siguiente ecuación de variable real

$$g(s) = I, \tag{3.22}$$

donde la función $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ está definida por

$$g(s) := \frac{s}{(a(s))^p}. \tag{3.23}$$

El siguiente resultado caracteriza los posibles puntos de bifurcación hacia infinito.

Lema 3.10 *Supongamos que $I < \infty$ y que existe una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones positivas de (3.1) tal que $|u_n|_\infty \to \infty$ y $\lambda_n \to \lambda_* < \infty$. Entonces, $\lambda_* > 0$ y existe $s_* > 0$ tal que $g(s_*) = I$, de hecho,*

$$s_* = \left(\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I.$$

Prueba: Por la Proposición 3.3, tenemos que

$$\lambda_1 < \frac{\lambda_n}{d_n} < \lambda_1^{\Omega_0},$$

donde

$$d_n = a\left(\int_\Omega q(x)u_n(x)^p dx\right).$$

Entonces,

$$u_n = d_n \theta_{[\lambda_n/d_n, b]}, \tag{3.24}$$

por tanto

$$d_n = a\left(d_n^p \int_\Omega q(x)\theta^p_{[\lambda_n/d_n, b]}\right). \tag{3.25}$$

Como $\lambda_* < \infty$, d_n es acotada superiormente y por tanto, por (3.24), si $|u_n|_\infty \to \infty$ tenemos que

$$\frac{\lambda_n}{d_n} \to \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Pasando el límite en (3.25), obtenemos

$$\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}} = a\left(\left(\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I\right).$$

Entonces, $\lambda_* > 0$ pues $a(0) > 0$, y llamando $s_* = \left(\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I$, se tiene que

$$a(s_*) = \left(\frac{s_*}{I}\right)^{1/p},$$

y como consecuencia, $g(s_*) = I$. ■

Teorema 3.11 *Sea $I < \infty$. Si no existe solución de (3.22), entonces existe al menos una solución positiva de (3.1) para $\lambda > a(0)\lambda_1$.*

Prueba: Sabemos que existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas que emana desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$. Supongamos por contradicción que existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de soluciones positivas tal que $\lambda_n \to \lambda_* < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Entonces, por el Lema 3.10 existe $s_* > 0$ tal que

$$g(s_*) = I.$$

Contradicción, ya que estamos suponiendo que (3.22) no tiene solución. ■

Proposición 3.12 *Supongamos que (λ, u) es una solución positiva de (3.1). Entonces,*

$$g\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right) < I.$$

Prueba: Observemos que

$$\begin{aligned} g\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx}{\left(a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)\right)^p} = \int_\Omega q(x)\left(\frac{u(x)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)}\right)^p dx \\ &= \int_\Omega q(x)\theta^p_{[\lambda/d,b]} < \int_\Omega q(x)\mathcal{M}^p(x)dx = I, \end{aligned}$$

donde

$$d = a\left(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right).$$

■

Proposición 3.13 *Si existe* $\overline{s} > 0$ *tal que*

$$g(s) > I \quad \textit{para todo } s > \overline{s}, \tag{3.26}$$

entonces, existe $\overline{\lambda} > 0$ *tal que (3.1) no posee solución positiva para* $\lambda > \overline{\lambda}$.

Prueba: Supongamos por contradicción que existe una sucesión de soluciones positivas (λ_n, u_n) de (3.1) para $\lambda_n \to \infty$. Por la Proposición 3.3 tenemos

$$\lambda_1 < \frac{\lambda_n}{a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u_n^p(x)dx\right)} < \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Por tanto, $a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p(x)dx\right) \to \infty$, lo que implica que $\int_\Omega q(x)u_n^p(x)dx \to \infty$. Entonces por (3.26),

$$g\left(\int_\Omega q(x)u_n^p(x)dx\right) > I,$$

que es una contradicción por la Proposición 3.12. ■

El siguiente resultado prueba que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ es acotada cuando (3.4) posee solución.

Proposición 3.14 *Si existe* $s^* > 0$ *tal que* $g(s^*) = I$, *entonces* $Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \subset (0, \Lambda^*)$ *para algún* $\Lambda^* < \infty$. *De hecho, si denotamos* $s_1 > 0$ *la menor solución de (3.22) y*

$$\Lambda_1 = \lambda_1^{\Omega_0}\left(\frac{s_1}{I}\right)^{1/p},$$

entonces, existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ *tal que* $|u_n|_\infty \to \infty$ *y* $\lambda_n \to \Lambda_1$.

Prueba: Definimos la aplicación continua

$$\mathcal{H} : \mathbb{R} \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(\lambda, u) = \int_\Omega q(x) u^p(x) dx.$$

Por tanto, como $\mathcal{C}$ es conexo, obtenemos que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$.

Supongamos por contradicción que existe una sucesión $(\lambda_n, u_{\lambda_n}) \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda_n \to +\infty$. Por la Proposición 3.3 sabemos que

$$\lambda_n < \lambda_1^{\Omega_0} a \left(\int_\Omega q(x) u_{\lambda_n}(x)^p dx \right),$$

entonces $a\left(\int_\Omega q(x) u_{\lambda_n}(x)^p(x) dx\right) \to \infty$. Concluimos que $\int_\Omega q(x) u^p_{\lambda_n}(x) dx \to +\infty$, lo que implica

$$\mathcal{H}(\lambda_n, u_{\lambda_n}) \to +\infty.$$

Por otro lado, $\mathcal{H}(a(0)\lambda_1, 0) = 0$, por tanto, podemos concluir que $[0, +\infty) \subset \mathcal{H}(\mathcal{C})$. Luego, existe λ^* tal que

$$s^* = \int_\Omega q(x) u^p_{\lambda^*}(x) dx.$$

Entonces, por la Proposición 3.12, tenemos que

$$g(s^*) = g\left(\int_\Omega q(x) u^p_{\lambda^*}(x) dx \right) < I,$$

contradicción.

Como $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ es conexo en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{H}(a(0)\lambda_1, 0) = 0$, por la Proposición 3.12 tenemos que

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) \subset [0, s_1). \tag{3.27}$$

Por otro lado, sabemos que existe una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_{\lambda_n}) \in \mathcal{C}$ de (3.1) tal que $\lambda_n \to \lambda_* < \infty$ y $|u_{\lambda_n}|_\infty \to \infty$. Además, obsérvese que por la prueba del Lema 3.12 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(\lambda_n, u_{\lambda_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega q(x) u^p_{\lambda_n}(x) dx = \lim_{n\to\infty} d_n^p \int_\Omega q(x) \theta^p_{[\lambda_n/d_n, b]} = \left(\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}} \right)^p I,$$

entonces por (3.27)

$$\left(\frac{\lambda_*}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I \leq s_1 = \left(\frac{\Lambda_1}{\lambda_1^{\Omega_0}}\right)^p I,$$

lo que implica que $\lambda_* = \Lambda_1$. ■

En el siguiente resultado mostramos la existencia de solución positiva entre $a(0)\lambda_1$ y Λ_1.

Teorema 3.15 *Sea $I < \infty$. Supongamos que existe $s_0 > 0$ solución de (3.22). Entonces, existe al menos una solución positiva de (3.1) para*

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}, \max\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}).$$

Además, existe sucesiones $(\lambda_n, u_{\lambda_n}), (\lambda'_n, u_{\lambda'_n}) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\lim_{\lambda_n \to a(0)\lambda_1} |u_{\lambda_n}|_\infty = 0, \quad \lim_{\lambda'_n \to \Lambda_1} |u_{\lambda'_n}|_\infty = \infty.$$

Prueba: Sabemos que existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado en $\mathbb{R} \times L^\infty(\Omega)$ de soluciones positivas que emana desde $(a(0)\lambda_1, 0)$. Por la Proposición 3.14 concluimos el resultado. ■

Ahora, necesitamos introducir y estudiar la siguiente aplicación.

Proposición 3.16 *Fijamos $\lambda > 0$ y definimos la función $h_\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por*

$$h_\lambda(s) := \int_\Omega q(x) \left(\theta_{[\lambda/a(s), b]}\right)^p. \tag{3.28}$$

La función h_λ está bien definida en el conjunto

$$\Lambda_\lambda = \left\{ s \in [0, \infty) : \frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} < a(s) < \frac{\lambda}{\lambda_1} \right\}.$$

Además, h_λ es continua en Λ_λ y

1. *Sean $s^n, s_n \in \Lambda_\lambda$ tal que $s^n \to s^*$ y $s_n \to s_* > 0$ tal que $a(s^*) = \dfrac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}}$ y $a(s_*) = \dfrac{\lambda}{\lambda_1}$. Entonces,*

   (a)

$$\lim_{s^n \to s^*} h_\lambda(s^n) = I. \tag{3.29}$$

(b)

$$\lim_{s_n \to s_*} h_\lambda(s_n) = 0. \tag{3.30}$$

2. Se tiene que

$$h_\lambda(s) \le I, \quad \forall s \in [0, \infty).$$

Prueba: h_λ está bien definida y es continua en Λ_λ debido al Teorema 1.7.

1. (a) De nuevo, gracias al Teorema 1.7, sigue que

$$\lim_{s^n \to s^*} h_\lambda(s^n) = \lim_{s^n \to s^*} \int_\Omega q(x) \left(\theta_{[\lambda/a(s^n), b]}\right)^p = \int_\Omega q(x) (\mathcal{M}(x))^p = I.$$

   (b) Análogamente,

$$\lim_{s_n \to s_*} h_\lambda(s_n) = \lim_{s_n \to s_*} \int_\Omega q(x) \left(\theta_{[\lambda/a(s_n), b]}\right)^p = 0.$$

2. Por la definición y el Teorema 1.7, tenemos

$$h_\lambda(s) = \int_\Omega q(x) \left(\theta_{[\lambda/a(s), b]}\right)^p \le \int_\Omega q(x) (\mathcal{M}(x))^p = I. \qquad \blacksquare$$

Observemos que el conjunto Λ_λ puede tener distintas formas dependiendo de la forma de a, ver Figura 3.1.

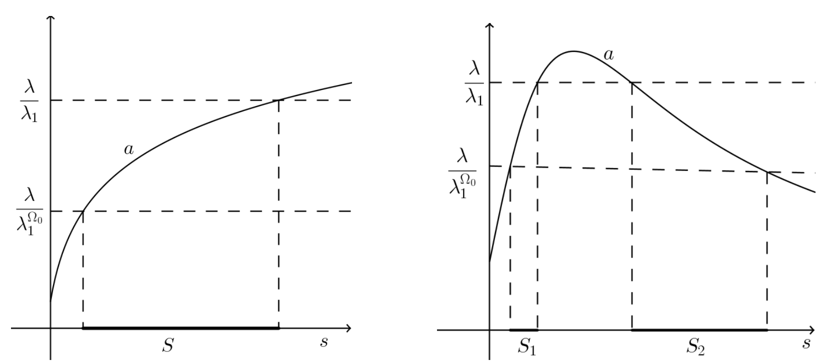

Figura 3.1: Dos ejemplos del conjunto Λ_λ: en el primero $\Lambda_\lambda = S$ y en el segundo $\Lambda_\lambda = S_1 \cup S_2$.

En el siguiente resultado mostramos que resolver la ecuación (3.1) es de hecho equivalente a encontrar punto fijo de la ecuación real $h_\lambda(s) = g(s)$. La prueba se basa en un argumento de punto fijo.

Proposición 3.17 *Si existe $s^* > 0$ tal que $h_\lambda(s^*) = g(s^*)$, entonces existe al menos una solución positiva de (3.1) para $\lambda \in (a(s^*)\lambda_1, a(s^*)\lambda_1^{\Omega_0})$.*

Recíprocamente, si u es una solución positiva de (3.1), entonces existe $s^* > 0$ tal que $h_\lambda(s^*) = g(s^*)$, de hecho,

$$s^* = \int_\Omega q(x)u^p(x)dx.$$

Prueba: Supongamos que existe $s^* > 0$ tal que $h_\lambda(s^*) = g(s^*)$. Por (3.23) y (3.28), obtenemos

$$\frac{s^*}{(a(s^*))^p} = g(s^*) = h_\lambda(s^*) = \int_\Omega q(x)\left(\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}\right)^p.$$

Por tanto,

$$s^* = (a(s^*))^p \int_\Omega q(x)\left(\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}\right)^p = \int_\Omega q(x)\left(a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}\right)^p. \tag{3.31}$$

Obsérvese que

$$u = a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}$$

es solución de (3.1). En efecto, utilizando (3.31)

$$\begin{aligned}
-a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u &= -a\left(\int_\Omega q(x)\left(a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}\right)^p\right)\Delta(a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}) \\
&= (a(s^*))^2\left(\frac{\lambda}{a(s^*)}\theta_{[\lambda/a(s^*),b]} - b(x)(\theta_{[\lambda/a(s^*),b]})^2\right) \\
&= \lambda(a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}) - b(x)\left(a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}\right)^2 \\
&= \lambda u - b(x)u^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $u = a(s^*)\theta_{[\lambda/a(s^*),b]}$ es solución, que es positiva de (3.1) si $\lambda \in (a(s^*)\lambda_1, a(s^*)\lambda_1^{\Omega_0})$.

Recíprocamente, supongamos que u es una solución positiva de (3.1). Entonces, denotando por $d = a(\int_\Omega q(x)u^p(x)dx)$, tenemos

$$\frac{u}{d} = \theta_{[\lambda/d,b]},$$

entonces,

$$\int_\Omega q(x)u^p(x)dx = d^p\int_\Omega q(x)\theta^p_{[\lambda/d,b]}.$$

Luego,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx}{\left(a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)\right)^p} = \int_\Omega q(x)\theta^p_{[\mu,b]},$$

con

$$\mu = \frac{\lambda}{a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p(x)dx\right)}.$$

Esto concluye el resultado. ■

En el siguiente resultado mostramos que si $g(s) < I$ entre dos soluciones de (3.4), $\alpha_1 < \alpha_2$, esto es $g(\alpha_1) = g(\alpha_2)$, entonces podemos encontrar solución en el intervalo $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

Proposición 3.18 *Si $g(s) < I$ para todo $s \in (\alpha_1, \alpha_2)$ con*

$$g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = I,$$

entonces, existe solución positiva de (3.1) para $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, donde $\Lambda_i = \left(\frac{\alpha_i}{I}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda_1^{\Omega_0}$, $i \in \{1, 2\}$.

Prueba: Como $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = I$, tenemos que

$$a(\alpha_1) = \left(\frac{\alpha_1}{I}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{\alpha_2}{I}\right)^{\frac{1}{p}} = a(\alpha_2). \tag{3.32}$$

Tomemos $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, es decir

$$\frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} \in \left(\left(\frac{\alpha_1}{I}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{\alpha_2}{I}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = (a(\alpha_1), a(\alpha_2)).$$

Por la continuidad de a, existe $s_* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ tal que

$$a(s_*) = \frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}}.$$

Obsérvese que $g(s) < I$ para todo $s \in (\alpha_1, \alpha_2)$ es equivalente a

$$\left(\frac{s}{I}\right)^{1/p} < a(s) \quad \text{para todo } s \in (\alpha_1, \alpha_2).$$

Definimos los conjuntos

$$\overline{S} := \left\{ \overline{s}_j \in [\alpha_1, \alpha_2];\ a(\overline{s}_j) = \frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} \right\} \qquad \text{y} \quad \underline{S} := \left\{ \underline{s}_j;\ a(\underline{s}_j) = \frac{\lambda}{\lambda_1} \right\}.$$

Como $a'(s) = 0$ en a lo más un conjunto discreto, podemos ordenar los conjuntos $\overline{S}$ y $\underline{S}$ tal que

$$\overline{s_1} < \overline{s_2} < \dots \quad \text{y} \quad \underline{s_1} < \underline{s_2} < \dots$$

Sabemos que $s_* \in \overline{S}$, y por tanto, $\overline{S} \neq \emptyset$.

Ahora, separamos la prueba en dos casos diferentes:

1. Supongamos $\underline{S} \cap [\alpha_1, \alpha_2] = \emptyset$. Entonces, tomamos $\overline{s}_{j_0} = \max_{j \in \mathbb{N}} \overline{s}_j \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Por definición,

$$a(\overline{s}_{j_0}) = \frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}}.$$

Como $\underline{S} \cap [\alpha_1, \alpha_2] = \emptyset$, $a(s) < \frac{\lambda}{\lambda_1}$ para todo $s \in [\alpha_1, \alpha_2]$ (ver Figura 3.2), luego existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} < a(s) < \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad s \in (\overline{s}_{j_0}, \alpha_2 + \delta). \tag{3.33}$$

Por la Proposición 3.16, obtenemos

$$\lim_{s \downarrow \overline{s}_{j_0}} h_\lambda(s) = I.$$

Por la Proposición 3.16, $h_\lambda(\alpha_2 + \delta) \leq I$ y $h_\lambda(\alpha_2) < I$. Entonces,

$$h_\lambda(\overline{s}_{j_0}) - g(\overline{s}_{j_0}) > 0 \quad \text{y} \quad h_\lambda(\alpha_2) - g(\alpha_2) < 0,$$

por tanto existe $s^* \in (\overline{s}_{j_0}, \alpha_2) \subset (\alpha_1, \alpha_2)$ such that

$$g(s^*) = h_\lambda(s^*).$$

Además, por (3.33) obsérvese que s^* es tal que $\lambda \in (\lambda_1 a(s^*), \lambda_1^{\Omega_0} a(s*))$. Luego, por la Proposición 3.17 existe al menos una solución positiva de (3.1).

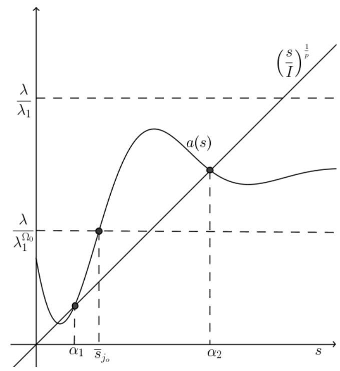

Figura 3.2: Ejemplo en el que $\lambda/\lambda_1 > a(s)$ para todo s.

2. Supongamos $\underline{S} \cap [\alpha_1, \alpha_2] \neq \emptyset$. Tomemos $\overline{s}_1 < \overline{s}_2$.

   (a) Si $\underline{S} \cap (\overline{s}_1, \overline{s}_2) \neq \emptyset$. Tomamos

   $$\underline{s}_{j_0} = \min\{\underline{S} \cap (\overline{s}_1, \overline{s}_2)\}.$$

   Consideramos ahora $[\overline{s}_1, \underline{s}_{j_0}]$. Es claro que

   $$\frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} < a(s) < \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \text{para todo } s \in [\overline{s}_1, \underline{s}_{j_0}].$$

   Entonces, por la Proposición 3.16, obtenemos

   $$\lim_{s \downarrow \overline{s}_1} h_\lambda(s) = I, \quad \text{y} \quad \lim_{s \to \underline{s}_{j_0}} h_\lambda(s) = 0.$$

   Además, $g(\underline{s}_{j_0}) > 0$ y $g(\overline{s}_1) < I$. Por tanto,

   $$h_\lambda(\overline{s}_1) - g(\overline{s}_1) > 0 \quad \text{y} \quad h_\lambda(\underline{s}_{j_0}) - g(\underline{s}_{j_0}) < 0,$$

   entonces, existe $s^* \in (\overline{s}_1, \underline{s}_{j_0}) \subset (\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ tal que $h_\lambda(s^*) = g(s^*)$. Luego, por la Proposición 3.17 existe al menos una solución positiva de (3.1).

   (b) Si $\underline{S} \cap (\overline{s}_1, \overline{s}_2) = \emptyset$. Entonces, tomamos $\overline{s}_2 < \overline{s}_3$. Si $\underline{S} \cap (\overline{s}_2, \overline{s}_3) \neq \emptyset$, entonces podemos repetir el razonamiento anterior. Si $\underline{S} \cap (\overline{s}_2, \overline{s}_3) = \emptyset$ consideramos $\overline{s}_3 < \overline{s_4}$. luego, podemos continuar este argumento hasta $\underline{S} \cap [\overline{s}_{m_0}, \overline{s}_{m_0+1}] \neq \emptyset$, para algun m_0.

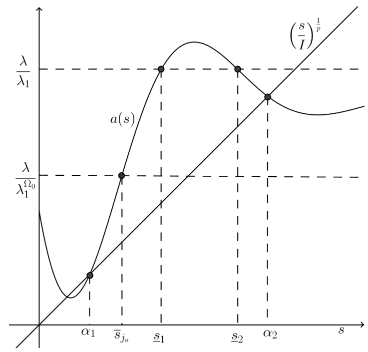

Figura 3.3: Ejemplo en el que $a(s)$ corta en dos puntos a λ/λ_1.

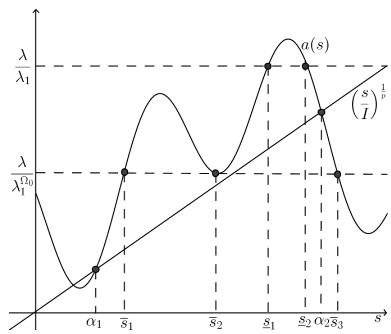

Figura 3.4: Ejemplo en el que la función a corta en varios puntos a λ/λ_1 y $\lambda/\lambda_1^{\Omega_0}$.

Esto completa la prueba. ■

Proposición 3.19 *Si $g(s) < I$ para todo $s \in (\alpha_1, +\infty)$ con*

$$g(\alpha_1) = I.$$

Entonces existe solución positiva de (3.1) para $\lambda \in (\Lambda_1, +\infty)$, donde

$$\Lambda_1 = \left(\frac{\alpha_1}{I}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Prueba: Tomemos $\lambda > \Lambda_1$, entonces $\dfrac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} > \left(\dfrac{\alpha_1}{I}\right)^{\frac{1}{p}} = a(\alpha_1)$. Como $g(s) < I$ para $s > \alpha_1$ sigue que $\lim\limits_{s\to\infty} a(s) = \infty$. Entonces, existe $s^*, s^{**} > \alpha_1$ tal que

$$\frac{\lambda}{\lambda_1^{\Omega_0}} = a(s^*) \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{\lambda_1} = a(s^{**}).$$

Ahora, el argumento usado en la Proposición anterior puede adaptarse a este caso. ■

Teorema 3.20 *Supongamos que b satisface (Hb_2), $I < \infty$ y existen $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$, $m \geq 1$, raíces de (3.22), $g(s) < I$ para todo $s \in (0, s_1)$ tal que*

$$g'(s_j) \neq 0, \tag{3.34}$$

y consideremos

$$\Lambda_i = \lambda_1^{\Omega_0} \left(\frac{s_i}{I} \right)^{1/p}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Entonces:

1. *Desde $\lambda = a(0)\lambda_1$ bifurca un continuo no acotado $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (3.1) desde la solución trivial y tiende al infinito en $\lambda = \Lambda_1$. Consecuentemente, existe al menos una solución positiva de (3.1) si*

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}, \max\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}).$$

2. *Si $m = 2k + 1$, $k \geq 0$, (3.1) posee al menos una solución positiva para*

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^{k} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}), \tag{3.35}$$

y (3.1) no posee solución positiva para λ grande.

3. *Si $m = 2k$, $k \geq 1$, (3.1) posee al menos una solución positiva para*

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^{k-1} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}) \cup (\Lambda_{2k}, \infty). \tag{3.36}$$

Además, si a es creciente entonces para cualquier Λ_{2j+1}, $j = 0, \ldots, k$, existe una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$ de (3.1) tal que $\lambda_n \to \Lambda_{2j+1}$ y

$$|u_{\lambda_n}|_\infty \to \infty.$$

Nota 3.21 *En (3.35), si $k = 0$, consideramos $\bigcup_{j=1}^{k} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}) = \emptyset$. Igualmente, en (3.36), si*

$k = 1$ *consideramos* $\bigcup_{j=1}^{k-1} (\Lambda_{2j}, \Lambda_{2j+1}) \cup (\Lambda_{2k}, \infty) = (\Lambda_2, \infty)$.

Nota 3.22 *La condición (3.34) no es necesaria para obtener la existencia de solución. Observando la prueba del resultado (ver Proposición 3.34), podemos garantizar la existencia de solución positiva siempre que* $g(s) < I$, $s \in (s_j, s_{j+1})$ *con* $g(s_j) = g(s_{j+1}) = I$.

Por tanto, si por ejemplo $g(s_j) = g(s_{j+1}) = g(s_{j+2}) = I$ *y* $g(s) < I$ *para* $s \in (s_j, s_{j+1}) \cup (s_{j+1}, s_{j+2})$, *podemos argumentar la existencia de solución positiva para*

$$\lambda \in (\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) \cup (\Lambda_{j+1}, \Lambda_{j+2}).$$

Para simplificar en el enunciado, hemos preferido suponer que la raíces de $g(s) = I$ *son simples.*

Prueba: 1. El primer apartado sigue del Teorema 3.15.

2. Supongamos ahora que $m = 2k + 1$. Entonces, $g(s_{2j}) = g(s_{2j+1})$ y $g(s) < I$ con $s \in (s_{2j}, s_{2j+1})$ para $j = 1, \ldots, k$. Entonces, podemos aplicar la Proposición 3.18 para $\alpha_1 = s_{2j}$ y $\alpha_2 = s_{2j+1}$. Además, según la Proposición 3.13, (3.1) no posee solución positiva para λ grande.

3. Cuando $m = 2k$, el resultado sigue de la Proposiciones 3.18 con $\alpha_1 = s_{2j}$, $\alpha_2 = s_{2j+1}$ y de la Proposición 3.19 con $\alpha_1 = s_{2k}$.

Finalmente, supongamos que a es creciente. Ahora, vamos mostrar que la bifurcación a infinito ocurre en Λ_{2j+1}. De hecho, tomemos $\lambda_n \uparrow \Lambda_{2j+1}$. Entonces,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1^{\Omega_0}} \uparrow a(s_{2j+1}).$$

Entonces, para cada n, tomamos el único $s_n < s_{2j+1}$ (recordamos que a es creciente) tal que

$$a(s_n) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1^{\Omega_0}}.$$

Es evidente que $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} > a(s_{2j+1})$ para n grande, entonces existe un único $s^n > s_{2j+1}$ tal que

$$a(s^n) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Luego, $g(s_n) - h_{\lambda_n}(s_n) < 0$ y $g(s^n) - h_{\lambda_n}(s^n) > 0$. Podemos concluir la existencia de $s_n^* \in (s_n, s^n)$

tal que

$$g(s_n^*) = h_{\lambda_n}(s_n),$$

y por la Proposición 3.17 existe una solución positiva. De hecho, la solución es

$$u_n = a(s_n^*)\theta_{[\lambda_n/a(s_n^*),b]}.$$

Sin embargo, obsérvese que cuando $\lambda_n \to \Lambda_{2j+1}$ entonces $s_n \to s_{2j+1}$, luego $s_n^* \to s_{2j+1}$. Así,

$$\frac{\lambda_n}{a(s_n^*)} \to \frac{\Lambda_{2j+1}}{a(s_{2j+1})} = \lambda_1^{\Omega_0}.$$

Esto finaliza la prueba. ■

Corolario 3.23 *Supongamos que a es una función decreciente. Entonces, existe al menos una solución positiva de (3.1) si*

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}, \max\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}).$$

Prueba: Como a es decreciente, entonces existe un único valor positivo $s_1 > 0$ tal que $a(s_1) = (\frac{s_1}{I})^{1/p}$. Por tanto, existe un único $s_1 > 0$ tal que

$$g(s_1) = I$$

y $g(s) > I$ para $s > s_1$. Luego, podemos aplicar la Proposición 3.13 y Teorema 3.15 y concluir que existe solución positiva para

$$\lambda \in (\min\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}, \max\{a(0)\lambda_1, \Lambda_1\}).$$

De hecho, el continuo $\mathcal{C}$ que emana desde la solución trivial en $\lambda = a(0)\lambda_1$ y tiende al infinito en $\lambda = \Lambda_1$. ■

Capítulo

4

Ecuación con coeficiente de difusión variable local y no-local

En este Capítulo presentaremos los resultados obtenidos en [33]. Estudiaremos la ecuación

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} a\left(\int_\Omega u^p\right)\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $D_1, D_2 \subset \Omega$ son dos subdominios regulares tales que

$$\overline{\Omega} = \overline{D_1 \cup D_2}, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

y como consequencia $\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ con Γ un conjunto de medida nula, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, $p > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, y donde hemos definido

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Para $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vamos considerar los casos f_1, f_2 y f_3 citados en la Introducción. Por último, definimos

$$\begin{aligned} A &: \Omega \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \\ A(x,u) &= \chi_{D_1} + \chi_{D_2} a\left(\int_\Omega u^p\right). \end{aligned}$$

La distribución del Capítulo es la siguiente. En las Secciones 4.1, 4.2 y 4.3 se analizan los casos $f = f_1$, $f = f_2$ y $f = f_3$, respectivamente.

4.1 Problema no-local de autovalores

En esta Sección estudiamos el problema de autovalor para la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -A(x,u)\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

La siguiente Proposición resulta del Principio del Máximo y muestra la no existencia de soluciones positivas para $\lambda \leq 0$.

Proposición 4.1 *Si $\lambda \leq 0$ entonces (4.2) no posee solución positiva.*

El siguiente resultado muestra que no existe solución positiva para λ grande.

Proposición 4.2 *Si u es solución positiva de (4.2), entonces $\lambda < \lambda_1^{D_1}$.*

Prueba: Si u es solución positiva de (4.2), entonces

$$\lambda = \lambda_1[-A(x,u)\Delta;1] < \lambda_1^{D_1}[-A(x,u)\Delta;1] = \lambda_1^{D_1}. \qquad \blacksquare$$

A continuación probaremos que el único punto de bifurcación de (4.2) desde la solución trivial ocurre para $\lambda = \lambda_0$, donde

$$\lambda_0 := \lambda_1[-A(x,0)\Delta;1] = \lambda_1[-(\chi_{D_1} + a(0)\chi_{D_2})\Delta;1]. \tag{4.3}$$

Lema 4.3 *Sea (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (4.2). Si $|u_n|_\infty \to 0$ entonces $\lambda_n \to \lambda_0$.*

Prueba: Por $|u_n|_\infty \to 0$, tenemos $\displaystyle\int_\Omega u_n^p \to 0$. Además, por la continuidad de la función a, tenemos

$$A(x,u_n) \to A(x,0) \text{ uniformemente en } \Omega.$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.1, tenemos

$$\lambda_n = \lambda_1[-A(x,u_n)\Delta;1] \to \lambda_1[-A(x,0)\Delta;1] = \lambda_0. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.4 *Existe un continuo no acotado $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas de (4.2) que bifurca desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$.*

Prueba: Obsérvese que (4.2) es equivalente a

$$u = T_\lambda(u) := \frac{\lambda}{A(x,0)}\mathcal{L}u + h(\lambda, u),$$

donde

$$h(\lambda, u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0, \\ \lambda\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right)u\right) & \text{si } u > 0, \end{cases}$$

y $u^+ = \max\{u, 0\}$. De hecho, obsérvese que u es una solución no negativa y no trivial de (4.8) si y sólo si $u = T_\lambda(u)$.

Por el Lema 2.8 y la continuidad de a, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|h(\lambda,u)|_\infty}{|u|_\infty} &\leq \left|\lambda\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right)u\right)\right|_\infty \frac{1}{|u|_\infty} \\ &\leq C\lambda\left|\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right| \to 0, \end{aligned}$$

cuando $|u|_\infty \to 0$. Podemos aplicar el Teorema de Rabinowitz (ver [47]) y concluir que existe un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas que emana desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$. Gracias al Lema 4.3 sigue que $\mathcal{C}$ es no acotada. ■

El siguiente resultado nos será muy útil para estudiar los posibles puntos de bifurcación a infinito.

Proposición 4.5 *Sea (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (4.2). Si $|u_n|_\infty \to \infty$, entonces*

$$\int_\Omega u_n^p \to \infty \text{ para todo } p > 0.$$

Prueba: Supongamos por contradicción que para alguna constante positiva $C > 0$ se tiene que $\int_\Omega u_n^p \leq C$. Entonces,

$$A(x, u_n) \leq C_1. \tag{4.4}$$

Definimos $v_n = \dfrac{u_n}{|u_n|_\infty}$, donde v_n es solución de

$$-\Delta v_n = \frac{\lambda_n}{A(x, u_n)} v_n \text{ en } \Omega, \quad v_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Por la Proposición 4.2, tenemos que $\lambda_n < \lambda_1^{D_1}$. Por tanto, por (4.4) podemos concluir que $|v_n|_{W^{2,q}} \leq C_2$ para todo $q > 1$. Luego, existe $v_* \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$v_n \to v_* \gneq 0 \text{ en } C^1(\overline{\Omega}).$$

Así,

$$\int_\Omega u_n^p = |u_n|_\infty^p \int_\Omega v_n^p \to \infty.$$

Contradicción. ■

El resultado principal de esta Sección es:

Teorema 4.6 *Sea $D_1 \neq \emptyset \neq D_2$. Entonces, existe $0 \leq \lambda_\infty < \infty$ tal que (4.2) posee al menos una solución positiva si*

$$\lambda \in (\min\{\lambda_0, \lambda_\infty\}, \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}).$$

Además,

$$\lambda_\infty = \begin{cases} \lambda_1[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1] & \text{si } 0 < a(\infty) < \infty, \\ \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}] & \text{si } a(\infty) = \infty, \\ 0 & \text{si } a(\infty) = 0. \end{cases}$$

Además, λ_0 y λ_∞, son puntos de bifurcación desde la solución trivial y del infinito, respectivamente.

Prueba: Por el Teorema 4.4, existe una componente conexa $\mathcal{C}$ no acotada de soluciones positivas de (4.2) que bifurca desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$. Por las Proposiciones 4.1 y 4.2, obtenemos

$$\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \subset [0, \lambda_1^{D_1}].$$

Por tanto, existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ de soluciones positivas de (4.2) con $\lambda_n < \lambda_1^{D_1}$ y existe $\lambda_* \in [0, \lambda_1^{D_1}]$ tal que $\lambda_n \to \lambda_* < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$.

Obsérvese que

$$\lambda_n = \lambda_1[-(\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2})\Delta; 1],$$

entonces, denotando

$$d_n = a\left(\int_\Omega u_n^p\right),$$

tenemos que

$$\lambda_n = g(d_n),$$

donde g está definida en (1.3).

Por la Proposición 4.5, tenemos que $\int_\Omega u_n^p \to \infty$, entonces $d_n \to a(\infty)$. El resultado sigue de la Proposición 1.3. ■

4.2 Problema no-local cóncavo

Estudiaremos el problema no-local

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} a\left(\int_\Omega u^p\right)\right)\Delta u = \lambda u^q & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

con $0 < q < 1$.

Consideramos que

$$a(s) > 0, \quad s \in [0, \infty). \tag{4.6}$$

Teorema 4.7 *$\lambda = 0$ es el único punto de bifurcación desde la solución trivial de (4.5). Además, existe un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (4.5) no acotado en $\mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$ que emana desde $(\lambda, u) = (0, 0)$.*

Prueba: Obsérvese que la ecuación (4.5) es un caso particular del problema (2.1) y por tanto el resultado sigue como en el Teorema 2.11. ■

Proposición 4.8 *Sea $\{(\lambda_n, u_n)\}$ una sucesión de soluciones positivas de (4.5), con $|\lambda_n| \le C$ para alguna constante positiva C. Si $|u_n| \to \infty$, entonces $\int_\Omega u_n^p \to \infty$.*

Prueba: Supongamos por contradicción que $\int_\Omega u_n^p \leq C_1$, para alguna constante positiva C_1. Por (4.6) existe $a_0 > 0$ tal que

$$a(s) \geq a_0 > 0, \quad \forall s \in [0, C_1].$$

Luego, tenemos que

$$-\Delta u_n = \lambda_n \left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \right) u_n^q \leq C \left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} \frac{1}{a_0} \right) u_n^q \leq C \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) u_n^q.$$

Luego u_n es subsolución de (1.6) con $\sigma = C\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)$ y $m \equiv 1$. Entonces, por la Proposición 1.6 y (1.7) sigue que

$$u_n \leq C_2 \left(1 + \frac{1}{a_0} \right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]} \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto, $|u_n|_\infty$ está acotada. Contradicción. ■

En los siguientes resultados obtenemos cotas inferiores de las soluciones positivas de (4.5).

Proposición 4.9 *Si u es solución positiva de (4.5), entonces*

$$\int_{D_1} u^p \geq \lambda^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_1} w_{[1,1]}^p.$$

Prueba: Tenemos que el problema (4.5) restringido en D_1 viene dado por

$$-\Delta u = \lambda u^q \quad \text{en } D_1, \quad u > 0 \quad \text{sobre } \partial D_1.$$

Luego u es supersolución de (1.6), con $\sigma = \lambda$, $m \equiv 1$ y $\Omega = D_1$, entonces

$$u \geq \lambda^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]} \quad \text{en } D_1.$$

Elevando a p y integrando en D_1 concluimos la demostración. ■

Proposición 4.10 *Si u es solución positiva de (4.5), entonces*

$$\int_{D_2} u^p \geq \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)} \right)^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_2} w_{[1,1]}^p.$$

Prueba: Tenemos que el problema (4.5) restringido en D_2 viene dado por

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)} u^q \quad \text{en } D_2, \quad u > 0 \quad \text{sobre } \partial D_2.$$

Luego u es supersolución de (1.6), con $\sigma = \dfrac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}$, $m \equiv 1$ y $\Omega = D_2$, entonces

$$u \geq \left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)} \right)^{\frac{1}{1-q}} w_{[1,1]} \quad \text{en } D_2.$$

Elevando a p y integrando en D_2 concluimos la demostración. ■

La siguiente Proposición prueba la no existencia de solución positiva para λ grande si $a(s)s^{\frac{1-q}{p}}$ está acotada.

Proposición 4.11 *Si*

$$\lim_{s\to\infty} a(s)s^{\frac{1-q}{p}} \leq C, \tag{4.7}$$

donde $C \geq 0$. Entonces no existe solución positiva de (4.5) para λ grande.

Prueba: Supongamos que existe (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (4.5), con $\lambda_n \to \infty$. Dividiremos la prueba en dos casos:

Caso 1: Supongamos $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Por las Proposiciones 4.9 y 4.10, tenemos que

$$\int_\Omega u_n^p \geq \lambda_n^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_1} w_{[1,1]}^p + \left(\frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \right)^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_2} w_{[1,1]}^p \geq \left(\frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \right)^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_2} w_{[1,1]}^p.$$

Esto implica
$$\lambda_n \left(\int_{D_2} w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}} \leq a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} \leq C.$$
Contradicción, pues $\lambda_n \to \infty$.

Caso 2: Supongamos $\int_\Omega u_n^p \leq C$, luego $a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \leq a_C = sup_{s\in[0,C]}a(s)$, entonces

$$-\Delta u_n = \lambda_n \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)}\chi_{D_2}\right)u_n^q \geq \lambda_n\left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a_C}\chi_{D_2}\right)u_n^q > \frac{\lambda_n}{a_C}u_n^q.$$

Por tanto, u_n es supersolución de (1.6) con $\sigma = \frac{\lambda_n}{a_C}$ y $m \equiv 1$. Luego

$$u_n \geq \left(\frac{\lambda_n}{a_C}\right) w_{[1,1]}.$$

Para $\lambda_n \to \infty$, obtenemos $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Contradicción. ■

Nota 4.12 *Notemos que la Proposición 4.11 sigue siendo cierta si sólo consideramos*

$$a(s)s^{\frac{1-q}{p}} \leq C \quad \forall s \geq s_0 > 0.$$

Nuestro primer resultado en este caso es:

Proposición 4.13 *Si*

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = \infty \quad \text{uniformemente en } \Omega. \tag{A_∞}$$

entonces existe solución positiva de (4.5) para $\lambda > 0$.

Prueba: Por el Teorema 4.7 existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado en $\mathbb{R}\times L^\infty(\Omega)$ de soluciones positivas de (4.5) que emana desde $(\lambda, u) = (0,0)$. Supongamos que existe $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ una sucesión de soluciones positivas de (4.5), con $|u_n|_\infty \to \infty$ y $\lambda_n \to \overline{\lambda} \geq 0$ con $\overline{\lambda} < \infty$.

Obsérvese que gracias a (A_∞), obtenemos que

$$\lim_{s\to\infty} A(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = \infty, \quad \text{uniformemente en } \Omega.$$

Luego, para todo $M > 0$, existe $s_0 >$ tal que

$$A(x,s) \geq \frac{M}{s^{\frac{1-q}{p}}}, \quad \forall s \geq s_0.$$

Por tanto,

$$-\Delta u_n \leq \frac{\overline{\lambda}+\epsilon}{M}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} u_n^q.$$

Luego u_n es subsolución de (1.6) con $\sigma = \dfrac{\overline{\lambda}+\epsilon}{M}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}$ y $m \equiv 1$. Por lo tanto, tenemos

$$u_n \leq \left(\frac{\overline{\lambda}+\epsilon}{M}\right)^{\frac{p}{1-q}} \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} w_{[1,1]}.$$

Lo que implica

$$1 \leq \left(\frac{\overline{\lambda}+\epsilon}{M}\right)^{\frac{p}{1-q}} \int_\Omega w_{[1,1]}^p.$$

Contradicción para M suficientemente grande. ■

El siguiente resultado es el principal en esta Sección.

Teorema 4.14 *i) Si a satisface (A_∞), entonces existe solución positiva de (4.5) para todo $\lambda > 0$.*

ii) Si a satisface (A_c), esto es,

$$\lim_{s\to\infty} a(x,s)s^{\frac{1-q}{p}} = c(x) \quad \textit{uniformemente en } \Omega. \tag{A_c}$$

entonces existen $0 \leq \lambda_* \leq \lambda_{**} \leq \lambda_{***} < \infty$, $\lambda_{**} > 0$ tales que

- *si $\lambda > \lambda_{***}$, entonces no existe solución positiva de (4.5),*
- *si $\lambda < \lambda_{**}$, entonces existe al menos una solución positiva, denotada por u_λ, de (4.5).*

Además, tenemos $|u_\lambda|_\infty \to \infty$ para $\lambda \to \lambda_*$.

Por otro lado,

- *Si $c(x) \geq c_0 > 0$ para alguna constante positiva c_0, entonces $\lambda_* > 0$.*
- *Si $c \equiv 0$ en Ω, entonces $\lambda_* = 0$.*

Prueba: Por el Teorema 4.7 existe un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (4.5) que bifurca desde $(\lambda, u) = (0, 0)$.

i) Supongamos que a satisface (A_∞). Debido a la Proposición 4.13 existe solución positiva de (4.5) para todo $\lambda > 0$.

ii) Por la Proposición 4.11 existe $\lambda_{***} > 0$ tal que no existe solución positiva de (4.5) para $\lambda > \lambda_{***}$. Por tanto, existe $\lambda_{**} > 0$ tal que existe solución positiva de (4.5) para $0 < \lambda < \lambda_{**}$. Además, debido a que $\mathcal{C}$ es no acotado y $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ está acotada, existe $\lambda_* > 0$, con $\lambda_* \leq \lambda_{**}$, y una sucesión de soluciones positivas $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ tales que $\lambda_n \to \lambda_*$ y

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|_\infty = \infty.$$

Supongamos que $c(x) \geq c_0 > 0$ y $\lambda_* = 0$. Luego, existe una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones positivas de (4.5) tal que $\lambda_n \to 0$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Por la Proposición 4.8, tenemos que $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Entonces, para $n \geq n_0$ tenemos que

$$a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \geq \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{q-1}{p}} \frac{c_0}{2}.$$

Por tanto, tenemos

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n}{\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2}} u_n^q \leq \lambda_n \left(1 + \frac{2}{c_0}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}\right) u_n^q,$$

luego, u_n es subsolución de (1.6), con $\sigma = \lambda_n \left(1 + \frac{2}{c_0}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}\right)$ y $m \equiv 1$, y concluimos

$$u_n \leq \lambda_n^{1/(1-q)} \left(1 + \frac{2}{c_0}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}\right)^{1/(1-q)} w_{[1,1]}.$$

Elevando a p e integrando sobre Ω, obtenemos

$$\frac{\int_\Omega u_n^p}{\left(1 + \frac{2}{c_0}\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}}\right)^{p/(1-q)}} \leq \lambda_n^{p/(1-q)} \int_\Omega w_{[1,1]}^p,$$

lo que es un absurdo si $\lambda_n \to 0$.

Ahora, asumimos que $c \equiv 0$. Supongamos por contradicción que $\lambda_* > 0$. Por la Proposición 4.10, tenemos

$$\int_\Omega u_n^p \geq \left(\frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \right)^{\frac{p}{1-q}} \int_{D_2} w_{[1,1]}^p,$$

entonces,

$$0 \leftarrow \left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \geq \lambda_n \left(\int_{D_2} w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}} \to \lambda^* \left(\int_{D_2} w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}} > 0.$$

Contradicción. ■

4.3 Problema no-local logístico

En esta Sección estudiamos la siguiente ecuación logística

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + \chi_{D_2} a\left(\int_\Omega u^p\right)\right) \Delta u = \lambda u - b(x)u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde $b(x)$ es una función que verifica (Hb_2).

4.3.1 Caso local

Primeramente haremos un estudio del problema

$$\begin{cases} -\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right) \Delta u = \lambda u - b(x)u^2 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Obsérvese que este problema no está incluido en la ecuación (1.10) estudiada en el Capítulo 1, ya que incluye una función en el coeficiente de difusión.

El resultado siguiente prueba la existencia y unicidad de solución positiva de (4.9) y sus propiedades.

Proposición 4.15 *Existe una única solución positiva de (4.9), denotada por* $\theta_{[\lambda,d]}$, *si y soló si*

$$\lambda \in (g(d), g_0(d)).$$

Además, la aplicación $\lambda \in (g(d), g_0(d)) \mapsto \theta_{[\lambda,d]} \in C_0^1(\overline{\Omega})$ *es continua, creciente y diferenciable. Además,*

$$\lim_{\lambda \downarrow g(d)} |\theta_{[\lambda,d]}|_\infty = 0, \qquad \lim_{\lambda \uparrow g_0(d)} |\theta_{[\lambda,d]}|_\infty = \infty.$$

Además, si $\Omega_0 \subset\subset D_1$ *y fijamos* $\overline{\lambda} < g_0(d)$, *entonces existen una constante positiva* $K(\overline{\lambda})$ *y una función positiva* φ *(independiente de* d*), tales que*

$$\theta_{[\lambda,d]} \leq K(\overline{\lambda})\varphi, \qquad \textit{para todo } \lambda \leq \overline{\lambda}.$$

Prueba: ($\Rightarrow$) Sea u solución positiva de (4.9), entonces

$$\begin{aligned} g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}\left[-\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta; 1\right] &> \lambda = \lambda_1\left[-\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta + b(x)u; 1\right] \\ &> \lambda_1\left[-\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta; 1\right] = g(d). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Sea $\lambda > g(d)$ y φ_d autofunción positiva asociada a $g(d)$ con $|\varphi_d|_\infty = 1$. Tomamos como subsolución $\underline{u} = \epsilon\varphi_d$, con ϵ pequeño a elegir. Obsérvese que

$$-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\underline{u} \leq \lambda\underline{u} - b(x)\underline{u}^2 \Leftrightarrow g(d)\varphi_d \leq \lambda\varphi_d - b(x)\varphi_d^2 \Leftrightarrow \epsilon \leq \frac{\lambda - g(d)}{\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} b(x)}. \tag{4.10}$$

Como $\lambda > g(d)$, podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que (4.10) ocurra.

Sea $\lambda < g_0(d)$. Por la continuidad del autovalor principal con respecto al dominio (ver Proposición 1.1), existe $\delta > 0$ pequeño tal que $\Omega_0 \subset \Omega_\delta$ y $\lambda < g_\delta(d) < g_0(d)$, donde definimos

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \Omega_0) < \delta\}, \quad g_\delta(d) := \lambda_1^{\Omega_\delta}[-\left(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}\right)\Delta; 1].$$

También definimos $\varphi_1^{\Omega_\delta}$ como una autofunción positiva asociada a $g_\delta(d)$.

Ahora, sea $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ definida

$$\psi = \begin{cases} \varphi_1^{\Omega_\delta} & \text{en } \Omega_{\frac{\delta}{2}}, \\ \phi & \text{en } \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}, \\ 1 & \text{en } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \end{cases}$$

donde ϕ es una función regular tal que $\phi \geq \phi_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ para alguna constante $\phi_0 > 0$. Tomamos como supersolución $\overline{u} = K\psi$ con $K > 0$, donde K se elegirá depués. Veamos que $\overline{u}$ es supersolución de (4.9). Distinguiremos tres situaciones:

1. Si $x \in \Omega_{\frac{\delta}{2}}$: Tenemos

$$-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\overline{u} \geq \lambda\overline{u} - b(x)\overline{u}^2 \Leftrightarrow g_\delta(d) - \lambda \geq -b(x)K\varphi_d^{\Omega_\delta}. \tag{4.11}$$

   La desigualdad (4.11) es verdadera para todo $K > 0$, debido a que $\lambda < g_\delta(d)$.

2. Si $x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}$: Tenemos

$$-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\overline{u} \geq \lambda\overline{u} - b(x)\overline{u}^2 \Leftrightarrow K \geq \frac{\max\limits_{x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}} [\lambda\phi + (\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\phi]}{\min\limits_{x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}} (b(x)\phi^2)}. \tag{4.12}$$

3. Si $x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta$: Tenemos

$$-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\overline{u} \geq \lambda\overline{u} - b(x)\overline{u}^2 \Leftrightarrow 0 \geq \lambda - b(x)K \Leftrightarrow K \geq \frac{\lambda}{\min\limits_{x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta} b(x)}. \tag{4.13}$$

   Entonces, tomamos K suficientemente grande que verifique (4.12) y (4.13). Tomando ϵ pequeño y K grande tales que $\underline{u} \leq \overline{u}$ en Ω. Así, obtenemos la existencia de solución positiva para (4.9).

Las propiedades de la aplicación $\lambda \mapsto \theta_{[\lambda,d]}$ siguen del Teorema 2.4 en [43].

La unicidad es debido a que la función

$$t \mapsto \frac{\lambda - b(x)t}{\chi_{D_1} + d\chi_{D_2}}$$

es decreciente para todo $x \in \Omega$ y estrictamente decreciente en $\Omega \backslash \Omega_0$, entonces por [10] tenemos la unicidad de solución positiva de (4.9).

Supongamos ahora que $\Omega_0 \subset\subset D_1$ y $\overline{\lambda} < g_0(d)$, entonces podemos tomar $\delta > 0$ pequeño tal que

$$\Omega_0 \subset \Omega_\delta \subset D_1, \quad \overline{\lambda} < g_\delta(d),$$

luego

$$g_\delta(d) = \lambda_1^{\Omega_\delta}[-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta; 1] = \lambda_1^{\Omega_\delta}.$$

Por tanto, $\varphi_1^{\Omega_\delta}$ es independiente de d. Además, si $\lambda \leq \overline{\lambda}$, la constante K que verifica (4.12) y (4.13) debe verificar

$$K \geq \frac{\max\limits_{x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}} \left[\overline{\lambda}\phi + \chi_{D_1}\Delta\phi\right]}{\min\limits_{x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}} (b(x)\phi^2)},$$

y

$$K \geq \frac{\overline{\lambda}}{\min\limits_{x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta} b(x)},$$

donde K es independiente de d y λ. ■

En el siguiente resultado estudiamos el comportamiento de $\theta_{[\lambda,d]}$ para d grande.

Proposición 4.16 *1. Supongamos que $\lambda < \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$, entonces existe $d(\lambda) > 0$ tal que*

$$\theta_{[\lambda,d]} \equiv 0 \quad \textit{en } \Omega, \textit{ para todo } d \geq d(\lambda).$$

2. *Supongamos que $\lambda \in \mathcal{K} \subset [\lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}], \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}])$, $\mathcal{K}$ un conjunto compacto. Entonces, existe dos constantes positivas C y $d(\mathcal{K})$ tales que*

$$|\theta_{[\lambda,d]}|_\infty \leq C \quad \textit{para todo } d \geq d(\mathcal{K}).$$

3. *Supongamos que $\lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}] < \lambda$. Entonces,*

$$\lim_{d \to \infty} |\theta_{[\lambda,d]}|_\infty = \infty.$$

Prueba:

1. Sea $\lambda < \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$. Por la Proposición 1.3 sabemos que $g(d) \to \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$ cuando $d \to \infty$, y por tanto existe $d(\lambda) > 0$ tal que

$$\lambda < g(d) \quad \text{para } d > d(\lambda).$$

   Concluimos que $\theta_{[\lambda,d]} \equiv 0$ en Ω por la Proposición 4.15.

2. Tomamos $\lambda \in \mathcal{K} \subset [\lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}], \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}])$ entonces $\lambda < \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$. Definimos el conjunto

$$\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N; dist(x, \Omega_0 \cup D_2)\} < \delta,$$

   y tomamos δ pequeño, tal que $\lambda < \lambda_1^{\Omega_\delta}[-\Delta; \chi_{D_1}]$, o equivalentemente,

$$\mu_\delta(\lambda) := \lambda_1^{\Omega_\delta}[-\Delta - \lambda\chi_{D_1}; 1] > 0. \tag{4.14}$$

   Tomamos φ_1^δ una autofunción positiva asociada a $\mu_\delta(\lambda)$ con $|\varphi_1^\delta|_\infty = 1$ y escogemos ϕ una función regular tal que $\phi \geq \phi_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ y tal que la función ψ definida por

$$\psi = \begin{cases} \varphi_1^\delta & \text{en } \Omega_{\frac{\delta}{2}}, \\ \phi & \text{en } \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}, \\ 1 & \text{en } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \end{cases}$$

   sea también una función regular.

   Tomamos como supersolución $\overline{u} = K\psi$ con $K > 0$ que escogeremos posteriormente. Veamos que $\overline{u}$ es una supersolución de (4.9) para K grande. En efecto, de nuevo dividiremos nuestra prueba en tres casos:

   (a) Si $x \in \Omega_{\frac{\delta}{2}}$: En este caso, $\overline{u}$ es una supersolución de (4.9) si

$$(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})(\mu_\delta(\lambda) + \lambda\chi_{D_1}) \geq \lambda - b(x)K\varphi_1^\delta \quad \text{en } \Omega_{\frac{\delta}{2}}.$$

Esta desigualdad es equivalente en D_1 a

$$\mu_\delta(\lambda) \geq -b(x)K\varphi_1^\delta, \tag{4.15}$$

lo que es verdad para todo K debido a (4.14). Por otro lado, en D_2 es suficiente que

$$d\mu_\delta(\lambda) \geq \lambda, \tag{4.16}$$

o equivalentemente

$$d \geq \frac{\lambda}{\mu_\delta(\lambda)}.$$

Obsérvese que para $\lambda \in \mathcal{K}$, existe $d = d(\mathcal{K})$ tal que

$$\max_{\lambda\in\mathcal{K}} \frac{\lambda}{\mu_\delta(\lambda)} = d(\mathcal{K}).$$

Por tanto, tomando $d \geq d(\mathcal{K})$ obtenemos que $\overline{u}$ es supersolución en $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ para cualquier $K > 0$.

(b) Si $x \in \Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}$: tenemos

$$-(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})\Delta\phi \geq \lambda\phi - Kb(x)\phi^2. \tag{4.17}$$

Por construcción, $\Omega_\delta \backslash \overline{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \subset D_1$, por tanto (4.17) es satisfecha si

$$Kb(x)\phi^2 \geq \lambda\phi + \Delta\phi,$$

que se verifica para K grande, independiente de d.

(c) Si $x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta$: $\overline{u}$ es supersolución si

$$K \geq \frac{\lambda}{\min\limits_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta} b(x)},$$

de nuevo para una constante K independiente de d.

Esto completa la prueba del apartado.

3. Ahora, tomamos $\lambda > \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$. Vamos construir una subsolución de (4.9) que tiende al infinito cuando $d \to \infty$. Como $\lambda > \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$ tenemos que

$$\mu(\lambda) = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta - \lambda \chi_{D_1}; 1] < 0.$$

Denotamos por φ_1 una autofunción positiva asociada a $\mu(\lambda)$ tal que $|\varphi_1|_\infty = 1$. Definimos

$$\psi := \begin{cases} \varphi_1 & \text{en } \Omega_0 \cup D_2, \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus (\Omega_0 \cup D_2). \end{cases}$$

Obsérvese que $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, $\underline{u} := \epsilon \psi$ es subsolución de (4.9) si

$$(\chi_{D_1} + d\chi_{D_2})(\mu(\lambda) + \lambda \chi_{D_1}) + b(x)\epsilon\varphi_1 \leq \lambda \quad \text{en } \Omega_0 \cup D_2.$$

En D_2, es suficiente que

$$\epsilon = \frac{\lambda - d\mu(\lambda)}{b_M},$$

donde $b_M = \sup_{x \in D_2} b(x)$.

Por otro lado, en $\Omega_0 \setminus D_2$, es suficiente que $\mu(\lambda) \leq 0$, lo cual es verdad para cualquier $\epsilon > 0$. Entonces,

$$\epsilon\psi \leq \theta_{[\lambda,d]} \quad \text{en } \Omega,$$

en particular,

$$\frac{\lambda - d\mu(\lambda)}{b_M}\varphi_1 \leq \theta_{[\lambda,d]} \quad \text{en } \Omega_0 \cup D_2, \tag{4.18}$$

por tanto $|\theta_{[\lambda,d]}|_\infty \to \infty$ con $d \to \infty$. ■

Este resultado es verdadero para el caso $\Omega = \Omega_0 \cup D_2$. En este caso, el resultado es:

Corolario 4.17 *Supongamos que $\Omega = \Omega_0 \cup D_2$. Entonces,*

1. *Si $\lambda < \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$ existe $d(\lambda) > 0$ tal que $\theta_{[\lambda,d]} \equiv 0$ en Ω para $d \geq d(\lambda)$.*

2. *Si $\lambda > \lambda_1[-\Delta; \chi_{D_1}]$ tenemos que $|\theta_{[\lambda,d]}|_\infty \to \infty$ con $d \to \infty$.*

4.3.2 Caso no-local

Ahora, fijemos nuestra atención nuevamente en la ecuación (4.8).

El siguiente resultado prueba la no existencia de solución positiva para λ grande.

Proposición 4.18 *Si existe una solución positiva* (λ, u) *de (4.8), entonces*

$$\lambda < \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}] \quad y \quad \lambda < \lambda_1^{\Omega_0}\left[-(\chi_{D_1} + a_M \chi_{D_2})\Delta; 1\right],$$

donde $a_M := \sup_{s\in[0,\infty)} a(s)$.

Prueba: Sea u solución positiva de (4.8), entonces

$$\lambda = \lambda_1[-A(x,u)\Delta + b(x)u; 1] < \lambda_1^{\Omega_0}[-A(x,u)\Delta; 1] = g_0\left(\int_\Omega u^p\right) < \lim_{d\to\infty} g_0(d) = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

Por otro lado,

$$\lambda = \lambda_1\left[-\left(\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u^p\right)\chi_{D_2}\right)\Delta + b(x)u; 1\right] < \lambda_1^{\Omega_0}\left[-(\chi_{D_1} + a_M\chi_{D_2})\Delta; 1\right]. \qquad \blacksquare$$

Nota 4.19 *Obsérvese que* $\lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}] = \infty$ *si* $\Omega_0 \subset D_2$. *Por otro lado, si* $a(\infty) = \infty$, *entonces* $a_M = \infty$. *Luego, por la Proposición 1.4 tenemos que* $\lambda_1^{\Omega_0}\left[-(\chi_{D_1} + a_M\chi_{D_2})\Delta; 1\right] = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}]$.

El siguiente resultado muestra que el único punto de bifurcación de (4.8) desde la solución trivial es λ_0 (definido en (4.3)).

Lema 4.20 *Sea* (λ_n, u_n) *una sucesión de soluciones positivas de (4.8). Si* $|u_n|_\infty \to 0$, *entonces* $\lambda_n \to \lambda_0$.

Prueba: Por $|u_n|_\infty \to 0$, tenemos $\int_\Omega u_n^p \to 0$. Por la continuidad de la función a, obtenemos

$$A(x, u_n) \to A(x, 0) \text{ uniformemente en } \Omega.$$

Por tanto, por la continuidad del autovalor principal (ver Proposición 1.1), tenemos

$$\lambda_n = \lambda_1[A(x,u_n)\Delta + b(x)u_n; 1] \to \lambda_0. \qquad \blacksquare$$

Con una prueba similar al del Teorema 3.1 sigue el siguiente resultado.

Teorema 4.21 *Existe un continuo no acotado $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas de (4.8) que bifurca desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$.*

Prueba: Obsérvese que (4.8) es equivalente a

$$u = T_\lambda(u) := \frac{\lambda}{A(x,0)}\mathcal{L}u + h(\lambda, u),$$

donde

$$h(\lambda, u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0, \\ \lambda\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right)u^+\right) - \mathcal{L}\left(\frac{b(x)}{A(x,u^+)}u^2\right) & \text{si } u > 0, \end{cases}$$

y $u^+ = \max\{u, 0\}$. De hecho, obsérvese que u es una solución no negativa y no trivial de (4.8) si y sólo si $u = T_\lambda(u)$.

Por el Lema 2.8 y la continuidad de a, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|h(\lambda,u)|_\infty}{|u|_\infty} &\leq \left|\lambda\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right)u^+\right)\right|_\infty \frac{1}{|u|_\infty} + \left|\mathcal{L}\left(\frac{b(x)}{A(x,u^+)}u^2\right)\right|_\infty \frac{1}{|u|_\infty} \\ &\leq C\left(\lambda\left|\frac{1}{A(x,u^+)} - \frac{1}{A(x,0)}\right| + \frac{|b(x)|_\infty}{|A(x,u^+)|}|u|_\infty\right) \to 0, \end{aligned}$$

cuando $|u|_\infty \to 0$. Podemos aplicar el Teorema de Rabinowitz (ver [47]) y concluir que existe una componente conexa de soluciones positivas que emana desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$ que, gracias al Lema 4.20, es no acotada. ■

El siguiente resultado será usado para el estudio de los puntos de bifurcación a infinito.

Lema 4.22 *Sea $p > 1$. Si existe (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (4.8), tales que $|u_n|_\infty \to \infty$ y $\lambda_n \to \lambda^* < \infty$, entonces*

$$\int_\Omega u_n^p \to \infty.$$

Prueba: Supongamos que

$$\int_\Omega u_n^p < \infty, \tag{4.19}$$

por tanto, $A(x,u_n)$ es acotada. Multiplicamos (4.8) por u_n^{p-1} y obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_n^{p-1} = \int_\Omega \frac{\lambda u_n^p - b(x)u_n^{p+1}}{\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2}}.$$

Luego,

$$C(p)\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{p}{2}}|^2 = \int_\Omega \frac{\lambda u_n^p - b(x)u_n^{p+1}}{\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2}} \leq \lambda_n \int_\Omega \frac{u_n^p}{\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2}}.$$

donde

$$C(p) = \frac{4(p-1)}{p^2}.$$

Por (4.19), tenemos

$$u_n^{\frac{p}{2}} \text{ es acotado en } H_0^1(\Omega).$$

Por inyección continua, tenemos que

$$u_n \text{ es acotado en } L^{\frac{2^* p}{2}}(\Omega) = L^{t_1}(\Omega),$$

donde

$$t_1 = \frac{N}{N-2}p.$$

Ahora, multiplicamos (4.1) por $u_n^{t_1-1}$ y entonces tenemos que

$$C(t_1)\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{t_1}{2}}|^2 \leq C\int_\Omega u_n^{t_1},$$

donde $C(t_1)$ y C son constantes positivas y por tanto, $u_n^{\frac{t_1}{2}}$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$. Por inyección continua, tenemos que

$$u_n \quad \text{es acotado en } L^{t_2}(\Omega),$$

con

$$t_2 = \left(\frac{N}{N-2}\right)^2 p.$$

Repitiendo este argumento k veces, obtenemos

$$u_n \quad \text{es acotado en } L^{t_k}(\Omega),$$

con

$$t_k = \left(\frac{N}{N-2}\right)^k p.$$

Luego,

$$u_n^2 \quad \text{es acotado en } L^{\frac{t_k}{2}}(\Omega),$$

por tanto,

$$\frac{\lambda_n u_n - b(x)u_n^2}{\chi_{D_1} + a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\chi_{D_2}}, \qquad \text{es acotado en } L^{\frac{t_k}{2}}(\Omega),$$

por regularidad elíptica, tenemos que

$$u_n \in W^{2,\frac{t_k}{2}}(\Omega).$$

Tomamos k grande tal que $t_k/2 > N/2$, que es,

$$\left(\frac{N}{N-2}\right)^k > \frac{N}{p},$$

tenemos que $|u_n|_\infty \leq C$, contradicción. ■

En el siguiente resultado caracterizamos el punto de bifurcación a infinito en diferentes situaciones. En la prueba se emplean argumentos similares a los usados en [4].

Lema 4.23 *Sea $a(\infty) > 0$ y $p > 1$. Supongamos que existe una sucesión de soluciones positivas (λ_n, u_n) de (4.8), tal que $|u_n|_\infty \to \infty$ y $\lambda_n \to \lambda^* < \infty$.*

1. Si $a(\infty) < \infty$, entonces

$$\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0}[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1].$$

2. Si $\Omega\backslash\Omega_0 \subset D_1$ *y* $a(\infty) = \infty$*, entonces*

$$\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

3. Si $p \geq 2$*,* $a(\infty) = \infty$*, y existe constantes positivas* C *y* s_0 *tales que*

$$\frac{a(s)}{s^{1/p}} \geq C \quad \textit{para todo } s \geq s_0 > 0,$$

entonces

$$\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

Prueba: Por el Lema 4.22 tenemos que $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Por la continuidad de la función a, tenemos

$$a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \to a(\infty).$$

Por un argumento similar al Lema 4.22, tenemos

$$\int_\Omega u_n^2 \to \infty.$$

Definimos

$$z_n = \frac{u_n}{|u_n|_2}.$$

Multiplicamos (4.8) por z_n y como $a(\infty) > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla z_n|^2 &= \lambda_n \int_\Omega \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)}\chi_{D_2}\right) z_n^2 - \int_\Omega b(x) \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)}\chi_{D_2}\right) z_n^3 |u_n|_2 \\
&\leq \lambda_n \int_\Omega \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)}\chi_{D_2}\right) z_n^2 \leq C \int_\Omega z_n^2 = C.
\end{aligned}$$

Por tanto, existe $z \in H_0^1(\Omega)$, $z \geq 0$ y $z \not\equiv 0$ tal que

$$\begin{aligned} z_n &\rightharpoonup z \quad \text{en } H_0^1(\Omega), \\ z_n &\to z \quad \text{en } L^s(\Omega), \forall s \in \left[1, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right). \end{aligned}$$

Supongamos 1. ó 2., y afirmamos que

$$z \equiv 0 \quad \text{en } \Omega \backslash \Omega_0. \tag{4.20}$$

Supongamos por contradicción que existe $D \subset \Omega \backslash \Omega_0$ tal que $z > 0$ en D. Tomemos $\varphi \in C_0^\infty(D)$, entonces

$$\int_D \nabla z_n \cdot \nabla \varphi = \lambda_n \int_D \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \chi_{D_2} \right) z_n \varphi - \int_D b(x) \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \chi_{D_2} \right) z_n^2 \varphi |u_n|_2.$$

Obsérvese que como $z > 0$ en D tenemos que $u_n(x) = z_n(x)|u_n|_2 \to \infty$, por tanto si $a(\infty) < \infty$, tenemos

$$\int_D b(x) \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \chi_{D_2} \right) z_n^2 \varphi |u_n|_2 \to \infty.$$

Por otro lado, si $\Omega \backslash \Omega_0 \subset D_1$, tenemos que $D \subset D_1$, por tanto

$$\int_D b(x) \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \chi_{D_2} \right) z_n^2 \varphi |u_n|_2 > \int_D b(x) \chi_{D_1} z_n^2 \varphi |u_n|_2 \to \infty.$$

Entonces, en ambos casos

$$\int_D \nabla z_n \cdot \nabla \varphi \to -\infty,$$

lo que es una contradicción. Esto implica $z \in H_0^1(\Omega_0)$. Por tanto, obtenemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla z_n \cdot \nabla \varphi = \lambda_n \int_{\Omega_0} \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \chi_{D_2} \right) z_n \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_0). \tag{4.21}$$

Cuando $a(\infty) < \infty$, tomando el límite en (4.21), obtenemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla z \cdot \nabla \varphi = \lambda^* \int_{\Omega_0} \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a(\infty)} \chi_{D_2} \right) z\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_0).$$

Implicando que

$$\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0} \left[-\left(\chi_{D_1} + a(\infty) \chi_{D_2} \right) \Delta; 1 \right].$$

Por otro lado, si $a(\infty) = \infty$, tomando el límite en (4.21)

$$\int_{\Omega_0} \nabla z \cdot \nabla \varphi = \lambda^* \int_{\Omega_0} \chi_{D_1} z\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_0).$$

Esto concluye que

$$\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

Supongamos que $p \geq 2$ y $a(\infty) = \infty$. En este caso, probamos que

$$z \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \setminus (\Omega_0 \cup D_2).$$

De hecho, si $z > 0$ en $D \subset \Omega \setminus (\Omega_0 \cup D_2)$, entonces

$$\int_D b(x) \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p \right)} \chi_{D_2} \right) z_n^2 \psi |u_n|_2 = \int_D b(x) \chi_{D_1} z_n^2 \psi |u_n|_2 \to \infty,$$

contradicción. Por tanto, $z \in H_0^1(\Omega_0 \cup D_2)$. Tomamos $\psi \in H_0^1(\Omega_0 \cup D_2)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0 \cup D_2} \nabla z_n \cdot \nabla \psi &= \lambda_n \int_{\Omega_0 \cup D_2} \left(\chi_{D_1} + \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p \right)} \chi_{D_2} \right) z_n \psi \\ & \quad - \int_{D_2} b(x) \left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p \right)} \right) z_n^2 \psi |u_n|_2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

como $p \geq 2$ y $a(s)/s^{1/p} \geq C$ para s grande, tenemos que

$$\frac{|u_n|_2}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \leq C \frac{|u_n|_p}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \leq C.$$

Luego, como $z_n \to 0$ en $\Omega_0 \cup D_2$, concluimos que

$$\int_{D_2} b(x) \left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \right) z_n^2 \psi |u_n|_2 \to 0.$$

Tomando el límite en (4.22) obtenemos que $\lambda^* = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$. ■

En el siguiente Teorema probamos los principales resultados de este caso.

Teorema 4.24 *Supongamos $p > 1$. Entonces existe $\lambda_\infty > 0$ tal que (4.8) posee al menos una solución positiva para*

$$\lambda \in (\min\{\lambda_0, \lambda_\infty\}, \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}).$$

Además,

1. *Si $0 < a(\infty) < \infty$, entonces $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1]$.*

2. *Si $\Omega_0 \subset D_1$, entonces $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}$.*

3. *Si $\Omega_0 \subset D_2$, entonces $\lambda_\infty = \infty$ si $a(\infty) = \infty$ y $\lambda_\infty = \infty$ si $a(\infty) = 0$.*

4. *Si $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset \neq \Omega_0 \cap D_2$, entonces $\lambda_\infty = 0$ si $a(\infty) = 0$ y $\lambda_\infty \geq \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$ si $a(\infty) = \infty$. Además, en este caso, si alguno de los siguientes casos ocurre:*

   (a) $D_2 \subset \Omega_0$,

   (b) $p \geq 2$ *y* $\dfrac{a(s)}{s^{1/p}}$ *acotado inferiormente para s grande,*

   (c)
   $$\lim_{s \to \infty} \frac{a(s)}{s^{1/p}} = \infty,$$

   entonces

   $$\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

En todos los casos λ_0 y λ_∞ son puntos de bifurcación desde la solución trivial y desde el infinito, respectivamente.

Prueba: Por el Teorema 4.21 existe un continuo $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (4.8) que bifurca desde $(\lambda, u) = (\lambda_0, 0)$.

1. Supongamos $0 < a(\infty) < \infty$. Por la Proposición 4.22, tenemos que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ está acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ una sucesión de soluciones positivas de (4.8) tal que $\lambda_n \to \lambda_\infty < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Por el Lema 4.23, tenemos

$$\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}[-(\chi_{D_1} + a(\infty)\chi_{D_2})\Delta; 1].$$

2. Supongamos $\Omega_0 \subset\subset D_1$. En este caso, λ_∞ no depende del valor de $a(\infty)$. Por la Proposición 4.22, como $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, tenemos $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ es acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ una sucesión de soluciones positivas de (4.8) tal que $\lambda_n \to \lambda_\infty < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$.

   Denotamos por

$$d_n = a\left(\int_\Omega u_n^p\right),$$

   entonces $u_n = \theta_{[\lambda_n, d_n]}$ es la única solución positiva de (4.9), luego

$$g(d_n) < \lambda_n < g_0(d_n) = \lambda_1^{\Omega_0}.$$

   Probemos que $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}$. Supongamos por contradicción que al menos para una subsucesión, $\lambda_n \to \lambda_\infty < \lambda_1^{\Omega_0}$. Entonces, existe $\overline{\lambda}$ tal que $\lambda_n \leq \overline{\lambda} < \lambda_1^{\Omega_0}$. Luego, como $\Omega_0 \subset\subset D_1$ por el Teorema 1.7 existe una constante $K(\overline{\lambda})$ y una función regular positiva φ (que es indepediente de d_n), tales que

$$u_n = \theta_{[\lambda_n, d_n]} \leq K(\overline{\lambda})\varphi \quad \text{para todo } \lambda_n \leq \overline{\lambda}.$$

   Por tanto, $|u_n|_\infty \leq C$. Contradicción.

3. Supongamos $\Omega_0 \subset D_2$. Usando la misma notación $d_n = a\left(\int_\Omega u_n^p\right)$, entonces $u_n = \theta_{[\lambda_n, d_n]}$

es la única solución positiva de (4.9), luego

$$g(d_n) < \lambda_n < g_0(d_n) = d_n\lambda_1^{\Omega_0}.$$

Obsérvese que

$$d_n \to a(\infty),$$

por tanto, cuando $a(\infty) = 0$ tenemos por la Proposición 1.3 que $\lambda_n \to 0$.

Ahora, supongamos que $a(\infty) = \infty$, entonces $d_n \to \infty$. Supongamos por contradicción que $\lambda_n \to \lambda_\infty < \infty$. Tomemos un subdominio D tal que $\Omega \subset\subset D$ y consideramos φ_1^D una autofunción positiva asociada a λ_1^D con $|\varphi_1^D|_\infty = 1$. Entonces, $\overline{u} = K\varphi_1^D$ es supersolución si

$$\lambda_1^D(\chi_{D_1} + d_n\chi_{D_2}) + b(x)K\varphi_1^D \geq \lambda_n \quad \text{ en } \Omega. \tag{4.23}$$

Como $\Omega_0 \subset D_2$, sigue que (4.23) se verifica en D_2 si

$$d_n\lambda_1^D > \lambda_n.$$

Por otro lado, en D_1 se verifica (4.23) si

$$\lambda_1^D + b(x)K\varphi_1^D \geq \lambda_n \text{ en } D_1.$$

Como $\lambda_\infty < \infty$ y $b(x) \geq b_0 > 0$ en D_1 y $\varphi_1^D \geq b_1 > 0$ en Ω para b_0 y b_1 constantes, tenemos que esta desigualdad ocurre para K grande (que es independiente de n). Por tanto, para n grande obtenemos

$$u_n \leq K\varphi_1^D.$$

Contradicción.

4. Supongamos $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset \neq \Omega_0 \cap D_2$. Como $\Omega_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, de esa manera podemos aplicar la Proposición 4.22, entonces $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ es acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}$ una sucesión de soluciones positivas de (4.8) tal que $\lambda_n \to \lambda_\infty < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$.

Sea $a(\infty) = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_n = \lambda_1[-(\chi_{D_1} + d_n\chi_{D_2})\Delta + b(x)u_n; 1] &< \lambda_1^{\Omega_0}[-(\chi_{D_1} + d_n\chi_{D_2})\Delta; 1] \\ &< \lambda_1^{B}[-(\chi_{D_1} + d_n\chi_{D_2})\Delta; 1] \\ &= d_n\lambda_1^B,\end{aligned}$$

donde $B \subset \Omega_0 \cap D_2$. Tomando el límite en n, obtenemos

$$\lambda_\infty = 0.$$

Sea $a(\infty) = \infty$. Supongamos que $\lambda_\infty < \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$. Entonces, existe un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset [0, \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]]$ tal que $\lambda_n \in \mathcal{K}$. Luego, por la Proposición 4.16 existen dos constantes positivas $d(\mathcal{K})$ y $C > 0$ tales que

$$|u_n|_\infty = |\theta_{[\lambda_n, d_n]}|_\infty \leq C, \quad \text{para } d_n \geq d(\mathcal{K}) \text{ y para todo } \lambda_n.$$

Contradicción.

Ahora, determinaremos en algún caso, que $\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}]$.

(a) Supongamos que $D_2 \subset \Omega_0$. Obsérvese que en este caso $\Omega \setminus \Omega_0 \subset D_1$, y aplicando el Lema 4.23 obtenemos que

$$\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0}[-\Delta; \chi_{D_1}] = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

(b) Supongamos que $p \geq 2$ y existen una constante positiva C y $s_0 > 0$ tales que

$$\frac{a(s)}{s^{1/p}} \geq C \quad \text{para todo } s \geq s_0 > 0.$$

Entonces, nuevamente usando el Lema 4.23 obtenemos que

$$\lambda_\infty = \lambda_1^{\Omega_0 \cup D_2}[-\Delta; \chi_{D_1}].$$

(c) Supongamos que
$$\lim_{s\to\infty}\frac{a(s)}{s^{1/p}}=\infty,$$
y que $\lambda_\infty>\lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta;\chi_{D_1}]$. Entonces, al menos para una subsucesión

$$\lambda_n\in\mathcal{K}:=[\lambda_\infty-\epsilon,\lambda_\infty+\epsilon], \tag{4.24}$$

con $\epsilon>0$ pequeño tal que $\lambda_\infty-\epsilon>\lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta;\chi_{D_1}]$. Entonces, por (4.18) deducimos que
$$\frac{\lambda_n-d_n\mu(\lambda_n)}{b_M}\varphi_n\le u_n\quad \text{en } \Omega_0\cup D_2, \tag{4.25}$$
donde $\mu(\lambda_n)=\lambda_1^{\Omega_0\cup D_2}[-\Delta-\lambda_n\chi_{D_1};1]<0$ y φ_n es una autofunción positiva asociada a $\mu(\lambda_n)$ tal que $|\varphi_n|_\infty=1$, o sea

$$-\Delta\varphi_n-\lambda_n\chi_{D_1}\varphi_n=\mu(\lambda_n)\varphi_n\quad \text{en } \Omega_0\cup D_2,\quad \varphi_n=0\quad \text{sobre } \partial(\Omega_0\cup D_2).$$

Por regularidad elíptica, $|\varphi_n|_{W^{2,q}}\le C$ para todo $q>1$, entonces $\varphi_n\to\varphi_\infty$ en $C^1(\overline{\Omega})$ para alguna función $\varphi_\infty>0$.

Además, debido a (4.24) existen dos constantes positivas a,b tal que

$$(a+bd_n)\varphi_n\le u_n\quad \text{en } \Omega_0\cup D_2.$$

También,
$$(a+bd_n)\left(\int_{\Omega_0\cup D_2}\varphi_n^p\right)^{1/p}\le\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{1/p},$$
que implica

$$\left(\frac{a}{d_n}+b\right)\left(\int_{\Omega_0\cup D_2}\varphi_n^p\right)^{1/p}\le\frac{\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{1/p}}{d_n}=\frac{\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{1/p}}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)}\to 0,$$

contradicción. Esto completa la prueba. ■

Como consecuencia del Teorema anterior, tenemos para $\Omega_0=\emptyset$, esto es, $b(x)\ge b_0>0$ el siguiente resultado.

Corolario 4.25 *Supongamos que $b(x) \geq b_0 > 0$ para alguna constante positiva. Entonces, existe al menos una solución positiva de (4.1) si*

$$\lambda \in (a(0)\lambda_1, \infty). \qquad \blacksquare$$

Capítulo **5**

Algunos problemas superlineales

Para finalizar esta Memoria, el presente Capítulo está basado en los resultados obtenidos en [36]. Vamos estudiar el problema no-local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega,\\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, es un dominio regular y acotado, $p > 0$, $0 < q \leq 1$, $r > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y positiva.

Este Capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 5.1 presentaremos un resultado de bifurcación global de las soluciones positivas de (5.1). En la Sección 5.2, haremos el estudio de la dirección de bifurcación. Finalmente, en la Sección 5.3 haremos el estudio del comportamiento del continuo de soluciones positivas de (5.1) dependiendo del comportamiento de a en infinito.

5.1 Bifurcación global

El siguiente resultado prueba la existencia de un continuo de soluciones positivas de (5.1).

Teorema 5.1 *Existe un continuo no acotado $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas para el problema (5.1) que emana a partir de:*

1. $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ *si* $q = 1$.

2. $(\lambda, u) = (0, 0)$ *si* $0 < q < 1$.

Prueba:

1. En el caso $q = 1$, siguiendo exactamente los mismos pasos del Teorema 3.1, podemos concluir que existe una componente conexa $\mathcal{C}$ de soluciones positivas que emana desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ que es no acotada.

2. Supongamos ahora que $0 < q < 1$. Definimos la aplicación

$$K_\lambda : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega}); \qquad K_\lambda(u) = u - T(u)$$

donde

$$T(u) := \lambda \mathcal{L}\left(\frac{(u^+)^q}{a\left(\int_\Omega (u^+)^p\right)}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{(u^+)^r}{a\left(\int_\Omega (u^+)^p\right)}\right).$$

Procediendo como en las Proposiciones 2.9 y 2.10, se prueba que u es solución no negativa de (5.1) si sólo si es cero de K_λ y que la aplicación T es compacta.

Ahora vamos a probar la existencia del continuo $\mathcal{C}$, usando el grado de Leray-Schauder de K_λ.

Paso 1: Si $\lambda < 0$ entonces $i(K_\lambda, 0) = 1$.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \quad &: [0,1] \times C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega}) \\ \mathcal{H}_1(t,u) \quad &= \quad \mathcal{L}\left(\frac{t}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)}(\lambda(u^+)^q + (u^+)^r)\right). \end{aligned}$$

Probemos que la homotopía definida por $\mathcal{H}_1$ es admisible, para lo que es suficiente probar que existe $\gamma > 0$ tal que

$$u \neq \mathcal{H}_1(t,u) \quad \forall u \in \overline{B}_\gamma, u \neq 0 \text{ y } t \in [0,1].$$

Supongamos que existe $u_n \in C_0(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$ con $|u_n|_\infty \to 0$ y $t_n \in [0,1]$, tal que

$$u_n = \mathcal{H}_1(t_n, u_n)$$

o sea,

$$
\begin{aligned}
-a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right) \Delta u_n &= t_n(\lambda (u_n^+)^q + (u_n^+)^r) \\
&= t_n (u_n^+)^q (\lambda + (u_n^+)^{r-q}) \leq 0 \quad \text{ en } \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
u_n = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega.
$$

Por lo tanto $u_n \leq 0$, luego $u_n^+ = 0$ y $u_n \equiv 0$, absurdo. Tomando $\epsilon \in (0, \delta]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
i(K_\lambda, 0) &= \deg(K_\lambda, B_\epsilon) = \deg(I - \mathcal{H}_1(1, \cdot), B_\epsilon) \\
&= \deg(I - \mathcal{H}_1(0, \cdot), B_\epsilon) = \deg(I, B_\epsilon) = 1.
\end{aligned}
$$

Paso 2: Si $\lambda > 0$ entonces $i(K_\lambda, 0) = 0$.

Tomemos $\phi > 0$ una autofunción asociada a λ_1. Definimos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &: [0,1] \times C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega}) \\
\mathcal{H}_2(t, u) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)} [\lambda (u^+)^q + (u^+)^r] \right) + t\phi.
\end{aligned}
$$

Veamos que la homotopía $\mathcal{H}_2$ es admisible. Para ello probaremos que existe $\gamma > 0$ tal que

$$
u \neq \mathcal{H}_2(t, u) \quad \forall u \in \overline{B_\gamma}, u \neq 0 \text{ y } t \in [0,1]. \tag{5.2}
$$

Supongamos que existe $u_n \in C_0(\overline{\Omega}) \backslash \{0\}$ con $|u_n|_\infty \to 0$ y $t_n \in [0,1]$, tal que

$$
u_n = \mathcal{H}_2(t_n, u_n),
$$

o sea,

$$
-\Delta u_n = \frac{1}{a\left(x, \int_\Omega (u_n^+)^p\right)} (\lambda (u_n^+)^q + (u_n^+)^r) + t_n \lambda_1 \phi.
$$

Como $t_n \lambda_1 \phi \geq 0$, por el principio de Máximo Fuerte tenemos que $u_n > 0$ en Ω.

Para todo M, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\lambda(u_n^+)^q + (u^+)^r > M u_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} -\Delta u_n &= \frac{1}{a\left(\int_\Omega (u_n^+)^p\right)}(\lambda(u_n^+)^q + (u_n^+)^r) + t\lambda_1\phi \\ &\geq \frac{1}{a_M}(\lambda(u_n^+)^q + (u_n^+)^r) + t\lambda_1\phi > \frac{M}{a_M}u_n. \end{aligned}$$

Entonces $\lambda_1\left[-\Delta - \frac{M}{a_M}; 1\right] > 0$, que para M suficientemente grande es un absurdo. Luego $\mathcal{H}_2$ es admisible. Tomando $\epsilon \in (0, \gamma]$, tenemos

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= \deg(K_\lambda, B_\epsilon) = \deg(I - \mathcal{H}_2(0, \cdot), B_\epsilon) \\ &= \deg(I - \mathcal{H}_2(1, \cdot), B_\epsilon) = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad sigue del hecho de que la ecuación

$$-\Delta u = \frac{1}{a\left(x, \int_\Omega (u^+)^p\right)}(\lambda(u^+)^q + (u^+)^r) + \lambda_1\phi$$

no tiene solución en $\overline{B}_\epsilon$, como hemos probado en el Paso 2.

Ahora, siguiendo el mismo razonamiento que el Teorema 2.11 podemos concluir que existe un continuo $\mathcal{C}$ no acotado en $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$de soluciones positivas de (5.1) que emana desde $(\lambda, u) = (0, 0)$. ■

5.2 Dirección de bifurcación

En esta seción haremos un estudio del sentido de la bifurcación estudiada en la Sección anterior. Empezamos con el caso $q = 1$.

Teorema 5.2 *Supongamos $r > 1$, $q = 1$ y $p \geq 1$. Denotamos φ_1 la autofunción positiva asociada a λ_1, normalizada por $|\varphi_1|_2 = 1$. El punto $(a(0)\lambda_1, 0)$ es un punto de bifurcación local* *de (5.1) desde la solución trivial $u \equiv 0$. Además, el sentido de la bifurcación es el siguiente:*

a) Si $p = r - 1$, entonces

a_1) Si $a'(0) > \dfrac{\int_\Omega \varphi_1^{r+1}}{\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^p}$, el sentido es supercrítico.

a_2) Si $a'(0) < \dfrac{\int_\Omega \varphi_1^{r+1}}{\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^p}$ el sentido es subcrítico.

b) Si $r - 1 > p$, entonces

b_1) Si $a'(0) > 0$, el sentido es supercrítico.

b_2) Si $a'(0) < 0$, el sentido es subcrítico.

c) Si $p > r - 1$, entonces el sentido es subcrítico.

Prueba: Definimos la aplicación $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C^2(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ como

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u + \lambda u + u^r.$$

Se tiene que $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times C^2(\Omega); C(\overline{\Omega}))$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\lambda, u)(v) &= a'\left(\int_\Omega u^p\right) p \int_\Omega u^{p-1} v \Delta u + a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta v + \lambda v + r u^{r-1} v, \\ \mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda, u)v &= v, \end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente que

$$\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\begin{aligned} L_0 = \mathcal{F}_u(\lambda, 0)(v) &= a(0)\Delta v + \lambda v, \\ L_1 = \mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda, 0)(v) &= v. \end{aligned}$$

Gracias al Teorema de Crandall-Rabinowitz [30] podemos argumentar como en el Teorema 3.2 y concluir que $(a(0)\lambda_1, 0)$ es un punto de bifurcación para $\mathcal{F}(\lambda, u)$ y la existencia de $\epsilon > 0$ y de dos funciones $\mu(s)$ y $v(s)$ tales que

$$\mu : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \qquad v : (-\epsilon, \epsilon) \to Z$$

donde Z es el complementario topológico del $Ker(L_0)$ en $C_0^2(\overline{\Omega})$, $\mu(0) = 0$, $v(0) = 0$, para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\begin{cases} \lambda(s) = a(0)\lambda_1 + \mu(s), \\ u(s) = s(\varphi_1 + v(s)), \end{cases} \tag{5.3}$$

y $(\lambda(s), u(s))$ son las únicas soluciones de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ en un entorno de $(\lambda_1 a(0), 0)$.

El desarollo de Taylor de la función $a\,(t)$ viene dado por

$$a\,(t) = a(0) + ta'(0) + \cdots . \tag{5.4}$$

Sustituyendo (5.3) y (5.4) en (5.1), obtenemos

$$\begin{aligned} -\left(a(0) + s^p a'(0)\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p\right)\Delta(s\varphi_1 + sv(s)) \;&=\; (a(0)\lambda_1 + \mu(s))(s(\varphi_1 + v(s)) \\ &+\; (s(\varphi_1 + v(s)))^r. \end{aligned}$$

Multiplicamos por φ_1 y integrando sobre Ω, tenemos

$$\begin{aligned} s^p a'(0)\lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p \;&+\; s^p a'(0)\lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p \int_\Omega \varphi_1 v(s) \\ &=\; \mu(s)\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))\varphi_1 + s^{r-1}\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^r \varphi_1 + o(s^p). \end{aligned}$$

a) Si $p = r - 1$. Entonces,

$$\frac{\mu(s)}{s^p} = \frac{a'(0)\lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p \left(1 + \int_\Omega \varphi_1 v(s)\right) - \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^r \varphi_1}{\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))\varphi_1} + o(s).$$

Tomando el límite en s, tenemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(s)}{s^p} = a'(0)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^p - \int_\Omega \varphi_1^{r+1}.$$

El primer apartado sigue fácilmente.

b) Si $p < r - 1$. Entonces,

$$\frac{\mu(s)}{s^p} = \frac{a'(0)\lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p \left(1 + \int_\Omega \varphi_1 v(s)\right) - s^{r-1-p} \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^r \varphi_1}{\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))\varphi_1}.$$

Tomando el límite en s, tenemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(s)}{s^p} = a'(0)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^p,$$

de donde deducimos el segundo apartado.

c) Si $p > r - 1$. Entonces,

$$\frac{\mu(s)}{s^{r-1}} = \frac{a'(0)\lambda_1 s^{p-r+1} \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^p \left(1 + \int_\Omega \varphi_1 v(s)\right) - \int_\Omega (\varphi_1 + v(s))^r \varphi_1}{\int_\Omega (\varphi_1 + v(s))\varphi_1}.$$

Tomando el límite en s, tenemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mu(s)}{s^{r-1}} = -\int_\Omega \varphi_1^{r+1} < 0.$$

Luego el sentido es subcrítico. ■

En el caso $0 < q < 1$ el sentido siempre es supercrítico.

Proposición 5.3 *Sea $r > 1$ y $0 < q < 1$. Entonces el sentido de bifurcación del punto $(\lambda, u) = (0, 0)$ es supercrítica.*

Prueba: Supongamos que existe un sucesión (λ_n, u_n) de soluciones positivas de (5.1) con $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n < 0$ y $|u_n|_\infty \to 0$. Es claro que $\int_\Omega u_n^p \to 0$, para todo $p > 0$. Como $\lambda_n \le 0$ y por la continuidad de a, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < a(0) - \epsilon < a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \quad \text{y} \quad \lambda_n u_n^q + u_n^r \le \epsilon u_n \quad \forall n \ge n_0.$$

Luego,

$$-\Delta u_n = \frac{\lambda_n u_n^q + u_n^r}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \leq \frac{\epsilon u_n}{a(0)-\epsilon} \quad \forall n \geq n_0.$$

Esto implica que,

$$\lambda_1 \leq \frac{\epsilon}{a(0)-\epsilon},$$

que es una contradicción para ϵ pequeño. ■

El siguiente cambio de variable será muy usado en este Capítulo, transforma nuestra ecuación en otra del tipo (1.13) con un término no-local, que recordamos por comodidad:

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v^q + v^r & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

Proposición 5.4 *Si u es solución positiva de (5.1), entonces*

$$v = \frac{u}{\left[a\left(\int_\Omega u^p\right)\right]^{\frac{1}{r-1}}}. \tag{5.6}$$

es solución positiva de (5.5) con

$$\mu = \frac{\lambda}{\left[a\left(\int_\Omega u^p\right)\right]^{\frac{r-q}{r-1}}}. \tag{5.7}$$

Prueba: Sea u solución de (5.1). Llamando $v = Ru$, obtenemos

$$-\Delta v = \frac{1}{a\left(\int_\Omega u^p\right)}(\lambda R^{1-q} v^q + R^{1-r} v^r). \tag{5.8}$$

Tomando R

$$R = a\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{1}{1-r}}, \tag{5.9}$$

y sustituyendo (5.9) en (5.8), tenemos que v verifica (5.5) con μ definido en (5.7). ■

En el siguiente resultado damos condiciones de no existencia de soluciones positivas de (5.1) con $\lambda = 0$, o sea,

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta u = u^r & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.10}$$

donde $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$. Para ello recordemos que gracias al Corolario 1.18 para $p > \max\{\frac{N(r-1)}{2}, r\}$ existe la siguiente constante

$$0 < M_1 := \sup\{C; C \leq \int_\Omega v^p\}, \quad \forall v \text{ solución positiva de (1.22).} \tag{5.11}$$

Proposición 5.5 *Sea* $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$. *Si* $p > \max\{\frac{N(r-1)}{2}, r\}$ *y*

$$\frac{a(s)}{s^{\frac{r-1}{p}}} > \frac{1}{M_1^{\frac{r-1}{p}}}, \quad \forall s \in (0, \infty), \tag{5.12}$$

entonces no existe solución positiva de (5.10).

Prueba: Supongamos que existe (λ, u) solución positiva de (5.10). Entonces v definida en (5.6) es solución con $\mu = 0$ de (5.5) y por la Proposición 1.18, obtenemos

$$M_1 \leq \int_\Omega v^p = \frac{\displaystyle\int_\Omega u^p}{\left[a\left(\int_\Omega u^p\right)\right]^{\frac{p}{r-1}}} < M_1.$$

Lo que nos lleva a una contradicción. ■

5.3 Caso general

Ahora, volvemos al estudio del problema (5.1).

El siguiente resultado prueba la no existencia de solución positiva para λ grande si a está acotada superiormente.

Proposición 5.6 *Si existe solución positiva de (5.1), entonces* $\lambda < a_M\lambda_1$, *donde* $a_M = \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s)$.

Prueba: Sea u solución positiva de (5.1), entonces

$$\lambda = \lambda_1 \left[-a\left(\int_\Omega u^p\right)\Delta - u^{r-1}; 1\right] < \lambda_1[-a_M\Delta; 1] = a_M\lambda_1. \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado será muy útil para conocer el comportamiento del continuo $\mathcal{C}$.

Lema 5.7 *Si existe u solución positiva de (5.1), entonces*

$$\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} < \overline{\lambda},$$

donde

$$\overline{\lambda} = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } q = 1, \\ \overline{\mu} & \text{si } 0 < q < 1, \end{cases}$$

donde $\overline{\mu}$ está definida en la Proposición 1.13.

Prueba: Sea u solución positiva de (5.1), entonces por la Proposición 5.4, v definida por (5.6) es solución positiva de (5.5), con μ definida en (5.7).

Si $q = 1$, aplicamos la Proposición 1.10, y concluimos que

$$\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} = \mu < \lambda_1.$$

Ahora, si $0 < q < 1$, por la Proposición 1.13 deducimos que existe $\overline{\mu}$, tal que tenemos que

$$\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} = \mu < \overline{\mu}. \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado prueba que si una sucesión de soluciones positivas de (5.1) cumple que $|u_n|_\infty \to \infty$, entonces $\int_\Omega u_n^p \to \infty$.

Proposición 5.8 *Sea $p > 0$, $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$ y $0 < q \leq 1$. Si (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (5.1) con $\lambda_n \to \lambda^* < \infty$ y $|u_n|_\infty \to \infty$, entonces $\int_\Omega u_n^p \to \infty$.*

Prueba: Supongamos que $\int_\Omega u_n^p \leq C$ para alguna constante $C > 0$. Entonces existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \leq a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \leq C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.13}$$

Por la Proposición 5.4, (μ_n, v_n) es solución positiva de (5.5), con μ_n y v_n definidas por (5.7) y (5.6), respectivamente. Por (5.13), tenemos que existe $C_3 > 0$ tal que

$$|\mu_n| = \left|\frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}}\right| \leq C_3,$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 1.9 y concluir que $|v_n|_\infty \leq C$. Luego,

$$|u_n|_\infty = |v_n|_\infty a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}} \leq C_4,$$

lo que nos lleva a una contradicción. ■

En el siguiente resultado probamos que no hay soluciones para λ grande bajo la condición $\lim_{s\to\infty} a(s)s^{\frac{1-r}{p}} = 0$.

Proposición 5.9 *Sea $p > 0$, $1 < r < \dfrac{N+2}{N-2}$ y $0 < q \leq 1$. Si*

$$\lim_{s\to\infty} a(s)s^{\frac{1-r}{p}} = 0. \tag{5.14}$$

entonces no existe solución positiva de (5.1) para λ grande.

Prueba: Supongamos que existe (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (5.1), tal que $\lambda_n \to \infty$. Por el Lema 5.7, tenemos

$$\lambda_n < \overline{\lambda} a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}},$$

luego $a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \to \infty$ y por tanto $\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Nuevamente, hacemos el cambio (5.6) y (5.7).

Como

$$|\mu_n| = \left| \frac{\lambda_n}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} \right| \leq C,$$

por la Proposición 1.9, sabemos que $|v_n|_\infty \leq C$, luego $\displaystyle\int_\Omega v_n^p \leq C_1$. Por lo tanto,

$$C_1 \geq \int_\Omega v_n^p = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_n^p}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p}{r-1}}}.$$

Esto implica,

$$\frac{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-1}{p}}} \geq C_2 > 0.$$

Contradicción con (5.14). ■

Podemos enunciar y probar el resultado principal en el caso que a verifica (5.14).

Teorema 5.10 *Sea* $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$. *Si* a *satisface* (5.14)*, entonces existen* $\lambda^* \leq \lambda^{**}$ *tales que*

$$\underline{\lambda} \leq \lambda^* < \lambda^{**} < \infty,$$

donde,

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} a(0)\lambda_1, & si\ q = 1, \\ 0, & si\ 0 < q < 1, \end{cases}$$

tal que

1. *Si* $\lambda > \lambda^{**}$*, entonces no existe solución positiva de (5.1).*

2. *Si* $0 < \lambda < \lambda^*$*, entonces existe solución positiva de (5.1).*

En realidad, se tiene que el continuo no acotado $\mathcal{C}$ *de soluciones positivas de (5.1) verifica que* $(0, \lambda^*) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$.

Además, si $a(\infty) > 0$*, entonces existe solución positiva de (5.1) para* $\lambda < \lambda^*$*, y* $(-\infty, \lambda^*) \subset Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$.

Prueba: 1. Por la Proposición 5.9 existe $\lambda^{**} > \underline{\lambda}$ tal que, no existe solución positiva de (5.1) para $\lambda > \lambda^{**}$.

2. Por el Teorema 5.1 existe una componente conexa $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (5.1) que bifurca desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ si $q = 1$ y $(\lambda, u) = (0, 0)$ si $0 < q < 1$. Por el apartado anterior no existe solución positiva para λ grande. Probemos que no existe $\lambda^* > 0$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$.

Como $|u_n|_\infty \to \infty$ por la Proposición 5.8, tenemos que $\displaystyle\int_\Omega u_n^p \to \infty$. Por la Proposición 5.4, (μ_n, v_n) son soluciones positivas de (5.5), con μ_n y v_n definidos en (5.7) y (5.6), respectivamente.

Supongamos $a(\infty) = \infty$. Entonces, como $\lambda_n \to \lambda^*$ y $\int_\Omega u_n^p \to \infty$, se tiene que

$$\frac{\lambda_n}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} \to 0.$$

Por tanto, por el Proposición 1.19, tenemos

$$\int_\Omega v_n^p \leq M_2.$$

Por otro lado, por (5.14) tenemos

$$\int_\Omega v_n^p = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_n^p}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p}{r-1}}} \to \infty.$$

Una contradicción.

Supongamos $0 < a(\infty) < \infty$. Por tanto,

$$|\mu_n| = \left|\frac{\lambda_n}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}}\right| \leq C.$$

Por la Proposición 1.9, tenemos que $|v_n|_\infty \leq C$. Luego,

$$|u_n|_\infty = a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1}{r-1}} |v_n|_\infty \leq C.$$

Una contradicción, debido a que $|u_n|_\infty \to \infty$.

Supongamos que $a(\infty) = 0$. Supongamos por contradicción que $\lambda_n \to \lambda^* > 0$. Por tanto, por Lema 5.7 sigue que

$$0 \leq \frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)} \leq \overline{\mu}.$$

Como $a\left(\int_\Omega u_n^p\right) \to \infty$ sigue que $\lambda^* = 0$, lo que es una contradicción, pues estábamos suponiendo que $\lambda^* > 0$.

Luego no existe punto de bifurcación a infinito en $(0, \infty)$, por lo que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \supset (0, \lambda^*)$.

Supongamos ahora, que $a(\infty) > 0$ y veamos que $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \supset (-\infty, \lambda^*)$. Supongamos por absurdo que existe $\lambda^* \leq 0$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Observemos que en los casos $a(\infty) = \infty$ y $0 < a(\infty) < \infty$ podemos argumentar como antes y llegar a una contradicción. Por tanto $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \supset (-\infty, \lambda^*)$ y hay solución para $\lambda < \lambda^*$. ■

Una vez analizado el caso en el que a verifica (5.14), nos ocupamos de lo que ocurre cuando $\lim_{s\to\infty} a(s)s^{\frac{1-r}{p}} > 0$.

El siguiente resultado, prueba que no existe $\lambda^* \in (-\infty, \infty)$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$

Proposición 5.11 *Sea $p > \max\left\{r, \frac{N(r-1)}{2}\right\}$, $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ y (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones positivas de (5.1). Si*

$$\lim_{s\to\infty} a(s)s^{\frac{1-r}{p}} = \infty. \tag{5.15}$$

entonces no existe $|\lambda^*| < \infty$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$.

Prueba: Supongamos por contradicción que existe $\lambda^* < \infty$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$. Usando de nuevo el cambio de variable de la Proposición 5.8 y como $\lambda^* < \infty$, tenemos

$$\mu_n = \frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} \to 0.$$

Usando ahora la Proposición 1.17 se tiene que $\displaystyle\int_\Omega v_n^p \not\to 0$. En cambio, por la condición (5.15), obtenemos

$$\int_\Omega v_n^p = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_n^p}{\left[a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\right]^{\frac{p}{r-1}}} \to 0.$$

Contradicción. ■

Observemos que este resultado nos está diciendo que el continuo $\mathcal{C}$ no acotado de soluciones positivas (5.1) no se puede ir a infinito en un valor finito de λ, por tanto, al ser no acotado, su proyección es no acotada, o bien por $+\infty$, o por $-\infty$, o incluso en ambas direcciones.

El siguiente resultado refina el anterior. Probamos que no hay punto de bifurcación a infinito para valores positivos bajo una condición más débil que (5.15).

Proposición 5.12 *Sea* $p > \max\left\{r, \frac{N(r-1)}{2}\right\}$, $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ *y* (λ_n, u_n) *una sucesión de soluciones positivas de (5.1). Si existe* $s_0 > 0$ *tal que*

$$\frac{a(s)}{s^{\frac{r-1}{p}}} > \frac{1}{M_1^{\frac{r-1}{p}}}, \quad \forall s \geq s_0 > 0, \tag{5.16}$$

donde M_1 *esta definido en (5.11), entonces no existe* $\lambda^* \in [0, \infty)$ *tal que* $\lambda_n \to \lambda^*$ *y* $|u_n|_\infty \to \infty$.

Prueba: Supongamos que exista $\lambda^* \in [0, \infty)$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Nuevamente, por la Proposición 5.4, v_n dada por (5.6) es solución positiva de (5.5), con μ_n definida en (5.7).

Observemos que por (5.16), tenemos $a(\infty) = \infty$. Además, como $|u_n|_\infty \to \infty$, entonces $a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}} \to \infty$. Luego

$$\mu_n = \frac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{r-q}{r-1}}} \to 0.$$

Por la Proposición 1.9, tenemos que v_n está acotada en $L^\infty(\Omega)$. Luego, por regularidad elíptica, v_n está acotada en $W^{2,q}(\Omega)$ para cualquier $q > 1$, y por tanto existe $v \in C^1(\overline{\Omega})$ con $v \geq 0$ tal que

$$v_n \to v \quad \text{en } C^1(\overline{\Omega}).$$

Tomando el límite en (1.13) y teniendo en cuenta que $\mu_n \to 0$, obtenemos que v es solución de la ecuación

$$-\Delta v = v^r, \quad \text{en } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

que es (5.5) con $\mu = 0$. Probaremos que

$$v \not\equiv 0. \tag{5.17}$$

Supongamos $q = 1$ y supongamos por contradicción que

$$v_n \to 0 \quad \text{ en } C^1(\overline{\Omega}).$$

Hacemos el cambio de variable $w_n = \dfrac{v_n}{|v_n|_\infty}$. Luego

$$-\Delta w_n = |v_n|_\infty^{r-1} w_n^r, \text{ en } \Omega. \tag{5.18}$$

Por definición w_n está acotado acotada en $L^\infty(\Omega)$, y por tanto por regularidad elíptica, existe $w \in C^1(\overline{\Omega})$ con $w > 0$ en Ω, tal que

$$w_n \to w \text{ en } C^1(\overline{\Omega}).$$

Tomando el límite en (5.18), obtenemos

$$-\Delta w = 0, \text{ en } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

lo que implica que $w \equiv 0$ en Ω. Contradicción.

Ahora, supongamos $0 < q < 1$. Como $\mu_n \to 0$, por la Proposición 1.14 tenemos que

$$\frac{v_n}{\mu_n^{\frac{1}{1-q}}} \to w_{[1,1]} \text{ en } L^\infty(\Omega). \tag{5.19}$$

Sustituyendo (5.6) y (5.7) en (5.19), y obtenemos

$$\frac{u_n a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{(r-q)}{(r-1)(1-q)}}}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1}{r-1}} \lambda_n^{\frac{1}{1-q}}} \to w_{[1,1]} \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Elevando a p e integrando

$$\frac{\int_\Omega u_n^p a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p(r-q)}{(r-1)(1-q)}}}{a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p}{r-1}} \lambda_n^{\frac{p}{1-q}}} \to \int_\Omega w_{[1,1]}^p \text{ en } \mathbb{R},$$

o equivalentemente

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega u_n^p a\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p}{1-q}}}{\lambda_n^{\frac{p}{1-q}}} \to \int_\Omega w_{[1,1]}^p, \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a\left(\int_\Omega u_n^p\right)\left(\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{1-q}{p}} \leq \lambda_n\left[\left(\int_\Omega w_{[1,1]}^p\right)^{\frac{1-q}{p}} + \epsilon\right] \quad \forall n \geq n_0.$$

Contradicción, debido que $a(\infty) = \infty$. Luego $v \gneqq 0$ en Ω.

Por tanto, en ambos casos tenemos que $v_n \to v$ en $C^1(\overline{\Omega})$ y $v \geq 0$, $v \neq 0$. Por la Proposición 1.17 y el Corolario 1.18, obtenemos

$$M_1 \leq \int_\Omega v_n^p = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_n^p}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^p\right)^{\frac{p}{r-1}}} < M_1.$$

Contradicción. ■

Podemos ya enunciar el resultado principal cuando a verifica (5.12).

Teorema 5.13 *Sea* $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ *y* $p > \max\left\{r, \frac{N(r-1)}{2}\right\}$. *Si* a *satisface (5.12), entonces*

1. *si* $q = 1$, *existe* $\lambda^* \in (0, a(0)\lambda_1]$ *tal que existe solución positiva de (5.1) si* $\lambda^* \leq \lambda$;

2. *si* $0 < q < 1$, *existe solución positiva de (5.1) si* $\lambda > 0$.

Prueba: Por el Teorema 5.1 existe una componente conexa $\mathcal{C}$ de soluciones positivas de (5.1) que bifurca desde $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$ si $q = 1$ y $(\lambda, u) = (0, 0)$ si $0 < q < 1$. Por la Proposición 5.5 no existe solución positiva de (5.1) para $\lambda = 0$. Por la Proposición 5.12, no existe $\lambda^* \geq 0$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$ y $|u_n|_\infty \to \infty$. Por tanto, tenemos

1. si $q = 1$, $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) \supset (a(0)\lambda_1, \infty)$;

2. si $0 < q < 1$, $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (0, \infty)$. ■

Bibliografía

[1] C. O. Alves, D-P. Covei, *Existence of solution for a class of nonlocal elliptic problem via sub-supersolution method*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **23**, 1-8 (2015).

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, M. Chipot, *On a class of intermediate local-nonlocal elliptic problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **49**, 497-509 (2017).

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Functional Analysis, **122**, 519-543 (1994).

[4] A. Ambrosetti, J. L. Gámez, *Branches of positive solutions for some semilinear Schrödinger equations*, Math. Z., **224**, 347-362 (1997).

[5] A. Ambrosetti, P. Hess, *Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl., **73**, 411-422 (1980).

[6] D. Arcoya, J. Carmona, B. Pellacci, *Bifurcation for some quasilinear operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **131**, 733-765 (2001).

[7] D. Arcoya, T. Leonori, A. Primo, *Existence of solutions for semilinear nonlocal elliptic problems via a Bolzano Theorem*, Acta Appl. Math., **127**, 87-104 (2013).

[8] C. Bandle, M. A. Pozio, A. Tesei, *The asymptotic behavior of the solutions of degenerate parabolic equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **303**, 487-501 (1987).

[9] H. Berestycki, P. L. Lions, *Some applications of the method of super and subsolutions. Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems* , Springer Lectures Notes, **782**, 16-41 (1980).

[10] H. Brezis, L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal., **10**, 55-64 (1986).

[11] H. Bueno, G. Ercole, W. Ferreira, A. Zumpano, *Existence and multiplicity of positive solutions for the p-Laplacian with nonlocal coefficient*, J. Math. Anal. Appl., **343**, 151-158 (2008).

[12] R. S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, (2003).

[13] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos, P. Marín-Rubio, *Long-time behavior of a non-autonomous parabolic equation with nonlocal diffusion and sublinear terms*, Nonlinear Anal., **121**, 3-18 (2015).

[14] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos, P. Marín-Rubio, *Robustness of nonautonomous attractors for a family of nonlocal reaction-diffusion equations without uniqueness*, Nonlinear Dynam., **84**, 35-50 (2016).

[15] N. H. Chang, M. Chipot, *On some mixed boundary value problems with nonlocal diffusion*, Adv. Math. Sci. Appl., **14**, 1-24 (2004).

[16] M. Chipot, *Remarks on some class of nonlocal elliptic problems*, Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, World Scientific, Singapore, 79-102 (2006).

[17] M. Chipot, F. J. S. A. Corrêa, *Boundary layer solutions to functional elliptic equations*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **40**, 1-13 (2009).

[18] M. Chipot, B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity, **3**, 65-81 (1999).

[19] M. Chipot, B. Lovat, *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., **30**, 4619-4627 (1997).

[20] M. Chipot, L. Molinet, *Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems*, Appl. Anal., **80**, 279-315 (2001).

[21] M. Chipot, J. F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 26, **3**, 447-467 (1992).

[22] M. Chipot, P. Roy, *Existence results for some functional elliptic equations*, Differential Integral Equations, **27**, 289-300 (2014).

[23] M. Chipot, S. Zheng, *Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms*, Asymptot. Anal., **45**, 301-312 (2005).

[24] F. J. S. A. Corrêa, *On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems*, Nonlinear Anal., **59**, 1147-1155 (2004).

[25] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado, A. Suárez, *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Adv. in Differential Equations, **16**, 623-641 (2011).

[26] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, *A variational approach for a nonlocal and nonvariational elliptic problem*, J. Integral Equations Appl., **22**, 549-557 (2010).

[27] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes, J. Ferreira, *On a class of problems involving a nonlocal operator*, Appl. Math. Comput., **147**, 475-489 (2004).

[28] F. J. S. A. Corrêa, D. C. de Morais Filho, *On a class of nonlocal elliptic problems via Galerkin method*, J. Math. Anal. Appl., **310**, 177-187 (2005).

[29] F. J. S. A. Corrêa, A. Suárez, *Combining local and non-local terms in a nonlinear elliptic problem*, Math. Methods Appl. Sci., **35**, 547-563 (2012).

[30] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis, **8**, 321-340 (1971).

[31] M. Delgado, A. Suárez, *Positive solutions for the degenerate logistic indefinite superlinear problem: the slow diffusion case*, Houston J. Math., **29**, 801-823 (2003).

[32] D. Figueiredo, M. Girardi, M. Maetzu, *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques*, Differ. Integral Equ., **17**, 119-126 (2004).

[33] G. M. Figueiredo, T. S. Figuereido-Sousa, C. Morales-Rodrigo, A. Suárez, *Existence of positive solutions of an elliptic equation with local and nonlocal variable diffusion coefficient*, sometido a publicación.

[34] T. S. Figueiredo-Sousa, C. Morales-Rodrigo, A. Suárez, *A non-local heterogeneous diffusion problem: linear and sublinear cases*, Z. Angew. Math. Phys., **68**, 20 pp. (2017).

[35] T. S. Figueiredo-Sousa, C. Morales-Rodrigo, A. Suárez, *The influence of a metasolution on the behaviour of the logistic equation with nonlocal diffusion coefficient*, sometido a publicación.

[36] T. S. Figueiredo-Sousa, C. Morales-Rodrigo, A. Suárez, *Superlinear problems with nonlocal diffusion coefficient*, en preparación.

[37] J. Furter, M. Grinfeld, *Local vs. nonlocal interactions in population dynamics*, J. Math. Biol., **27**, 65-80 (1989).

[38] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68**, 209-243 (1979).

[39] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations, **6**, 883-901 (1981).

[40] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[41] N. I. Kavallaris, T. Suzuki, *Non-local partial differential equations for engineering and biology. Mathematical modeling and analysis*, Springer, Cham, (2018).

[42] J. López-Gómez, *Linear second order elliptic operators*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, (2013).

[43] J. López-Gómez, *Metasolutions of parabolic equations in population dynamics*, Taylor and Francis Group (2016).

[44] A. Molino, J. D. Rossi, *A concave-convex problem with a variable operator*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **57**, 26 pp. (2018).

[45] W. M. Ni, R. Nussbaum, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $\Delta u + f(u,r) = 0$*,* Comm. Pure Appl. Math., **38**, 67-108 (1985).

[46] A. A. Ovono, A. Rougirel, *Elliptic equations with diffusion parameterized by the range of nonlocal interactions*, Ann. Mat. Pura Appl., **189**, 163-183 (2010).

[47] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis, **7**, 487-513 (1971).

[48] P. Roy, *Existence results for some nonlocal problems*, Differ. Equ. Appl., **6**, 361-381 (2014).

[49] M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems,* Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[50] B. Yan, T. Ma, *The existence and multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problems*, Bound. Value. Probl., **165**, 35pp. (2016).

[51] B. Yan, D. Wang, *The multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl., **442**, 72-102 (2016).

[52] G. T. Whyburn, *Topological analysis*, Princeton University Press, Princeton, (1964).

[53] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser Boston, Boston, (1996).

[54] L. Q. Zhang, *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u + u + u^p = 0$ *in a ball,* Comm. Partial Differential Equations, **17**, 1141-1164 (1992).