

Aplicación de un criterio acoplado de tensión y energía al inicio de una grieta transversal en laminados $[0_m, 90_n]_s$ sometidos a tensión longitudinal

I.G. García, V. Mantič, A. Blázquez, F. París

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, E.T.S. de Ingeniería
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n. Sevilla. España

RESUMEN

Se presenta un modelo teórico desarrollado para la predicción de la aparición de una grieta en un laminado cruzado simétrico a partir de la aplicación de un criterio acoplado tensional y energético. Como resultado se obtiene una expresión semianalítica sencilla que permite calcular la deformación crítica en función de un número de fragilidad γ y que coincide con las evidencias experimentales disponibles. Así mismo, se demuestra la existencia de un límite inferior para la longitud final de la grieta dependiente solo de propiedades elásticas. Finalmente, como aplicación, se describe un procedimiento experimental para la estimación indirecta de la tenacidad a la fractura transversal de una lámina.

1. INTRODUCCIÓN

La aparición de grietas transversales en la capa central de laminados cruzados simétricos $[0_m, 90_n]_s$ sometidos a tensión longitudinal es un problema clásico estudiado desde hace décadas. Como se describe en París et al. (2010) este fallo tiene una secuencia bien conocida: Inicialmente aparecen grietas transversales en las capas centrales propagándose hasta la interfase entre capas para luego crecer a través de ésta. Se estudia a continuación el primer paso de los descritos a partir de la aplicación de un criterio acoplado tensional y energético propuesto por Leguillon (2002), inspirado en unos resultados experimentales de este problema, para la obtención de la carga crítica que provoca la aparición abrupta de la primera grieta transversal.

Este criterio se enmarca en el contexto de la Mecánica de la Fractura Finita (MFF) y asume que una grieta de una cierta longitud finita aparece para un nivel de cargas tal que se cumpla simultáneamente que las tensiones asociadas al plano en el que aparecerá la grieta superan un cierto valor crítico y que la aparición de la grieta sea un proceso energéticamente permitido.

La geometría del laminado estudiado es descrita en la Fig. 1. El material de las láminas es elástico lineal y transversalmente isótropo con las propiedades detalladas en la Tabla 1. El laminado se encuentra sometido a un desplazamiento impuesto en sus bordes superior e inferior u_y , lo que equivale a suponer una deformación ε_{yy} promedio aplicada en todo el laminado.

Lámina	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}	G_{12} (GPa)
Vid/Epoxi, Parvizi et al. (1978)	42	14	0,28	0,4	5,83
Carb./Epoxi, París et al. (2010)	141,3	9,58	0,3	0,32	5

Tabla 1: Propiedades de los materiales utilizados.

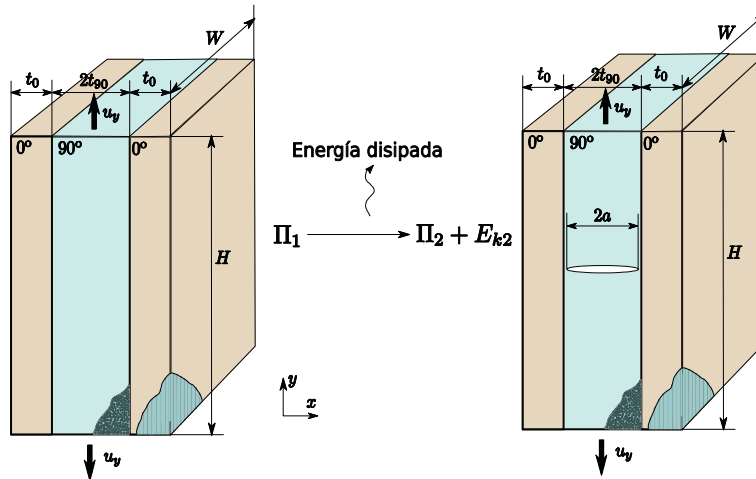


Fig. 1. Esquema del problema

2. CRITERIO TENSIONAL

El criterio tensional utilizado asume que una grieta puede aparecer a lo largo de aquellos puntos donde la tensión normal al plano de la grieta supere un cierto valor crítico que se corresponderá en este caso con la resistencia transversal Y_t de la lámina. Por lo tanto esta condición para las tensiones $\sigma_{ij}^{(90)}$ en la capa central se expresa como

$$\sigma_{yy}^{(90)}(x) \geq Y_t. \quad (1)$$

Asumiendo las hipótesis de la teoría del laminado, la componente de la tensión $\sigma_{yy}^{(90)}$ puede suponerse uniforme en la capa central y relacionarse con la deformación impuesta ε_{yy} a partir de la siguiente expresión $\tilde{E}_{22} \cdot \varepsilon_{yy} = \sigma_{yy}^{(90)}$ donde \tilde{E}_{22} es el módulo de Young aparente de la capa central. \tilde{E}_{22} está relacionado (ver Mantič et al. (2011)) con el módulo de Young transversal de la lámina E_{22} por la expresión que aparece en la ecuación (2). La expresión final del criterio impone la siguiente condición sobre ε_{yy} normalizada con la deformación transversal crítica de la lámina $Y_{et} = Y_t/E_{22}$:

$$\frac{\varepsilon_{yy}}{Y_{et}} \geq \frac{E_{22}}{\tilde{E}_{22}} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\nu_{12}\nu_{12} \left(1 + \frac{t_0}{t_{90}}\right) - \frac{t_0}{t_{90}} + \frac{E_{11}}{E_{22}}} \geq 1. \quad (2)$$

3. CRITERIO ENERGÉTICO

El balance energético entre los estados anterior y posterior a la aparición de la grieta que se observan en la Fig. 1 se expresa como,

$$\Delta\Pi + \Delta E_k + G_{1c}2\Delta a = 0, \quad (3)$$

donde $\Delta\Pi$ es el cambio en energía potencial elástica, que en el caso presente, puede expresarse en función de la tasa de liberación de energía $G = -\frac{d\Pi}{d2a}$. El incremento en energía cinética $\Delta E_k \geq 0$ debido a que se parte de un estado cuasiestático. $G_{1c}2\Delta a$ representa la energía disipada en la apertura de la grieta, siendo G_{1c} la tenacidad a la fractura transversal de la lámina y $2\Delta a$ la longitud de la grieta que aparece. Introduciendo estas expresiones en (3) se llega a,

$$\int_0^{\Delta a} G(a)da \geq G_{1c}\Delta a. \quad (4)$$

La expresión de la tasa de liberación de energía $G(a)$ en función de la longitud de la grieta se obtiene numéricamente por el Método de los Elementos de Contorno (MEC) (siguiendo Blázquez et al. (2008)). Un análisis dimensional permite reducir la dependencia de G (ver Mantič et al. (2011) y generalizar los resultados del MEC,

$$G = E_{22} \cdot \varepsilon_{yy}^2 \cdot t_{90} \cdot \tilde{G}(\hat{a}, t_0/t_{90}, \text{Prop. elast.}) \quad (5)$$

donde $\hat{a} = a/t_{90}$ y \tilde{G} es calculado por medio del MEC obteniéndose para Vidrio/Epoxi, con las propiedades de la Tabla 1, los resultados que se muestran en la Fig. 2 que son analizados en Blázquez et al (2009), París et al (2010) y Mantič et al. (2011).

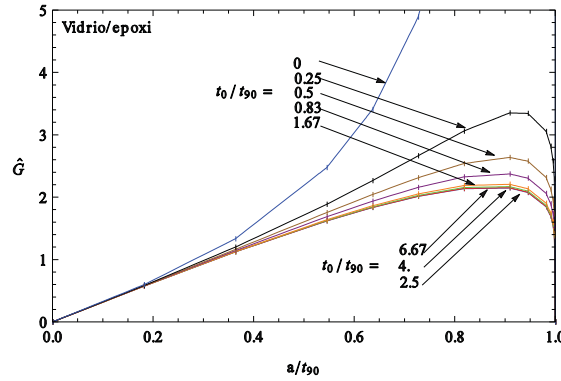


Fig. 2. Resultados del MEC de la tasa de liberación de energía adimensional.

Así, introduciendo la expresión (5) en (4), despejando ε_{yy} y normalizando con Y_{et} se obtiene la expresión general del criterio energético,

$$\frac{\varepsilon_{yy}}{Y_{et}} \geq \gamma \sqrt{g\left(\Delta\hat{a}, \frac{t_0}{t_{90}}, \text{Prop. elast.}\right)}, \quad (6)$$

donde γ es un número adimensional de fragilidad (ver Mantič (2009) y las referencias presentadas allí) y g es una función adimensional. Ambos son definidos a continuación,

$$\gamma = \frac{1}{Y_t} \sqrt{\frac{E_{22} \cdot G_{1c}}{t_{90}}}, \quad g\left(\Delta\hat{a}, \frac{t_0}{t_{90}}, \text{Prop. elast.}\right) = \frac{\Delta\hat{a}}{\int_0^{\Delta\hat{a}} \tilde{G} d\hat{a}}. \quad (7)$$

4. CRITERIO ACOPLADO TENSIONAL Y ENERGÉTICO

El criterio acoplado asume que el cumplimiento de los dos criterios enunciados anteriormente forma una condición suficiente. En la Fig. 3 se representan las condiciones impuestas por ambos criterios donde se observa que, separados por un valor umbral de γ : γ_{th} , existen dos escenarios posibles en el acoplamiento de ambos criterios:

- **Escenario A:** Si las curvas del criterio tensional y el criterio energético se cortan, el mínimo valor de la deformación promedio impuesta para el que se cumplen simultáneamente ambos criterios está definido por ese punto de corte. La longitud de la grieta en el instante de su aparición abrupta $\Delta\hat{a}$ se obtiene, por tanto, de la resolución numérica de la ecuación:

$$\gamma \cdot \sqrt{g\left(\Delta\hat{a}, \frac{t_0}{t_{90}}, \text{Prop. elast.}\right)} = \frac{E_{22}}{\bar{E}_{22}}, \quad (8)$$

y la deformación crítica será igual al valor impuesto por el criterio tensional: $\frac{\varepsilon_{yy}^{c,A}}{Y_{et}} = \frac{E_{22}}{\bar{E}_{22}}$.

- **Escenario B:** Para valores de $\gamma > \gamma_{th}$ las curvas correspondientes a ambos criterios no se cortan como se observa en la Fig. 3. Por tanto la grieta aparecerá cuando se alcance el valor mínimo de g . Este mínimo, no apreciable en la Fig. 2, puede demostrarse (ver Mantič et al. (2011)) que existe para una longitud de la grieta muy próxima a t_{90} siendo (como g) dependiente de las propiedades elásticas de la lámina. Por tanto, en el escenario B, la longitud de la grieta está fijada por la posición del mínimo de la función g , $\Delta\hat{a}_{min,g}$, y la deformación crítica será: $\frac{\varepsilon_{yy}^{c,B}}{Y_{et}} = \gamma \sqrt{g\left(\Delta\hat{a}_{min,g}, \frac{t_0}{t_{90}}, \text{Prop. elast.}\right)}$.

Así, la expresión de la deformación crítica en función de γ se reduce a dos funciones lineales como se observa en la Fig. 4.

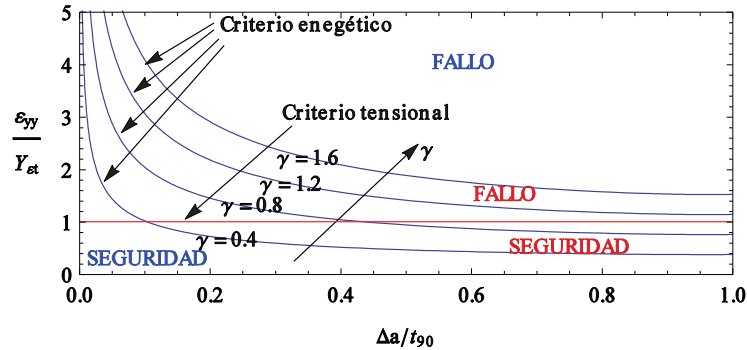


Fig. 3. Acoplamiento de los criterios tensional y energético.

Posteriormente a la aparición de la grieta de longitud finita Δa es posible un crecimiento inestable de la grieta para el mismo valor de la deformación que produjo la grieta mientras $G(\hat{a}) \geq G_{1c}$, $\hat{a} \geq \Delta\hat{a}$. Se puede demostrar (ver Mantič et al. (2011)) como consecuencia de resultados teóricos que la longitud de parada de la grieta siempre es mayor o igual $\Delta\hat{a}_{min,g}$ correspondiente al mínimo de g . $\Delta\hat{a}_{min,g}$ que solo depende de las propiedades elásticas, es muy cercano al valor unidad y define un límite inferior para

el valor de la longitud de parada de las grietas, observable en una posterior inspección. Este valor es $\Delta\hat{a}_{min,g} = 96,41\%$ para el laminado usado en París et al. (2010) lo cual es coherente con la observación de la micrografía de la Fig. 5 izquierda.

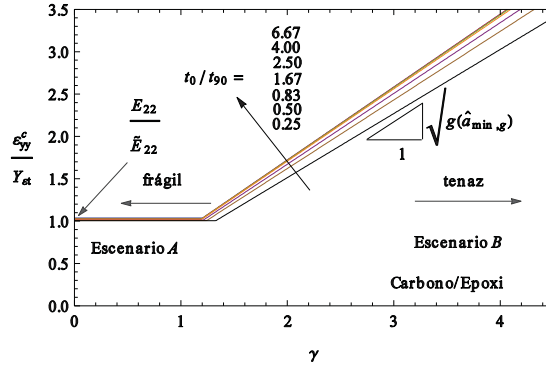


Fig. 4. Deformación crítica en función del número adimensional γ

La dependencia de los resultados con γ puede reinterpretarse como un efecto de tamaño con respecto al espesor de la capa central t_{90} debido a que es el único parámetro geométrico en γ . Definiendo $t_r = G_c E_{22} / Y_t^2$, la expresión de los resultados de deformación crítica en función del espesor t_{90} muestra el efecto de tamaño enunciado como se muestra en la Fig. 5 derecha donde se compara con los resultados experimentales obtenidos por Parvizi et al. (1978) mostrando un excelente acuerdo.

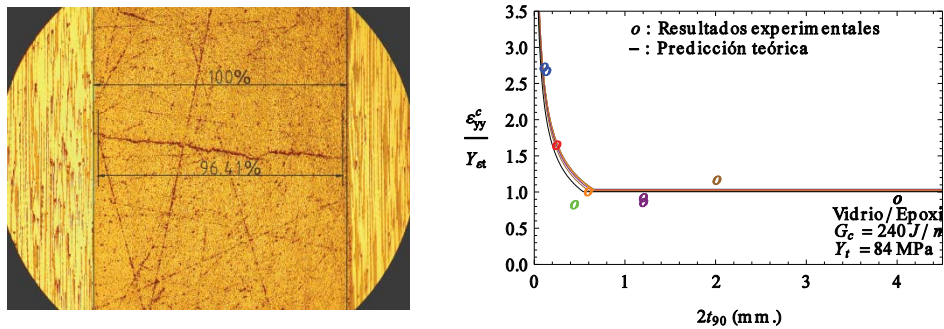


Fig. 5. Confirmación experimental de los resultados

5. PROCEDIMIENTO PARA LA ESTIMACIÓN EXPERIMENTAL DE LA TENACIDAD A FRACTURA TRANSVERSAL DE LA LÁMINA

A partir del modelo teórico desarrollado se propone un método experimental indirecto para la obtención de la tenacidad transversal a fractura de láminas de este tipo. Así, como se demuestra y detalla en Mantič et al. (2011), a partir de un ensayo de un laminado $[0_m, 90_n]_s$, y verificando que la configuración corresponde al escenario B se obtiene una estimación experimental indirecta de G_{1c} :

$$G_{1c} = \frac{E_{22} \cdot t_{90} \cdot (\epsilon_{yy}^c)^2}{g(\Delta\hat{a}_{min,g})} \tag{7}$$

donde E_{22} y t_{90} son conocidos de los ensayos de caracterización y de la inspección previa respectivamente, mientras que ε_{yy}^c es el resultado del ensayo y $g(\Delta\hat{a}_{min,g})$ un valor que puede ser obtenido numéricamente y que solo depende de las propiedades elásticas de la lámina (para laminados geoméricamente semejantes) y que puede ser fácilmente tabulado. Este procedimiento ha sido verificado con los resultados experimentales de Parvizi et al. (1978) mostrando un buen acuerdo con los valores de G_{1c} medidos de forma directa.

6. CONCLUSIONES

Un modelo teórico ha sido desarrollado para la predicción de la aparición de una grieta en la capa central de laminados cruzados simétricos $[0_m, 90_n]_s$. En particular se obtiene una expresión muy sencilla para la obtención de la deformación crítica en función del número adimensional de fragilidad, γ , demostrando su utilidad. Esta expresión depende de un valor numérico solo definido por las propiedades elásticas y la configuración del laminado y puede ser calculado por medio del MEC. Los resultados obtenidos muestran un buen acuerdo con los resultados experimentales disponibles en la literatura. Finalmente se presenta un procedimiento experimental indirecto para la estimación de la tenacidad transversal a la fractura con una excelente relación exactitud-simplicidad.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue financiada por la Junta de Andalucía (Proyecto de Excelencia TEP-4051), el Ministerio de Educación (Beca F.P.U. 2009-3968), el Ministerio de Ciencia e Innovación (MAT2009) y el Fondo Social Europeo.

REFERENCIAS

- BLÁZQUEZ, A., V. MANTIČ, F. PARÍS Y L. MCCARTNEY (2008). Stress state characterization of delamination cracks in $[0/90]$ symmetric laminates by BEM. *International Journal of Solids and Structures* 45 (6), 1632–1662.
- BLÁZQUEZ, A., V. MANTIČ, F. PARÍS Y N. MCCARTNEY (2009). BEM analysis of damage progress in $0/90$ laminates. *Eng. Anal with Boundary Elements* 33, 762–769.
- LEGUILLON, D. (2002). Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics, A/- Solids* 21 (1), 61–72.
- MANTIČ, V. (2009). Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tensión. Application of a coupled stress and energy criterion. *International Journal of Solids and Structures* 46 (6), 1287–1304.
- MANTIČ, V., I. G. GARCÍA, A. BLÁZQUEZ, Y F. PARÍS (2011). Transverse crack onset in cross-ply $[0,90]_s$ laminates under tension. Application of a coupled stress and energy criterion. (En preparación).
- PARÍS F., A. BLÁZQUEZ, L. MCCARTNEY, Y V. MANTIČ (2010). Characterization and evolution of matrix and interface related damage in $[0/90]_s$ laminates under tension. Part I: Numerical predictions. *Composites Science and Technology* 70 (7), 1168–1175.
- PARVIZI, A., K. GARRETT, Y J. BAILEY (1978). Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science* 13 (1), 195–201.