FORMULACION SIMETRICA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO PARA MATERIALES ELASTICOS ANISOTROPOS EN 2D

V. Mantič y F. París
Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla

Resumen: El estudio presente forma la base teórica de la implementación de un código del Método de los Elementos de Contorno (MEC) Simétrico para el análisis tensional de materiales anisótropos homogéneos en estados de defomación plana generalizada o tensión plana. Se discuten algunas ventajas que tiene el MEC Simétrico frente al enfoque convencional. Se desarrolla un planteamiento débil y simétrico de las Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) para un problema elástico mixto. Se introducen expresiones explícitas para los núcleos integrales que aparecen en estas EIC. Se desarrolla un procedimiento simple para la regularización de la integral hipersingular que se precisa para un cálculo eficaz de la forma cuadrática correspondiente.

Abstract: The present study provides the theoretical basis for an implementation of a Symmetrical Boundary Element Method (SBEM) code for stress analysis of anisotropic homogeneous materials subjected to a generalised plane deformation or plane stress state. Some advantages of SBEM over the conventional approach are discussed. A weak symmetrical formulation of Boundary Integral Equations for a mixed elastic problem is given. Explicit expressions of the integral kernels are introduced. A simple procedure of regularization of the hypersingular integral, required for an efficient evaluation of the corresponding quadratic form, is developed.

1 Introducción

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha mostrado como una herramienta eficiente para el análisis tensional de estructuras que se pueden modelar desde un punto de vista macroscópico como homogéneas. El desarrollo del MEC para materiales anisótropos en el estado de tensión plana o deformación plana generalizada fue promovido, desde los trabajos originales de Rizzo y Shippy [13] y Cruse y Swedlow [5], por sus aplicaciones a materiales compuestos, particularmente a laminados modelados como una lámina equivalente.

Los recientes trabajos de los autores y sus colaboradores en el MEC en relación con materiales anisótropos en dos dimensiones (2D) se han concentrado en el desarrollo de las formulaciones de las Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) para estos materiales [7, 8, 9] y en las aplicaciones del MEC en su versión convencional, colocacional y no-simétrica, a problemas con concentraciones y singularidades de las tensiones [1, 12] y con el contacto entre dos sólidos [11], y finalmente en el estudio de ciertos aspectos numéricos de estas aplicaciones (como por ejemplo la velocidad de convergencia a la solución analítica) [2, 3].

La posibilidad de desarrollo de una formulación débil y simétrica del MEC (también llamada de Galerkin) que tiene ciertas ventajas frente al método convencional ha inspirado recientemente muchos trabajos dedicados al estudio y a las aplicaciones de este método a diferentes problemas.

Las ventajas principales de este nuevo enfoque son las siguientes:

- La simetría del sistema de ecuaciones lineales que permite guardar sólo la mitad de la matriz correspondiente y aplicar los algoritmos de resolución más eficazes,
- Facilita la aplicación de la ecuación hipersingular al análisis de las grietas,
- Proporciona resultados significativamente más precisos en el interior del dominio,
- Evita dificultades con la sobreabundancia de incógnitas,
- Permite, siendo una formulación débil y simétrica, un acoplamiento con el Método de los Elementos Finitos (MEF) más coherente,
- Permite la aplicación de los métodos matemáticos bien desarrollados para el estudio de la convergencia del error.

Hay que mencionar que, por ahora, la desventaja principal de este enfoque, doble integración sobre el contorno, hace más lenta su amplia utilización en la ingeniería. Sin embargo, recientes estudios demuestran que para problemas grandes en cuanto al número de elementos de contorno este nuevo enfoque puede ser ya actualmente más eficaz que el enfoque convencional.

El propósito de este trabajo es básicamente completar la formulación débil simétrica del MEC para materiales anisótropos en 2D en base a los recientes resultados de Bonnet [4], Sirtori y otros [14] y de los autores [8, 9]. El énfasis está en una derivación sencilla basada en un principio mecánico, en la introducción de las expresiones explícitas de los núcleos integrales que aparecen en las EIC de esta formulación y finalmente en la regularización de la integral hipersingular. Estos dos últimos resultados son fundamentales para la implementación de este método en un código basado en el MEC.

2 Funciones de Green

La teoría moderna de materiales anisótropos (véase [16]) sometidos a los estados de: deformación plana generalizada ($d = 3$, desplazamientos u_i ($i = 1,2,3$) dependen sólo de las coordenadas planas), deformación plana ($d = 2$) de un material monoclínico con el plano de simetría $x_3 = 0$ y tensión plana ($d = 2$), está basada en la siguiente representación de Stroh [15] del vector de los desplazamientos, u, y del vector de la función de tensión, φ:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{u}(\mathrm{x}) \\ \varphi(\mathrm{x}) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} [\mathrm{f}(\mathrm{x})] \right\}, \tag{1}$$

donde $\mathrm{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ es un punto en coordenadas cartesianas planas y

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in C^{d\times d}, \qquad \mathrm{f}(\mathrm{x}) = [f_1(z_1(\mathrm{x})), \ldots, f_d(z_d(\mathrm{x}))]^T \in C^d, \tag{2}$$

$$z_\alpha(\mathrm{x}) = x_1 + \mu_\alpha x_2, \qquad \mu_\alpha \in C, \quad \mathrm{Im}\, \mu_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, \ldots, d. \tag{3}$$

Re and Im designan las partes reales e imaginarias de un número complejo, C es el conjunto de los números complejos, f_α son funciones complejas analíticas de las variables complejas transformadas z_α, μ_α son las raíces complejas de la ecuación característica del material. Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dependen de las propiedades elásticas del material. El estudio presente está restringido a los materiales no degenerados matematicamente [16] con $\mu_\alpha \neq \mu_{\alpha'}$ para $\alpha \neq \alpha'$.

El vector tensión t y el tensor de tensiones σ_{ij} se calculan como:

$$\mathrm{t}(\mathrm{x}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_x}(\mathrm{x}), \qquad \sigma_{ij}(\mathrm{x}) = -\varepsilon_{ja}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_a}(\mathrm{x}), \tag{4}$$

donde $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, 2$, ε_{ia} está definido como $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ y $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. $\partial/\partial s_x = s_a(\mathrm{x})\partial/\partial x_a$ define la derivada tangencial con respecto a un contorno de los vectores unitarios tangencial, $\mathrm{s}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2$, y normal exterior, $\mathrm{n}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2$, estando $\mathrm{s}(\mathrm{x})$ y $\mathrm{n}(\mathrm{x})$ relacionados por $s_a(\mathrm{x}) = n_j(\mathrm{x})\varepsilon_{ja}$. Si es necesario, la componente σ_{33} se calcula a partir de las restantes componentes de tensión, utilizando la condición $\partial u_3/\partial x_3 = 0$.

Recientemente, los autores han presentado una nueva representación simétrica de tensiones [8]:

$$\sigma_{ij}(\mathrm{x}) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\alpha=1}^{d} B_{i\alpha} B_{j\alpha} \kappa_\alpha f'_\alpha(z_\alpha(\mathrm{x})) \right\}, \tag{5}$$

con el rango de los indices $i, j = 1, \ldots, d$ y $(i,j) \neq (3,3)$, donde $\kappa_\alpha = 1/B_{2\alpha}$ son los llamados coeficientes de normalización, designando la prima la derivada con respecto a la variable compleja. Esta representación ha permitido una derivación sencilla de las funciones de Green (también llamadas funciones de influencia) que aparecen en las EIC de la formulación simétrica, que se presentan a continuación.

En este trabajo se utilizará la siguiente notación sistemática de las funciones de Green. Una función de Green es un tensor bi-punto designado como $\mathrm{F}^s(\mathrm{x}_f, \mathrm{x}_s)$ y un elemento de él como $F^s_{if\,is}(\mathrm{x}_f, \mathrm{x}_s)$. F designa la variable de campo (es decir desplazamientos si $F = U$, función tensión si $F = \Phi$, vector tensión si $F = T$) causada por una fuente de singularidad. El superíndice s especifica la fuente de singularidad a través de la cantidad conjugada por el trabajo (en el sentido de trabajo virtual): fuerza unidad si $s = u$, dislocación unidad si $s = \varphi$, discontinuidad unitaria de desplazamientos (un dipolo de dislocaciones) si $s = t$). Los subíndices 'if' y 'is' respectivamente son los índices pertinentes de las variables de campo y de la fuente, y $\mathrm{x}_f \in \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{x}_s \in \mathbb{R}^2$ designan respectivamente los puntos del campo y de la fuente. En el caso de deformación plana (generalizada) la fuente de la singularidad está situada a lo largo de una línea infinita paralela al eje x_3 que pasa a través del punto x_s.

Basándose en un resultado fundamental de Stroh [16] (véase Tabla 1a), y utilizando la representación (5) se han derivado en [9] las expresiones de las funciones de Green que aparecen en la formulación simétrica de las EIC (véase Tabla 1b). Las funciones de Green se presentan aquí en la forma de matrices 2×2 que reflejan las relaciones de reciprocidad entre las funciones de Green situadas simétricamente frente a la diagonal (una discusión detallada y las referencias al respecto se pueden encontrar en [9]) y que se pueden escribir en la siguiente forma:

$$F^s_{if\,is}(\mathrm{x}_f, \mathrm{x}_s) = S^f_{is\,if}(\mathrm{x}_s, \mathrm{x}_f). \tag{6}$$

Hay que mencionar que $\mathbf{U}^\varphi$ y $\mathbf{\Phi}^u$ tienen una línea de discontinuidad, que pasa desde la fuente de la singularidad hasta el infinito, y que, por consiguiente, en la relación de reciprocidad (6) aplicada a estas dos funciones aparece una constante. Este hecho tiene cierta trascendencia a la hora de regularizar las integrales fuertemente singulares mediante la integración por partes en la formulación simétrica de EIC.

a)

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & U^\varphi_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline \Phi^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & \Phi^\varphi_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline \end{array} = Re\left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline \frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} A_{i\alpha}A_{k\alpha}\log z_\alpha & \frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} A_{i\alpha}B_{k\alpha}\log z_\alpha \\ \hline \frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} B_{i\alpha}A_{k\alpha}\log z_\alpha & \frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} B_{i\alpha}B_{k\alpha}\log z_\alpha \\ \hline \end{array} \right\}
$$

b)

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & U^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline T^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & T^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & -\frac{\partial}{\partial s_y}U^\varphi_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline -\frac{\partial}{\partial s_x}\Phi^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) & \frac{\partial^2}{\partial s_x\partial s_y}\Phi^\varphi_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline \end{array}
$$

$$
= Re\left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline \frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} A_{i\alpha}A_{k\alpha}\log z_\alpha & -\frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} A_{i\alpha}B_{k\alpha}B_{l\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{z_\alpha}n_l(\mathrm{y}) \\ \hline n_j(\mathrm{x})\frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} B_{i\alpha}B_{j\alpha}A_{k\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{z_\alpha} & n_j(\mathrm{x})\frac{1}{\pi\imath}\sum\limits_{\alpha=1}^{d} B_{i\alpha}B_{j\alpha}B_{k\alpha}B_{l\alpha}\frac{\kappa_\alpha^2}{z_\alpha^2}n_l(\mathrm{y}) \\ \hline \end{array} \right\}
$$

Tabla 1: a) Funciones de Green básicas y sus expresiones derivadas por Stroh. b) Funciones de Green de la formulación simétrica de EIC y sus expresiones. z_α designa $z_\alpha(\mathrm{x}-\mathrm{y})$. $i,k=1,\ldots,d$ y $j,l=1,2$.

3 Identidades de Somigliana

Sea $\Omega\subset I\!R^2$ un dominio abierto con contorno Γ. Partiendo de las Identidades de Somigliana de desplazamientos y de tensiones en la interpretación indirecta derivadas en [9], se pueden derivar mediante un procedimiento estándar y aplicando las relaciones de Stroh (compárese con [7, 9]), las siguientes Identidades de Somigliana para todos los puntos $\mathrm{x}\in I\!R^2$ excluyendo las esquinas del contorno Γ. Para simplificar las fórmulas presentadas aquí no se van considerar las fuerzas de volumen.

$$
\begin{aligned}
C(\mathrm{x})u_i(\mathrm{x}) &= \int_\Gamma U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - \fint_\Gamma U^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), && (7)\\
C(\mathrm{x})t_i(\mathrm{x}) &= \fint_\Gamma T^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - =\!\!\!\!\!\!\!\int_\Gamma T^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), && (8)
\end{aligned}
$$

donde C(x)=1 para $\mathrm{x}\in\Omega$, $\frac{1}{2}$ para $\mathrm{x}\in\Gamma$ y 0 si $\mathrm{x}\in I\!R^2\setminus(\Omega\cup\Gamma)$. $\fint$ y $=\!\!\!\!\!\!\int$ designan las integrales en el sentido del Valor Principal de Cauchy y la Parte Finita de Hadamard respectivamente y son de aplicación sólo si $\mathrm{x}\in\Gamma$.

4 Formulación Débil Simétrica de las Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC)

Consideremos ahora un problema elástico en un dominio Ω acotado y simplemente conexo. Supongamos la división del contorno Γ en dos partes disjuntas, $\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_t$, y que sobre Γ_u están prescritos los desplazamientos $\overline{\mathrm{u}}$ y sobre Γ_t el vector tensión $\overline{\mathrm{t}}$. Es conveniente suponer que $\overline{\mathrm{u}}$ representa a la vez alguna prolongación del modo continuo de la condición de contorno sobre Γ_u a todo el contorno Γ.

4.1 Una formulación integral del problema elástico

Partiendo del segundo Teorema de Betti de la reciprocidad de trabajos y utilizando la existencia y unicidad de la solución de un problema elástico se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1. La condición necesaria y suficiente para que un campo de desplazamientos $\mathrm{u}+\overline{\mathrm{u}}$ definido sobre Γ_t, $\mathrm{u}|_{\partial\Gamma_t}=\mathbf{0}$, y el campo del vector tensión t definido sobre Γ_u, sean respectivamente las restricciones de los desplazamientos y del vector tensión del problema elástico sobre las pertinentes partes del contorno es que se cumpla la ecuación:

$$
\int_{\Gamma_u} t_i(\mathrm{x})v_i(\mathrm{x})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{x}) - \int_{\Gamma_t} u_i(\mathrm{x})T^n_i(\mathrm{v})(\mathrm{x})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{x}) = \int_\Gamma \overline{u}_i(\mathrm{x})T^n_i(\mathrm{v})(\mathrm{x})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{x}) - \int_{\Gamma_t}\overline{t}_i(\mathrm{x})v_i(\mathrm{x})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{x}) \qquad (9)
$$

para todo campo de desplazamientos continuo v definido sobre Γ, siendo $\mathbf{T}^n(\mathrm{v})$ el vector tensión correspondiente. □

4.2 Una representación de los desplazamientos

Teorema 2. Cualquier campo de desplazamientos v que cumple las ecuaciones de equilibrio en Ω se puede representar como:

$$
v_i(\mathrm{x}) = \int_{\Gamma_u} U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - \int_{\Gamma_t} U^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), \qquad (10)
$$

donde $\mathrm{x}\in\Omega$, cumpliéndose $\mathrm{u}^*|_{\partial\Gamma_t}=\mathbf{0}$. □

En la demostración del teorema se utiliza un procedimiento estandar en la Teoría de las EIC que consiste en considerar dos problemas elásticos, uno en Ω con condiciones de contorno $\mathrm{v}|_{\Gamma_u}$ y $\mathbf{T}^n(\mathrm{v})|_{\Gamma_t}$, y otro en el dominio complementario $I\!R^2\setminus(\Omega\cup\Gamma)$ con condiciones de contorno $\mathrm{v}|_{\Gamma_u}$ y $-\mathbf{T}^n(\mathrm{v})|_{\Gamma_t}$.

Sumando las Identidades de Somigliana (7) para los dos problemas en un punto $\mathrm{x}\in\Omega$ se obtiene (10) con u^* y t^* definidas como las diferencias entre los desplazamientos y el vector tensión de los problemas elásticos sobre el dominio original y el complementario.

Realizando ahora el paso al límite del interior del dominio al contorno se obtienen de la representación (10) las siguientes EIC para $\mathrm{x}\in\Gamma$, excluyendo los puntos esquina de Γ:

$$
\begin{aligned}
v_i(\mathrm{x}) &= \int_{\Gamma_u} U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - \int_{\Gamma_t} U^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), \quad \mathrm{x}\in\Gamma_u, && (11)\\
v_i(\mathrm{x}) &= \int_{\Gamma_u} U^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) + \frac{1}{2}u^*_i(\mathrm{x}) - \fint_{\Gamma_t} U^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), \quad \mathrm{x}\in\Gamma_t, && (12)\\
T^n_i(\mathrm{v})(\mathrm{x}) &= \frac{1}{2}t^*_i(\mathrm{x}) + \fint_{\Gamma_u} T^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - \int_{\Gamma_t} T^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), \quad \mathrm{x}\in\Gamma_u, && (13)\\
T^n_i(\mathrm{v})(\mathrm{x}) &= \int_{\Gamma_u} T^u_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})t^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}) - =\!\!\!\!\!\!\!\int_{\Gamma_t} T^t_{ik}(\mathrm{x},\mathrm{y})u^*_k(\mathrm{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{y}), \quad \mathrm{x}\in\Gamma_t. && (14)
\end{aligned}
$$

4.3 Formulación débil simétrica de las EIC

Sustituyendo las ecuaciones (11)-(14) en (9) se obtiene finalmente la siguiente formulación débil simétrica de las EIC.

Teorema 3. La condición necesaria y suficiente para que un campo de desplazamientos $\mathrm{u}+\overline{\mathrm{u}}$ definido sobre Γ_t, $\mathrm{u}|_{\partial\Gamma_t}=\mathbf{0}$, y el campo del vector tensión t definido sobre Γ_u sean las restricciones de los desplazamientos y del vector tensión del problema elástico sobre las pertinentes partes del contorno es que se cumplan las siguientes ecuaciones para todo campo $\mathbf{u}^*$ definido sobre Γ_t, $\mathbf{u}^*|_{\partial\Gamma_t} = \mathbf{0}$, y todo campo $\mathbf{t}^*$ definido sobre Γ_u:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{t},\mathbf{t}^*) + \mathcal{B}_{tu}(\mathbf{u},\mathbf{t}^*) &= \mathcal{F}_u(\mathbf{t}^*) \qquad (15)\\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{t},\mathbf{u}^*) + \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) &= \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^*) \qquad (16) \end{aligned}$$

donde las formas cuadráticas $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = u, t)$, se definen como:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{t},\mathbf{t}^*) &= \int_{\Gamma_u} t_i(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_u} U^u_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) t^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (17)\\ \mathcal{B}_{tu}(\mathbf{u},\mathbf{t}^*) &= -\int_{\Gamma_t} u_i(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_u} T^u_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) t^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (18)\\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{t},\mathbf{u}^*) &= -\int_{\Gamma_u} t_i(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_t} U^t_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (19)\\ \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) &= \int_{\Gamma_t} u_i(\mathbf{x}) =\!\!\!\!\!\!\int_{\Gamma_t} T^t_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (20) \end{aligned}$$

y las formas lineales $\mathcal{F}_\alpha$ $(\alpha = u, t)$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\mathbf{t}^*) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_u} \overline{u}_i(\mathbf{x}) t^*_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \overline{u}_i(\mathbf{x}) \fint_{\Gamma_u} T^u_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) t^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) - \\ \int_{\Gamma_t} \overline{t}_i(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_u} U^u_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) t^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}), \qquad (21)\\ \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^*) = -\int_{\Gamma} \overline{u}_i(\mathbf{x}) =\!\!\!\!\!\!\int_{\Gamma_t} T^t_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_t} \overline{t}_i(\mathbf{x}) u^*_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) + \\ \int_{\Gamma_t} \overline{t}_i(\mathbf{x}) \fint_{\Gamma_t} U^t_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}). \qquad (22) \end{aligned}$$

□

Las relaciones de reciprocidad entre los núcleos integrales (6) y el hecho de que el orden de integración se pueda cambiar en todas las integrales que aparecen en las formas cuadráticas (para la forma con la integral hipersingular este hecho se demostrará en el apartado siguiente) implican la simetría de la formulación de las EIC presentada.

Si se cambia el orden de integración en todas las integrales se puede observar, teniendo en cuenta las relaciones de reciprocidad (6), que la ecuación (15) representa en realidad el residuo de la Identidad de Somigliana en desplazamientos para el problema analizado multiplicado en Γ_u por el campo proyectante $\mathbf{t}^*$ y la ecuación (16) el residuo de la Identidad de Somigliana del vector tensión multiplicado en Γ_t por el campo proyectante $\mathbf{u}^*$. Por esta posibilidad de interpretación (y de obtención) la formulación presentada se llama muchas veces formulación simétrica de Galerkin de las EIC.

La discretización de (15)-(16) por el MEC se realiza de una manera estándar. La única dificultad que puede presentarse es el cálculo de las integrales dobles con carácter de singularidad débil, fuerte o hiper. Aquí hay que mencionar que la utilización de las representaciones de los núcleos integrales $\mathbf{T}^u$, $\mathbf{U}^t$ y $\mathbf{T}^t$ (Tabla 1b), como derivadas tangenciales de las funciones de Green básicas con el orden de singularidad más bajo, puede facilitar el cálculo de estas integrales, utilizando la integración por partes sobre cada elemento. Otro enfoque es regularizar previamente, integrando por partes, las integrales sobre todo el contorno y después discretizar. Mientras que la regularización de las integrales fuertemente singulares que incluyen los núcleos $\mathbf{T}^u$ y $\mathbf{U}^t$ resulta dar ciertas complicaciones causadas por la línea de discontinuidad de las funciones de Green $\mathbf{\Phi}^u$ y $\mathbf{U}^\varphi$ (véase la Sección 2 y [6, 9, 17]), la regularización de la integral hipersingular que incluye el núcleo $\mathbf{T}^t$ proporciona una expresión de la forma cuadrática $\mathcal{B}_{tt}$ sencilla, fácil de discretizar de una manera eficaz desde el punto de vista del cálculo de las integrales. Esta regularización se desarrolla en el apartado siguiente.

4.4 Regularización de la integral hipersingular

El siguiente procedimiento desarrolla una idea de Nedelec [10] originalmente aplicada a materiales isótropos y a la formulación de EIC indirecta.

Supongamos que el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ se define sobre todo el contorno Γ tomando valor cero sobre Γ_u, y que está definido en el dominio Ω donde cumple la ecuación de equilibrio. Entonces, suponiendo en (14) que $\mathbf{t}^* = \mathbf{0}$, se puede escribir:

$$\mathcal{B}_{tt}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = -\int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T^n_i(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} u_{i,j}(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Omega(\mathbf{x}), \qquad (23)$$

donde $\mathbf{v}$ está definido por (10). Teniendo en cuenta la relación entre $\mathbf{T}^t$ y $\mathbf{\Phi}^\varphi$, Tabla 1b, y las expresiones (4) se obtiene que:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ja}\frac{\partial}{\partial x_a}\int_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi^\varphi_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial s_y} u^*_k(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) = -\varepsilon_{ja}\frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_a}, \qquad (24)$$

donde $F_i(\mathbf{x})$ se puede expresar, para $\mathbf{x} \in \Omega$, utilizando la integración por partes como:

$$F_i(\mathbf{x}) = -\int_{\Gamma_t} \Phi^\varphi_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial u^*_k(\mathbf{y})}{\partial s_y} \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}). \qquad (25)$$

Sustituyendo (24) en (23) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{i,j}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ja} \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_a} \mathrm{d}\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \varepsilon_{ja} n_a(\mathbf{x}) u_{i,j}(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) = \\ -\int_{\Gamma_t} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial s_x} F_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_t} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial s_x} \int_{\Gamma_t} \Phi^\varphi_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial u^*_k(\mathbf{y})}{\partial s_y} \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}). \qquad (26) \end{aligned}$$

La última expresión obtenida es la nueva expresión de $\mathcal{B}_{tt}(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)$ la cual contiene sólo una integral con la singularidad débil. Este resultado en primer lugar facilita el cálculo de las integrales y en segundo lugar implica que el orden de integración en la forma cuadrática $\mathcal{B}_{tt}$ se puede cambiar. Ello, unido al carácter simétrico de $\mathbf{\Phi}^\varphi$, implica la simetría de esta forma cuadrática.

5 Conclusiones

Se ha desarrollado la formulación débil de las Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) de un problema elástico mixto para un material anisótropo en el estado de defomación plana (generalizada) o tensión plana. Con base en el formalismo de Stroh para materiales anisótropos y en un nuevo enfoque para la representación de tensiones en este formalismo, se han introducido las expresiones explícitas en variable compleja de todos los núcleos integrales que aparecen en estas EIC. La utilización de variable compleja facilitará el cálculo analítico de las integrales sobre los elementos de contorno rectilíneos. La mayor contribución de este trabajo desde el punto de vista teórico y computacional es la regularización de la integral hipersingular. Los resultados de este estudio son la base para la programación de un código basado en el MEC que permitirá el análisis tensional de laminados de materiales compuestos modelados como una lámina equivalente anisótropa.

Referencias

[1] R. Avila, V. Mantič y F. París, El método de los elementos de contorno aplicado a materiales compuestos de comportamiento ortótropo. Una nueva formulación en variable compleja, *Materiales Compuestos, 95*, F. París y J. Cañas (Eds.), **365**, AEMAC (1995)

[2] R. Avila, V. Mantič y F. París, Aspectos numéricos del método de los elementos de contorno aplicado a materiales ortótropos, *Métodos Numéricos en Ingeniería*, **1471**, SEMNI (1996)

[3] R. Avila, V. Mantič and F. París, Application of the boundary element method to elastic orthotropic materials in 2D: Numerical Aspects, *BEM 19*, C.A. Brebbia et al. (Eds.), Computational Mechanics Publications (1997)

[4] M. Bonnet, Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 15, **93**, (1995)

[5] T.A. Cruse and J.L. Swedlow, *Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites Technology*, Air Force Materials Laboratory Technical Report, AFML-TR-71-268 (1971)

[6] N. Ghosh, H. Rajiyah, S. Ghosh and S. Mukherjee, A new boundary element method formulation for linear elasticity, *J. Applied Mechanics*, Vol. 53, **69** (1986)

[7] V. Mantič and F. París, Explicit formulae of the integral kernels and C-matrix in the 2D Somigliana identity for orthotropic materials, *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. 15, **283** (1995)

[8] V. Mantič and F. París, Symmetrical representation of stresses in the Stroh formalism and its application to a dislocation and a dislocation dipole in an anisotropic elastic medium, *J. Elasticity* (in press)

[9] V. Mantič and F. París, Integral kernels in the 2D Somigliana displacement and stress identities for anisotropic materials, *Fundamental Solutions in Boundary Elements: Formulation and Integration*, F. Benitez (Ed.), **41**, University of Seville (1997)

[10] J.C. Nedelec, Integral equations with non integrable kernels, *Integral Equations Operator Theory*, Vol. 5, **562** (1982)

[11] F. París, A. Blázquez and J. Cañas, Contact problems testing composite materials by the boundary element method, *Contact Mechanics II, Computational Techniques*, M.H. Aliabadi and C. Alessandri (Eds.), **193**, Computational Mechanics Publications (1995)

[12] F. París, A. Blázquez, J. Cañas and V. Mantič, Analysis of singularities in composite materials by BEM, *BEM 17*, C.A. Brebbia et al. (Eds.), **133**, Computational Mechanics Publications (1995)

[13] F.J. Rizzo and D.J. Shippy, A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies, *J. Composite Materials*, Vol. 4, **36** (1970)

[14] S. Sirtori, G. Maier, G. Novati and S. Miccoli, A Galerkin symmetric boundary-element method in elasticity: formulation and implementation, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, **255** (1992)

[15] A.N. Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.*, Vol. 41, **77** (1962)

[16] T.C.T. Ting, *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*, Oxford University Press (1996)

[17] K.C. Wu, Y.T. Chiu, Z.H. Hwu, A new boundary integral equation formulation for linear elastic solids, *J. Applied Mechanics*, Vol. 59, **344** (1992)