

ESTUDIO DE LA APLICACION DE FACTORES DE CORRECCION ANALITICOS SOBRE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL ENSAYO OFF-AXIS

Marín Vallejo J.C.¹; Cañas Delgado J.¹; París Carballo F.¹, Mantic V.¹

¹ Dpto. Mecánica de Medios Continuos, E.S. Ingenieros de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n. 41092 Sevilla, Tfno: 95-4487299. Fax: 95-4461637

Resumen : En el presente trabajo se analizan los diversos métodos de corrección analíticos aplicables a los resultados experimentales del ensayo Off-Axis, haciéndose una comparación de los resultados de distintos algoritmos iterativos.

Como alternativa, se propone un nuevo procedimiento basado en la representación gráfica de un factor de corrección analítico. La invariancia de estos gráficos es comprobada, verificándose así la aplicabilidad del método propuesto.

Abstract : Several analytic corrector methods of the Off-Axis test experimental results are analysed in the present work. A comparison of different iterative algorithms is made.

A new approach based on a graphic representation of an analytic correction factor is proposed. The invariable behaviour of these graphics is verified, showing in this way the method applicability.

1.- INTRODUCCION.

El ensayo de tracción off-axis es uno de los métodos más extendidos para la evaluación de G_{12} en laminados unidireccionales, sin embargo son bien conocidos los problemas que presenta la interpretación correcta de los resultados [1, 2], asociados al acoplamiento entre tensiones normales y deformaciones tangenciales, y que se traducen en errores apreciables en la evaluación de G_{12} . Una de las tendencias más extendidas para solventar estos problemas consiste en la aplicación de factores de corrección sobre los resultados medidos. En este sentido, Pagano y Halpin [1] obtuvieron la solución de un problema aproximado al de extremos empotrados, y en base a ésta propusieron un factor de corrección sobre el módulo elástico E_x , a partir del cuál se puede calcular G_{12} .

Por otra parte, Pindera y Herakovich [3], basándose en la solución del problema de Pagano y Halpin, proponen otro factor de corrección sobre el valor del módulo de cizalladura G_{12} .

Ambas expresiones correctoras incluyen la dependencia del valor de G_{12} además del resto de propiedades del material (E_{11} , E_{22} y ν_{12}), por lo que su correcta aplicación implicaría un procedimiento iterativo. En este trabajo se ha llevado a cabo la comparación de ambos métodos suponiendo como situación real para el ensayo la configuración de extremos empotrados, siendo evaluada la solución de dicho problema numéricamente mediante el método de elementos finitos.

Por último, se propone como método de corrección alternativo el empleo de unos gráficos evaluados a partir de la solución analítica de Pagano y Halpin. La invariancia de dichos gráficos frente a las propiedades del material es analizada, quedando avalada la aplicabilidad de los mismos para los compuestos de grafito-epoxy.

2.- ESTUDIO COMPARADO DE PROCEDIMIENTOS DE CORRECCION ITERATIVOS.

Como se ha comentado anteriormente, cabrían dos opciones para obtener un valor corregido de G_{12} . Una de ellas está en la línea de la propuesta por Pindera, es decir, obtener un valor aparente de G_{12} (G_{12}^*) a partir de $G_{12}^* = \sigma_{12}^* / \gamma_{12}$, donde γ_{12} es la deformación tangencial obtenida de la medida de tres bandas colocadas en el centro de la probeta y σ_{12}^* es calculado en función de la carga aplicada F , del área de la sección A y del ángulo de orientación de las fibras θ como:

$$\sigma_{12}^* = -\frac{F}{A} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (1)$$

A partir de este valor aparente se determina un valor corregido usando la expresión (2) de la figura 1. Si bien, hay que puntualizar que el uso de dicha expresión como procedimiento práctico de corrección requiere el empleo de un proceso iterativo, ya que el factor corrector depende a su vez del valor de G_{12} (Pindera y Herakovich no mencionan en su trabajo como emplear el factor de corrección, de hecho, no proponen ningún procedimiento iterativo sino que introducen el valor asintótico de G_{12}). En la figura 1 se muestra un esquema del procedimiento iterativo que se podría implementar basándonos en la expresión analítica de Pindera y Herakovich.

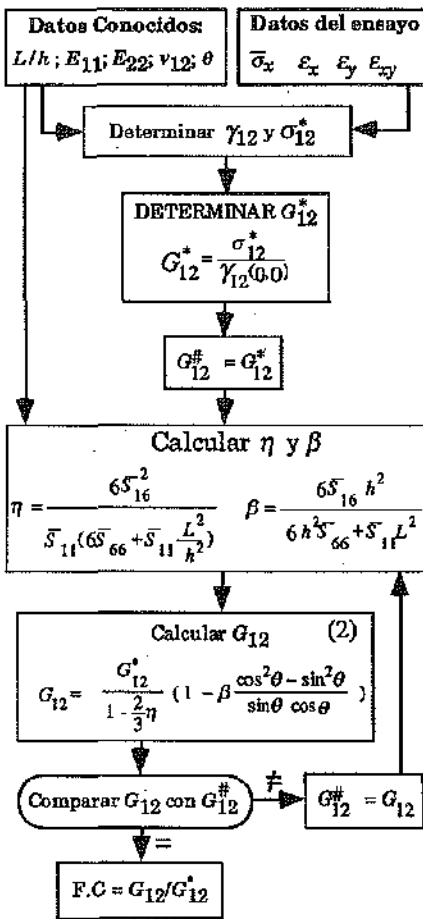
La otra opción sería obtener un valor aparente de E_x (E_x^*) como $E_x^* = \bar{\sigma}_x / \varepsilon_x$, donde ε_x es la medida de la deformación obtenida de una banda colocada en el centro de la probeta en la dirección de tracción, y $\bar{\sigma}_x$ es la tensión normal media en dirección de la carga la cuál se evalúa como F/A . Dicho valor aparente se corregirá usando la expresión (3) de la figura 1 y a partir de dicho valor corregido se obtiene un valor de G_{12} . El uso efectivo de este otro procedimiento también implicaría la utilización de un proceso iterativo al igual que ocurría en el caso anterior. Un esquema del diagrama de flujo del procedimiento a implementar se muestra en la figura 1.

Pindera y Herakovich, basándose en la solución analítica del problema aproximado, apuntaron el hecho de que las restricciones en los extremos de la probeta tienen un efecto más adverso sobre G_{12} que sobre E_x , por lo que no estaría justificado emplear un factor de corrección sobre G_{12} en vez de sobre E_x . Además, se da la circunstancia de que en ambos factores de corrección intervienen todas las propiedades del material por lo que no estaría a priori justificado el asignar más precisión a uno que a otro.

Con objeto de intentar establecer qué factor de corrección resultaría más adecuado, hemos procedido a la realización de la simulación numérica del ensayo empleando el MEF, considerando condiciones de empotramiento perfecto en los extremos de la probeta, que son las más probables cuando se emplean los dispositivos de mordazas habituales. Los resultados obtenidos de dicha simulación han sido empleados para obtener los valores aparentes, y posteriormente obtener los valores corregidos empleando los procedimientos de corrección descritos. Para dicha simulación se tomaron diferentes orientaciones de fibras, dos relaciones de aspecto geométrico (longitud/ancho = $L/2h = 5$ y 10) y se usaron las propiedades del compuesto grafito-poliimida empleado por Pindera y Herakovich en su estudio experimental.

En relación con los valores aparentes del módulo de cortadura puede observarse en la figura 2 que para todos los ángulos y las dos relaciones de aspecto consideradas, es mejor el valor aparente obtenido indirectamente a partir de E_x^* . En cualquier caso, los errores cometidos frente al valor real de G_{12} (5 GPa) (ver figura 3) son muy elevados para ángulos inferiores a 15° incluso para relaciones $L/2h$ de 10 (cercaos al 10%).

Procedimiento basado en Pindera-Herakovich



Procedimiento basado en Pagano-Halpin

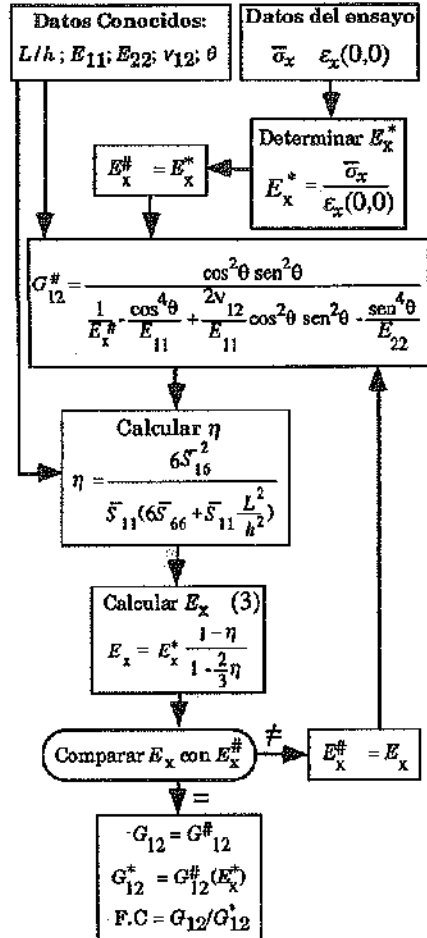


Figura 1.- Diagramas de flujo de los procesos iterativos de corrección.

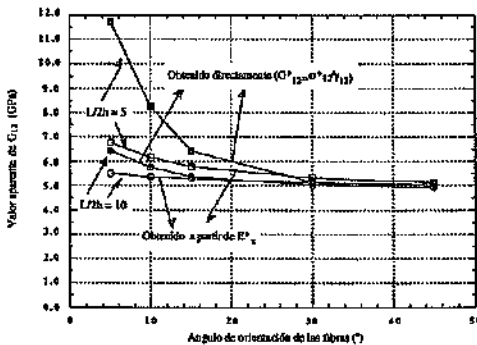


Figura 2.- Valor aparente de G_{12} en función del ángulo de orientación de las fibras para $L/2h = 5$ y 10 .

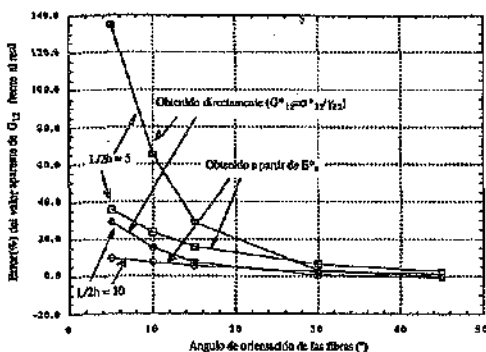


Figura 3.- Error del valor aparente de G_{12} frente al valor real como función del ángulo de orientación de las fibras para $L/2h = 5$ y 10.

Igual conclusión puede ser obtenida respecto a los valores corregidos del módulo de cortadura. Así, en la figura 4 se muestran para las dos relaciones geométricas los valores corregidos de G_{12} empleando los dos procedimientos y en la figura 5 el error cometido frente al considerado como real.

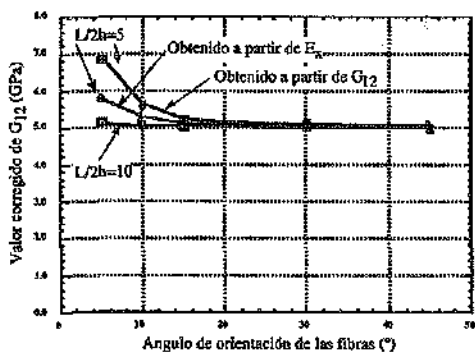


Figura 4.- Valor corregido de G_{12} en función del ángulo de orientación de las fibras para $L/2h = 5$ y 10.

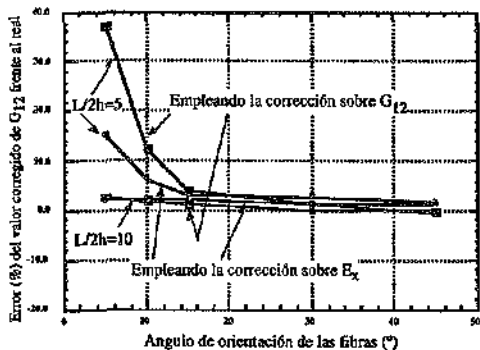


Figura 5.- Error del valor corregido de G_{12} frente al valor real en función del ángulo de orientación de las fibras para $L/2h = 5$ y 10.

De lo anterior se deduce que tanto el valor aparente como el corregido de G_{12} , obtenido a partir del valor de E_x tienen menos error que los obtenidos directamente, por lo que podría cuestionarse la utilidad del factor de corrección propuesto por Pindera y Herakovich, máxime cuando además ambos dependen del resto de propiedades del material. Con objeto de ver la influencia que dichas propiedades tienen sobre el factor de corrección, se ha procedido a efectuar un análisis de sensibilidad del valor corregido de G_{12} cuando la incertidumbre en el valor de E_{11} es de un 5%. En la figura 6 se muestran los errores cometidos sobre los valores corregidos de G_{12} obtenidos con ambos procedimientos para una relación $L/2h$ de 10, y para valores de E_{11} que oscilan un 5% sobre el nominal.

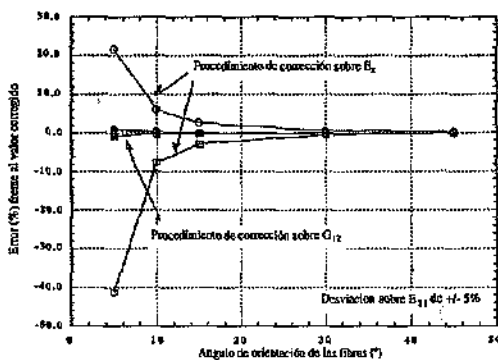


Figura 6.- Errores sobre el valor corregido de G_{12} para valores de E_{11} que oscilan un 5% respecto al valor nominal.

Como puede observarse, las variaciones en el resto de propiedades tienen una notoria influencia sobre el factor de corrección obtenido a partir de E_x , mientras que su influencia es muy escasa para el factor de corrección propuesto por Pindera y Herakovich. Por ello, consideramos que, a pesar de ser más preciso uno que otro, la fuerte dependencia con el resto de las propiedades haría decantarse hacia la corrección basada en la expresión de Pindera y Herakovich.

3.- GRAFICOS DE CORRECCION ANALITICOS.

Tal y como se ha comentado anteriormente la aplicación del factor de corrección de Pindera exige formalmente el empleo de un procedimiento iterativo, dado que los coeficientes β y η que aparecen en la corrección de Pindera, dependen de G_{12} . Una forma de soslayar dicho problema es obtener un gráfico en el que se represente el factor de corrección frente a γ_{12}/ϵ_x , dicho gráfico puede ser obtenido directamente dando valores a G_{12} (para un ángulo, una relación $L/2h$ y unas propiedades determinadas) en la expresión (2) de la figura 1 y en la expresión:

$$\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_x} = \frac{\sin 2\theta(1 - 2\beta \cot 2\theta)}{2G_{12}(\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{16}\beta)} \quad (4)$$

obtenida a partir de las expresiones de las deformaciones de la solución de Pagano. Los gráficos obtenidos, para diferentes orientaciones y una relación $L/2h=10$, se muestran en la figura 7.

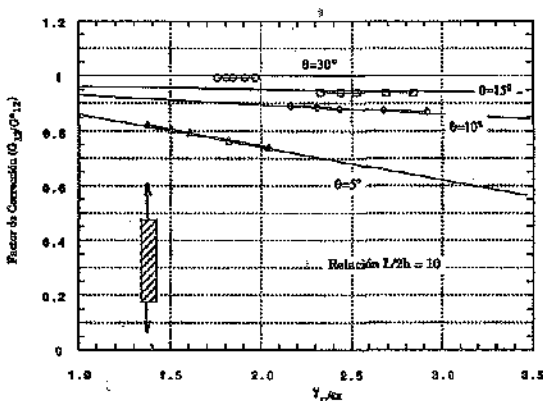


Figura 7.- Gráficos correctores para $L/2h=10$.

El uso de este gráfico evita los problemas mencionados en lo que a la obtención del factor de corrección se refiere pudiendo éste ser obtenido directamente a partir de los valores del ensayo. Sin embargo, dado que dicho gráfico ha sido obtenido para unas propiedades del material determinadas, formalmente no sería de uso general sino que para cada material tendríamos un gráfico distinto. En este sentido, y dada la débil influencia de las variaciones de E_{11} sobre el valor corregido de G_{12} , se ha estimado de interés evaluar el tipo de dependencia que presenta la función G_{12}/G_{12}^* frente a las restantes propiedades del material.

Para estudiar dicha dependencia se ha realizado un estudio analítico mediante el desarrollo en serie de la función que relaciona el factor de corrección G_{12}/G_{12}^* con γ_{12}/ϵ_x y el resto de propiedades del material (agrupadas en un vector que denominaremos $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3) = (E_{11}, E_{22}, \nu_{12})$), considerando fijas la orientación de las fibras y la relación $L/2h$,

$$\frac{G_{12}}{G_{12}^*} = f\left(-\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_x}, \underline{e}\right) \quad (5)$$

en la que el signo menos se incluye debido a que $\gamma_{12} < 0$. Con el fin de simplificar la escritura denotaremos por μ a la variable $-\gamma_{12}/\epsilon_x$.

Como punto de referencia para el desarrollo en serie se tomaron los valores medios de las propiedades en los rangos habituales de variación de las mismas para los compuestos de grafito ($E_{11}^0=130$ GPa, $100 \leq E_{11} \leq 160$; $E_{22}^0=8.5$ GPa, $2 \leq E_{22} \leq 15$; $\nu_{12}^0=6.5$ GPa, $4 \leq G_{12} \leq 9$; $\nu_{12}^0=0.3$, $0.15 \leq \nu_{12} \leq 0.45$). Estos valores medios de las propiedades determinan un valor de referencia μ^0 obtenido de la ecuación (4) (2.043 para $L/2h=10$, 1.648 para $L/2h=5$), y un valor \underline{e}^0 para el vector \underline{e} . La expresión del desarrollo en serie de la función f se muestra a continuación:

$$f(\mu, \underline{e}) = f(\mu^0, \underline{e}^0) + \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial f}{\partial e_i} \right|_0 (e_i - e_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} \right|_0 (e_i - e_i^0)(e_j - e_j^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_0 (\mu - \mu^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial e_i} \right|_0 (\mu - \mu^0)(e_i - e_i^0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_0 (\mu - \mu^0)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial \mu^2 \partial e_i} \right|_0 (\mu - \mu^0)^2 (e_i - e_i^0) + \dots$$

La evaluación del desarrollo anterior permite establecer la importancia de los términos que representan la variación con \underline{e} frente a los términos que representan la variación de la función con μ . Estos últimos describen el gráfico de corrección para el valor de referencia del vector \underline{e} ,

$$f(\mu, \underline{e}^o) = f(\mu^o, \underline{e}^o) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_o (\mu - \mu^o) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_o (\mu - \mu^o)^2 + \dots \quad (6)$$

mientras que los primeros representan las variaciones respectivas de los tres términos de la ecuación anterior, es decir, la traslación de cada punto, el cambio de pendiente en cada punto y el cambio de curvatura al variar \underline{e} .

La evaluación de los términos del desarrollo expuesto no es fácil, ya que no se dispone de una expresión explícita de la función $f(\mu, \underline{e})$, teniéndose que acudir a un cálculo indirecto de las derivadas que aparecen en el desarrollo mediante el uso de las expresiones:

$$\frac{G_{12}}{G_{12}^*} = f(G_{12}, \underline{e}, G_{12}, \underline{e}); \quad \frac{G_{12}}{G_{12}^*} = f(G_{12}(\mu, \underline{e}), \underline{e}); \quad -\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_x} = \mu(G_{12}, \underline{e}) \quad (7)$$

Las cuales representan respectivamente una familia de curvas en el espacio de coordenadas $(\mu, G_{12}, \frac{G_{12}}{G_{12}^*})$ y sus proyecciones sobre dos de los planos coordenados, siendo la otra proyección la definida por la expresión (5).

El cálculo de los mencionados términos del desarrollo en serie se realizó con la ayuda de un procesador matemático simbólico. Los valores obtenidos para el caso de ángulo 10° y ratios $L/2h$ 10 y 5 se recogen en una continuación.

	L/2h=10	L/2h=5
$f(\mu^o, \underline{e}^o)$	0.89446	0.69957
$\sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial f}{\partial e_i} \right _o (e_i - e_i^o) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} \right _o (e_i - e_i^o)(e_j - e_j^o)$	0.00202	0.00674
$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right _o (\mu - \mu^o)$	-0.03973 $(\mu - \mu^o)$	-0.13234 $(\mu - \mu^o)$
$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial e_i} \right _o (\mu - \mu^o)(e_i - e_i^o)$	-0.06291 $(\mu - \mu^o)$	-0.08413 $(\mu - \mu^o)$
$\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right _o (\mu - \mu^o)^2$	0.01184 $(\mu - \mu^o)^2$	0.06738 $(\mu - \mu^o)^2$
$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial \mu^2 \partial e_i} \right _o (\mu - \mu^o)^2 (e_i - e_i^o)$	0.04565 $(\mu - \mu^o)^2$	0.09886 $(\mu - \mu^o)^2$

Tabla 1.- Valores de los términos del desarrollo en serie.

De los resultados mostrados se observa en primer lugar que en ambos casos la variación con las propiedades de la posición de los puntos en la curva es despreciable. En segundo lugar, de los resultados se desprende que en el caso de ratio 5 el término que representa la variación máxima de la pendiente con la variación de las propiedades es poco importante frente al valor de la propia pendiente, mientras que en el caso de ratio 10 dicho término es del orden de la pendiente. Esto último indicaría a primera vista que en el caso de ratio 10 no podría considerarse despreciable la influencia de las propiedades sobre el valor de la pendiente en cada punto, sin embargo hemos de tener en cuenta que debido al pequeño valor de la pendiente, para este caso, variaciones del orden de ella misma resultan prácticamente inapreciables en la configuración de la

curva. En cuanto a la variación del término cuadrático, en ambos casos se observa que la variación máxima de la curvatura con la variación de \underline{g} es del orden de la propia curvatura, sin embargo dado el pequeño valor que alcanza la curvatura en los dos casos se pueden trasladar las mismas consideraciones hechas para la pendiente en el caso de ratio 10. Además, de la comparación entre los términos cuadráticos y lineales se pone de manifiesto la escasa relevancia de los primeros, de manera que para el rango de propiedades estudiado se pueden aproximar los gráficos correctores por los términos lineales del desarrollo, con lo que nos queda una estructura para las expresiones de los gráficos correctores tal como la siguiente:

$$\frac{G_{12}}{G_{12}^*} = A(\theta, \frac{L}{2h}) + B(\theta, \frac{L}{2h}) \frac{\gamma_{12}}{\epsilon_x} \quad (8)$$

Los valores de A y B para $\theta=10^\circ$ y ratios 5 y 10 coinciden con los términos lineales de la tabla 1.

4.- CONCLUSIONES.

Del estudio de los procedimientos iterativos basados en la solución de Pagano-Halpin se ha deducido que el método de corrección sobre E_x es el más preciso para relaciones $L/2h \geq 5$, sin embargo requiere un conocimiento exacto de los valores del resto de propiedades del material, puesto que es muy sensible a las variaciones de E_{11} . Por el contrario los procedimientos de corrección sobre el valor de G_{12} muestran una casi despreciable dependencia de los valores del resto de propiedades del material, no obstante su precisión sólo es aceptable para ratios del orden de 10 o mayores.

Por otra parte, se ha encontrado una forma más conveniente de aplicar la expresión correctora de Pindera-Herakovich, confeccionando unos gráficos cuya invariancia frente al resto de propiedades del material se ha probado para los compuestos de grafito-epoxy, y cuya estructura supone importantes ventajas respecto a los procedimientos descritos de aplicación de la expresión analítica de Pindera-Herakovich, puesto que no es preciso el conocimiento de los valores de las constantes E_{11} , E_{22} y ν_{12} del material y permite la obtención directa del factor de corrección a partir de las medidas experimentales del ensayo.

Finalmente hay que remarcar que la aplicabilidad de todos estos procedimientos basados en la solución analítica del problema aproximado, para ángulos entorno a 10° , viene limitada por el valor de la relación de aspecto de la probeta, puesto que como se ha visto para ratios inferiores a 5 los errores en G_{12} no resultan aceptables. Esta limitación puede superarse con el uso de un método corrector que se base en la solución de la configuración empotrada [4]

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por el CICYT dentro del proyecto MAT-94-0480

5.- REFERENCIAS.

- [1] - Pagano N.J. and Halpin J.C., *Influence of End Constraint in the Testing of Anisotropic Bodies*, *J. Composite Materials*, Vol.2, No.1, pp. 18-32, 1968.
- [2] - Rizzo R.R., *More on the influence of End Constraint on Off-Axis Tensile Tests*, *J. Composite Materials*, Vol.3, p. 202, April 1969.
- [3] - Pindera M-J. and Herakovich C.T., *Shear Characterization of Unidirectional Composites with the Off-Axis Tension Test*, *Exp. Mech.*, pp.103-112, March 1986.
- [4] - Cañas J., París F. and Marín J.C., *Numerical Analysis of Off-Axis Tension Test for Unidirectional Graphite-Epoxy Composites*, *Proceedings of ICCM VIII*, Honolulu, Hawaii, USA, pp. 36F1-36F12, July 1991.