

**MÁSTER UNIVERSITARIO DE ESTUDIOS AVANZADOS
EN DIRECCIÓN DE EMPRESAS**

LA BETA: PROBLEMÁTICA DE SU ESTIMACIÓN

TRABAJO FIN DE MÁSTER



José Antonio Rosendo Macías, octubre de 2017

**Departamento de Contabilidad y
Economía Financiera**



**Departamento de Economía
Financiera y Dirección de
Operaciones**

La beta: problemática de su estimación

Trabajo Fin de Máster presentado para optar al Título de Máster Universitario de Estudios Avanzados en Dirección de Empresas por José Antonio Rosendo Macías, siendo los tutores del mismo la Doctora María José Palacín Sánchez y el Doctor Filippo Di Pietro.

Vº. Bº. de los Tutores:

Alumno:

D^a. M^a José Palacín Sánchez D. Filippo Di Pietro

D. José A. Rosendo Macías

Sevilla, 25 de octubre de 2017



**MÁSTER UNIVERSITARIO DE ESTUDIOS AVANZADOS EN
DIRECCIÓN DE EMPRESAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

**TRABAJO FIN DE MÁSTER
CURSO ACADÉMICO [2016-2017]**

TÍTULO:

La beta: problemática de su estimación

AUTOR:

José Antonio Rosendo Macías

TUTORES:

Dra. María José Palacín Sánchez, Dr. Filippo Di Pietro

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

Finanzas, CAPM, Beta

RESUMEN:

El trabajo aborda el cálculo de la beta del CAPM, entrando a analizar la problemática asociada, tanto en lo referente al intervalo sobre el que se realiza la evaluación de la rentabilidad, como en distintas alternativas que contemplan el carácter variable con el tiempo de la beta. Dichas alternativas han sido esencialmente los ajustes de mínimos cuadrados de ventana móvil para distintos tamaños de ventana, y el filtro de Kalman. Todas las posibilidades planteadas son aplicadas a activos tanto del NYSE como del Mercado Español, con lo que se consigue un soporte esencial para las conclusiones alcanzadas. Entre dichas conclusiones destacan el deterioro en respuesta al aumentar el tamaño de ventana, la evolución monótona de sus coeficientes de determinación, el buen comportamiento del filtro de Kalman, y la inconsistencia sistemática al cambiar el intervalo de rentabilidad.

PALABRAS CLAVE:

Capital asset pricing model; beta; rolling least squares; filtro de Kalman.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	9
1.1 Justificación.....	9
1.2 Objetivos	9
1.3 Estructura.....	9
CAPÍTULO 2. LA BETA Y SU PAPEL EN EL CAPM	11
2.1 <i>Capital Asset Pricing Model (CAPM)</i>	11
2.2 Críticas al CAPM.....	13
CAPÍTULO 3. ESTIMACIÓN DE LA BETA.....	14
3.1 Problema estacionario.....	14
3.2 Problema no estacionario	15
3.2.1 Cálculo de ventana móvil (RLS).....	16
3.2.2 Filtro de Kalman	16
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	19
4.1 Metodología	19
4.2 Aplicación al S&P 500.....	21
4.2.1 <i>Amazon</i>	21
4.2.2 <i>AT&T</i>	27
4.2.3 <i>The Boeing Company</i>	33
4.2.4 <i>Exxon Mobil Corporation</i>	39
4.3 Aplicación al caso español	45
4.3.1 <i>Telefónica</i>	45
4.3.2 <i>Banco Santander</i>	51
4.3.3 <i>Red Eléctrica Corporación</i>	57
4.3.4 <i>Acerinox</i>	63
4.4 Análisis de resultados	69
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	71
BIBLIOGRAFÍA	73

Relación de Figuras

Figura 1. Línea de Mercado del CAPM.....	12
Figura 2. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.	21
Figura 3. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.	22
Figura 4. Amazon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.	22
Figura 5. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.	23
Figura 6. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.	24
Figura 7. Amazon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	24
Figura 8. Amazon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.....	25
Figura 9. Amazon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.	25
Figura 10. Amazon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.	26
Figura 11. Amazon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	26
Figura 12. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria...	27
Figura 13. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.	28
Figura 14. AT&T: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.	28
Figura 15. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.	29
Figura 16. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.	30
Figura 17. AT&T: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	30
Figura 18. AT&T: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.	31
Figura 19. AT&T: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.....	31
Figura 20. AT&T: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.	32
Figura 21. AT&T: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	32
Figura 22. Boeing: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.	33
Figura 23. Boeing: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.	34
Figura 24. Boeing: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.	34
Figura 25. Boeing: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.	35
Figura 26. Boeing: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.	36
Figura 27. Boeing: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	36
Figura 28. Boeing: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.	37
Figura 29. Boeing: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.....	37
Figura 30. Boeing: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.....	38
Figura 31. Boeing: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	38

Figura 32. Exxon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria. .	39
Figura 33. Exxon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.	40
Figura 34. Exxon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.	40
Figura 35. Exxon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.	41
Figura 36. Exxon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.....	42
Figura 37. Exxon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	42
Figura 38. Exxon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.....	43
Figura 39. Exxon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.	43
Figura 40. Exxon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.	44
Figura 41. Exxon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	44
Figura 42. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.....	45
Figura 43. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.....	46
Figura 44. Telefónica: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.....	46
Figura 45. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.....	47
Figura 46. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.....	48
Figura 47. Telefónica: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	48
Figura 48. Telefónica: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.	49
Figura 49. Telefónica: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.....	49
Figura 50. Telefónica: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.....	50
Figura 51. Telefónica: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.....	50
Figura 52. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.....	51
Figura 53. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.....	52
Figura 54. Santander: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.....	52
Figura 55. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.....	53
Figura 56. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.....	54
Figura 57. Santander: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	54
Figura 58. Santander: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.	55
Figura 59. Santander: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.....	55
Figura 60. Santander: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.....	56
Figura 61. Santander: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	56
Figura 62. REE: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria. ...	57

Figura 63. REE: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria. .	58
Figura 64. REE: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.....	58
Figura 65. REE: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.	59
Figura 66. REE: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.	60
Figura 67. REE: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.....	60
Figura 68. REE: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.	61
Figura 69. REE: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.....	61
Figura 70. REE: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.....	62
Figura 71. REE: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.....	62
Figura 72. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.	63
Figura 73. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.	64
Figura 74. Acerinox: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.	64
Figura 75. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.....	65
Figura 76. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.....	66
Figura 77. Acerinox: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.	66
Figura 78. Acerinox: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.....	67
Figura 79. Acerinox: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.	67
Figura 80. Acerinox: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.	68
Figura 81. Acerinox: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.	68

Relación de Tablas

Tabla 1. Valores estudiados del NYSE.	19
Tabla 2. Valores estudiados del Mercado Continuo español.....	19
Tabla 3. Parámetros OLS de los valores estudiados del NYSE.	69
Tabla 4. Parámetros OLS de los valores estudiados del Mercado Continuo español. .	69

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación

Un problema esencial en la evaluación de inversiones en los mercados de capital es el relacionado con el riesgo de las inversiones, dado que a mayor riesgo, mayor es la retribución demandada por los inversores. En este contexto surgió la teoría del *capital asset pricing model*, o CAPM, que bajo unos sencillos supuestos, consigue un modelo de equilibrio entre retribución y riesgo. Dicho modelo proporciona la retribución exigible a un activo, ya sea individual o agregado como un portafolio, debido al nivel de riesgo sistemático, o no diversificable, en que incurre. El nivel de riesgo de un activo se valora como una fracción del riesgo del mercado, o coeficiente beta de dicho activo.

De este modo, cuando entre los parámetros financieros de un activo, encontramos que tiene $\beta = 1$, entendemos que tiene el mismo riesgo sistemático que el mercado, y, de acuerdo a esta teoría, le exigiremos la misma rentabilidad.

No obstante, al observar los valores publicados para dicho coeficiente, vemos que no solo cambia de un medio a otro, sino que también cambia con el tiempo, creando inseguridad en su uso y dudas sobre cómo han sido calculados.

1.2 Objetivos

En este trabajo fin de máster (TFM), se aborda la problemática asociada al cálculo de la beta del CAPM. Para ello se plantean los siguientes objetivos:

1. Identificación de la problemática a tratar.
2. Estudio del problema, clasificación y formulación de las principales técnicas de cálculo.
3. Programación en lenguaje Matlab de todos los algoritmos necesarios para el cálculo y análisis de las distintas técnicas consideradas.
4. Aplicación de dichos algoritmos a distintos valores de los mercados NYSE y Mercado Continuo español.
5. Análisis y extracción de conclusiones de los resultados obtenidos.

1.3 Estructura

Este trabajo consta, en primer lugar, de este capítulo de introducción y planteamiento de objetivos. A continuación, el capítulo dos aborda la presentación de la beta y su importancia dentro del contexto del CAPM, así como las principales críticas respecto al modelo.

En un tercer capítulo se presentan las principales técnicas de cálculo disponibles, según se considere la beta como constante o como variable en el tiempo: el ajuste mediante regresión de todos los datos disponibles mediante mínimos cuadrados ordinarios (OLS), o solo los de la ventana de datos inmediatamente anterior al instante que se considera, *rolling least squares* (RLS). Como última técnica considerada, se incluye el uso del filtro de Kalman, que es un estimador de máxima verosimilitud con magníficos resultados en otros campos, como el de la ingeniería.

En el capítulo cuatro, dichas técnicas con aplicadas en dos mercados, tanto en el caso norteamericano, mediante cuatro empresas del NYSE tomando como índice de referencia el S&P500, como en el caso español, mediante cuatro empresas del Mercado Continuo, con el IBEX35 como índice de referencia. La aplicación de las técnicas comentadas se realiza para cada empresa tanto con rentabilidades diarias como con rentabilidades mensuales, usando los programas desarrollados por el alumno en lenguaje Matlab. Así mismo, en este capítulo se incluyen tanto los detalles de implementación necesarios para poder reproducir los resultados obtenidos, como un apartado de análisis de resultados.

Por último, un capítulo de conclusiones resume los principales desarrollos realizados en el TFM, así como las deducciones realizadas.

Capítulo 2. LA BETA Y SU PAPEL EN EL CAPM

2.1 *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*

El *Capital Asset Pricing Model*, o CAPM, es un modelo de valoración de activos financieros desarrollado, de forma independiente, en la década de 1960 por diversos autores: Jack L. Treynor (1961, 1962), William F. Sharpe (1964), John V. Lintner (1965) y Jan Mossin (1966), basado en trabajos anteriores de Harry M. Markowitz (Markowitz, 1952), sobre selección de portafolios, o el de Tobin (1958), sobre el efecto del riesgo en la relación entre liquidez e inversiones monetarias.

El propio Sharpe consiguió el Premio Nobel de Economía en 1990 junto a Merton Miller y el propio Harry Markowitz por sus aportaciones a la teoría de la economía financiera.

La contribución de Sharpe al CAPM en 1964, Sharpe (1964), fue la primera en publicarse, y en ella, para justificar la necesidad de un modelo de esta naturaleza, relega el estado del conocimiento de la época a poco más que un conjunto de aseveraciones basadas en el precio del tiempo y el precio del riesgo. El modelo desarrollado por Sharpe constituye una teoría de equilibrio de mercado para la valoración de activos financieros consistente con dichas aseveraciones previas, que además clarifica la relación entre el precio de un valor y las componentes de su riesgo total.

El CAPM asume tanto una tasa de interés, R_f , a la que todo inversor tiene acceso para prestar o pedir prestado; como homogeneidad en las expectativas de rentabilidad de los inversores: valores esperados, $E(R)$, desviaciones típicas, σ_R , y coeficientes de correlación, ρ .

En este modelo, el equilibrio de mercado produce una línea de mercado de valores, que refleja la línea de equilibrio entre retribución y riesgo para un conjunto de activos, con la idea de fondo de que una inversión con retribución insuficiente para su riesgo, bajará de valor hasta que su rentabilidad alcance dicha línea. La combinación entre portafolios con rentabilidad en dicha línea e inversión sin riesgo consigue cualquier nivel de rentabilidad esperada, con el consiguiente nivel de riesgo.

Para la valoración de una inversión individual, i , con rentabilidad R_i , de media $E(R_i)$, y riesgo total $\sigma_i = \sigma(R_i)$, se usa un conjunto de observaciones. Parte de la dispersión de las observaciones de R_i se debe a la relación subyacente con los portafolios en la línea de mercado, que es la pendiente de la recta de dicha regresión, o riesgo sistemático (coeficiente B_{ig} en el artículo original). El resto de la dispersión, es una componente no sistemática.

En nomenclatura moderna, el esquema se representa mediante la Línea de Mercado de Capitales, *Security Market Line* (SML) en inglés, desviaciones en el eje de abscisas y rentabilidades en el de ordenadas, figura 1.

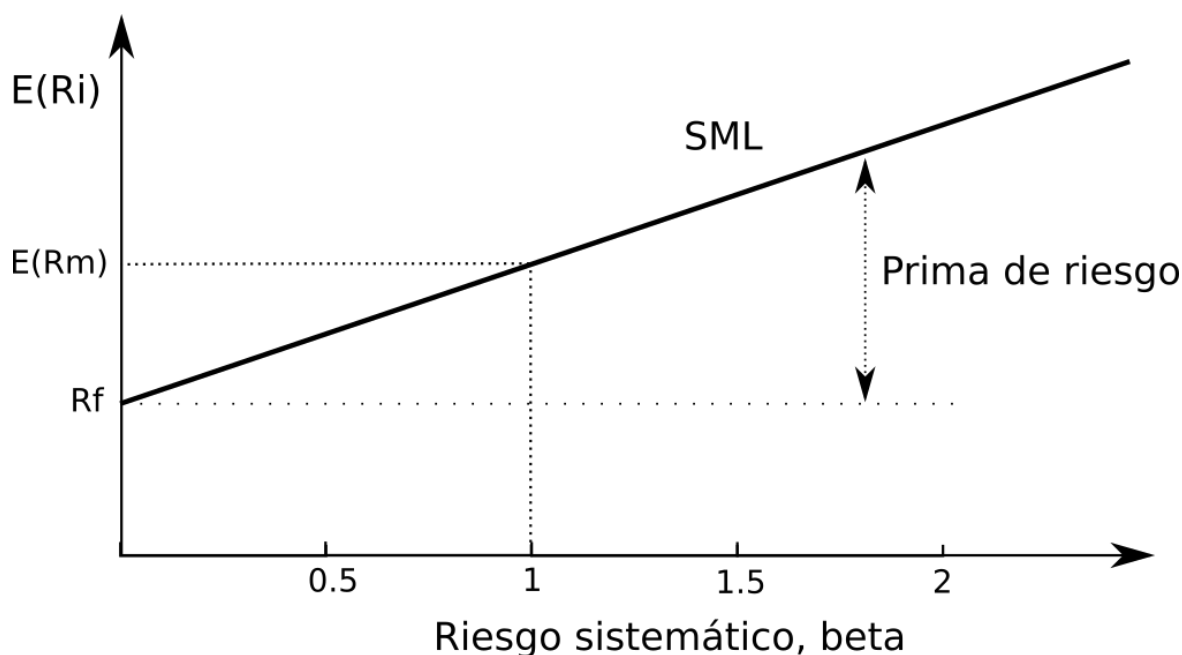


Figura 1. Línea de Mercado del CAPM

La SML responde a la ecuación

$$E(R_i) = R_f + \beta_i \cdot (E(R_m) - R_f)$$

Siendo $E(R_m) - R_f$ un término que representa la prima de riesgo del mercado, y $\beta_i \cdot (E(R_m) - R_f)$, la prima de riesgo del activo i .

La beta del valor i se define como

$$\beta_i = \frac{\rho_{im} \cdot \sigma_i}{\sigma_m} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$$

Donde ρ_{im} es el coeficiente de correlación entre el valor i y el portafolio diversificado, o portafolio de mercado, m ,

$$\rho_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i \cdot \sigma_m} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\sigma_i \cdot \sigma_m}$$

A la vista del papel de β_i en la ecuación del SML y de su definición, se concluyen dos interpretaciones. La primera es la sensibilidad de la rentabilidad frente a la variación en la rentabilidad del Mercado. La segunda es la covarianza del activo frente al Mercado relativo a la varianza de la rentabilidad del Mercado.

En cuanto a su uso, destaca la estimación de la rentabilidad exigida a las acciones, $K_e = E(R_i)$, y el uso de esta, directamente, o a través del coste medio ponderado del capital, CMPC o WACC en inglés, como tasa de descuento en la valoración actual de los flujos de caja futuros, permitiendo concluir una valoración del activo.

Como portafolio diversificado, en mercados desarrollados, acostumbran a tomarse portafolios de 30 o 40 componentes, tales como índices de mercado. En países en vías de desarrollo, de mayor volatilidad, suelen ser necesarios más componentes.

Un enfoque posterior de valoración de activos es el de Ross (1976), o teoría del arbitraje, Arbitrage Pricing Theory o APT, donde la rentabilidad del activo se presupone dependiente de R_f y de factores macroeconómicos con sus respectivas sensibilidades.

Otro enfoque es el propuesto por Black y Litterman (1992), que supone una mejora en la teoría de Markowitz al considerar las expectativas e información que tiene el inversionista sobre el futuro, lo que permite desviaciones puntuales respecto a las estimaciones de equilibrio del CAPM.

2.2 Críticas al CAPM

Una de las primeras críticas surgió cuando Black, Scholes y Jensen (1972) realizaron los primeros test, y encontraron poca robustez empírica en relación a los valores de R_f . En el propio artículo proponen su sustitución por la rentabilidad esperada para activos Z con beta nula, $R_f \rightarrow E(R_Z)$ con $\beta_Z = 0$, a lo que se llama Black CAPM o *zero-beta CAPM*.

Otros problemas fueron descritos por la revisión de Fama y French (2004), entre los que destacan:

- Actitudes irracionales, como asimetrías por parte de los inversores en relación al riesgo de pérdida, que les hace invertir menos de lo indicado por CAPM.
- Falta de universalidad en el acceso a la información y creación de expectativas.
- Inconsistencias experimentales, con rentabilidades superiores a las predichas por el modelo tanto en empresas pequeñas como en otras con bajos ratios *market-to-book*. Los propios autores del estudio, plantean en Fama y French (1993) una formulación de tres factores para abordar este problema.
- No contempla la evolución o rebalanceo del portafolio elegido, como ocurre en el *intertemporal CAPM* (ICAPM).

Capítulo 3. ESTIMACIÓN DE LA BETA

La problemática en la estimación de la beta ha existido desde los inicios del modelo del CAPM. Por ejemplo, en cuanto al intervalo utilizado para valorar las rentabilidades, según Scholes y Williams (1977), hasta los años 70, la implementación del CAPM calculaba la beta en base a rentabilidades mensuales, pero a partir de esta década empiezan a estar disponibles las rentabilidades diarias. En cualquier caso, los valores se registran en instantes discretos con distribución estocástica, mientras que el modelo del CAPM considera que el mercado es continuamente observable.

Este trabajo se centrará en aspectos técnicos del cálculo de la propia beta, mostrando que incluso aceptando la validez del CAPM, la beta es muy sensible frente a dichos aspectos. En concreto se estudiará, por un lado, la variación del valor calculado dependiendo de la definición de rentabilidad que se adopte, diaria o mensual; y por otro lado, el efecto de considerar distintas estrategias al considerar la beta como no estacionaria.

3.1 Problema estacionario

En la práctica, la beta se calcula como la pendiente de la recta de regresión entre las rentabilidades muestrales del activo i , y las rentabilidades obtenidas por el portafolio de mercado m .

Así, siendo $W_{i,k}$ el valor del activo i en el instante k , la rentabilidad de dicho valor entre el instante $k-1$ y el instante k , es

$$R_{i,k} = \frac{W_{i,k} - W_{i,k-1}}{W_{i,k-1}}$$

Y de modo análogo para $R_{m,k}$.

Considerar la beta como un coeficiente estacionario permite utilizar todo el historial de rentabilidades, quedando como único problema el de establecer cuál es el intervalo de rentabilidad considerado.

Nótese, que para poder realizar los ajustes de regresión de valores con cotizaciones bursátiles, es necesario disponer de rentabilidades $R_{i,k}$ y $R_{m,k}$ en los mismos días de cotización. De hecho, para la obtención de resultados en este trabajo, se realizará primero un trabajo de casación de fechas de cotizaciones i y m , desechando las no coincidentes.

El problema de regresión, sujeto a error, ε_k ,

$$R_{i,k} = R_f + \beta_i \cdot (R_{m,k} - R_f) + \varepsilon_k$$

puede reescribirse como

$$R_{i,k} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{m,k} + \varepsilon_k$$

donde

$$\alpha_i = R_f - \beta_i \cdot R_f$$

O, con el enfoque de Black, Scholes y Jensen (1972), $\alpha_i = E(R_Z)(1 - \beta_i)$.

Y por tanto, se puede realizar el ajuste, para los distintos instantes k , de los valores de α_i y β_i que minimizan el error cuadrático medio de

$$R_{i,k} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \cdot R_{m,k} + \varepsilon_k$$

Pudiendo escribirse el error de estimación como

$$\varepsilon_k = R_{i,k} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \cdot R_{m,k} = R_{i,k} - [1 \quad R_{m,k}] \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i \\ \hat{\beta}_i \end{bmatrix}$$

Se trata por tanto de un problema de mínimos cuadrados ordinarios (OLS, por *ordinary least squares*).

Formando

$$y = \begin{bmatrix} R_{i,1} \\ R_{i,k} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & R_{m,1} \\ 1 & R_{m,k} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

El vector de parámetros estimados se puede obtener mediante las ecuaciones normales de Gauss:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i \\ \hat{\beta}_i \end{bmatrix} = (C^t C)^{-1} C^t y$$

Con el que se minimiza $\|y - Cx\|$.

Para valorar la calidad de la regresión se suele utilizar el coeficiente de determinación R^2 , el cual en el caso de regresiones lineales, como es el caso, coincide con el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson.

En general, en la regresión entre dos secuencias y_i y x_i , siendo \hat{y}_i los valores estimados para los y_i mediante la regresión, $\hat{y}_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \cdot R_{m,k}$:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Donde

$$SS_{tot} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$SS_{res} = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

3.2 Problema no estacionario

En este enfoque, se considera que la relación entre R_i y R_m no es estacionaria, es decir, $\beta_i = \beta_i(t)$.

Este apartado se centrará en el uso de mínimos cuadrados de ventana móvil y en el uso del filtro de Kalman, aunque existen otros enfoques a los que se dedica bastante esfuerzo de investigación. Entre estos, está el estudio de la citada variabilidad como

un proceso heterocedástico, ya sea mediante modelos ARCH para heterocedasticidad condicional autorregresiva, en los que la varianza se modela como dependiente de los errores de estimación, o mediante procesos GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*) en los que se modela también la dependencia de la varianza respecto de sus propios valores previos.

3.2.1 Cálculo de ventana móvil (RLS)

Una herramienta común en problemas que inicialmente se formularon como estacionarios pero en los que surge la necesidad de contemplar la variación temporal, es usar las técnicas previas pero solo con una ventana de datos que se va desplazando en el tiempo. Con este punto de vista, hablamos de formulaciones de ventana móvil, o en inglés, *moving-window*, *running*, *time-dependent*, *short-time*, o *rolling algorithms*. De ahí, que en el contexto financiero, a un algoritmo de mínimos cuadrados de ventana móvil, se le llame en inglés, *rolling least squares* (RLS).

Estas formulaciones adolecen de un problema de base, que es la determinación del tamaño de la ventana, es decir, el número de meses o años previos a un instante k , a los que se les efectúa un ajuste OLS para obtener $\beta_{i,k}$. Rara vez se menciona, ni siquiera que esto sea un problema; simplemente se acepta la disparidad de resultados. En este contexto, son comunes la ventana de 3 años que adopta Yahoo, o la de 5 años que usa Google, en sus sistemas de información financiera, en ambos casos en base a rentabilidades mensuales. Otra referencia es la de Bloomberg, que usa una ventana de 2 años, con rentabilidades semanales. En los tres casos se usa el índice S&P 500 (SPX) como portafolio diversificado para las empresas del NYSE.

3.2.2 Filtro de Kalman

Para una visión detallada de estimación de estado óptima, en la que se incluye este estimador, se remite al lector al libro la referencia Simon (2006). De acuerdo a dicha referencia, un precursor del filtro de Kalman, más básico, es el estimador de Gauss-Markov, o de estimación insesgada de mínima varianza. Este estimador afronta un problema con vector de medida y , que es función de un estado vectorial, x , y de una variable aleatoria v , de media cero y matriz de covarianza diagonal R :

$$y = Cx + v$$

El estimador de Gauss-Markov debe ser insesgado y de mínima varianza en cada componente, $E(\hat{x}_j - x_j)^2$, lo que lleva a mínima traza de covarianzas, $E(\|\hat{x} - x\|^2) = \sum_j E(\hat{x}_j - x_j)^2$. El estimador, así obtenido es un estimador de mínimos cuadrados ponderados:

$$\hat{x} = (C^t R^{-1} C)^{-1} C^t R^{-1} y$$

Nótese que si R fuese una matriz identidad, el estimador de mínimos cuadrados ponderados coincide con el ajuste de mínimos cuadrados.

El filtro de Kalman proporciona una herramienta de estimación aún más rica que las comentadas hasta ahora, ya que permite considerar la dinámica en los parámetros o magnitudes, x , a estimar, utilizando un modelo en variables de estado en tiempo discreto. Así, el modelo considerado consta de dos ecuaciones:

- Ecuación de estado: $x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_k$

- Ecuación de medida: $y_k = C_k x_k + v_k$

Donde el subíndice k denota el instante de tiempo, no una componente del vector; y es el vector de medidas, x es el estado a estimar; A es la llamada matriz de transición de estados; u es un vector de excitación y B la matriz que lo relaciona con el estado; v y w son, respectivamente, los errores de medida y de modelo, ruidos blancos incorrelados, con medias cero y matrices de covarianzas, en el instante k , de valores R_k y Q_k respectivamente. Para la implementación del filtro de Kalman es necesario inicializar tanto la estimación de estado como la covarianza del error de estimación:

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0)$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^t] = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^t]$$

Y en cada nuevo instante k , se deben realizar dos etapas:

- 1) Etapa de actualización temporal o de predicción:

Dada una estimación en el instante $k - 1$, \hat{x}_{k-1}^+ , denominada estimación *a posteriori* en $k - 1$, es necesario propagar dicha estimación en el tiempo, hasta \hat{x}_k^- , llamada estimación *a priori* en el instante k . Para que dicha estimación sea insesgada:

$$\hat{x}_k^- = A_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + B_{k-1} u_{k-1}$$

Por otro lado, puede demostrarse que la covarianza del error de estimación se propaga según

$$P_k^- = A_{k-1} P_{k-1}^+ A_{k-1}^t + Q_{k-1}$$

- 2) Etapa de actualización por la medida, o de corrección:

Al recibirse la medida y_k y buscar un estimador insesgado y de mínima varianza, se calcula primero la llamada ganancia de Kalman

$$K_k = P_k^- C_k^t (C_k P_k^- C_k^t + R_k)^{-1}$$

Con la que se obtiene el estimador

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k^-)$$

Adicionalmente, se debe calcular P_k^+ para que esté disponible en la siguiente iteración, preferiblemente con alguna fórmula estable como la llamada forma de Joseph:

$$P_k^+ = (I - K_k C_k) P_k^- (I - K_k C_k)^t + K_k R_k K_k^t$$

Aplicación al caso de la beta

El filtro de Kalman ya ha sido aplicado con anterioridad al cálculo de la beta, como en Mergner y Bulla (2008), donde se hace un enfoque de un solo coeficiente, con R_f como dato previo. En este trabajo, a fin de no incurrir en los problemas de robustez ya comentados en Black, Scholes y Jensen (1972), se usará un enfoque de dos coeficientes.

Una referencia de dos coeficientes es Nieto, Orbe y Zarraga (2014), pero, al igual que en otras aplicaciones del filtro de Kalman, no aporta suficientes detalles de implementación, por lo que hace imposible reproducir sus resultados. Además, en dicha cita, se utiliza una variable de desempeño de dudosa idoneidad para el caso de dos coeficientes, la alfa de Jensen, que supone una retribución libre de riesgo R_f .

Así, la ecuación de medida, en este trabajo, se tomará como

$$R_{i,k} = [1 \quad R_{m,k}] \begin{bmatrix} \alpha_{i,k} \\ \beta_{i,k} \end{bmatrix} + v_k$$

Siendo las variables del filtro de Kalman $y_k = R_{i,k}$, $C_k = [1 \quad R_{m,k}]$, $x_k = \begin{bmatrix} \alpha_{i,k} \\ \beta_{i,k} \end{bmatrix}$.

Respecto a la ecuación de estado, que es la que debe modelar la variabilidad de los parámetros a estimar, en este trabajo se usa el procedimiento convencional, el *random walk*, con el que se supone que los parámetros solo sufren perturbaciones insesgadas respecto al estado anterior:

$$x_k = x_{k-1} + w_k$$

Y por tanto, $A_{k-1} = I$, $B_{k-1} = 0$.

Con este enfoque, convencional dentro de la práctica común de los filtros de Kalman, las etapas de funcionamiento serían:

- 1) Etapa de actualización temporal o de predicción:

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}^+$$

$$P_k^- = P_{k-1}^+ + Q_{k-1}$$

- 2) Etapa de actualización por la medida, o de corrección:

$$K_k = P_k^- C_k^t (C_k P_k^- C_k^t + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k^-)$$

$$P_k^+ = (I - K_k C_k) P_k^- (I - K_k C_k)^t + K_k R_k K_k^t$$

No obstante, dada la generalidad que este autor ha perseguido en este trabajo, se ha realizado una mejora en la ecuación de predicción $P_k^- = P_{k-1}^+ + Q_{k-1}$, dado que dicha ecuación sería aplicable únicamente para un caso puramente discreto con distribución temporal homogénea, que no es el caso. En el problema del cálculo de la beta, las separación temporal entre rentabilidades no es homogénea. Por ejemplo, en el caso de rentabilidades diarias, entre viernes y lunes transcurren 3 días, mientras que en otros casos solo un día; pero no solo eso, puede haber otras festividades o eventos que hagan que las cotizaciones tanto diarias como mensuales se afecten y muestren un patrón más irregular. La solución del autor surge de acudir a la formulación de tiempo continuo del filtro de Kalman, y observar que para el caso particular de esta formulación, la integración entre el instante $k-1$ y k de la ecuación diferencial de Riccati que gobierna la evolución de la matriz de covarianzas de error P , esta se reduce a

$$P_k^- = P_{k-1}^+ + \Delta T(k-1, k) Q_{k-1}$$

Que siendo Q_{k-1} la covarianza del error de modelo para la transición de 1 día, en el instante $k-1$, el término $\Delta T(k-1, k)$ es el número de días entre el instante k y el $k-1$.

Capítulo 4. RESULTADOS

En este capítulo se estudiarán las estimaciones de beta para las rentabilidades tanto mensuales como diarias, de compañías del SP500 y de compañías del IBEX35 con los tres enfoques desarrollados: OLS, RLS y filtro de Kalman.

4.1 Metodología

Se estudian compañías de dos mercados, el NYSE y el Mercado continuo de España, y en cada uno de ellos se tomarán como portafolios diversificados, los correspondientes a sus principales índices, SP500 en el NYSE, e IBEX35 en el caso español.

Las cotizaciones tanto de los índices como de las distintas compañías se han obtenido del servicio financiero de Yahoo, <https://finance.yahoo.com/>, descargados como archivos csv desde el apartado de datos históricos con cotización diaria en el intervalo de tiempo con comienzo más antiguo posible, y finalización el 29/09/2017.

Valor	Archivo	Fecha inicial yyyy/mm/dd	Fecha final yyyy/mm/dd
S&P 500	^GSPC.csv	1993/02/15	2017/09/29
Amazon	AMZN.csv	1997/05/15	2017/09/29
AT&T Inc.	T.csv	1983/11/21	2017/09/29
The Boeing Company	BA.csv	1962/01/02	2017/09/29
Exxon Mobil Corporation	XOM.csv	1970/01/02	2017/09/29

Tabla 1. Valores estudiados del NYSE.

Valor	Archivo	Fecha inicial yyyy/mm/dd	Fecha final yyyy/mm/dd
IBEX35	^IBEX.csv	1993/02/15	2017/09/29
Telefónica	TEF.MC.csv	2000/01/03	2017/09/29
Banco Santander	SAN.MC.csv	2000/01/03	2017/09/29
Red Eléctrica Corporación	REE.MC.csv	2000/01/03	2017/09/29
Acerinox	ACX.MC.csv	2002/01/02	2017/09/29

Tabla 2. Valores estudiados del Mercado Continuo español.

En cada compañía se han calculado y mostrado distintas estimaciones de beta, tanto para rentabilidades, primero diarias, y segundo mensuales:

- 1) Valores numéricos por OLS. Teniendo en cuenta todos los datos disponibles.
- 2) Valores RLS:
 - Para ventanas desde 1 a 12 años (para limitar el espacio, solo se muestran de 1 a 10): tanto beta como coeficiente de determinación.
 - Gráficas con los coeficientes de determinación mínimos y máximos para cada tamaño de ventana, a lo largo de todo el periodo de estudio.
- 3) Valores por filtro de Kalman: tanto de la beta como de la varianza de su error de estimación, $P_{beta}=P_{2,2}$.
- 4) Figuras de comparación de las betas obtenidas por Kalman, por RLS de las ventanas más significativas (2, 3, 4 y 5 años), y por OLS para todo el periodo transcurrido desde el comienzo de los datos hasta el instante en que se calcula. Por tanto el valor final de la curva OLS coincide con el valor numérico referido con anterioridad en el apartado 1).

La obtención de todas las figuras y resultados ha sido conseguida por el autor mediante la programación de todos los procedimientos necesarios en lenguaje de programación MATLAB.

Entre los algoritmos implementados han estado:

- 1) Lectura de los archivos obtenidos de yahoo, de extensión csv, casación de fechas de cotización de empresa e índice de mercado, eliminando aquellas que pese a estar en ambos archivos, contuviesen valores nulos para las cotizaciones.
- 2) Entresacado de las primeras cotizaciones de cada mes para su uso en el cálculo de rentabilidades mensuales.
- 3) Cálculos mediante filtros de Kalman, uno para rentabilidades diarias y otro para mensuales. Como estados iniciales, los filtros calculan los valores OLS. Como matriz inicial de covarianzas, se usa $P=diag([4 \ 4])$, que es suficientemente grande como para modelar la desconfianza respecto al valor inicial tomado. Como varianza del error de medida se toma la del error uniforme de cuantización, $1/12$ del escalón de cuantización, $R=0.01/12$.

Como covarianzas de error de modelo, se toma $Q=diag([1E-5 \ 1E-4])$ para la transición diaria, que demuestra buen comportamiento, tanto en estabilidad como en capacidad de respuesta. En las ecuaciones de actualización de la covarianza del error de estimación, se incluye esta matriz Q multiplicada por el número de días de la transición, con lo que el autor modela convenientemente no solo la no homogeneidad entre estas transiciones, como ocurre en el efecto lunes al considerar rentabilidades diarias, sino que establece un procedimiento consistente para el cálculo basado en rentabilidades tanto diarias como mensuales, ya que en ambos casos se usa el número de días entre datos.

- 4) Cálculos de ventana móvil, RLS, que consisten en el cálculo por mínimos cuadrados, en cada instante k del periodo de estudio, de los datos contenidos en la ventana de datos previa a dicho instante, de las distintas longitudes de estudio (desde 1 a 12 años).

Cada módulo de cálculo ha finalizado con la representación de las respectivas figuras y su exportación a formato png para su importación a este documento, utilizando un sistema de nombres en los que se identificaba tanto a la compañía como las magnitudes representadas.

4.2 Aplicación al S&P 500

4.2.1 Amazon

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	1.3867	1.9904

Resultado de RLS

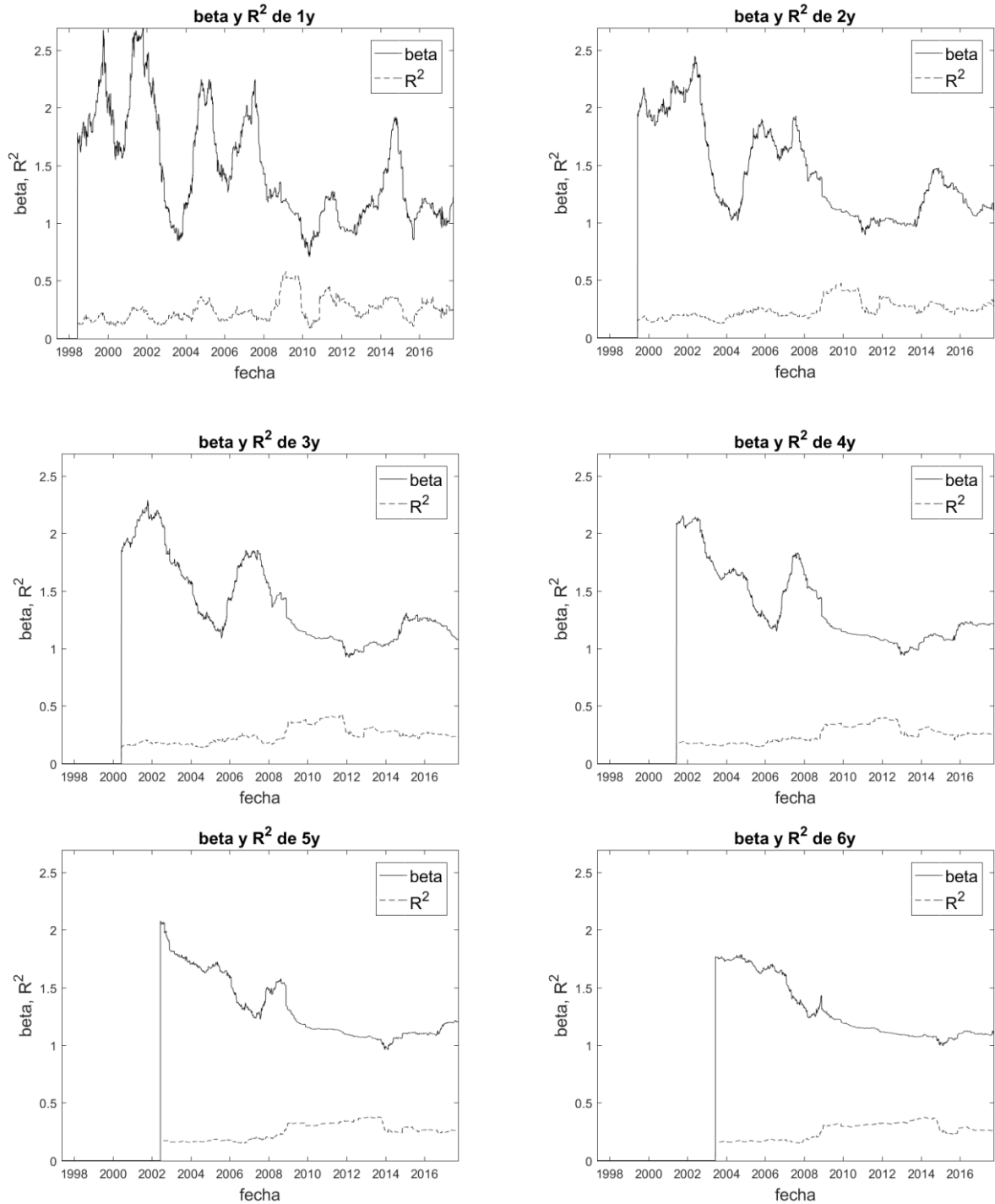


Figura 2. Amazon: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

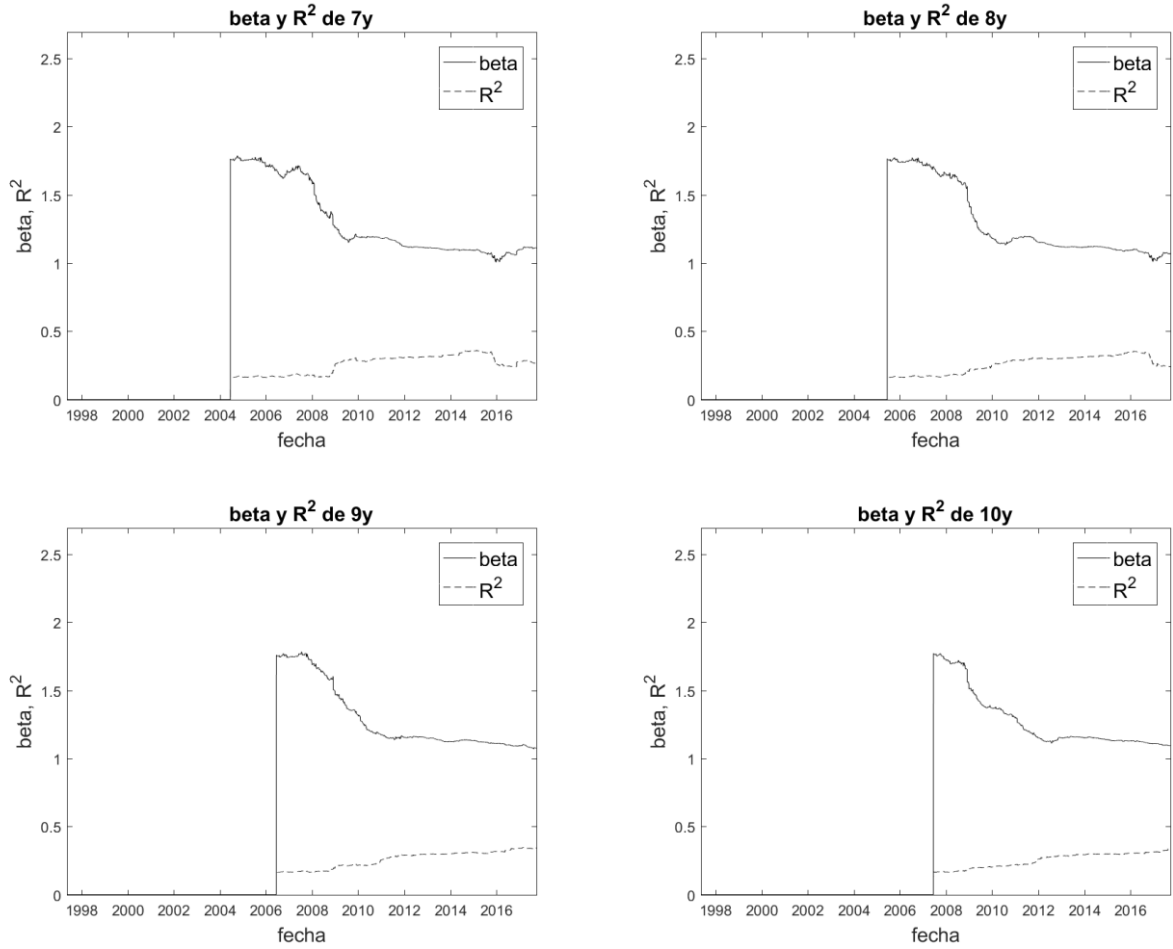


Figura 3. Amazon: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

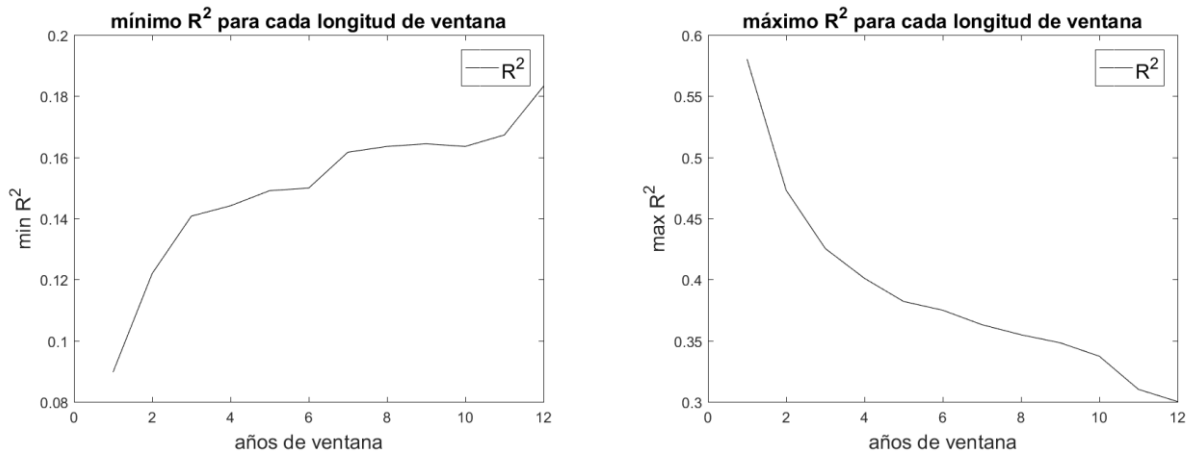


Figura 4. Amazon: R² extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

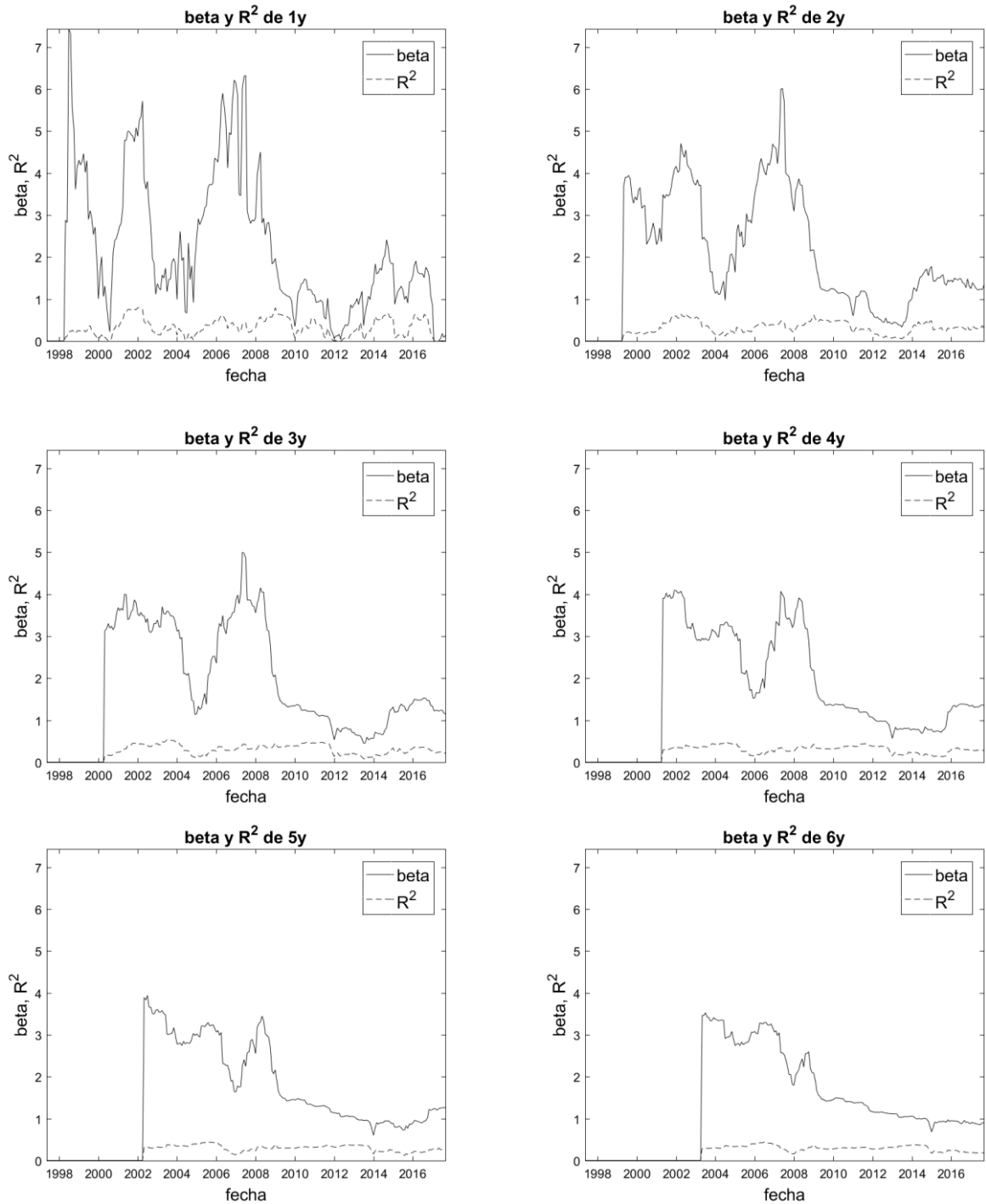


Figura 5. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

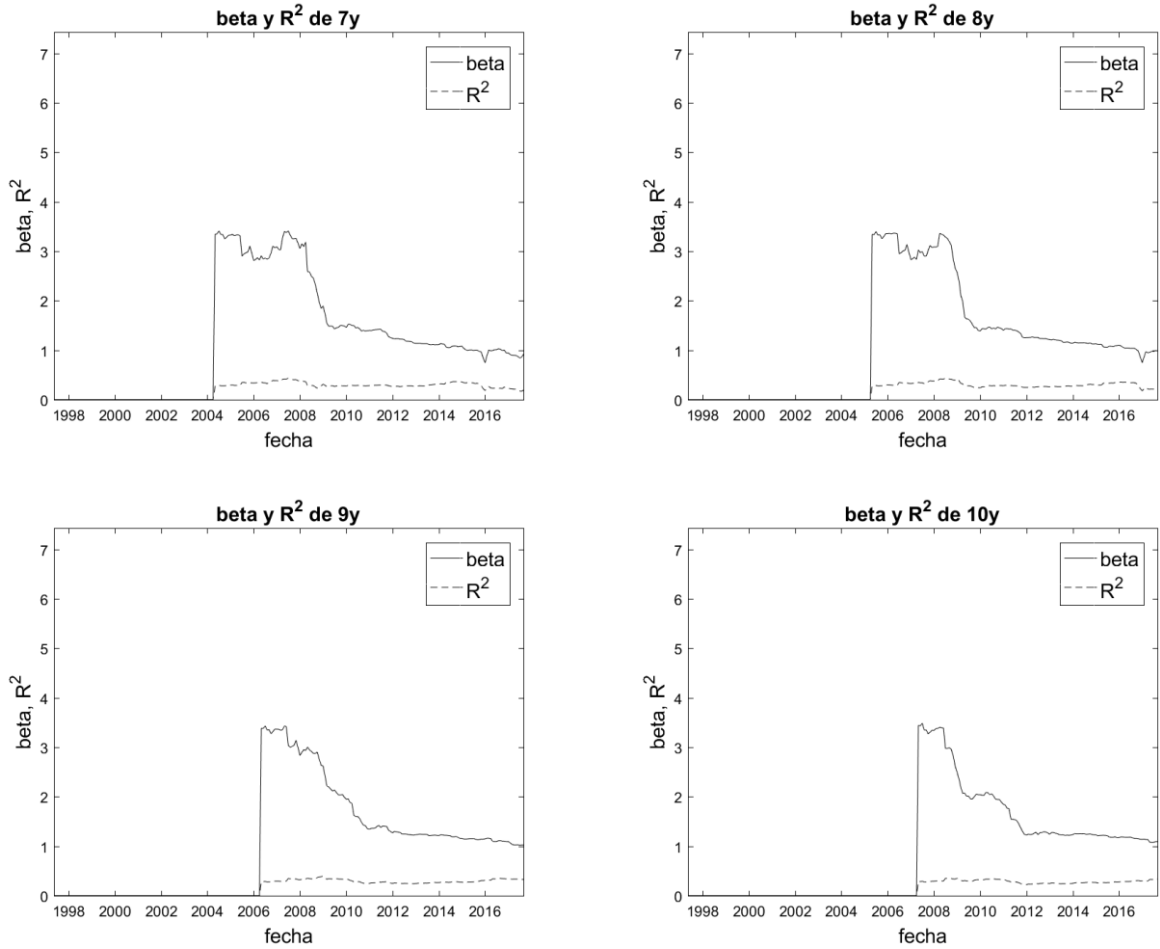


Figura 6. Amazon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

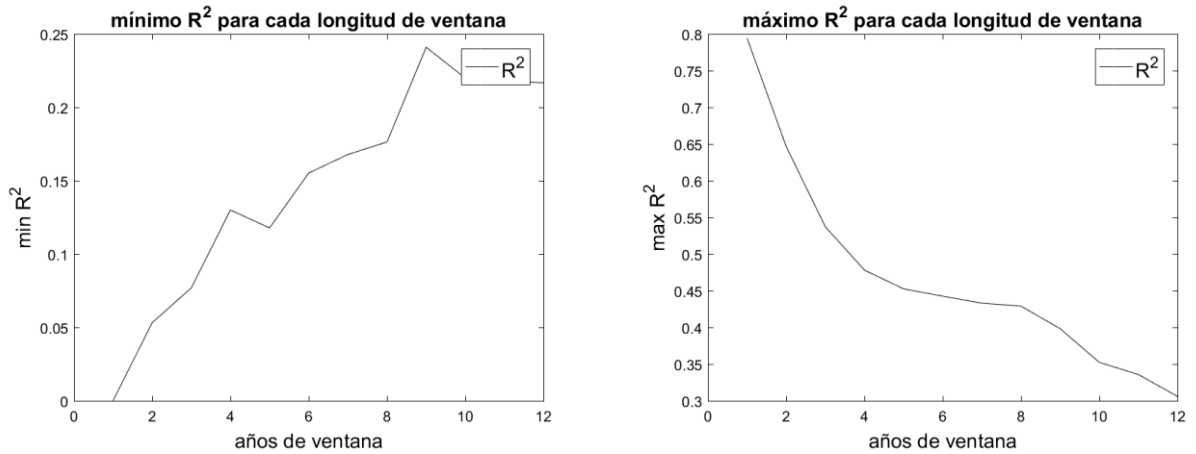


Figura 7. Amazon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

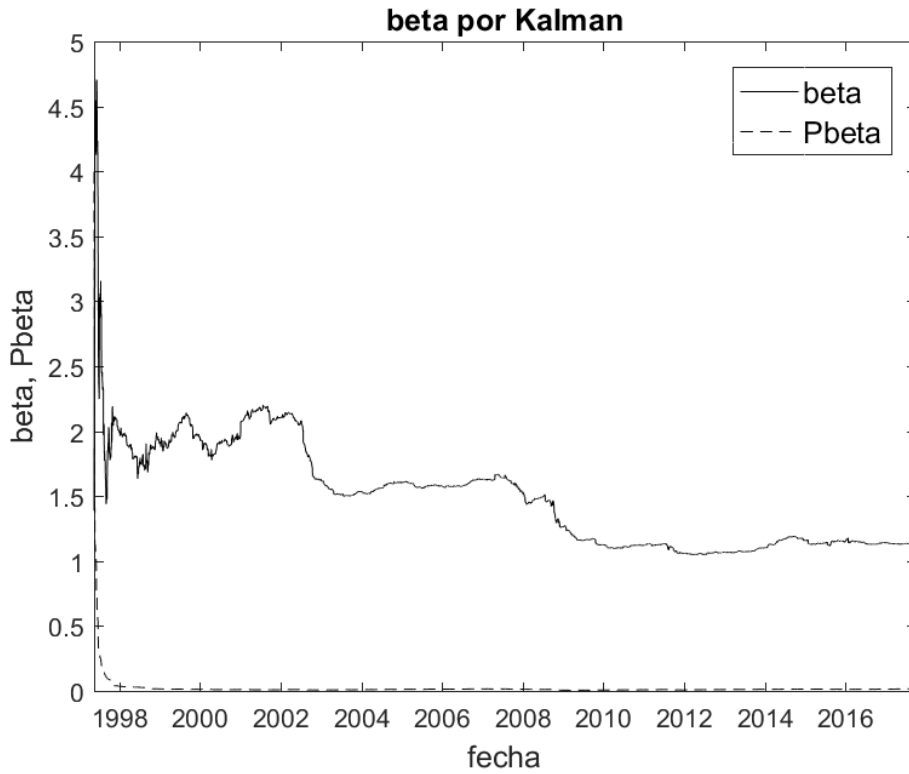


Figura 8. Amazon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

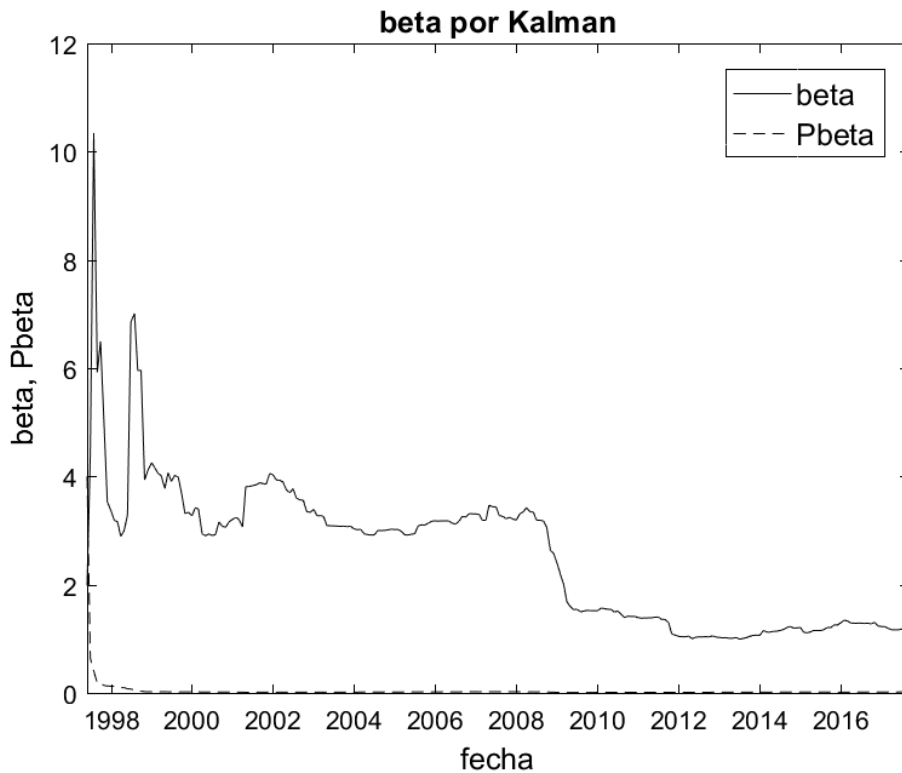


Figura 9. Amazon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

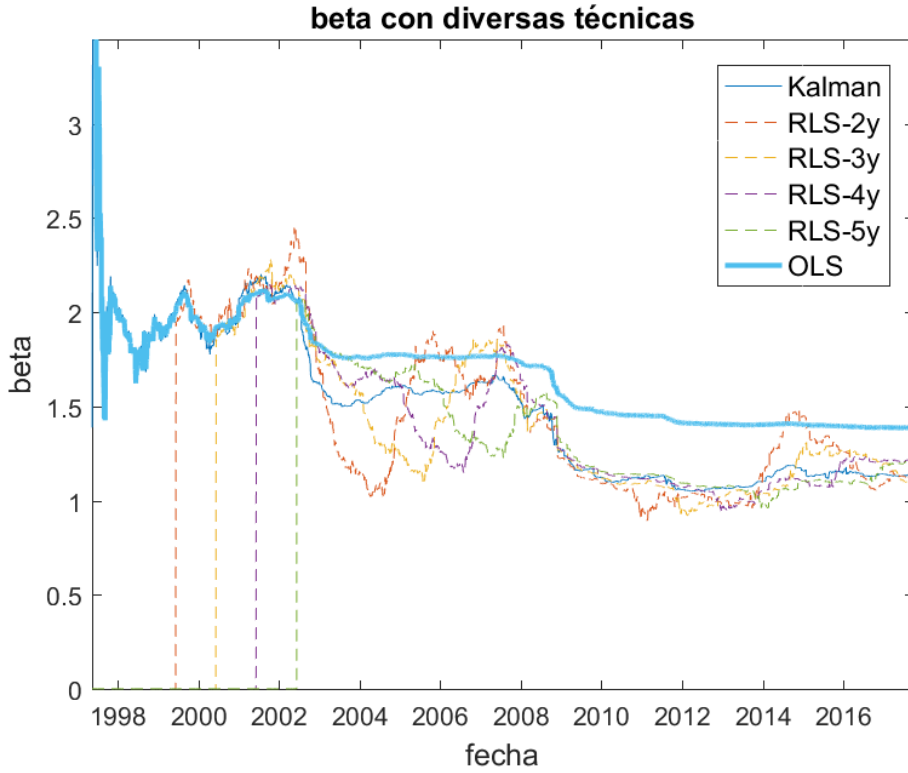


Figura 10. Amazon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

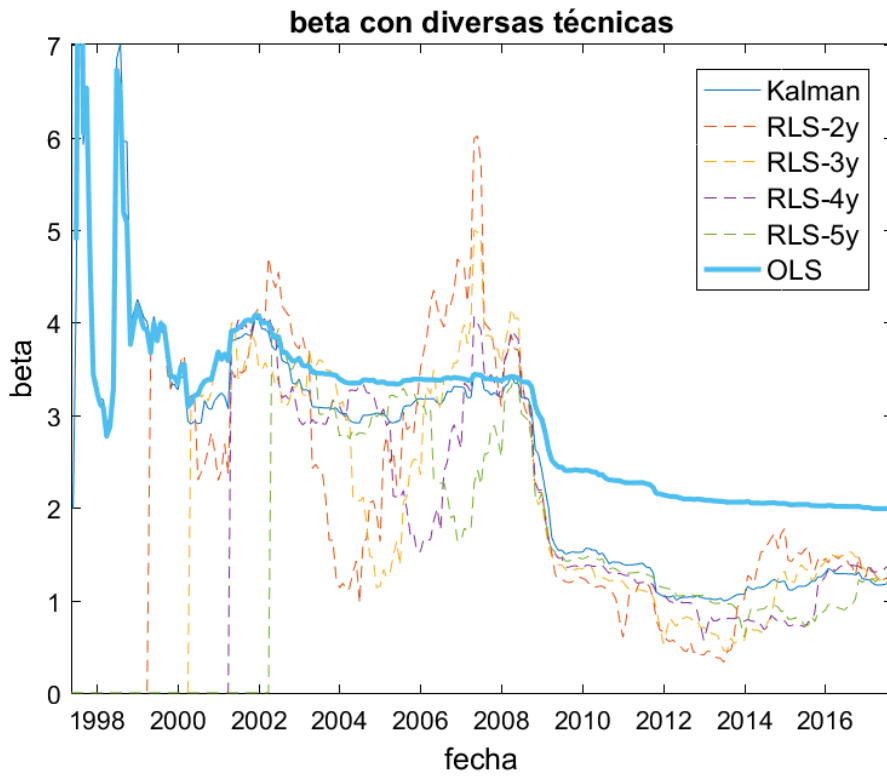


Figura 11. Amazon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.2.2 AT&T

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	0.7801	0.6281

Resultado de RLS

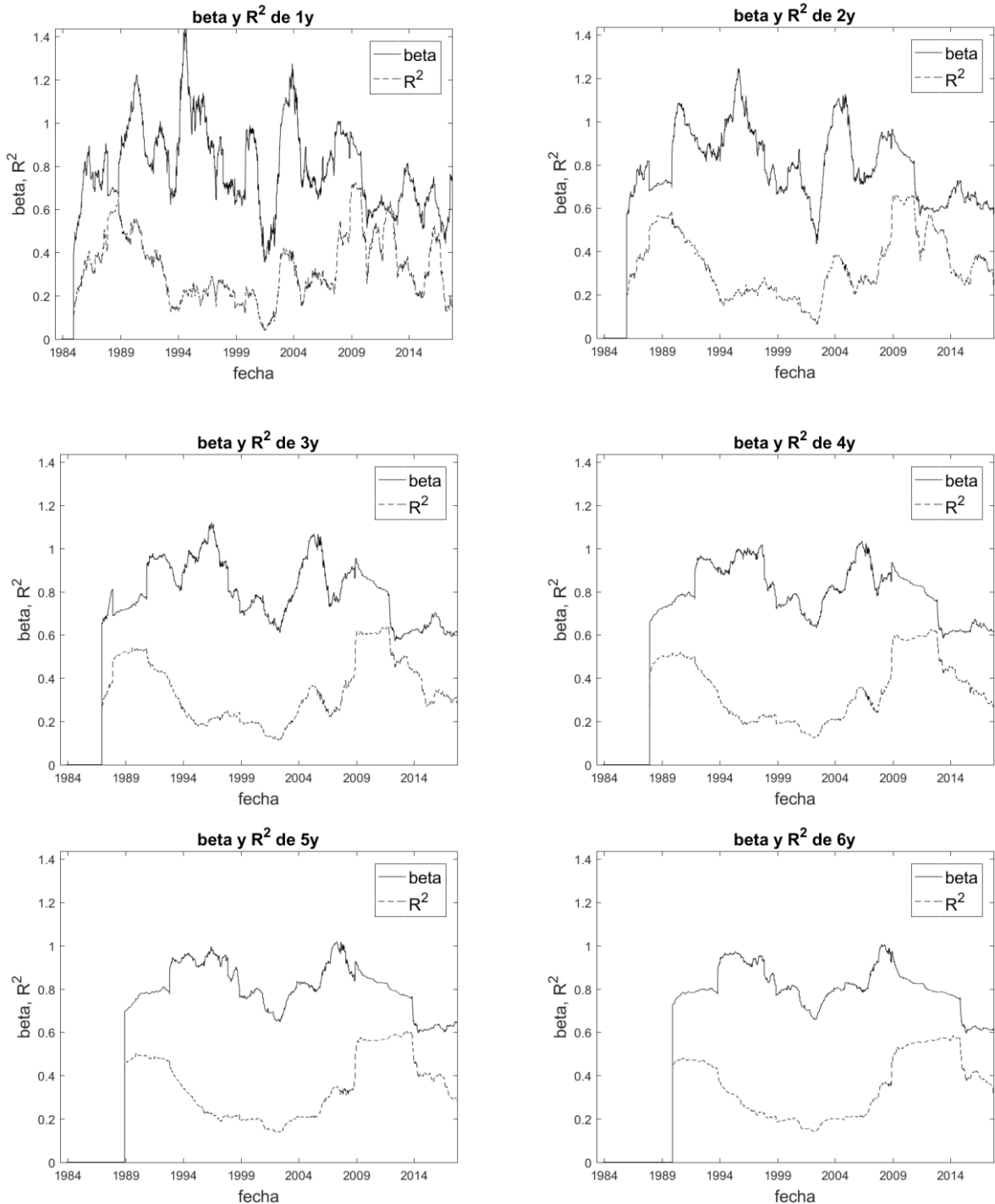


Figura 12. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

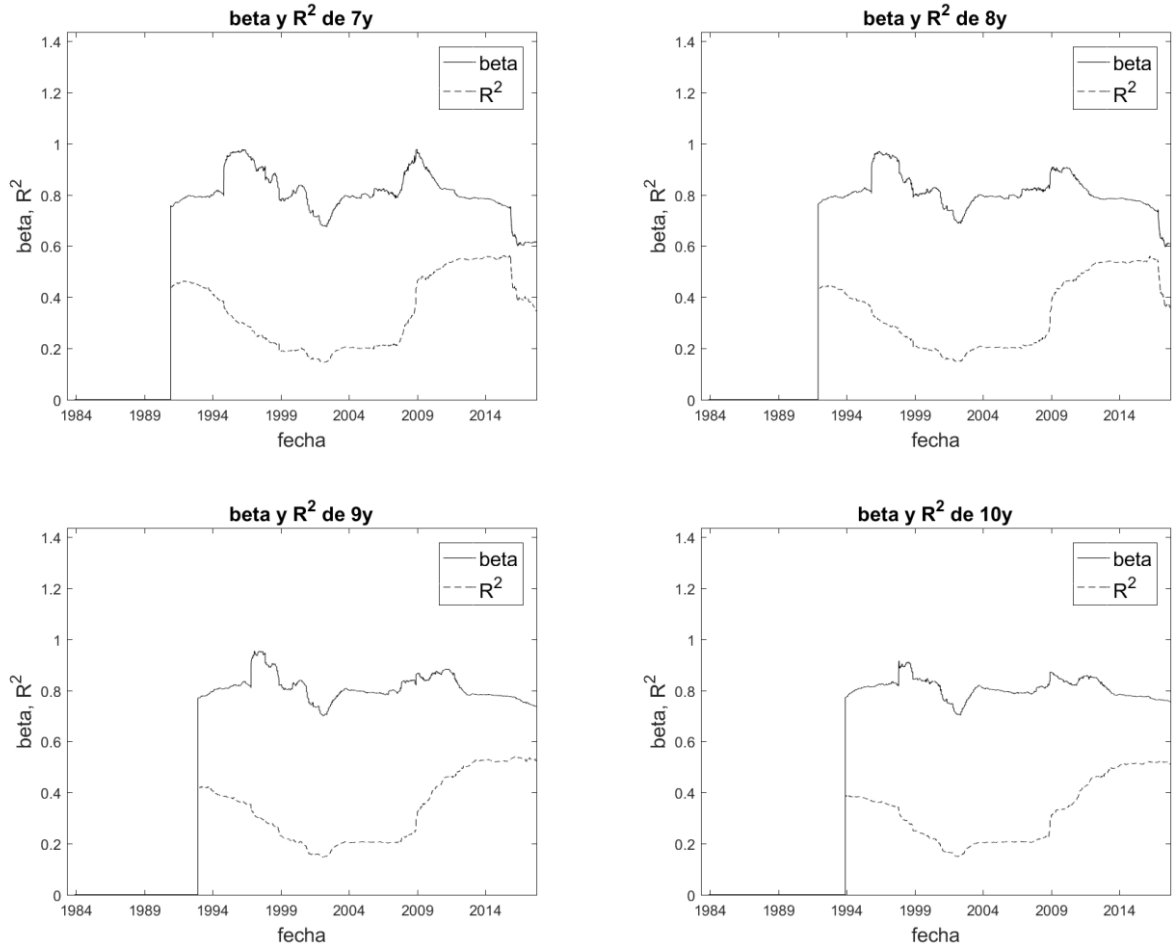


Figura 13. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

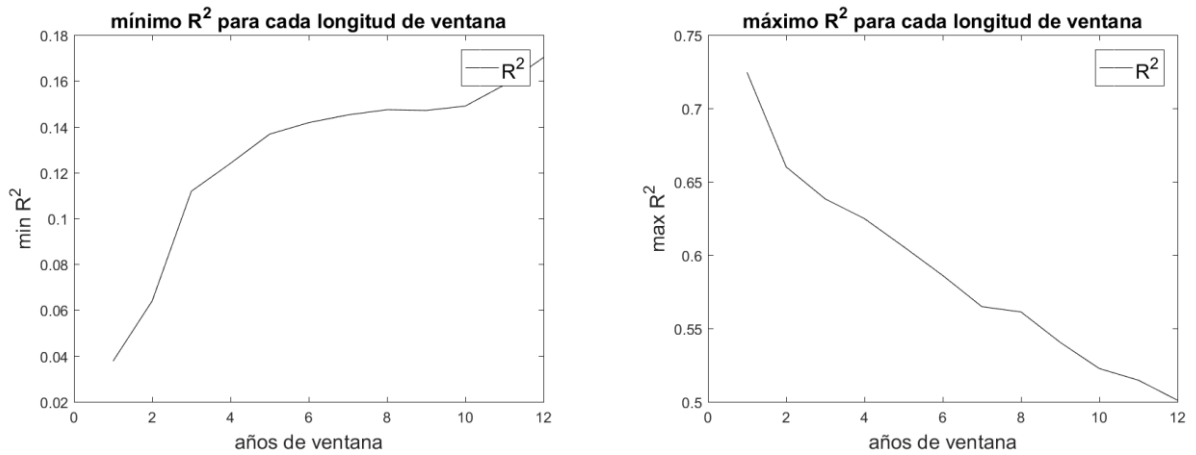


Figura 14. AT&T: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

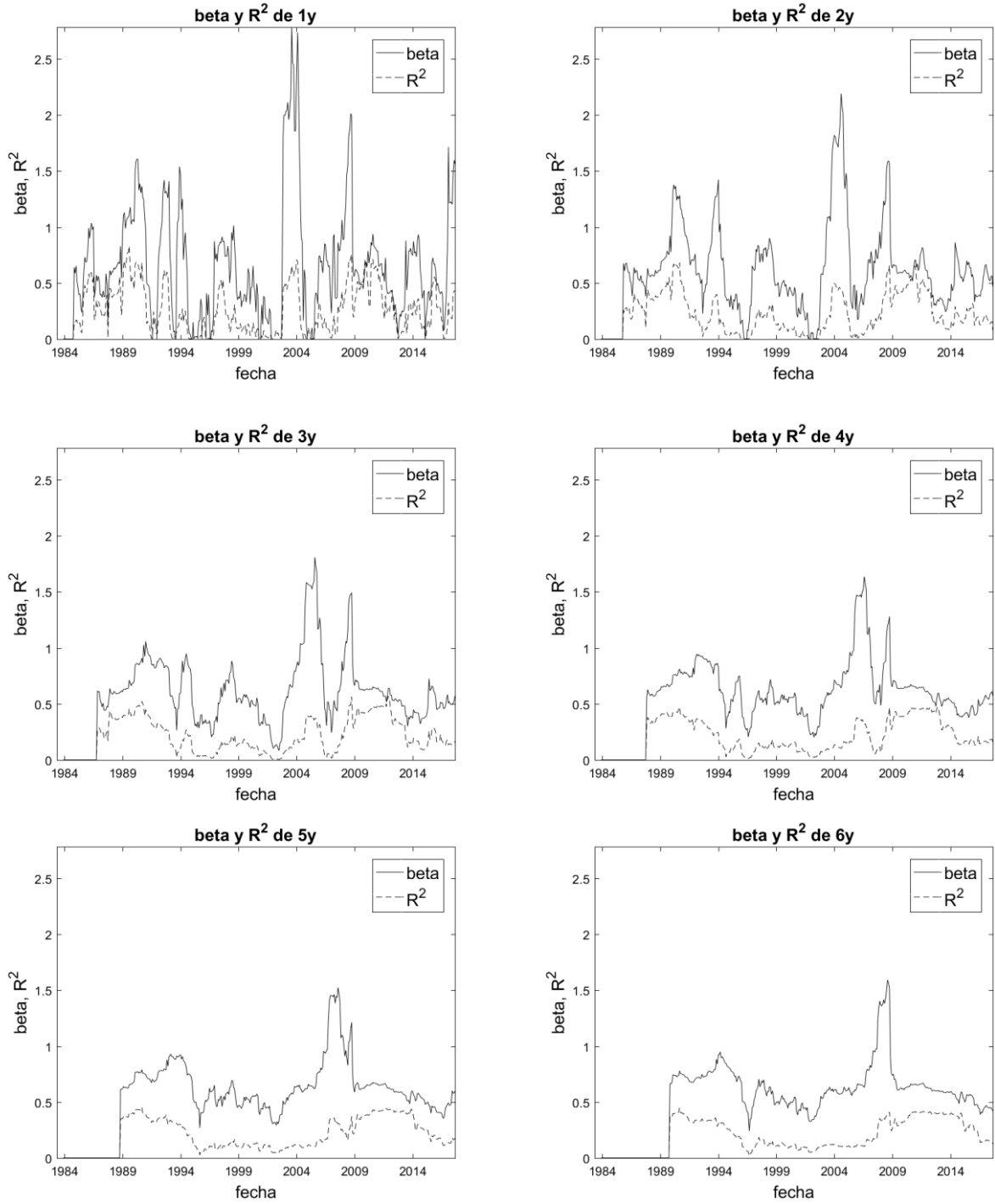


Figura 15. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

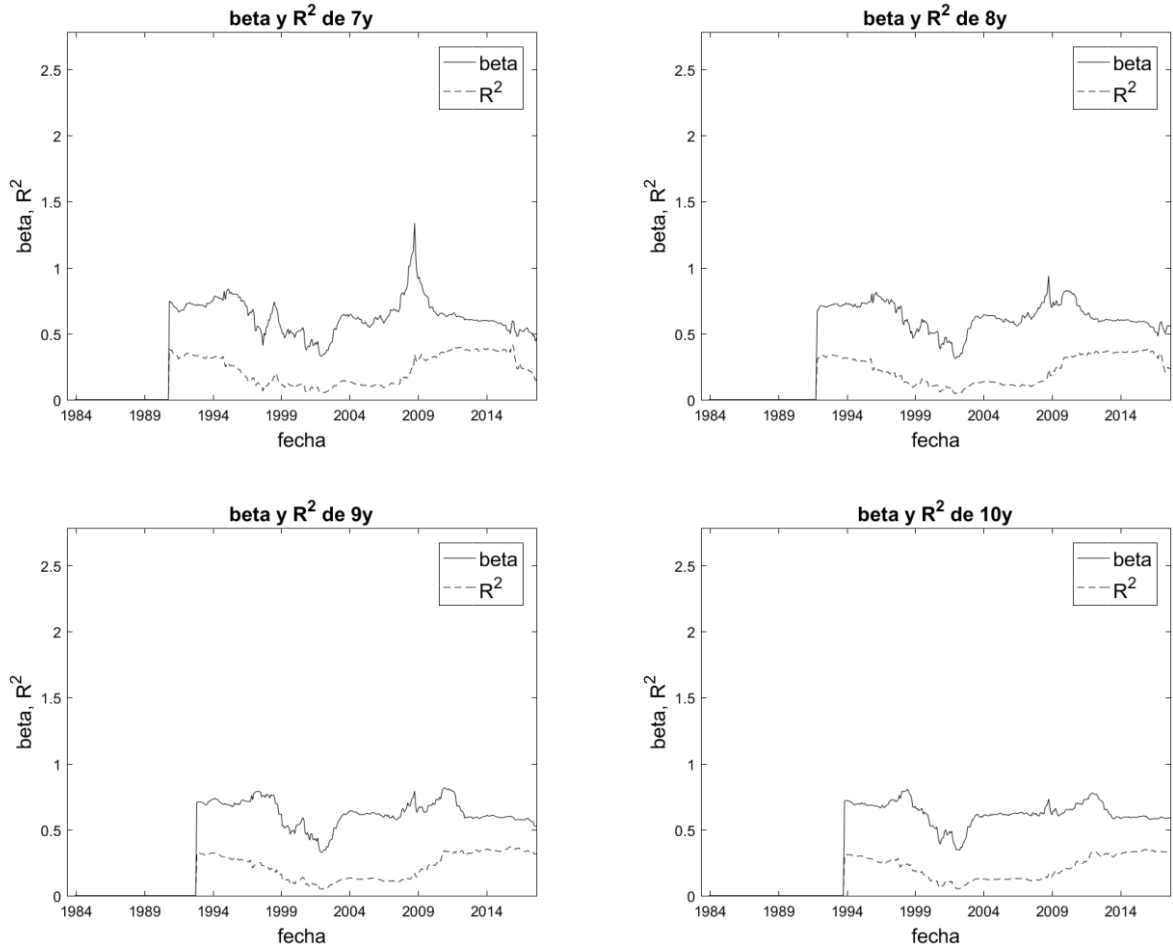


Figura 16. AT&T: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

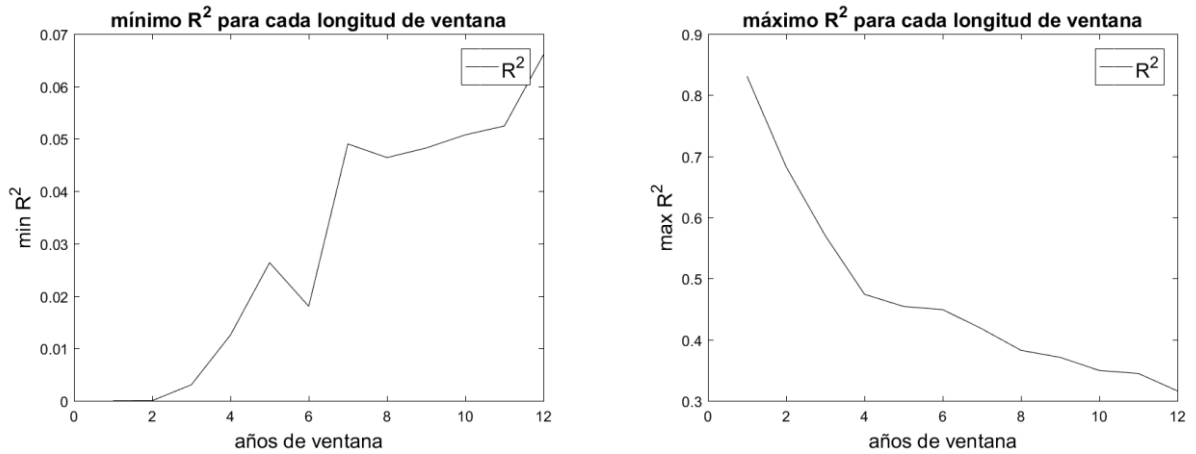


Figura 17. AT&T: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

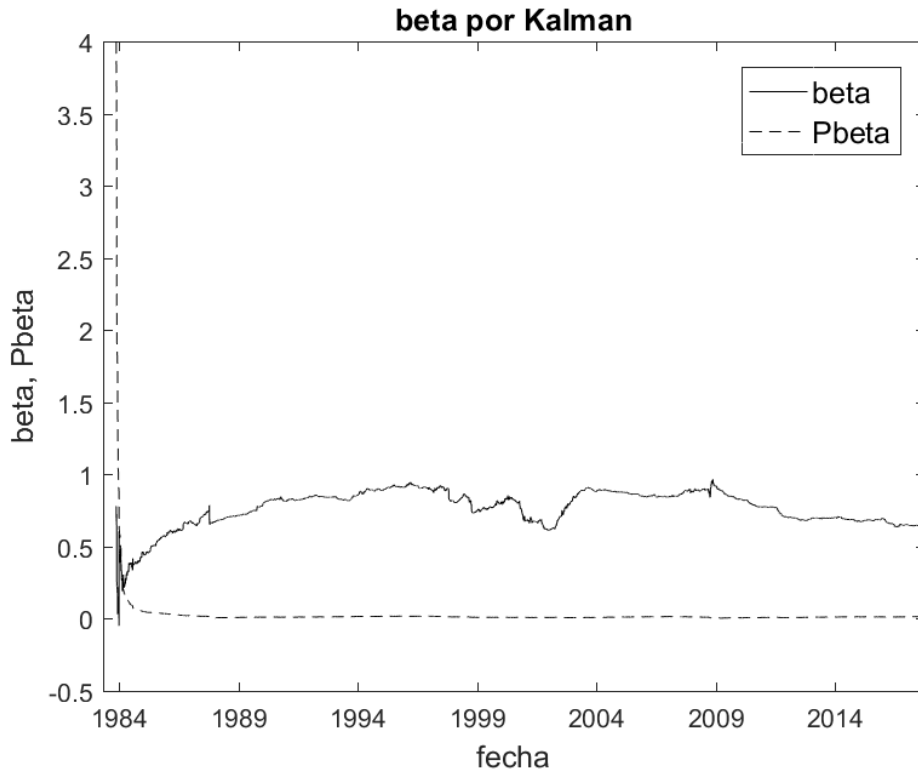


Figura 18. AT&T: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

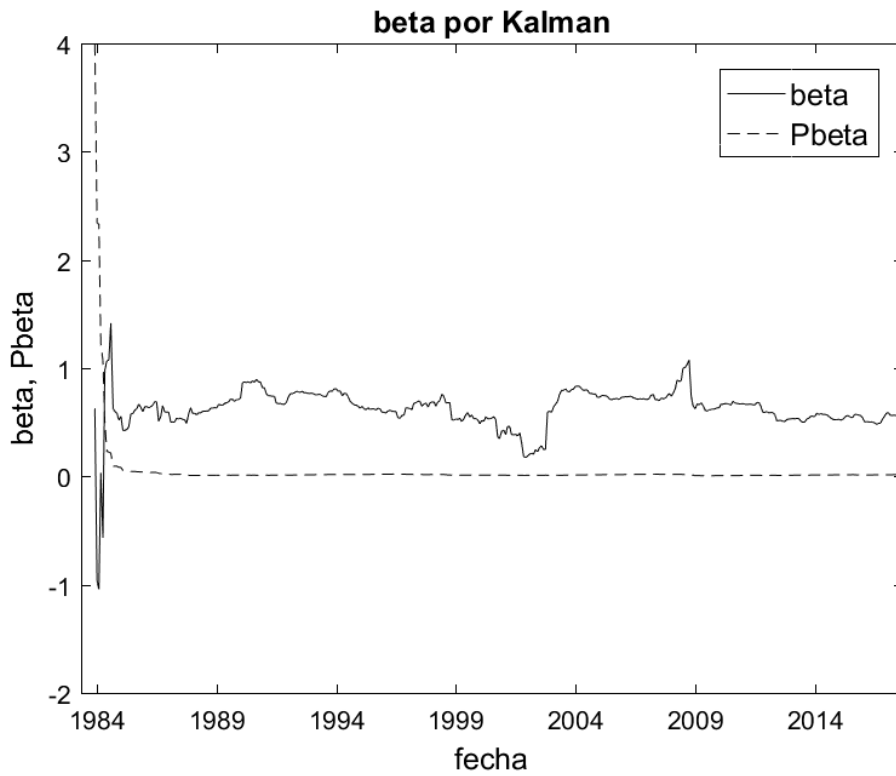


Figura 19. AT&T: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

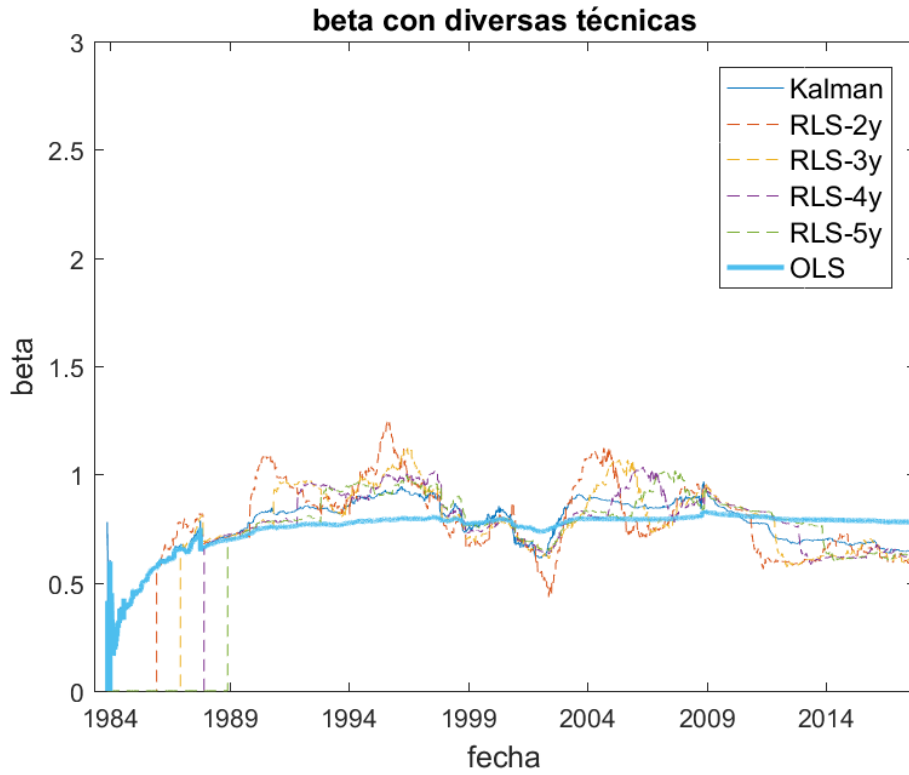


Figura 20. AT&T: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

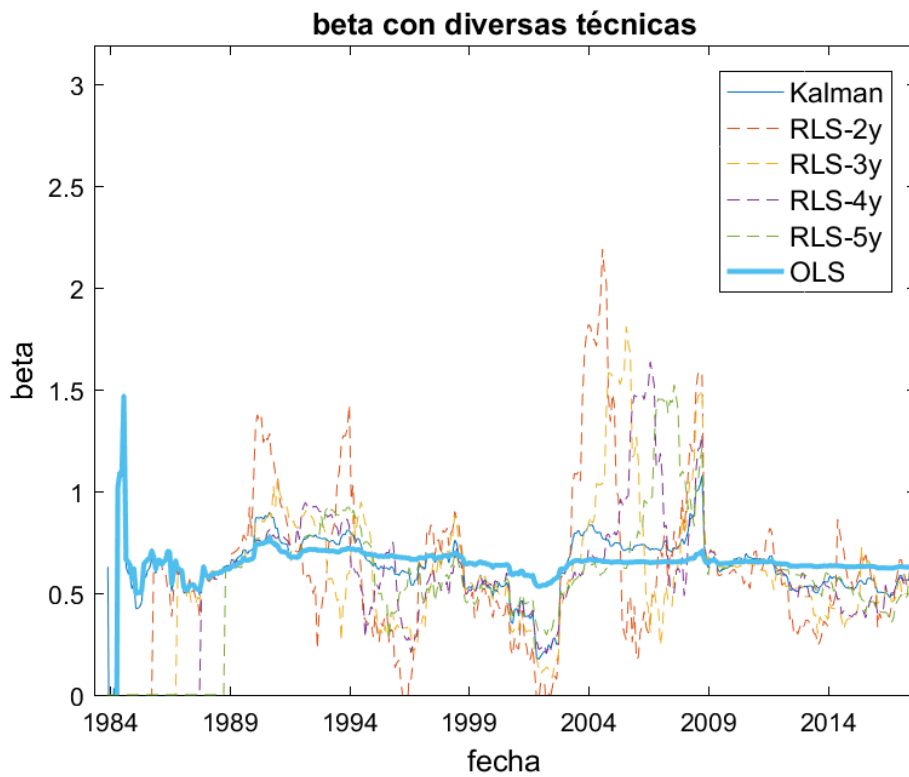


Figura 21. AT&T: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.2.3 The Boeing Company

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	1.0409	1.1778

Resultado de RLS

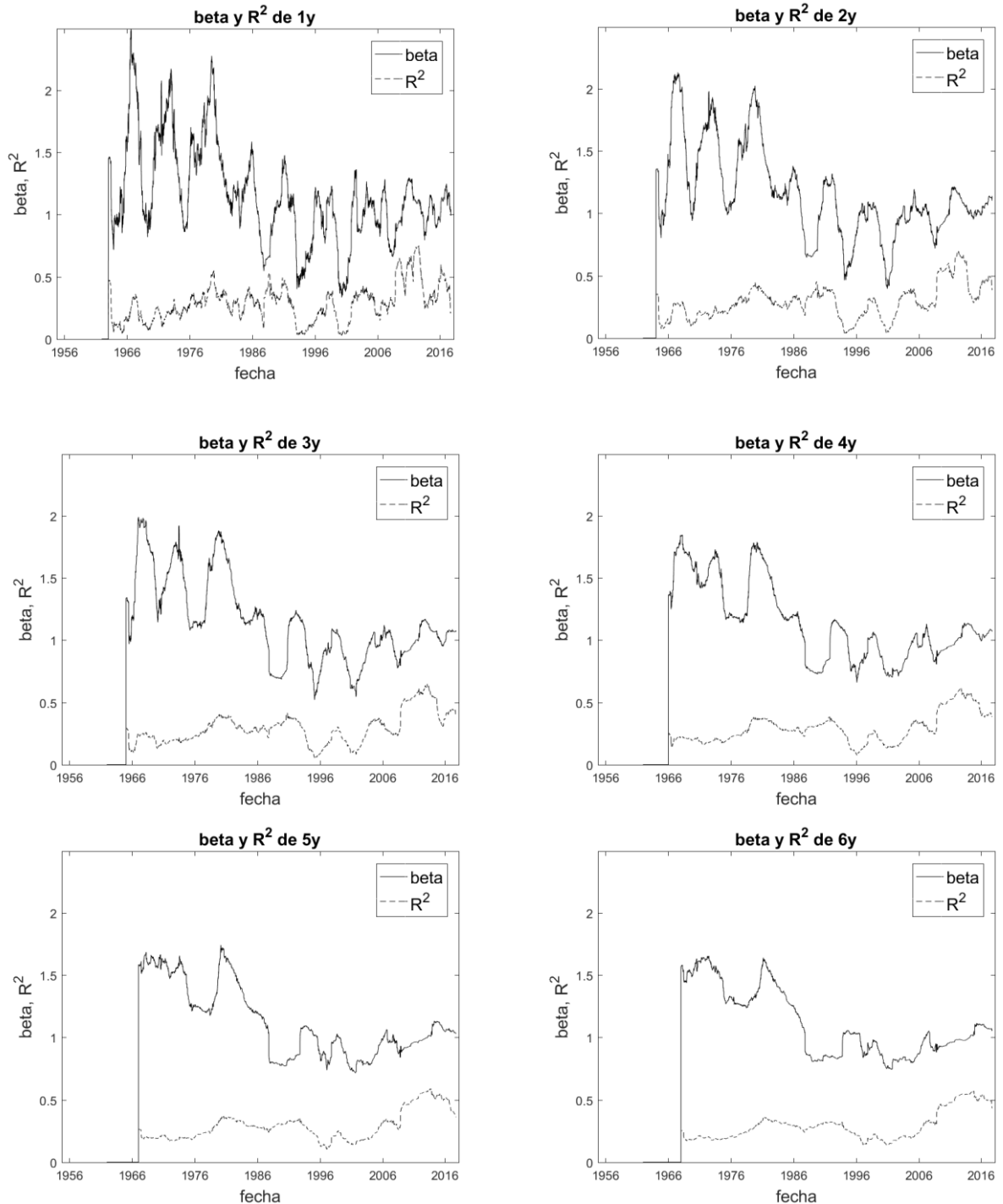


Figura 22. Boeing: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

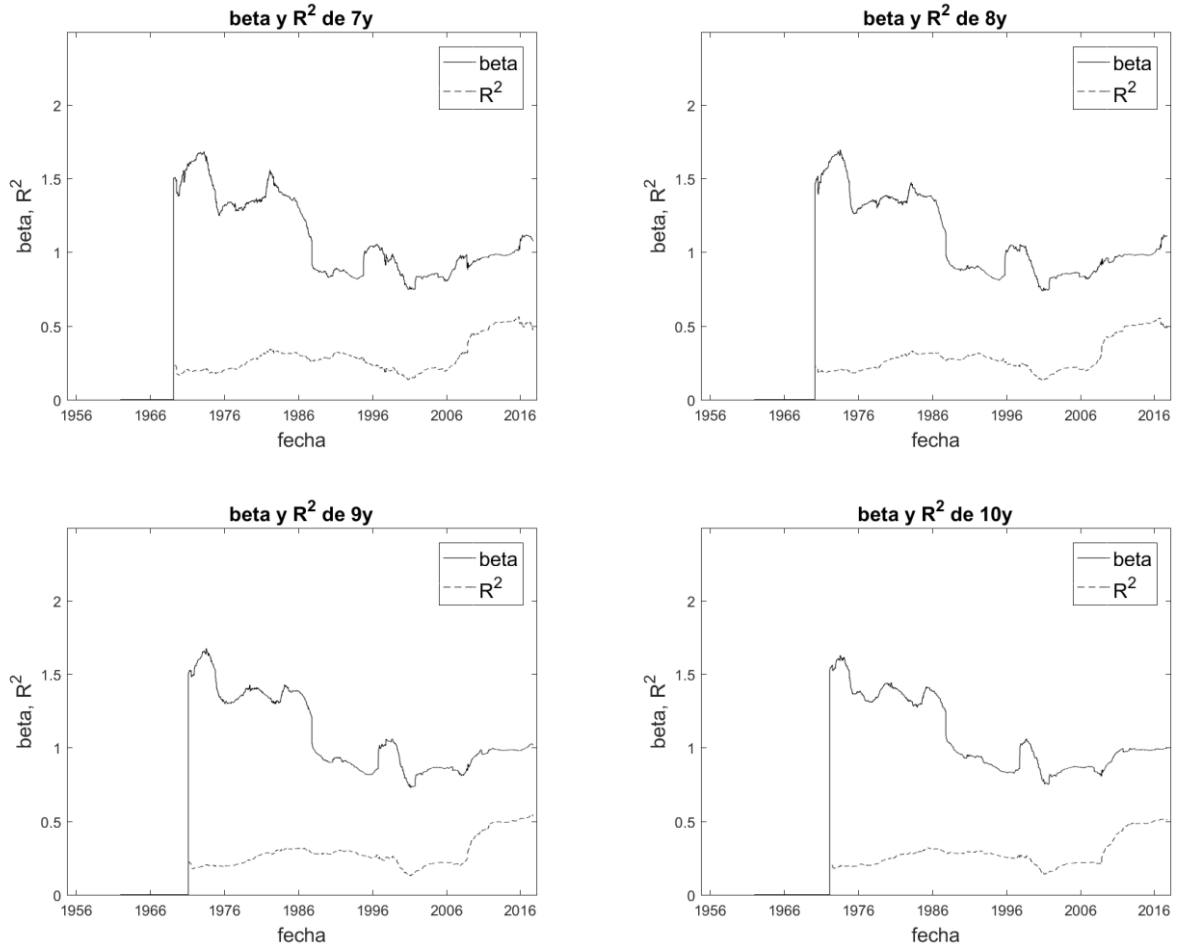


Figura 23. Boeing: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

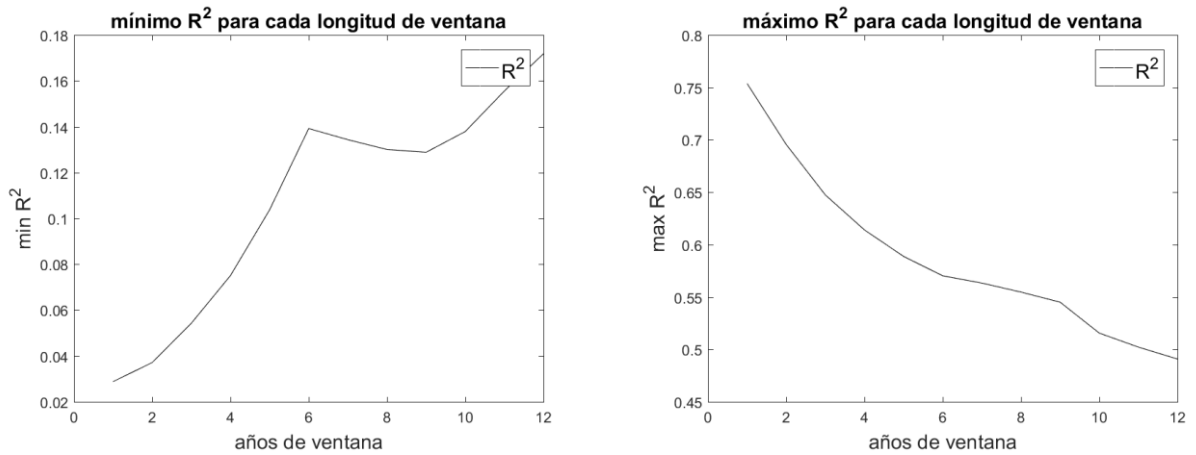


Figura 24. Boeing: R² extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

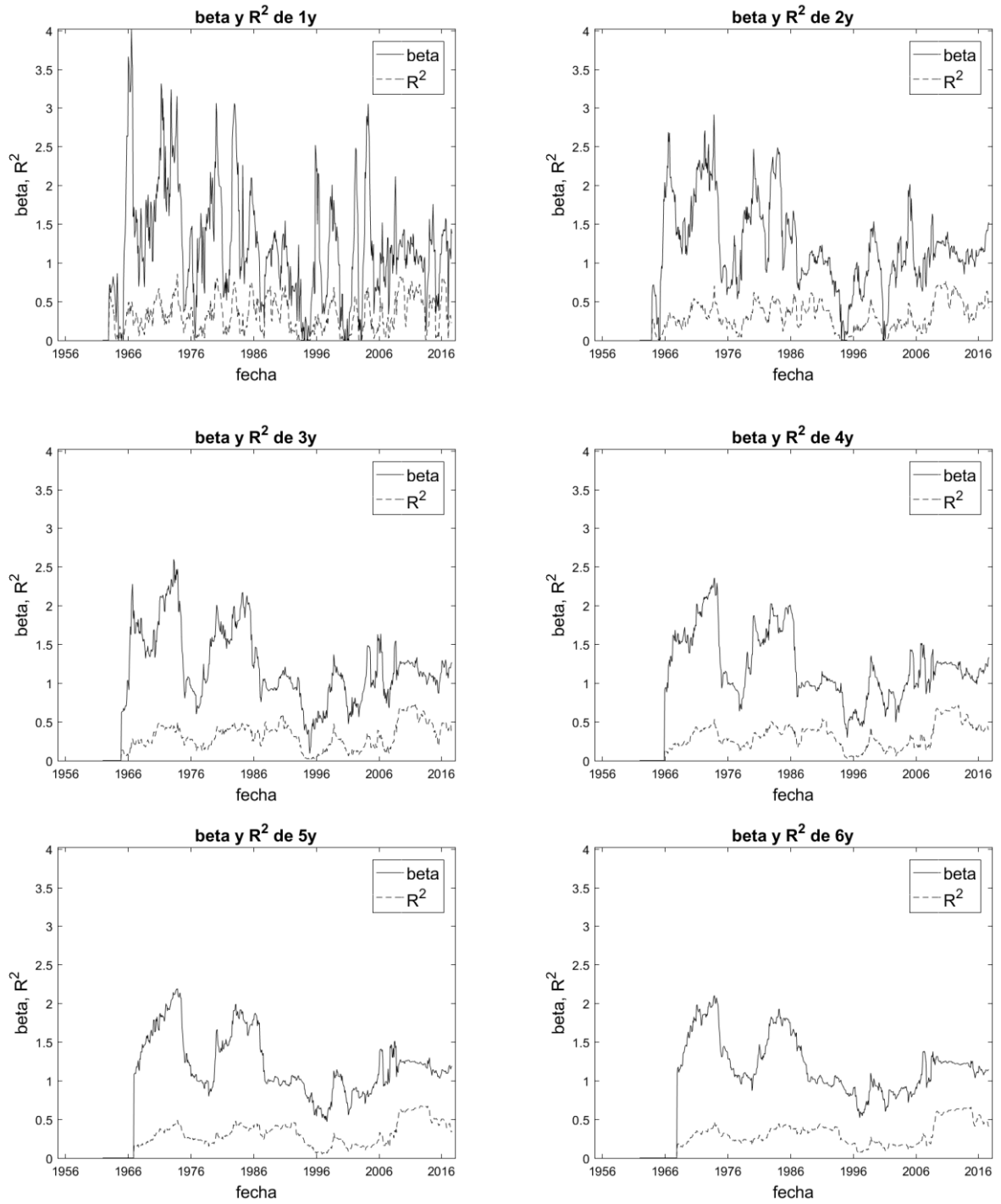


Figura 25. Boeing: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

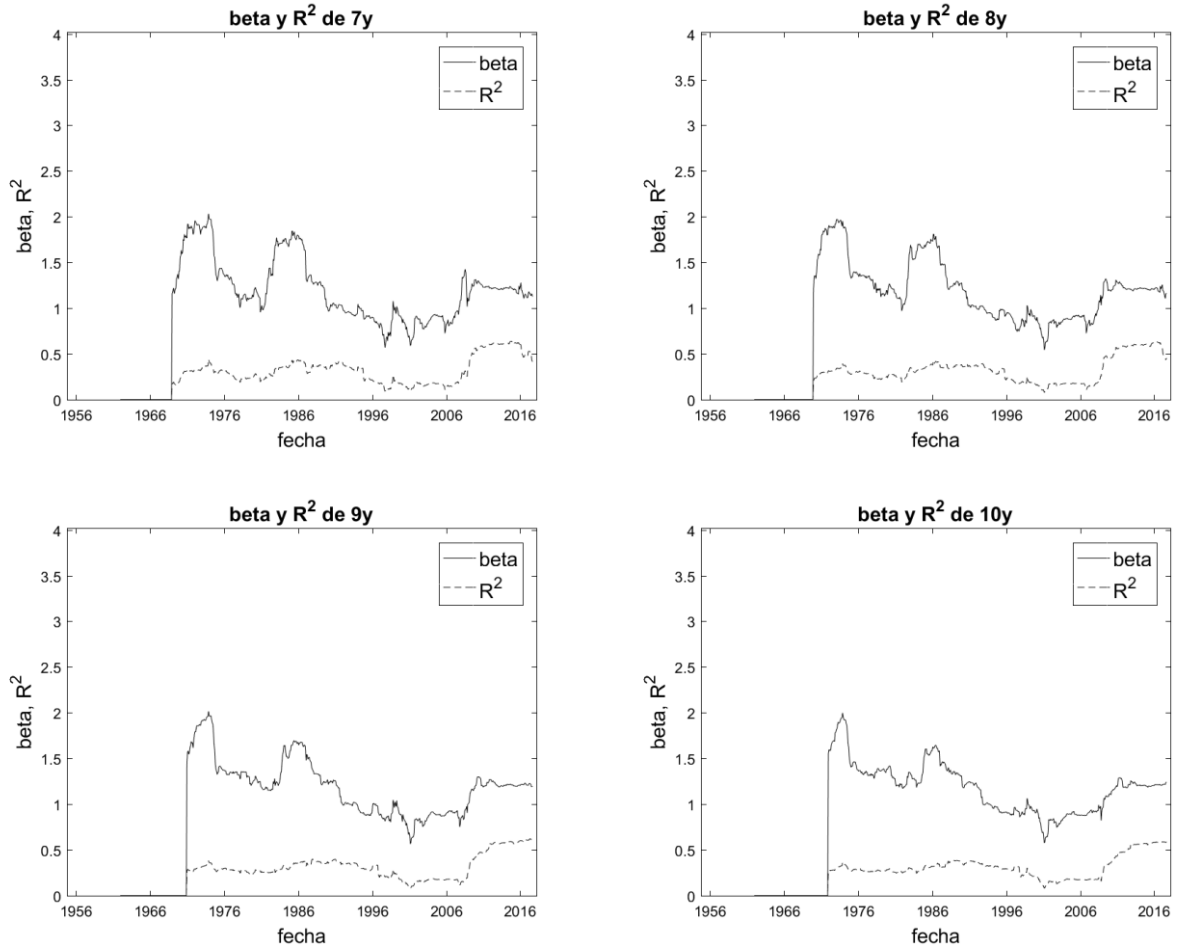


Figura 26. Boeing: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

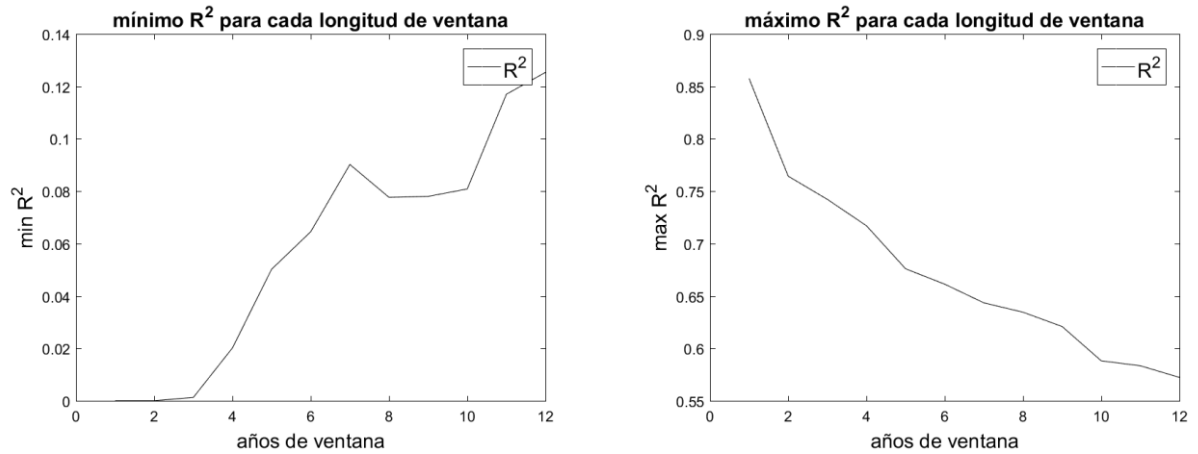


Figura 27. Boeing: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

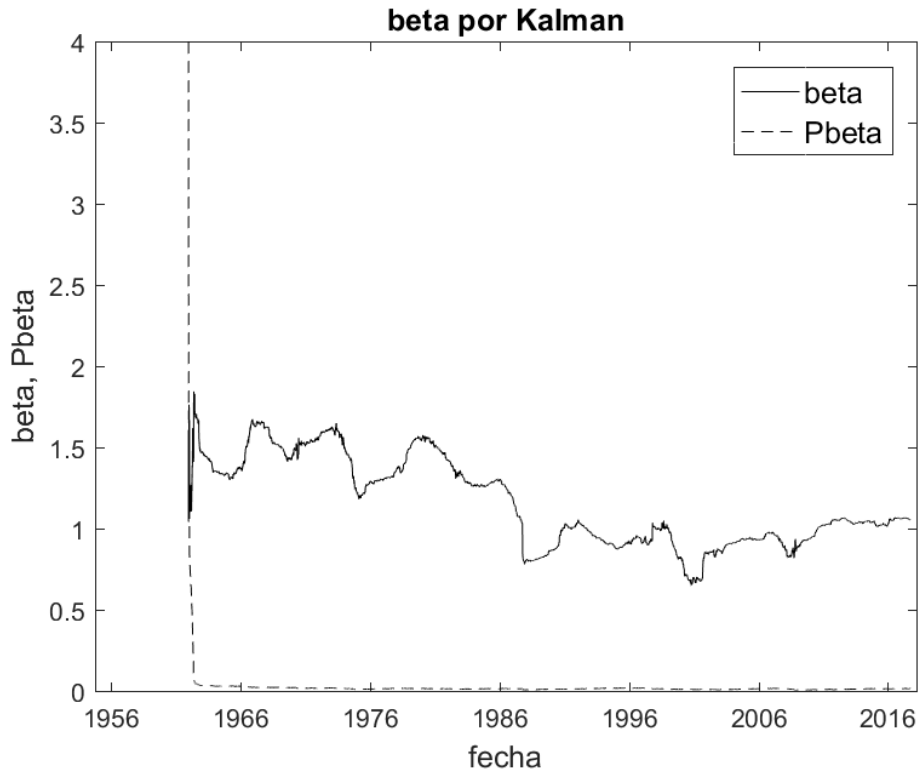


Figura 28. Boeing: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

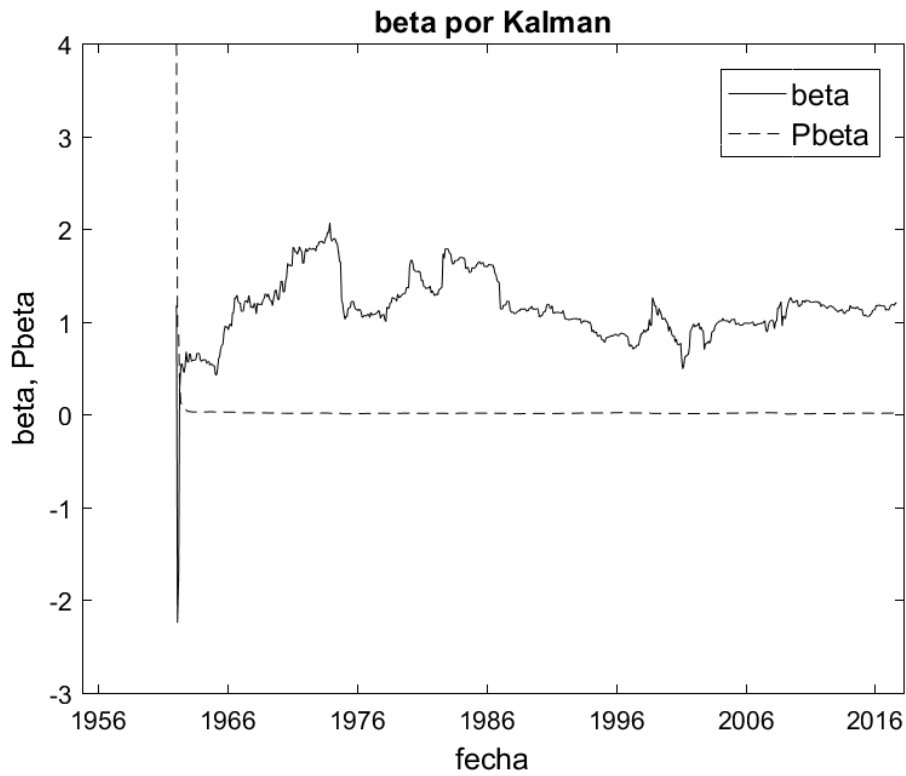


Figura 29. Boeing: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

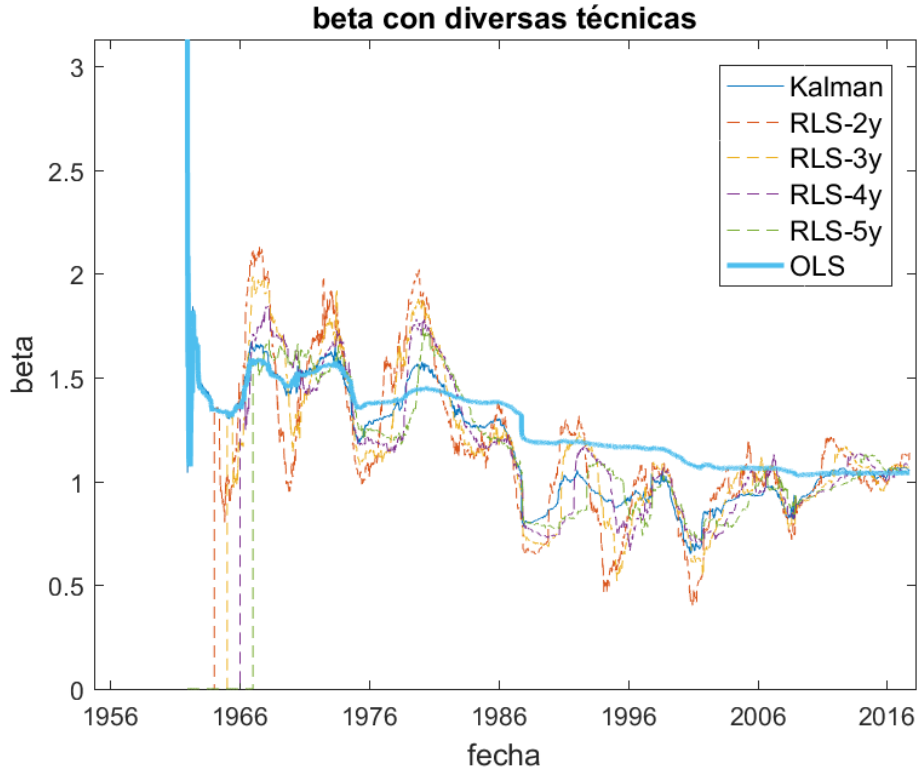


Figura 30. Boeing: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

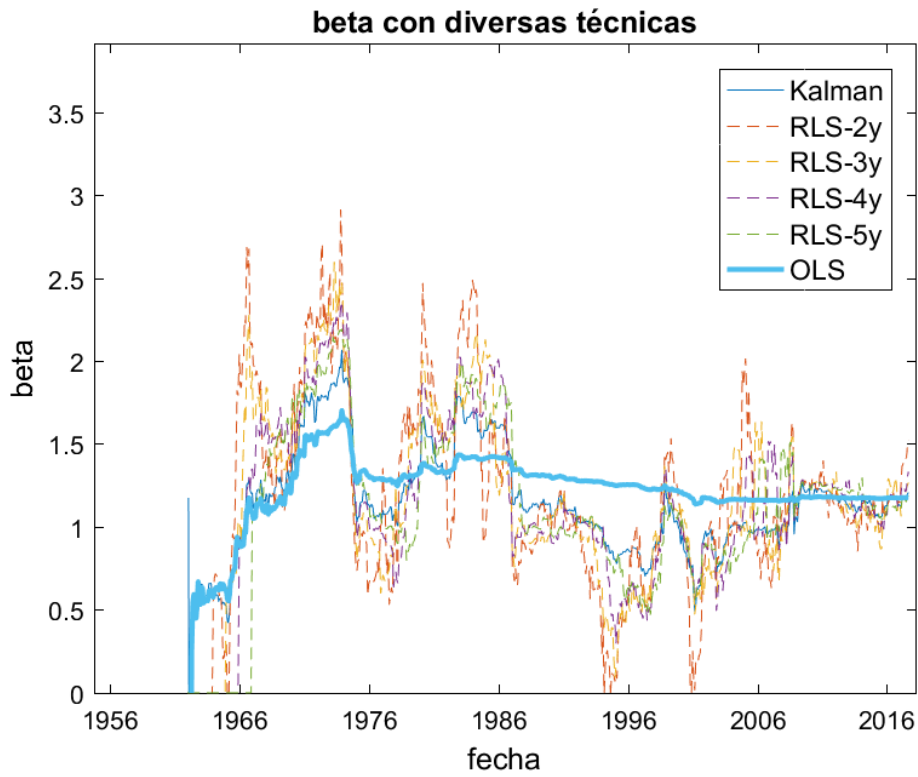


Figura 31. Boeing: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.2.4 Exxon Mobil Corporation

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	0.8581	0.6651

Resultado de RLS

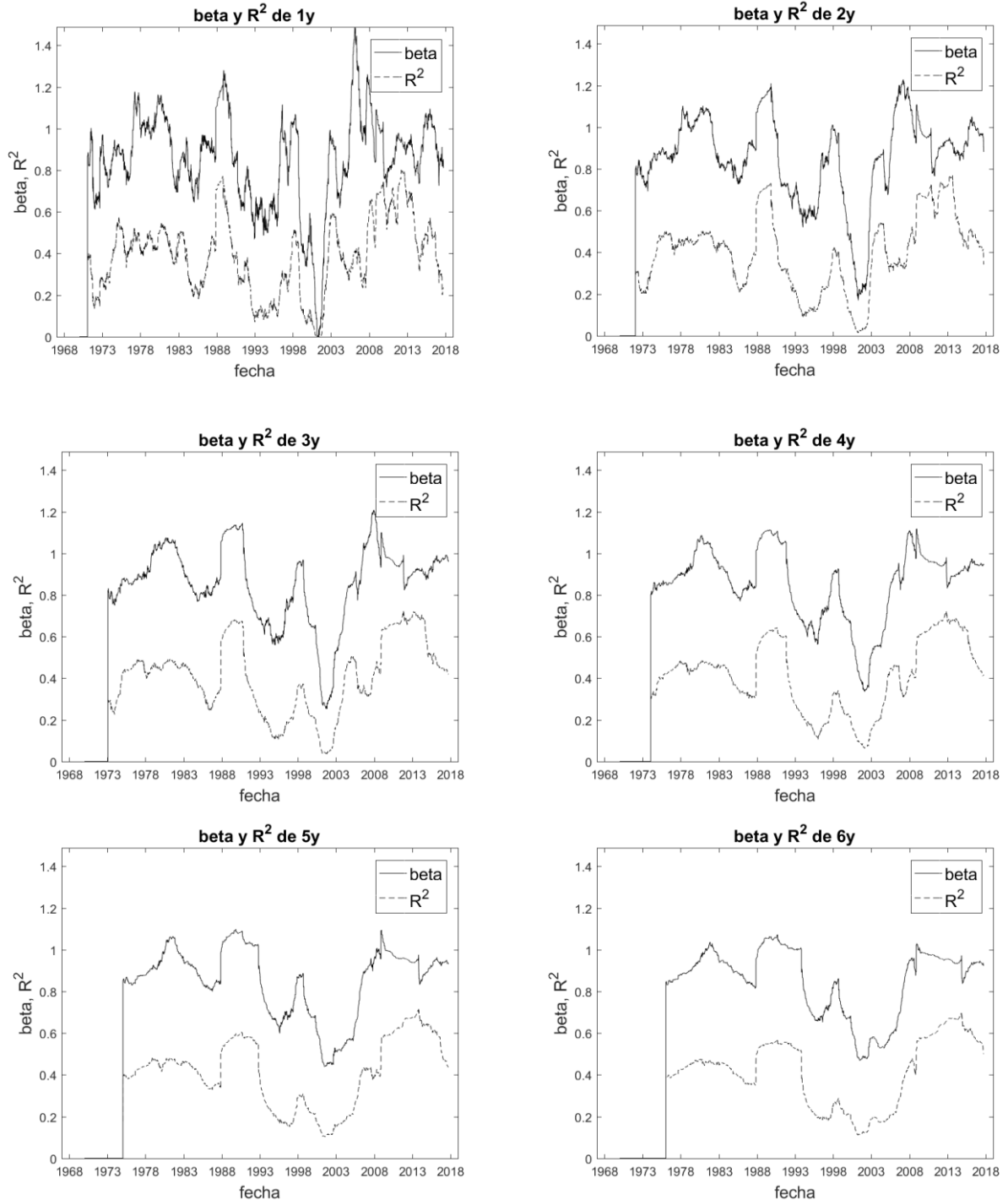


Figura 32. Exxon: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

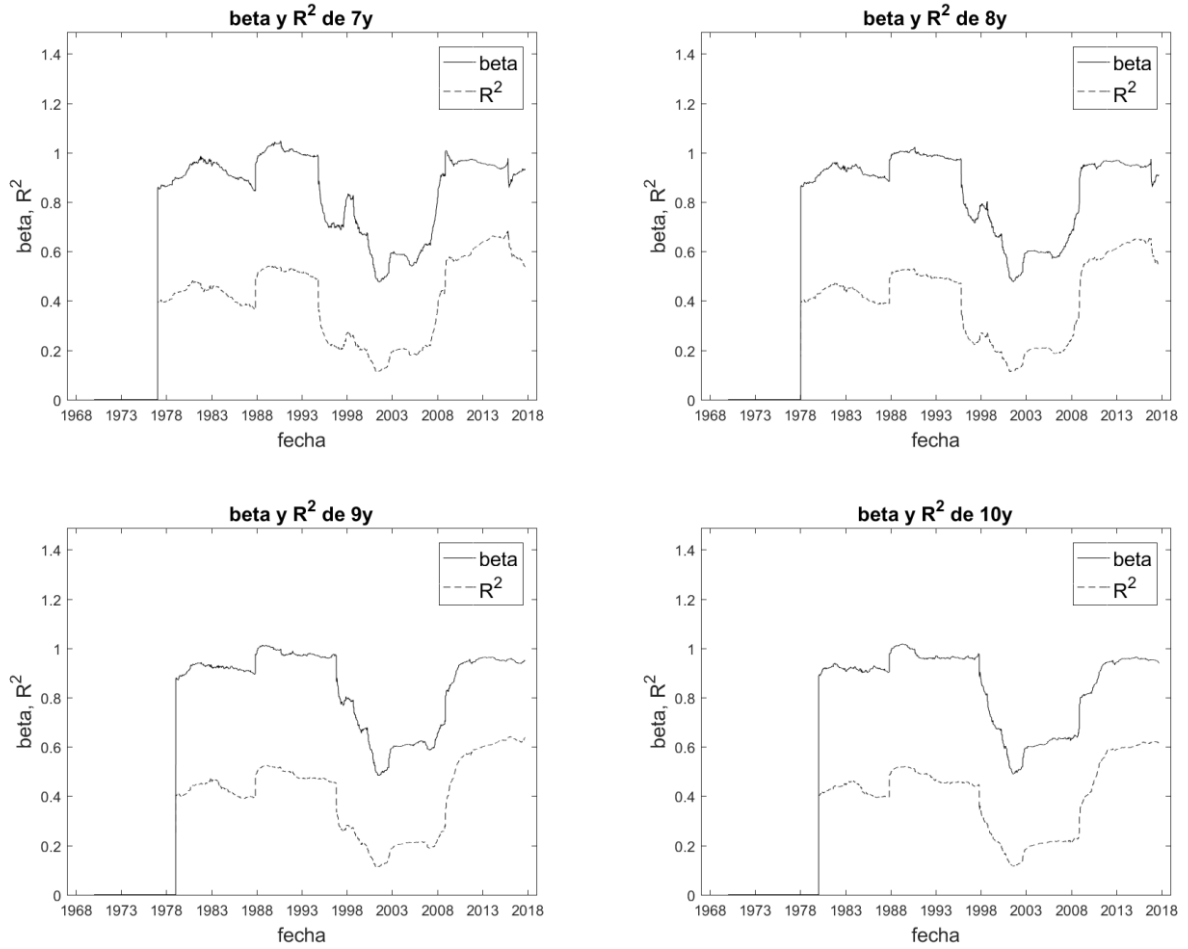


Figura 33. Exxon: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

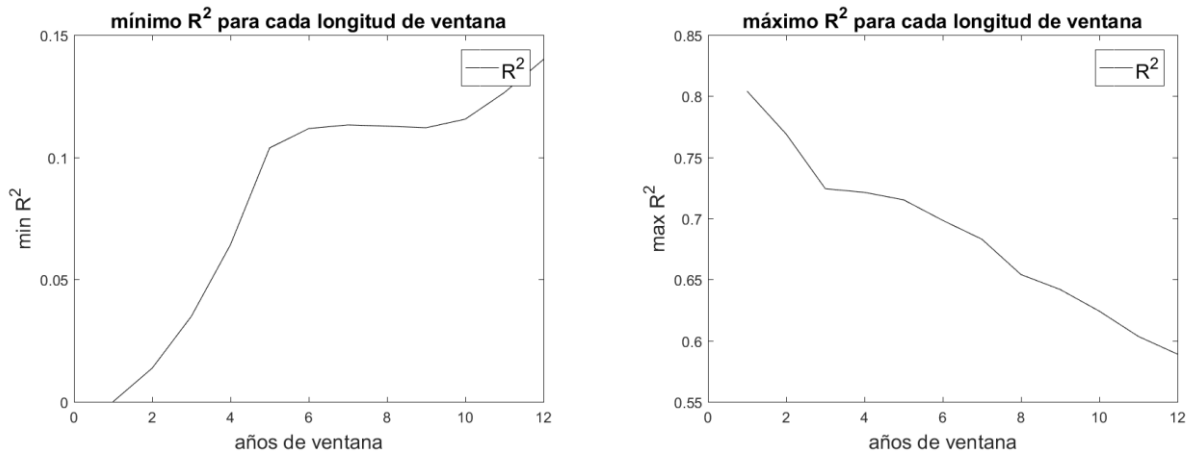


Figura 34. Exxon: R² extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

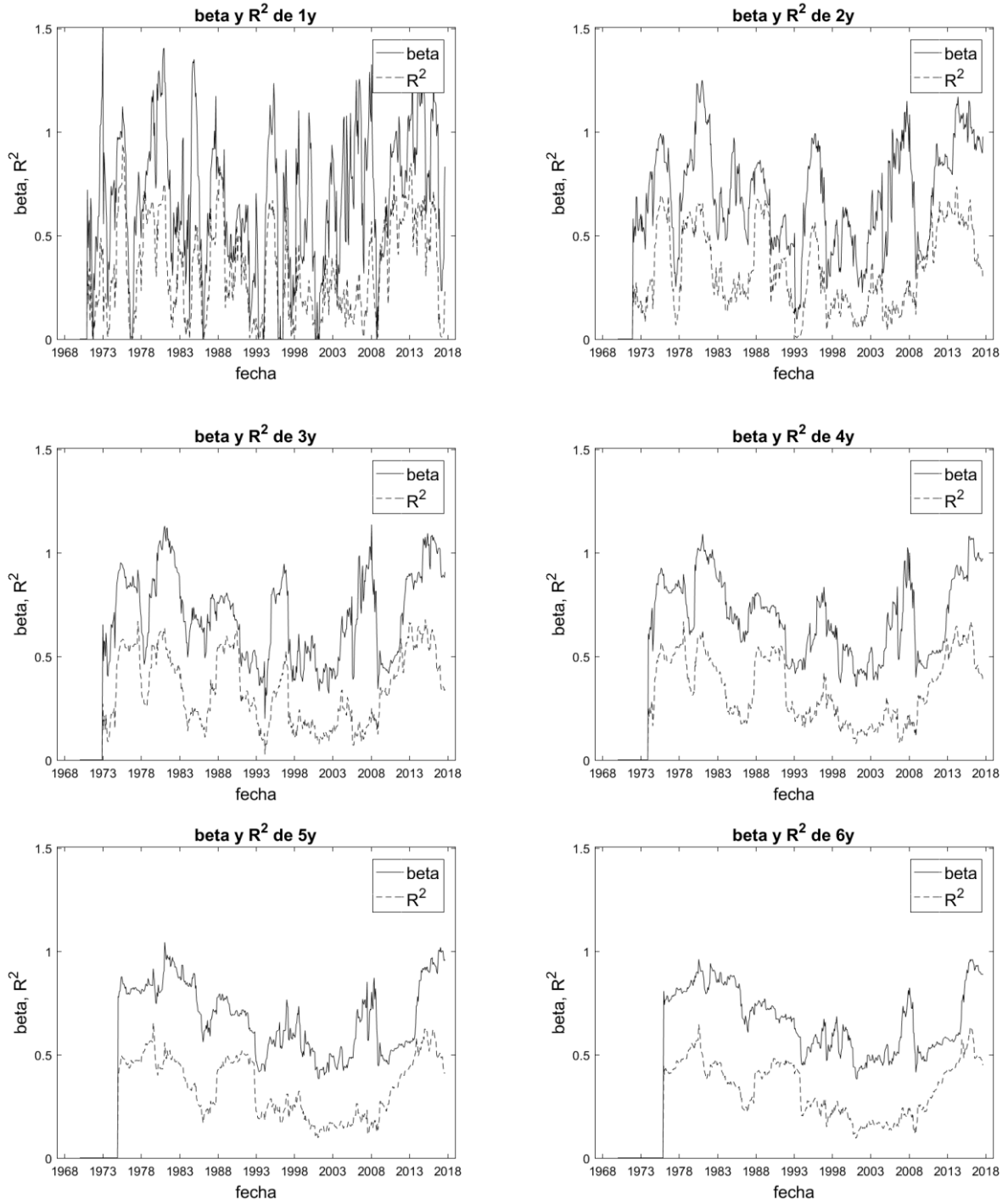


Figura 35. Exxon: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

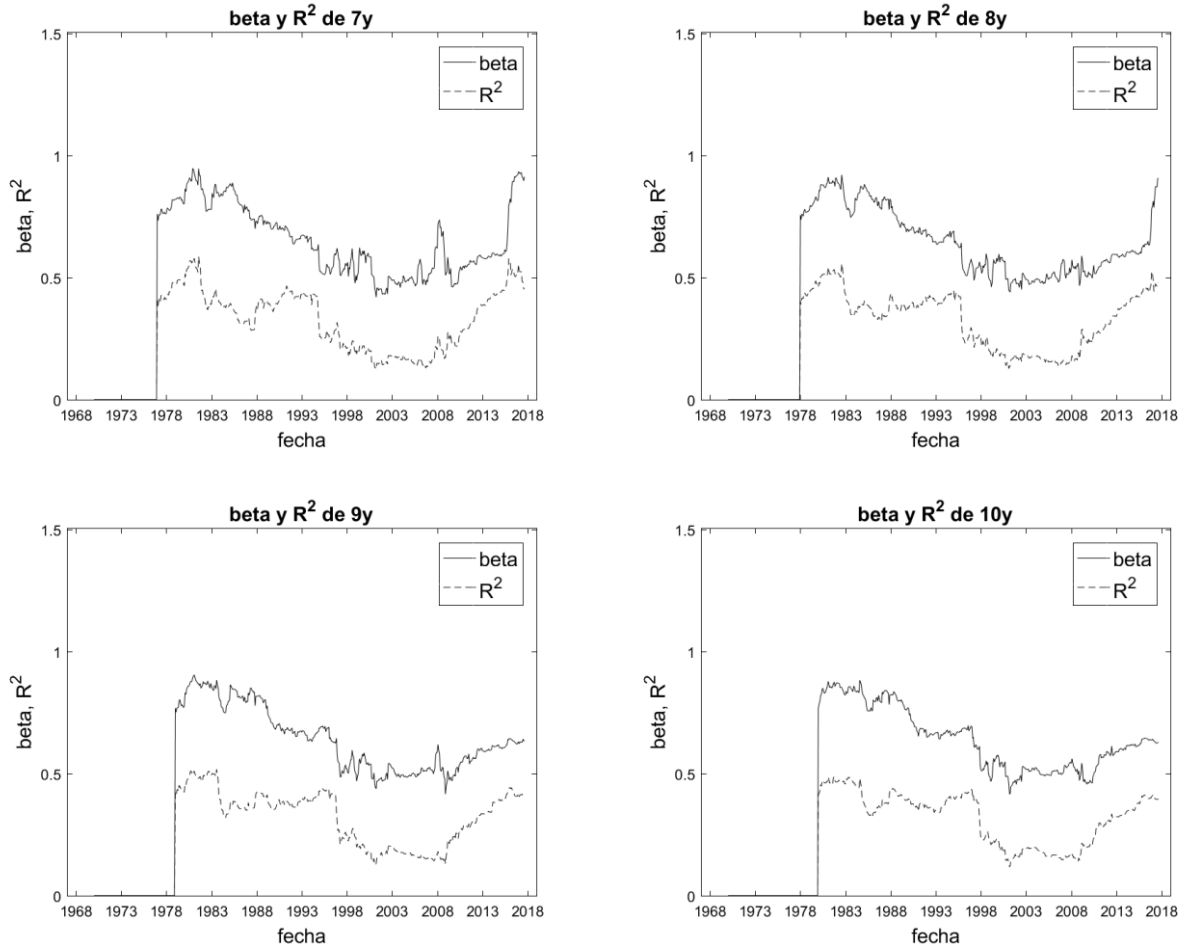


Figura 36. Exxon: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

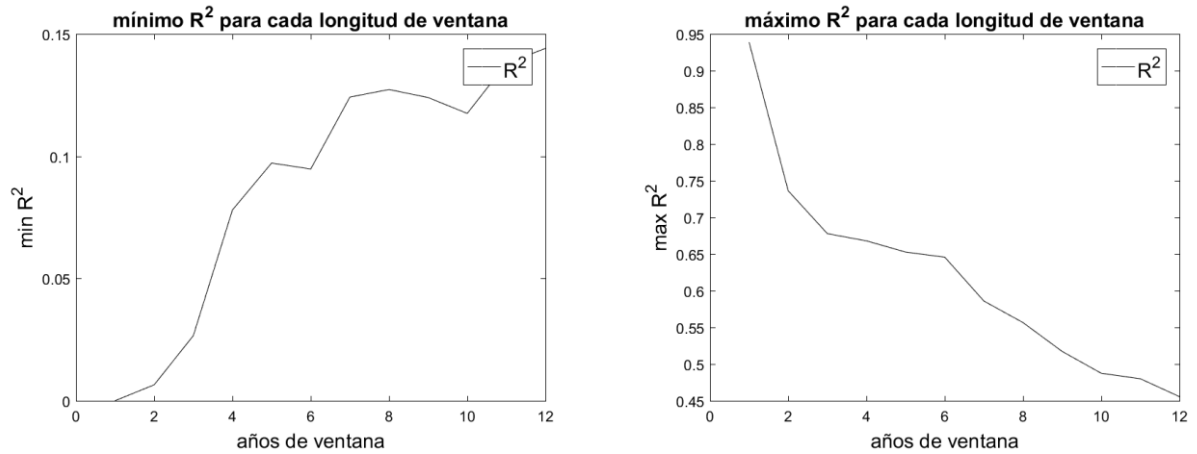


Figura 37. Exxon: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

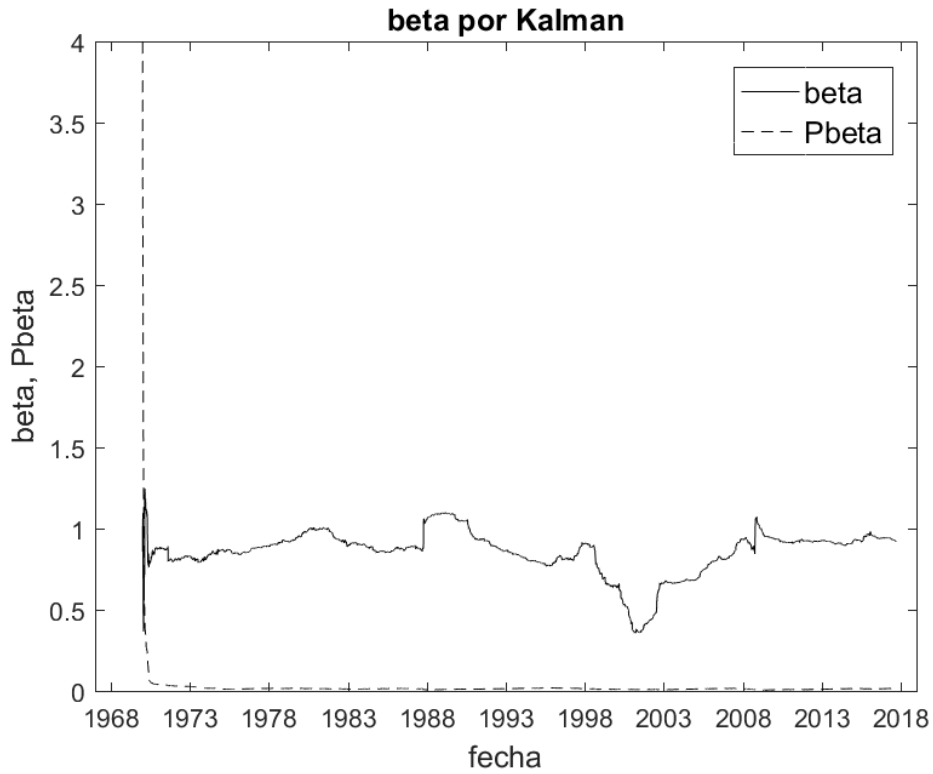


Figura 38. Exxon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

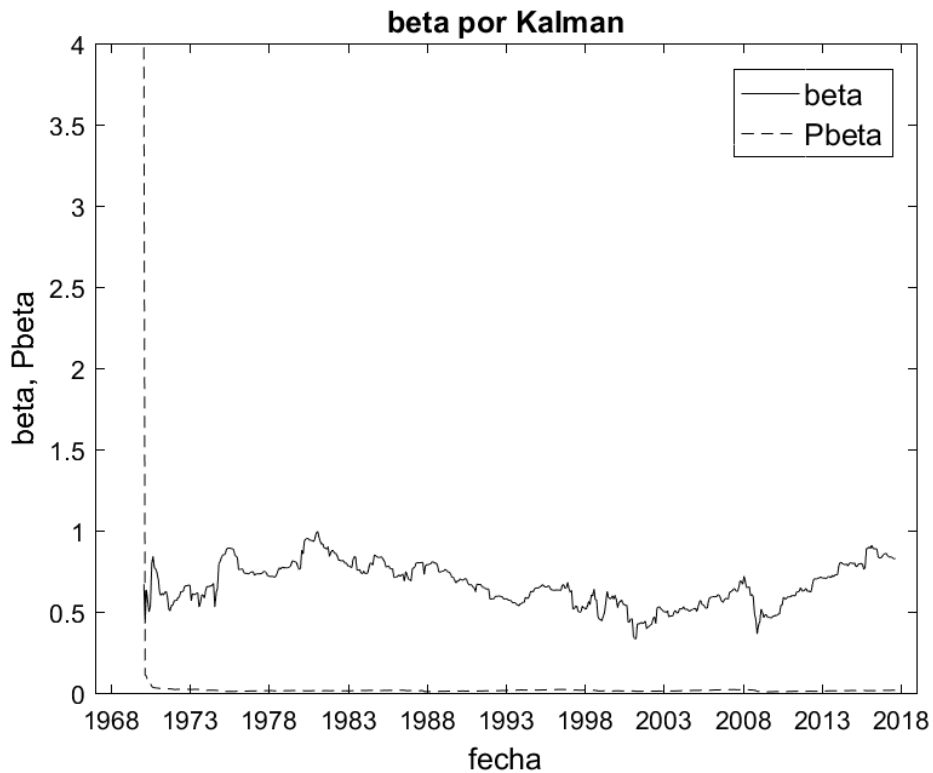


Figura 39. Exxon: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

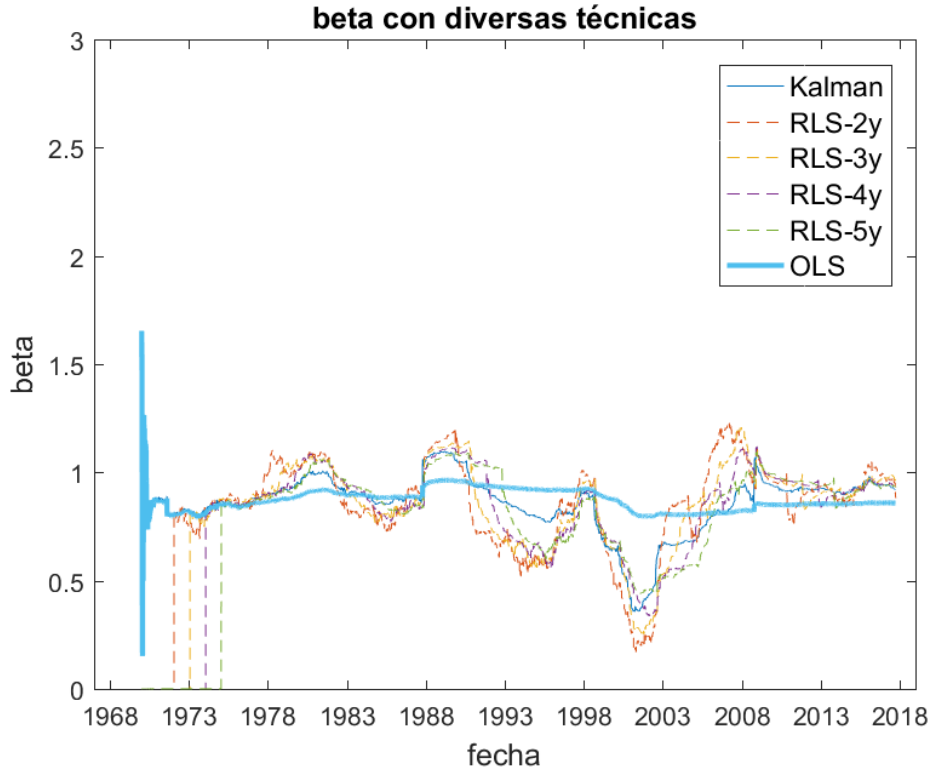


Figura 40. Exxon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

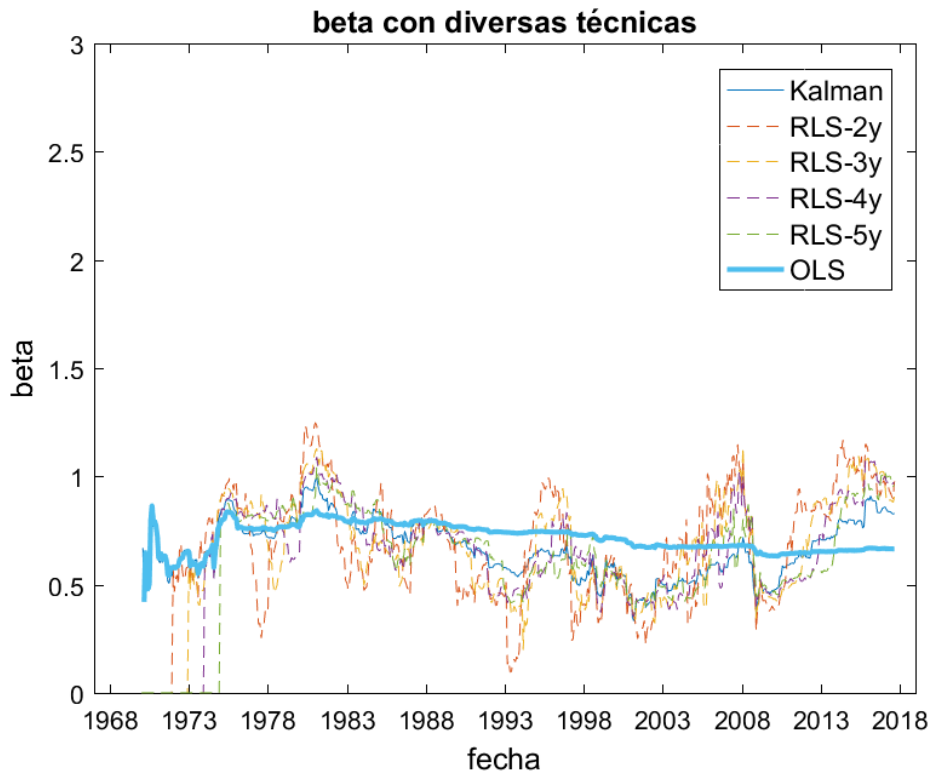


Figura 41. Exxon: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.3 Aplicación al caso español

4.3.1 Telefónica

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	1.0227	0.9457

Resultado de RLS

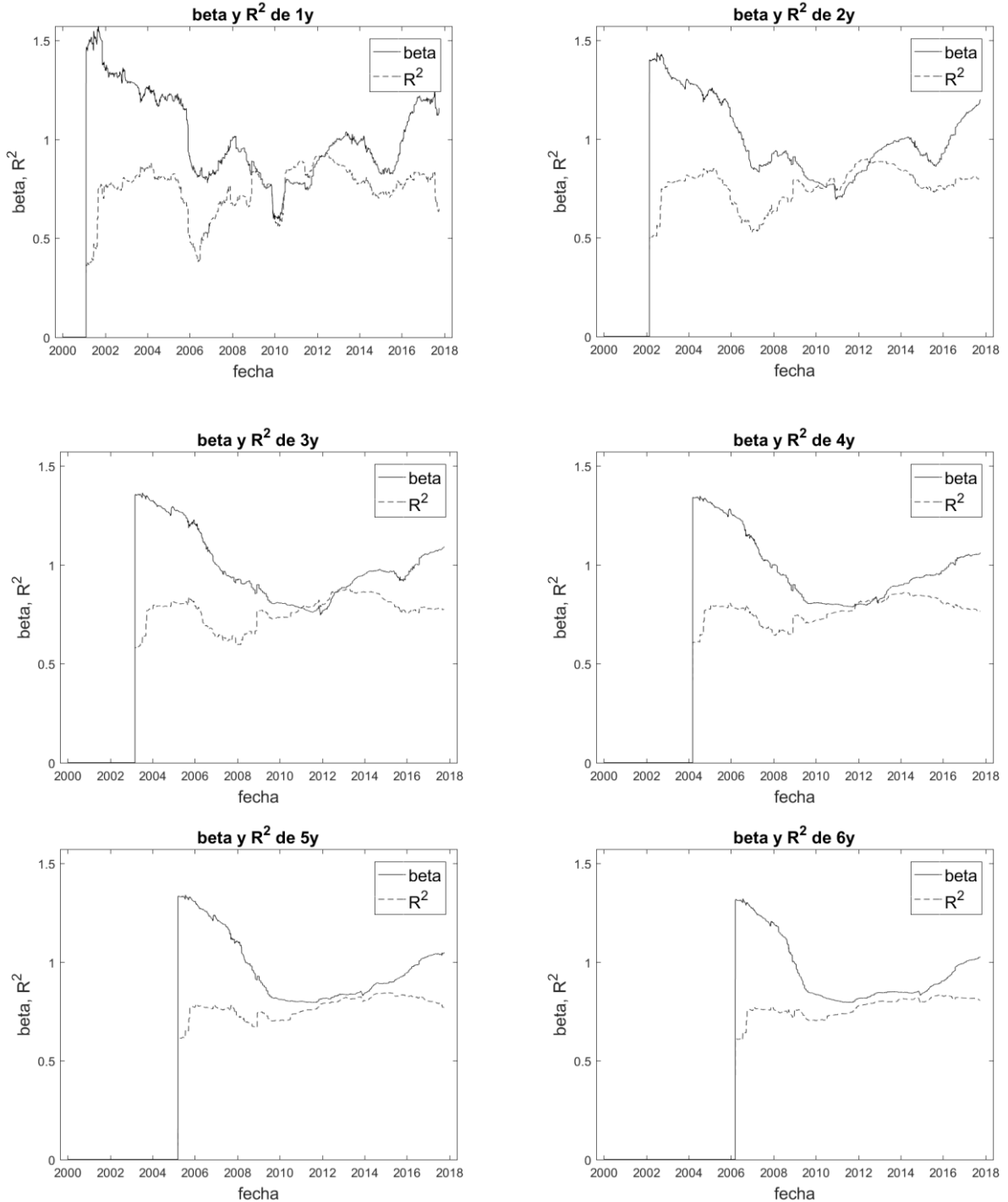


Figura 42. Telefónica: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

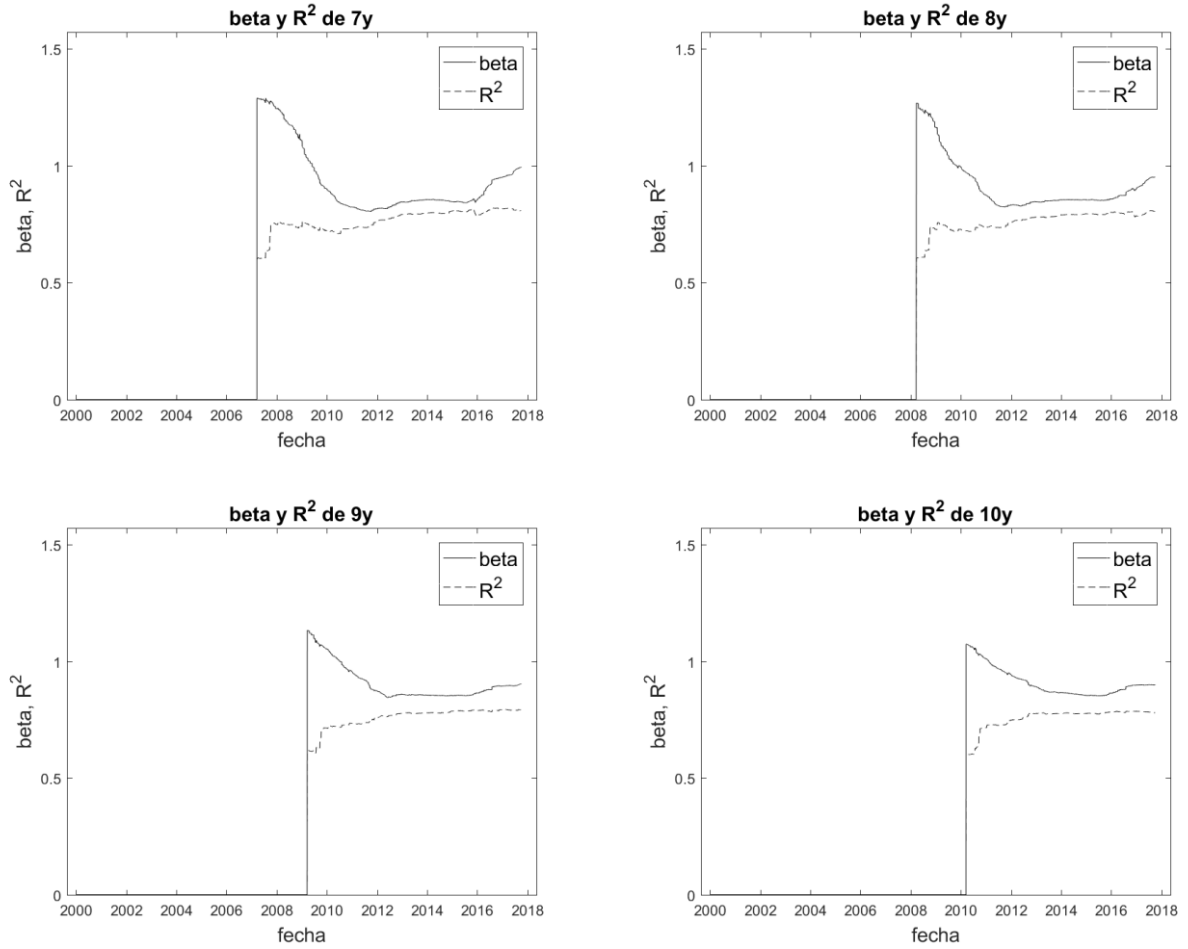


Figura 43. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

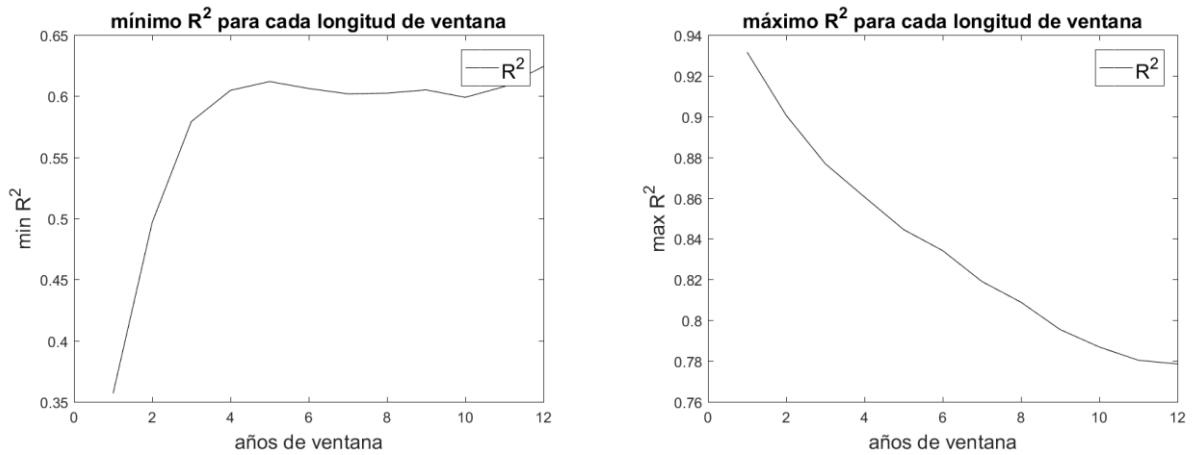


Figura 44. Telefónica: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

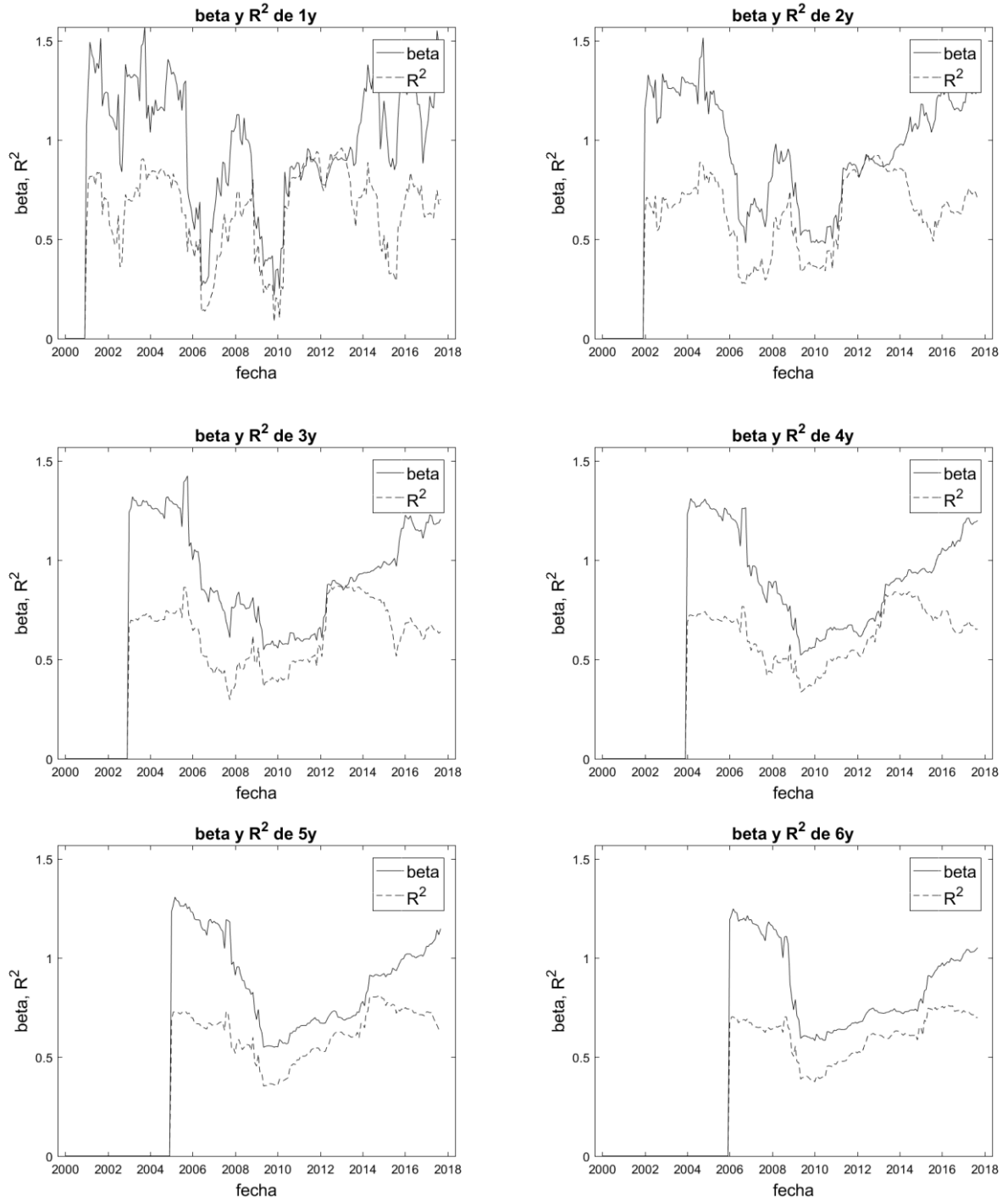


Figura 45. Telefónica: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

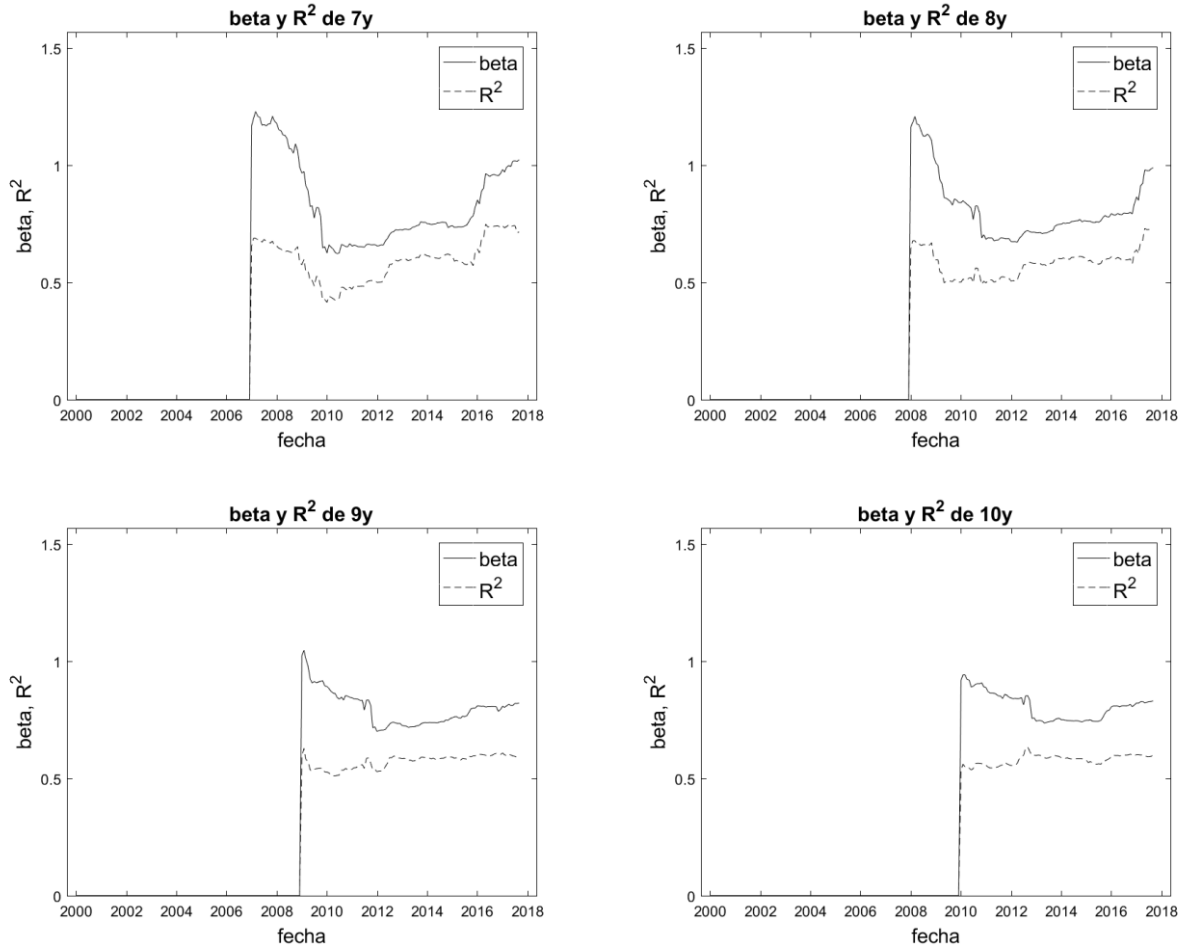


Figura 46. Telefónica: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

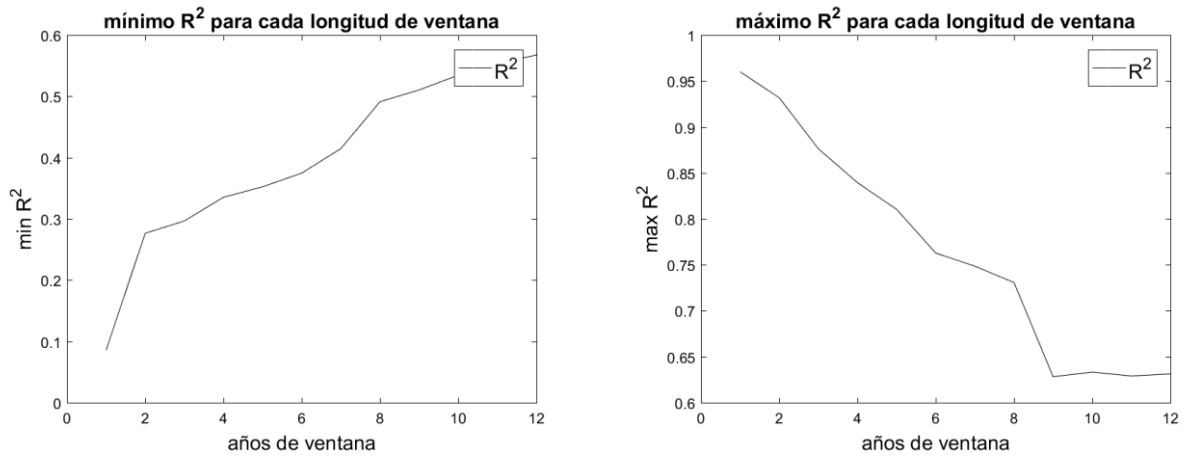


Figura 47. Telefónica: R² extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

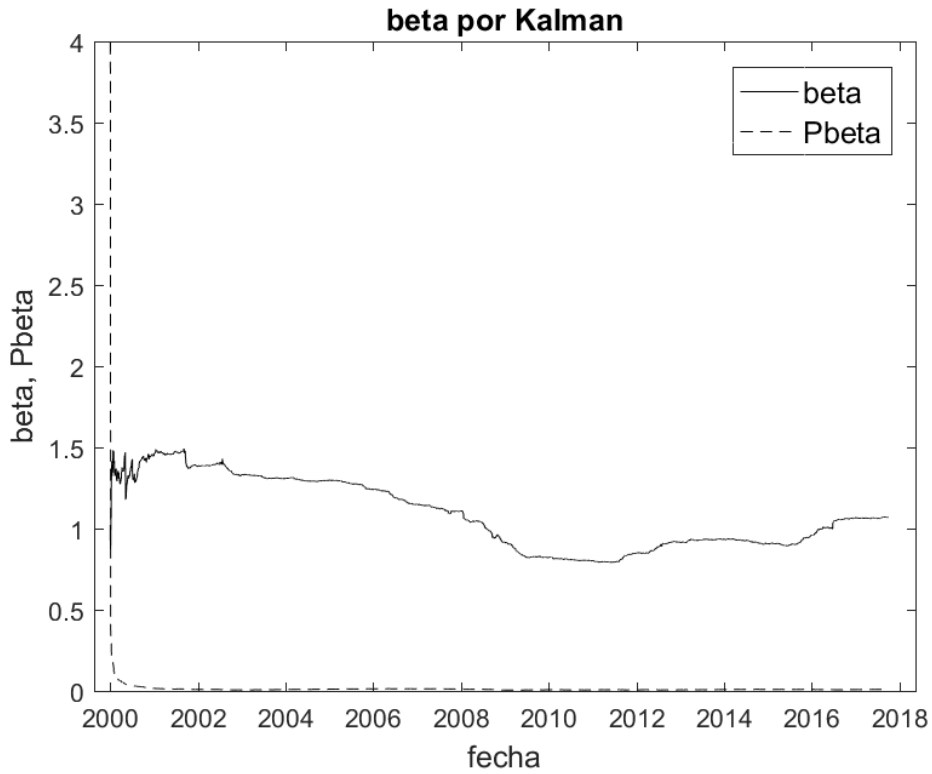


Figura 48. Telefónica: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

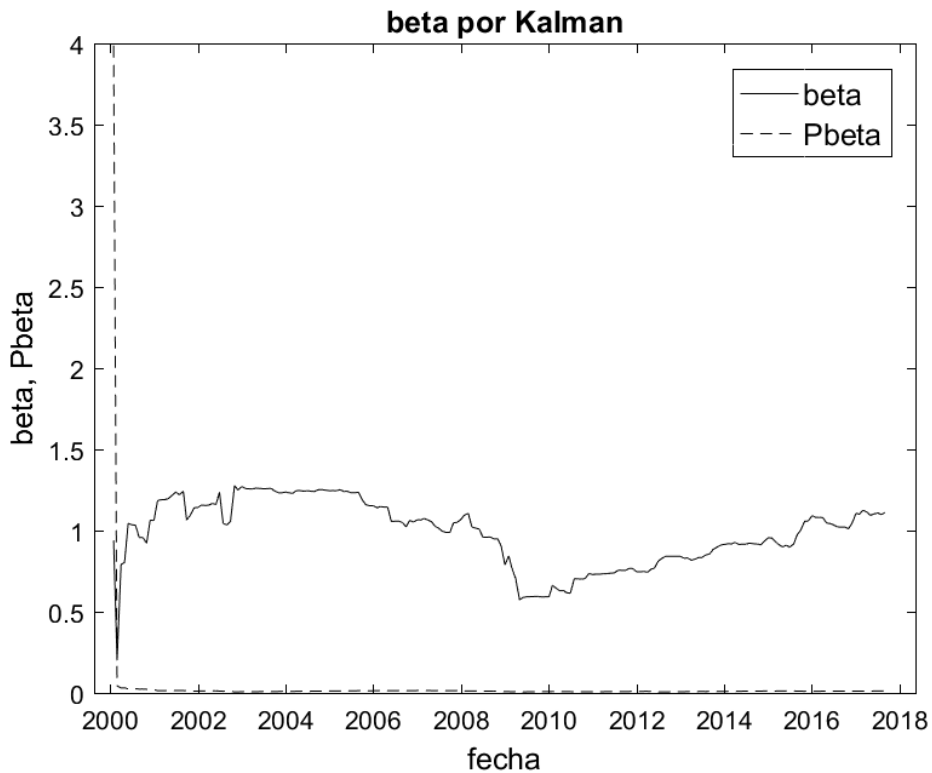


Figura 49. Telefónica: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

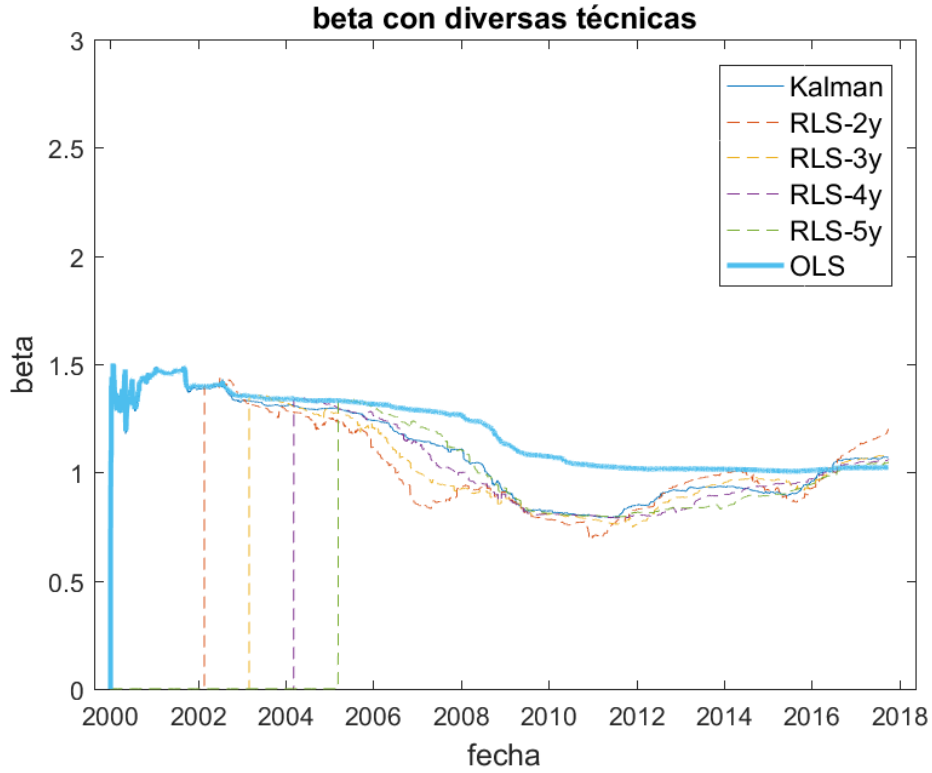


Figura 50. Telefónica: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

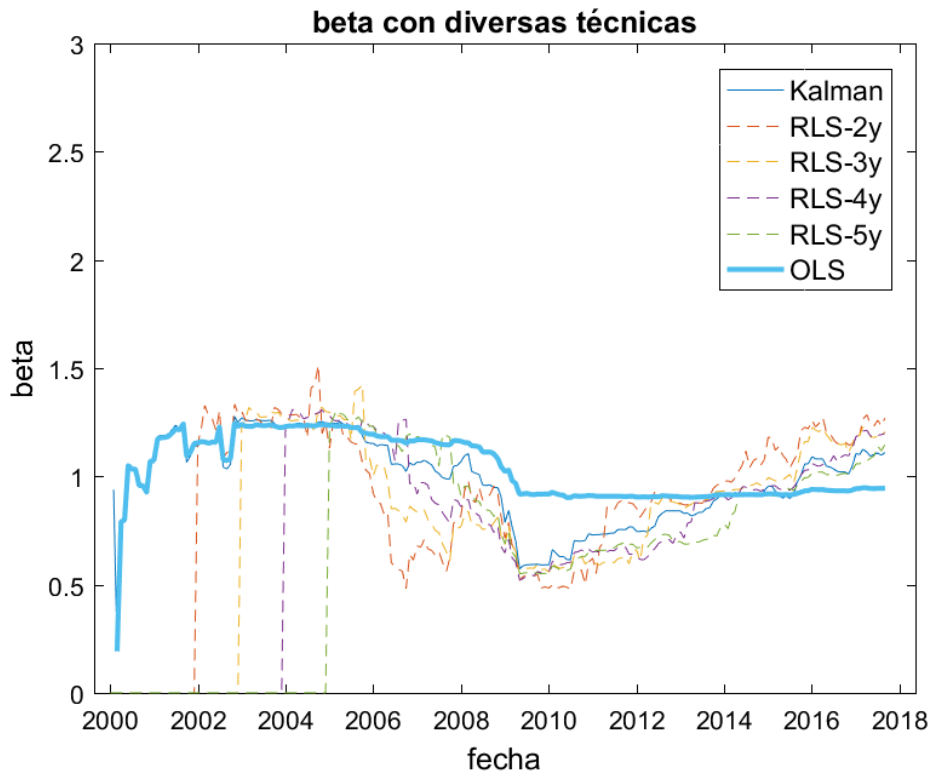


Figura 51. Telefónica: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.3.2 Banco Santander

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	1.3570	1.3457

Resultado de RLS

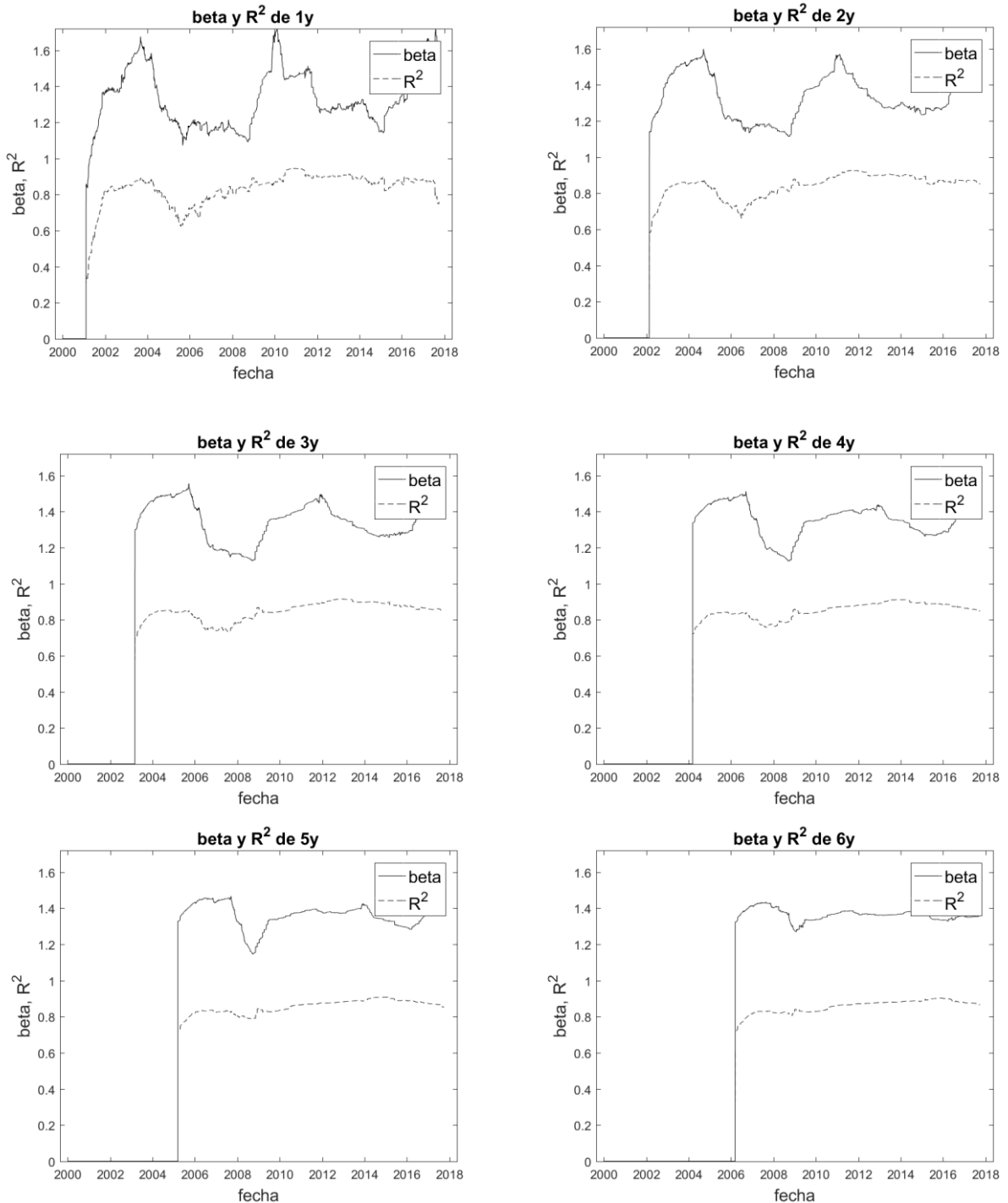


Figura 52. Santander: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

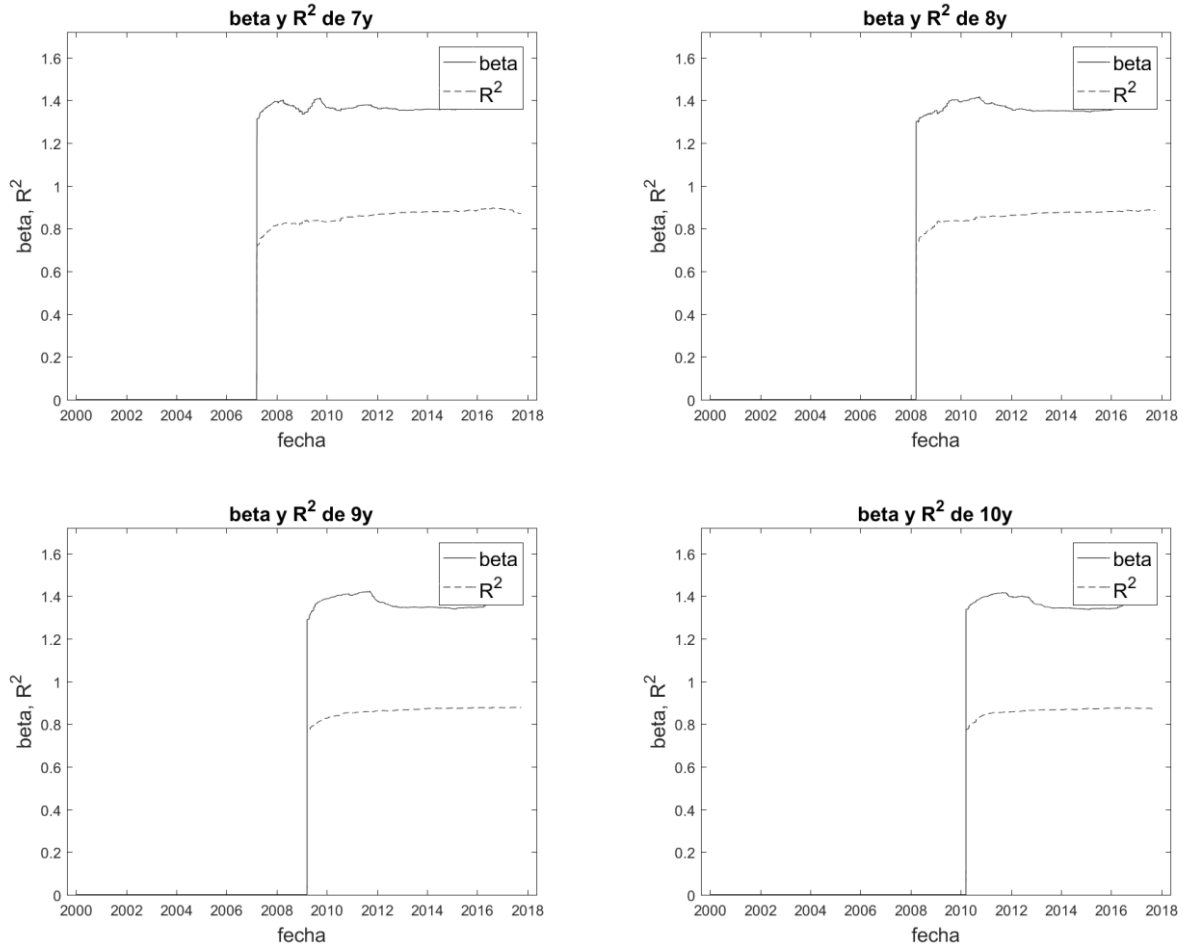


Figura 53. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

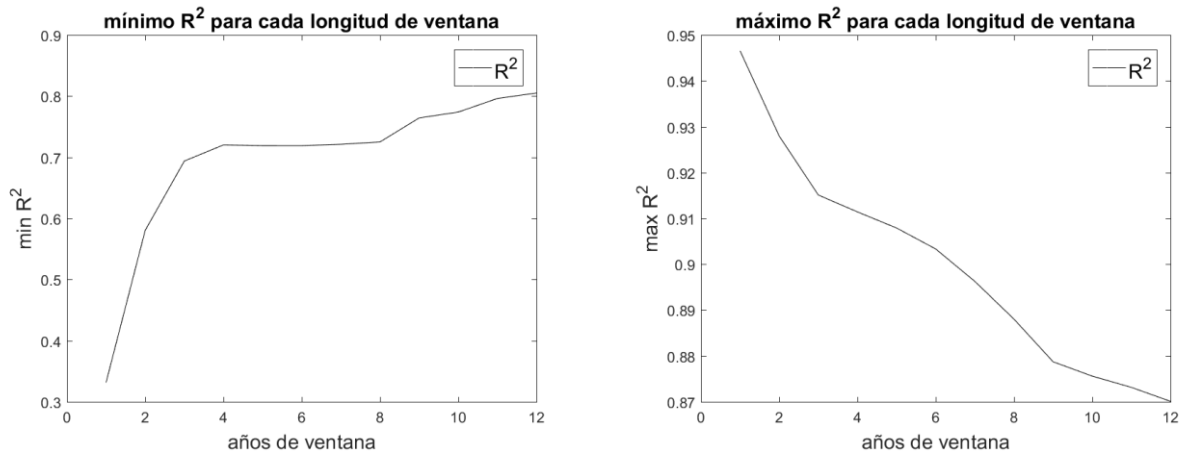


Figura 54. Santander: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

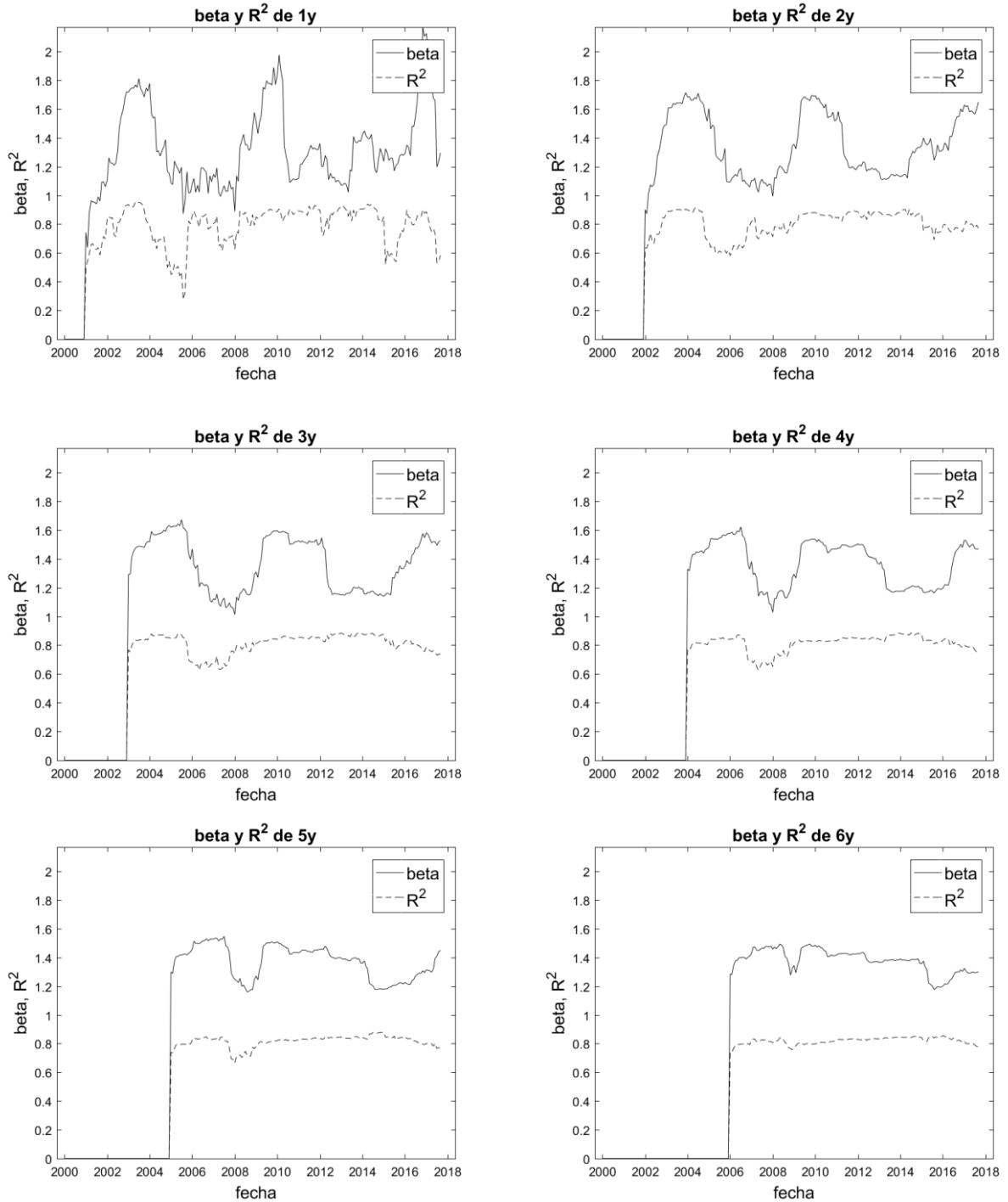


Figura 55. Santander: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

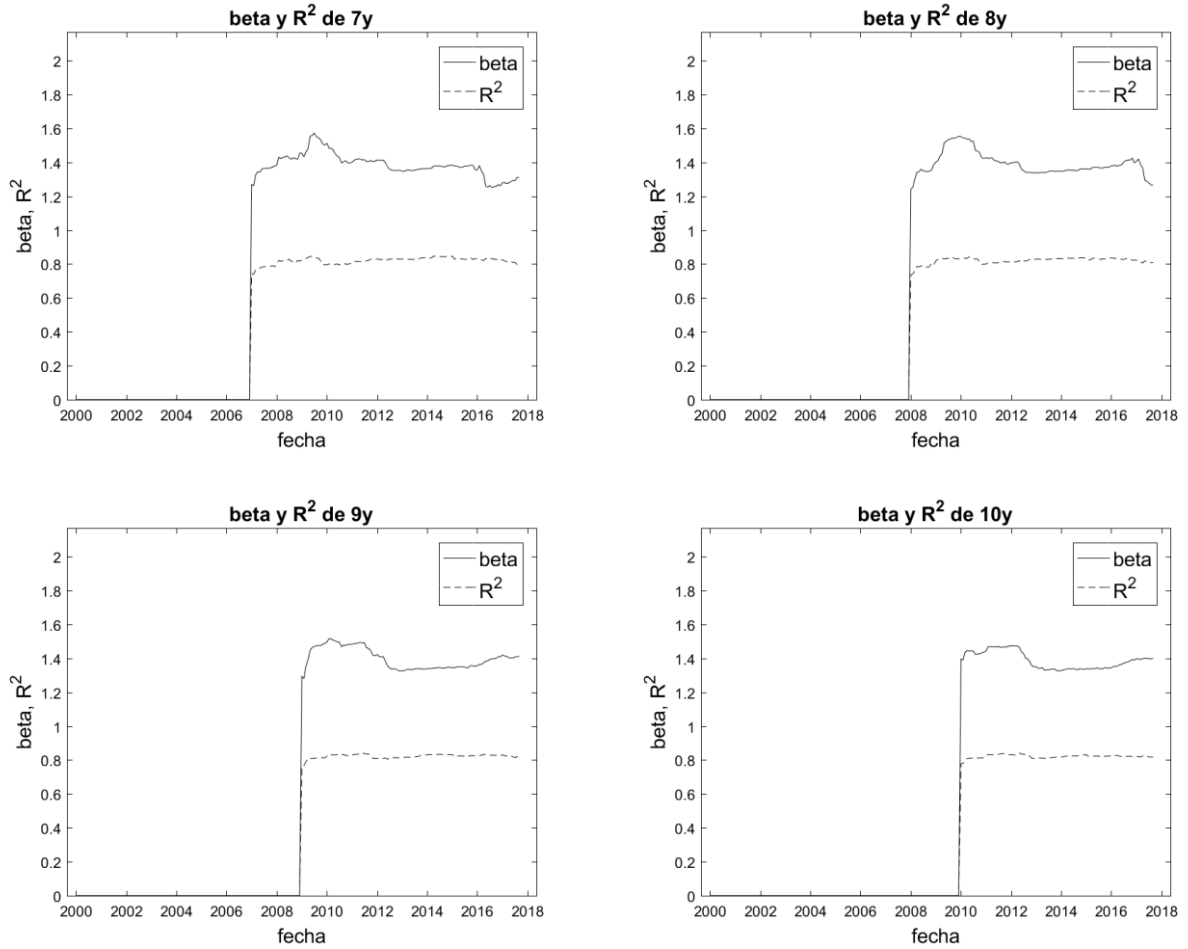


Figura 56. Santander: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

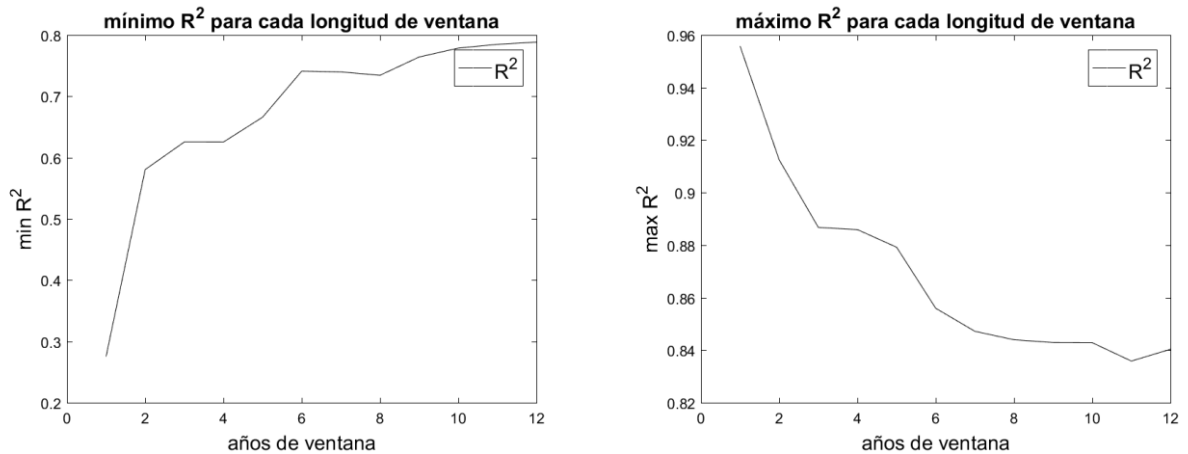


Figura 57. Santander: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

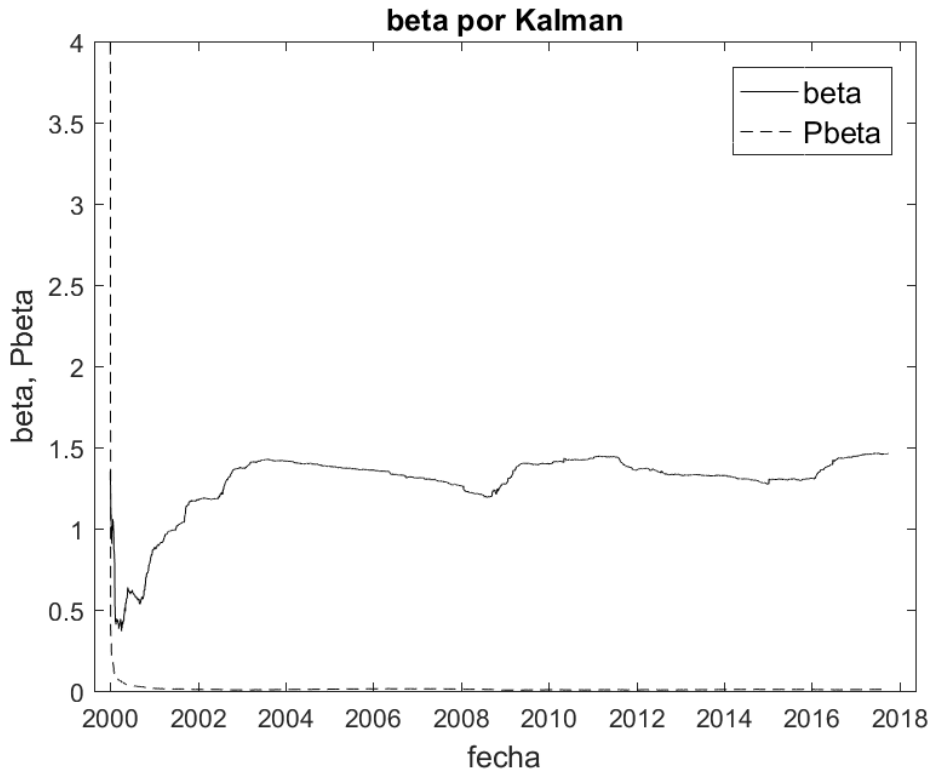


Figura 58. Santander: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

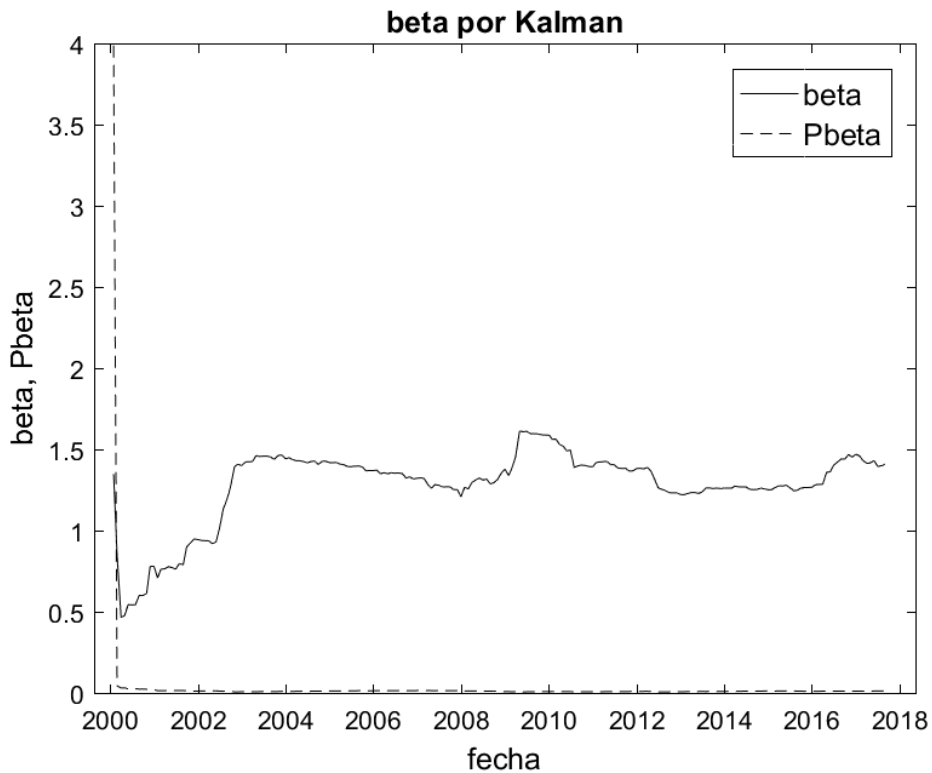


Figura 59. Santander: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

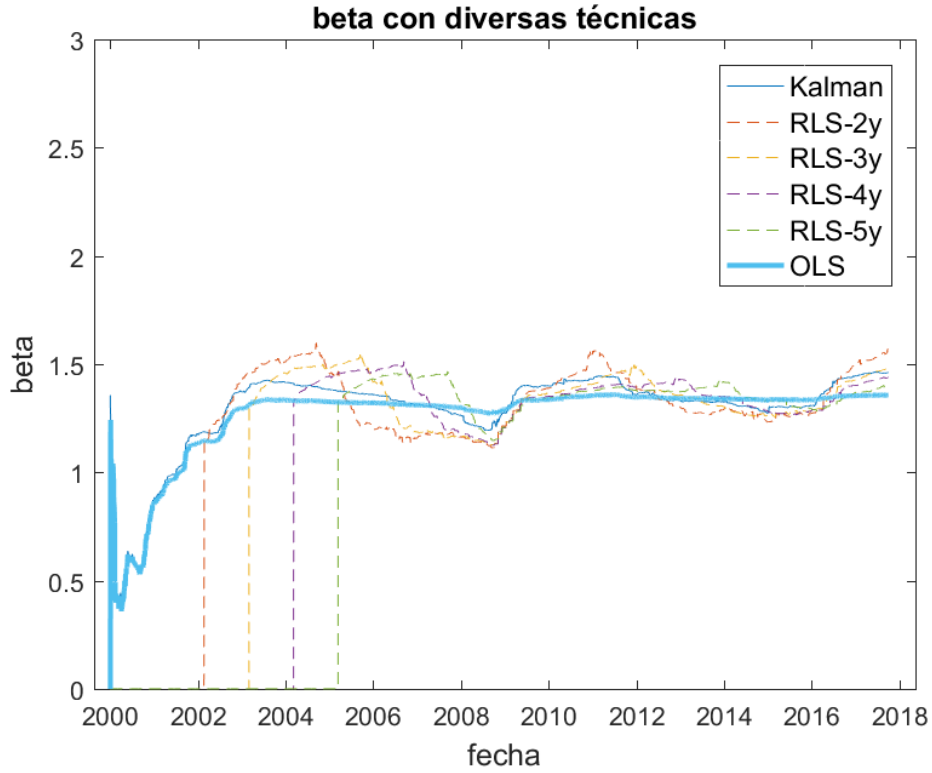


Figura 60. Santander: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

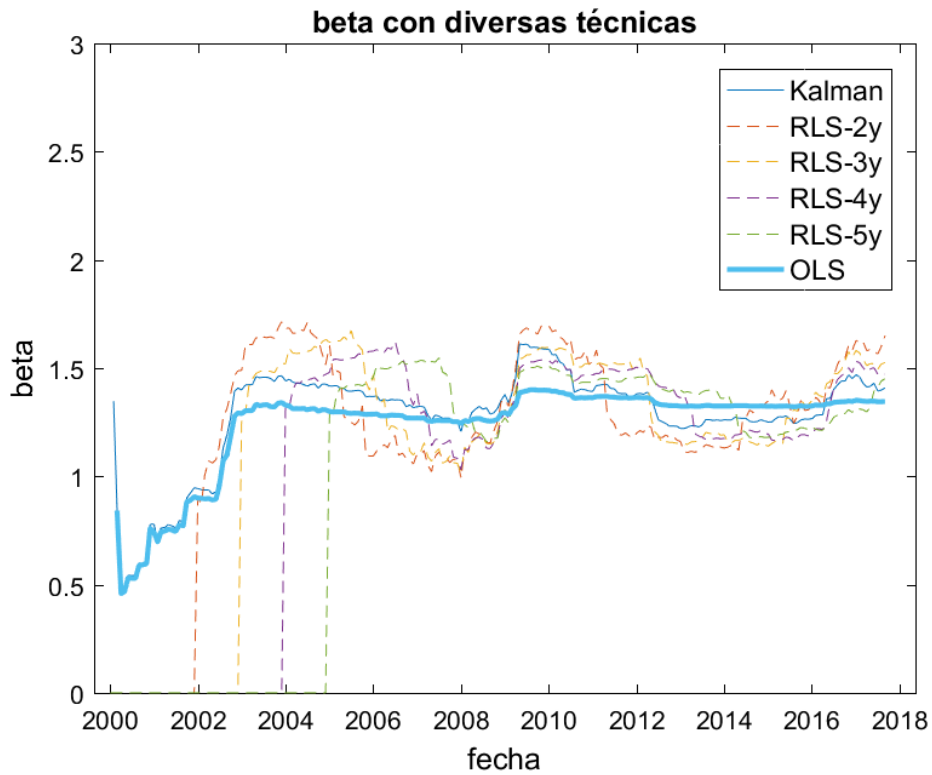


Figura 61. Santander: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.3.3 Red Eléctrica Corporación

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	0.5325	0.6615

Resultado de RLS

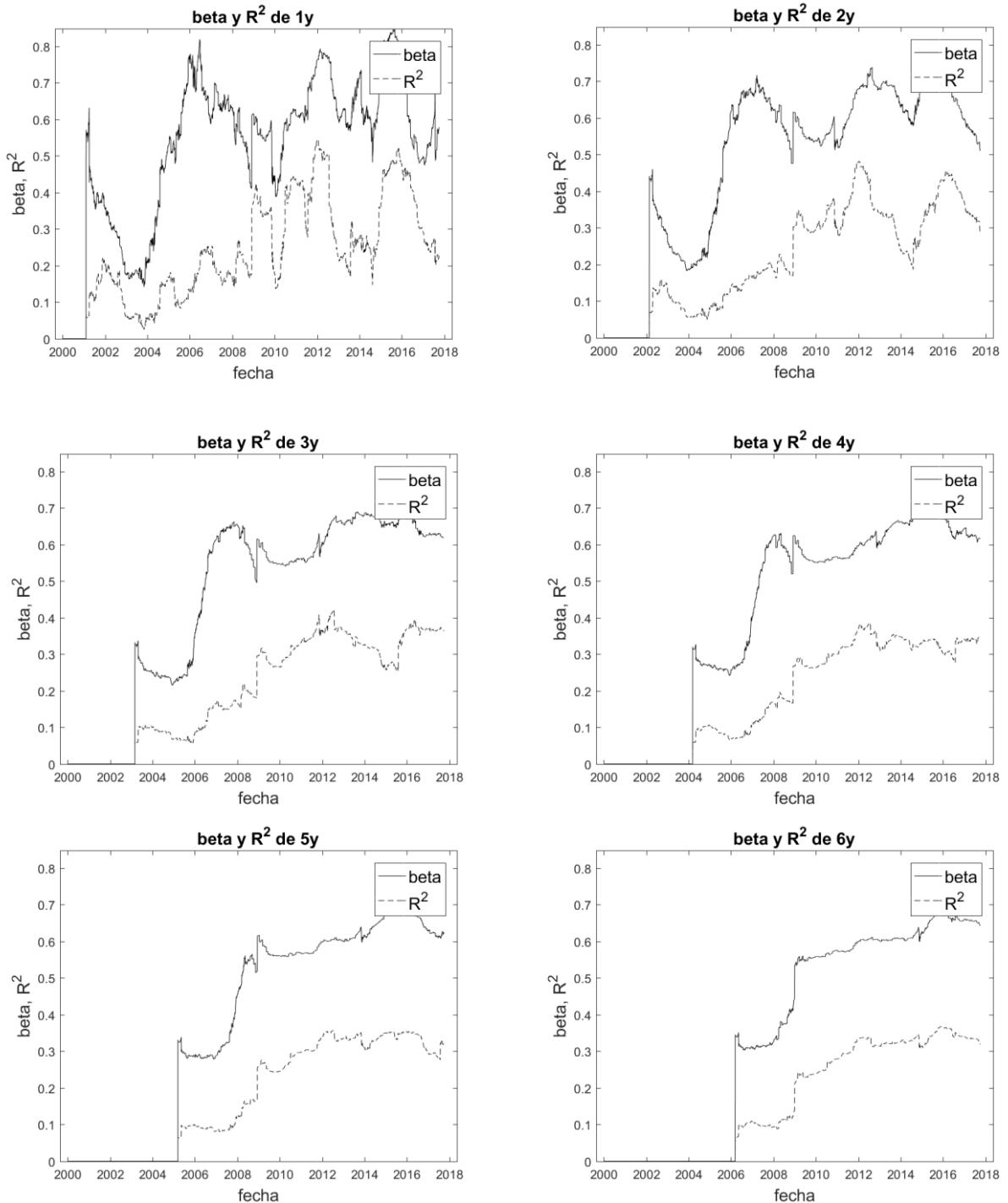


Figura 62. REE: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

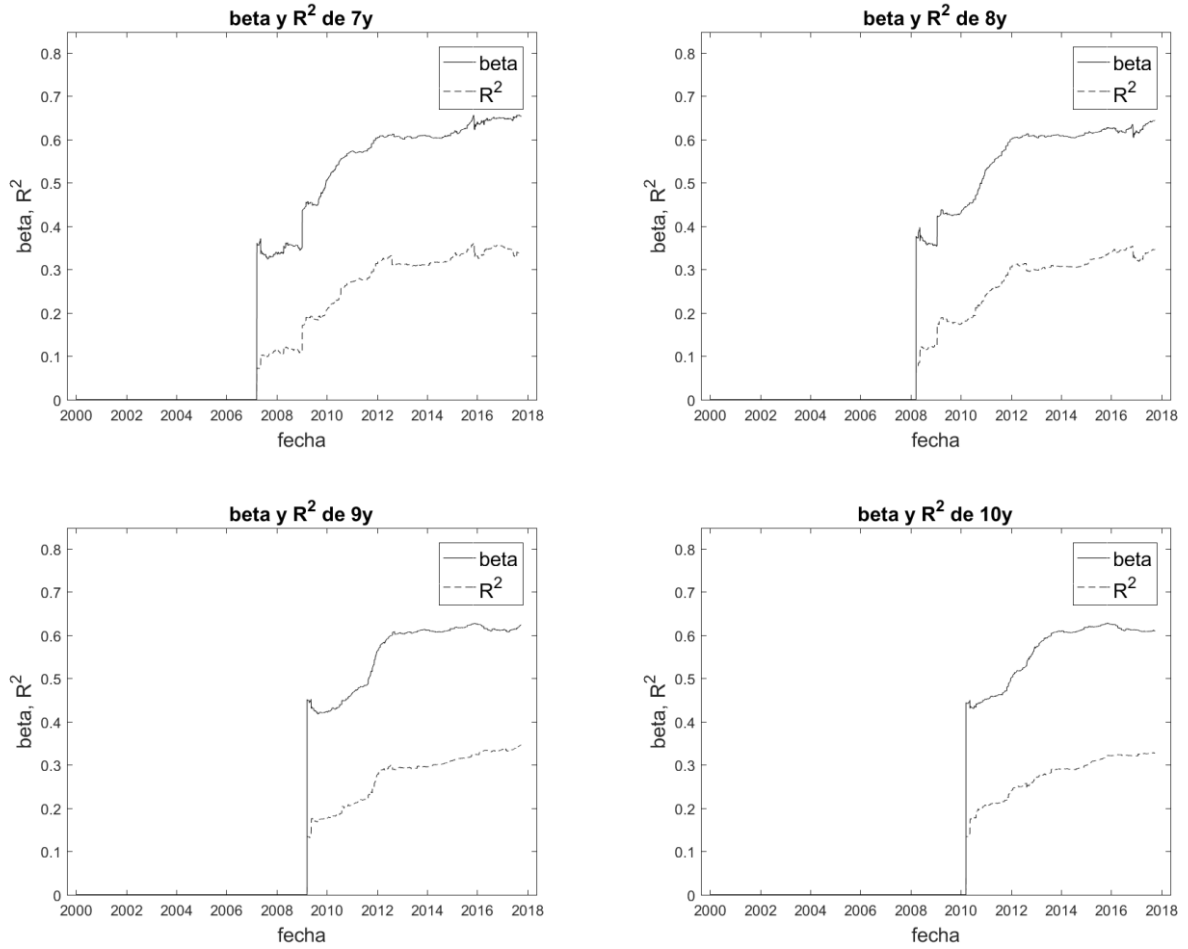


Figura 63. REE: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

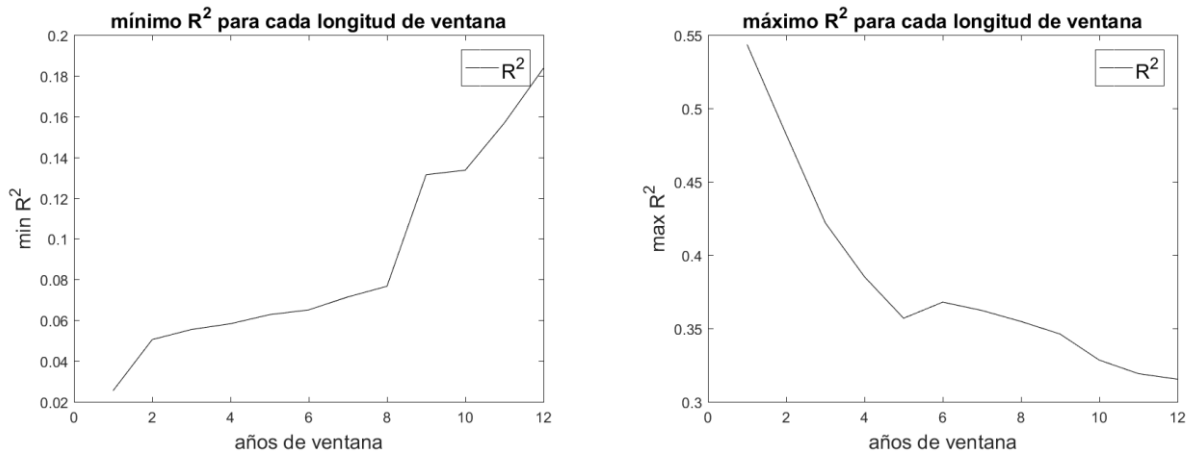


Figura 64. REE: R² extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

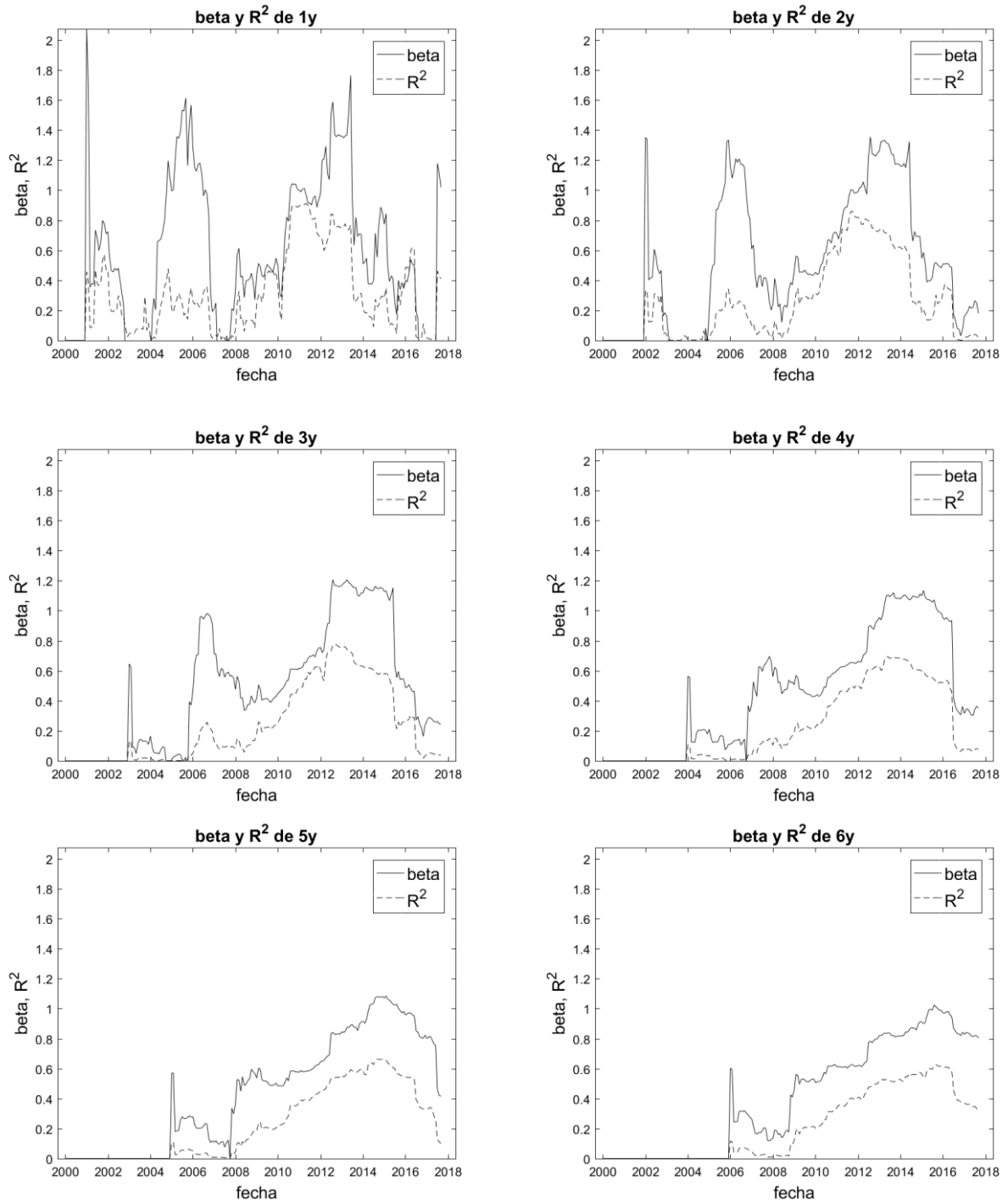


Figura 65. REE: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

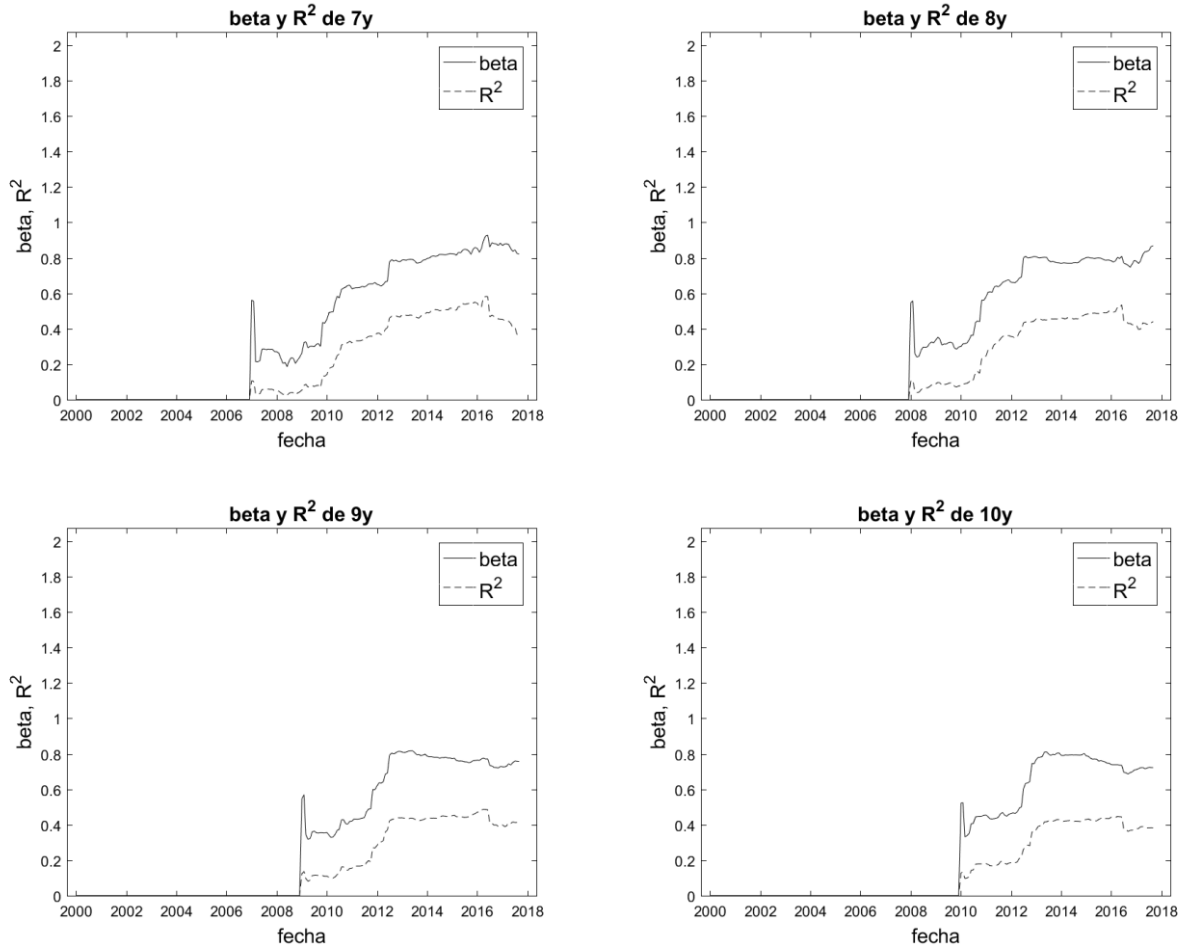


Figura 66. REE: Betas y R². RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

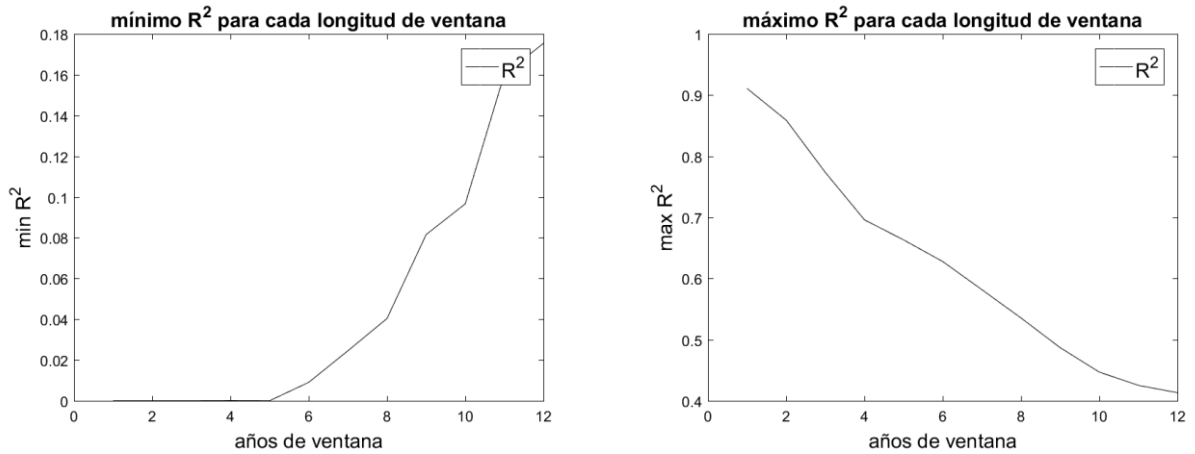


Figura 67. REE: R² extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

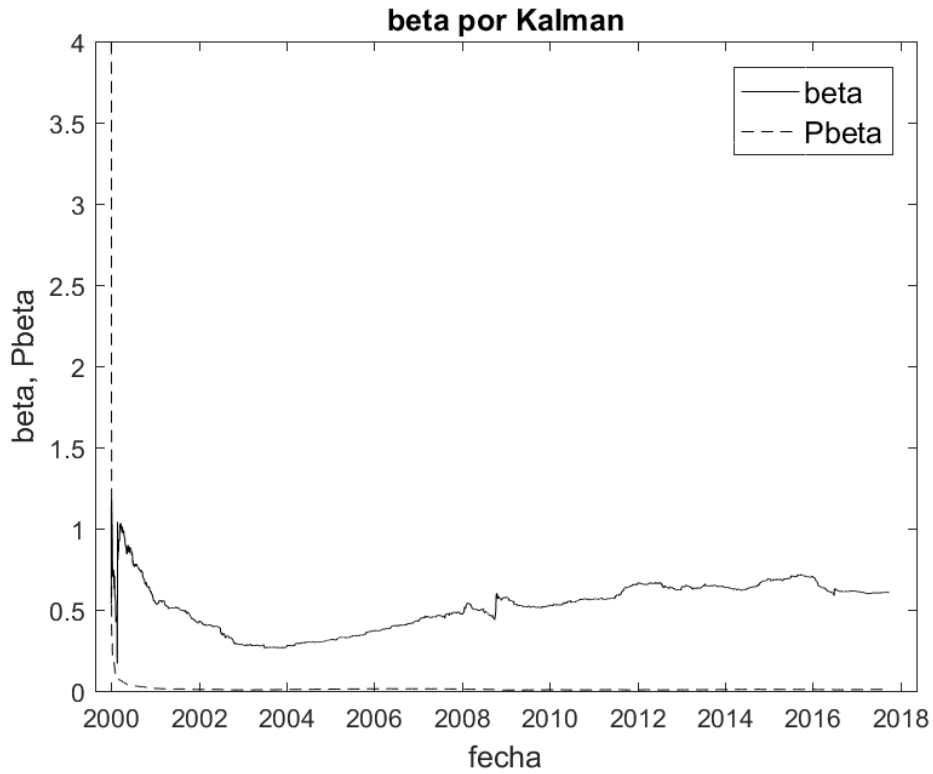


Figura 68. REE: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

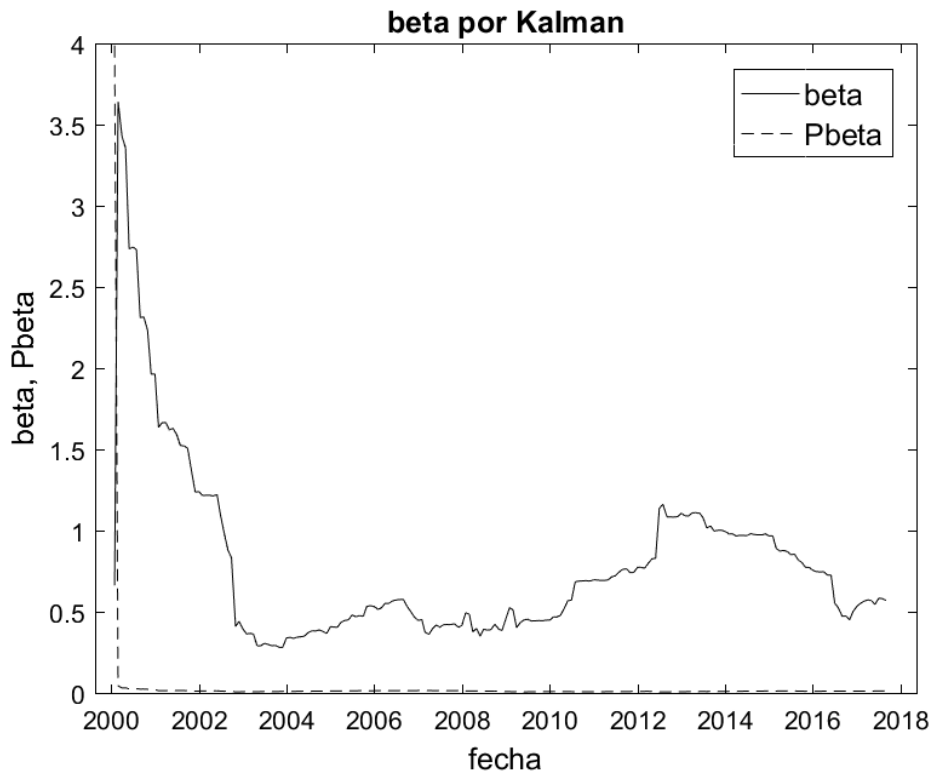


Figura 69. REE: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

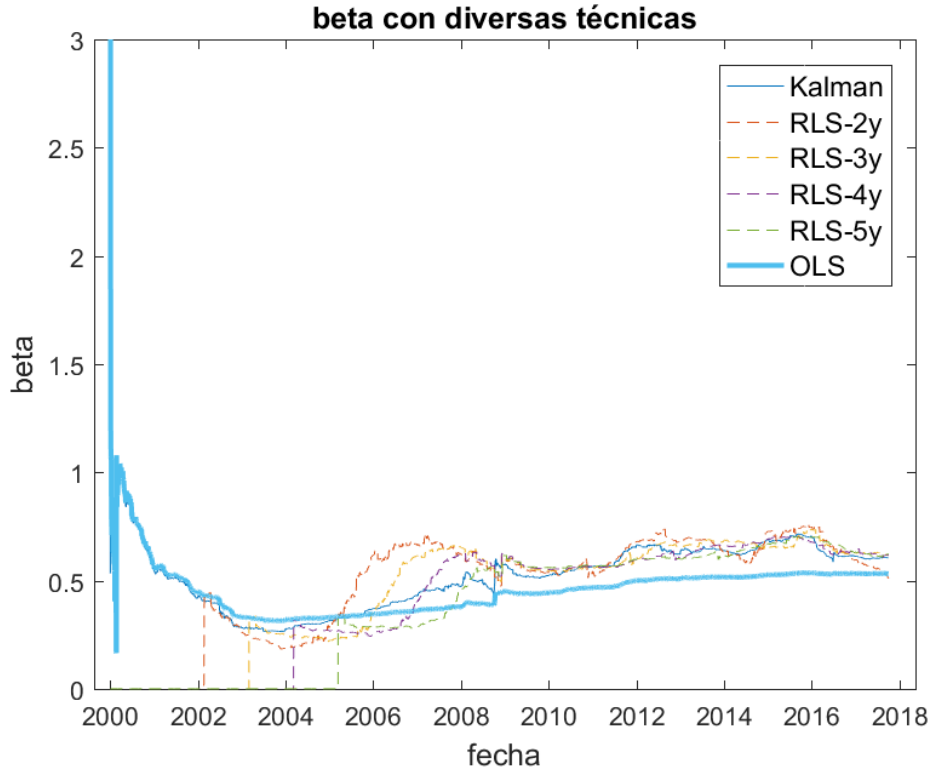


Figura 70. REE: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

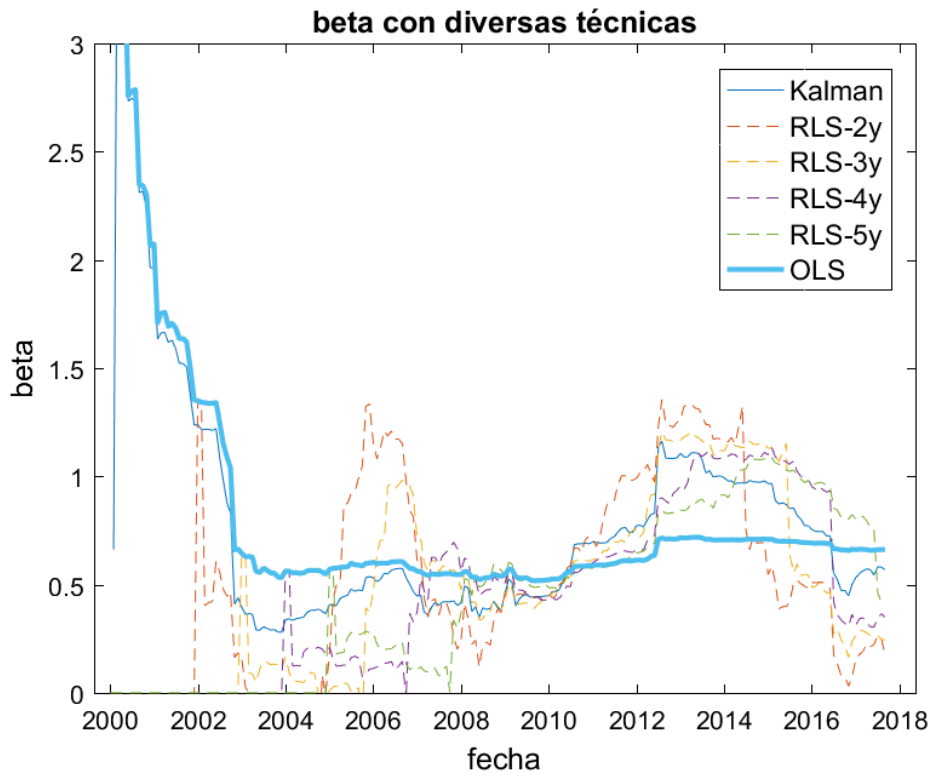


Figura 71. REE: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.3.4 Acerinox

Resultado de OLS

Parámetro	Rentabilidad diaria	Rentabilidad mensual
Beta	0.7491	0.8514

Resultado de RLS

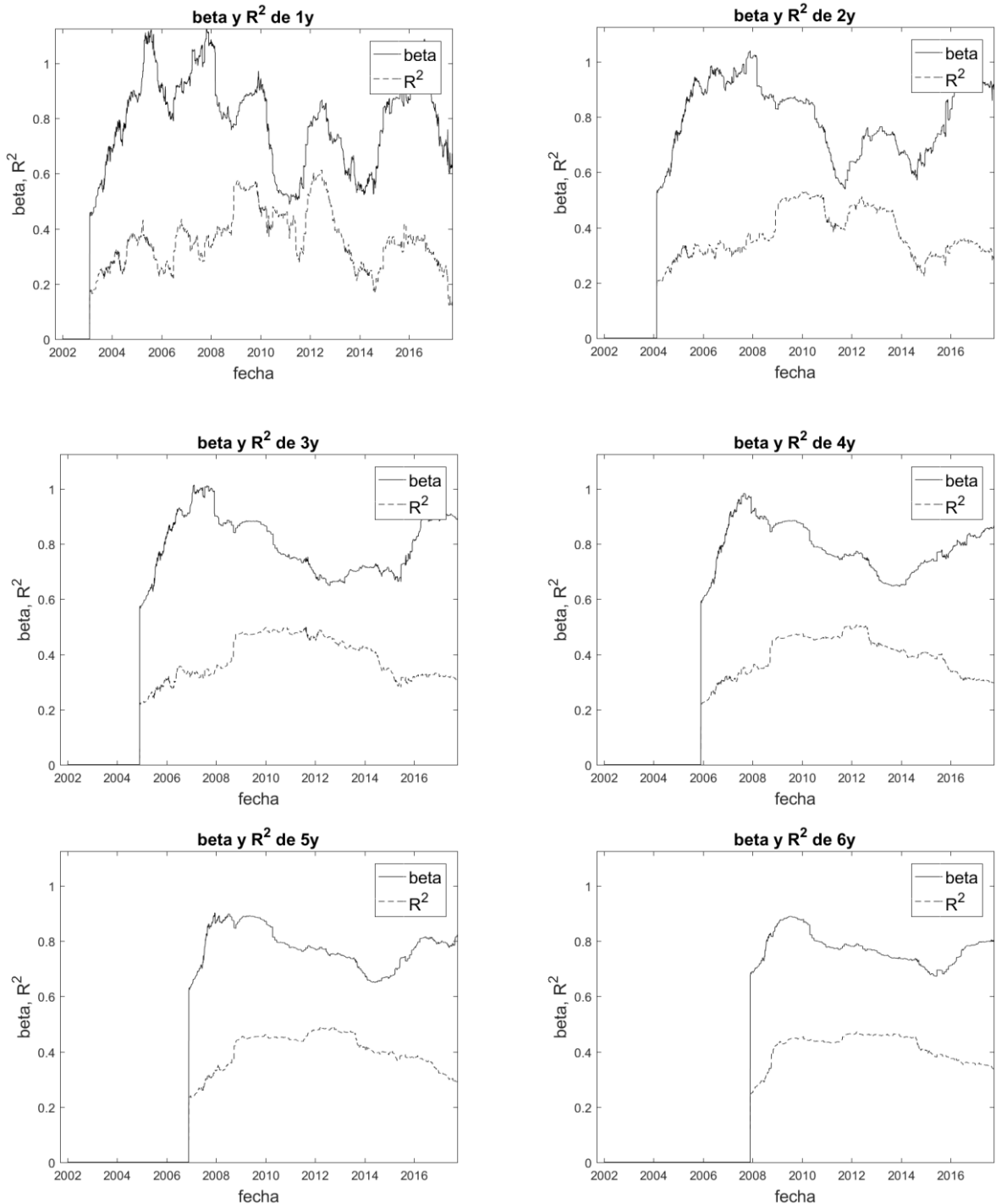


Figura 72. Acerinox: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad diaria.

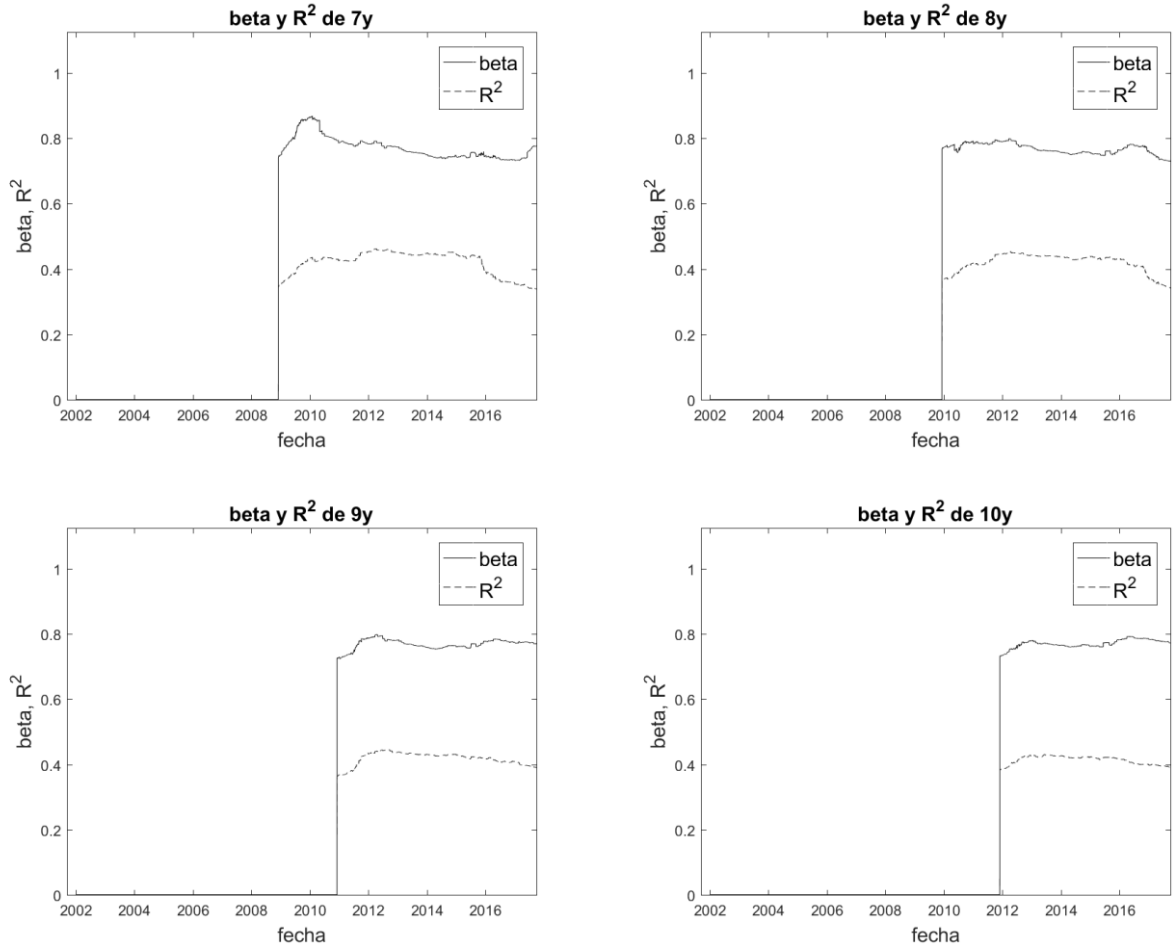


Figura 73. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad diaria.

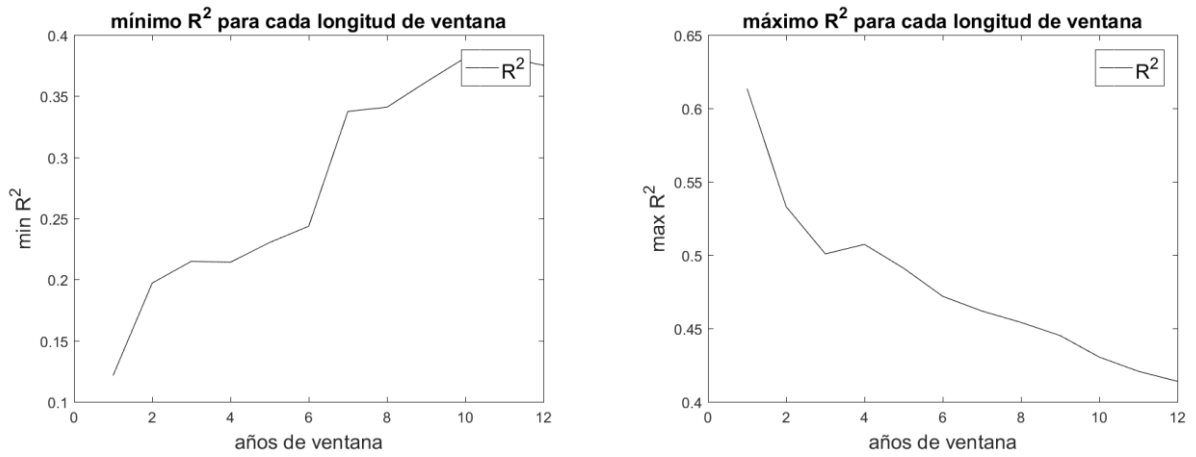


Figura 74. Acerinox: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad diaria.

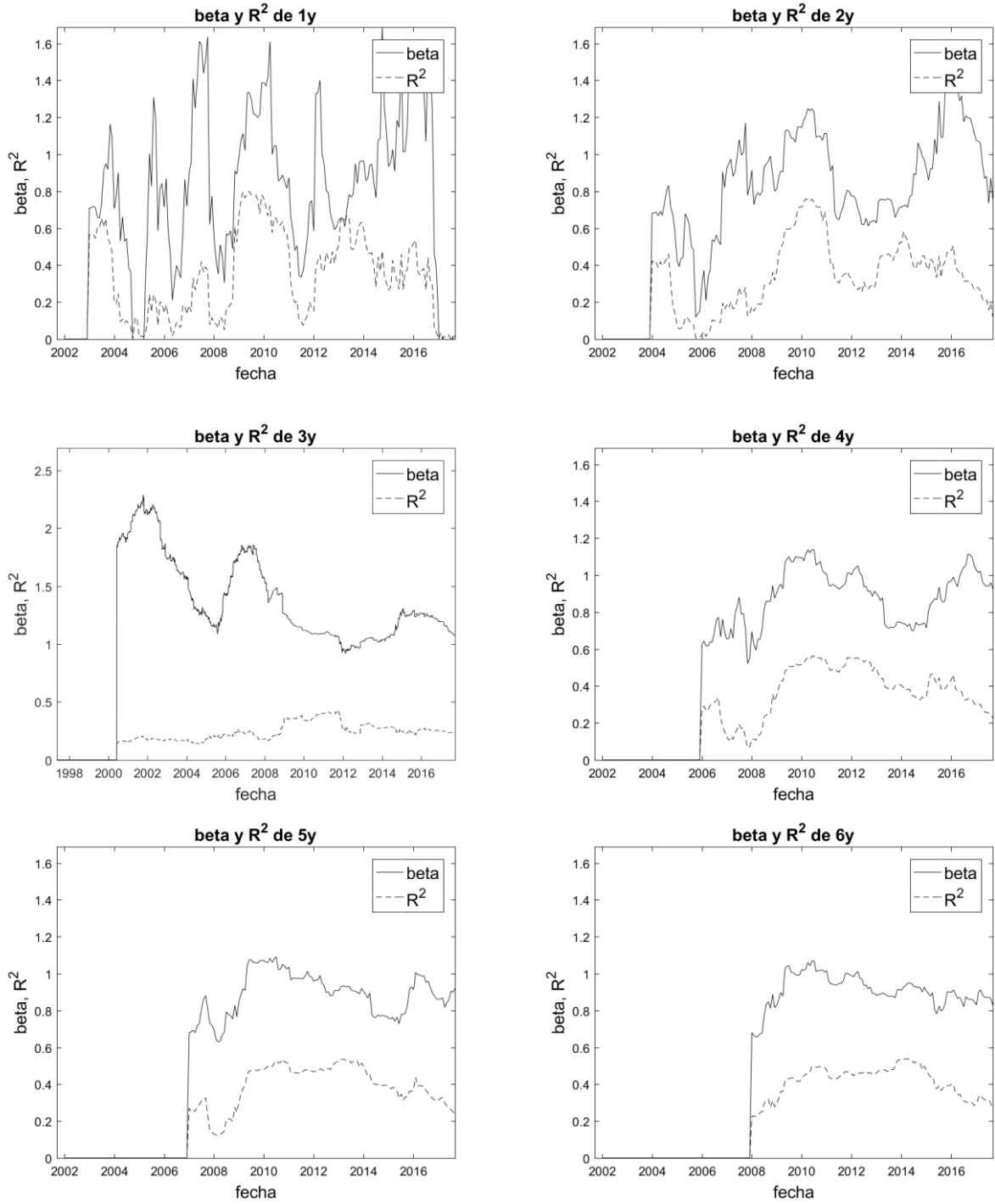


Figura 75. Acerinox: Betas y R². RLS con ventanas de 1 a 6 años. Rentabilidad mensual.

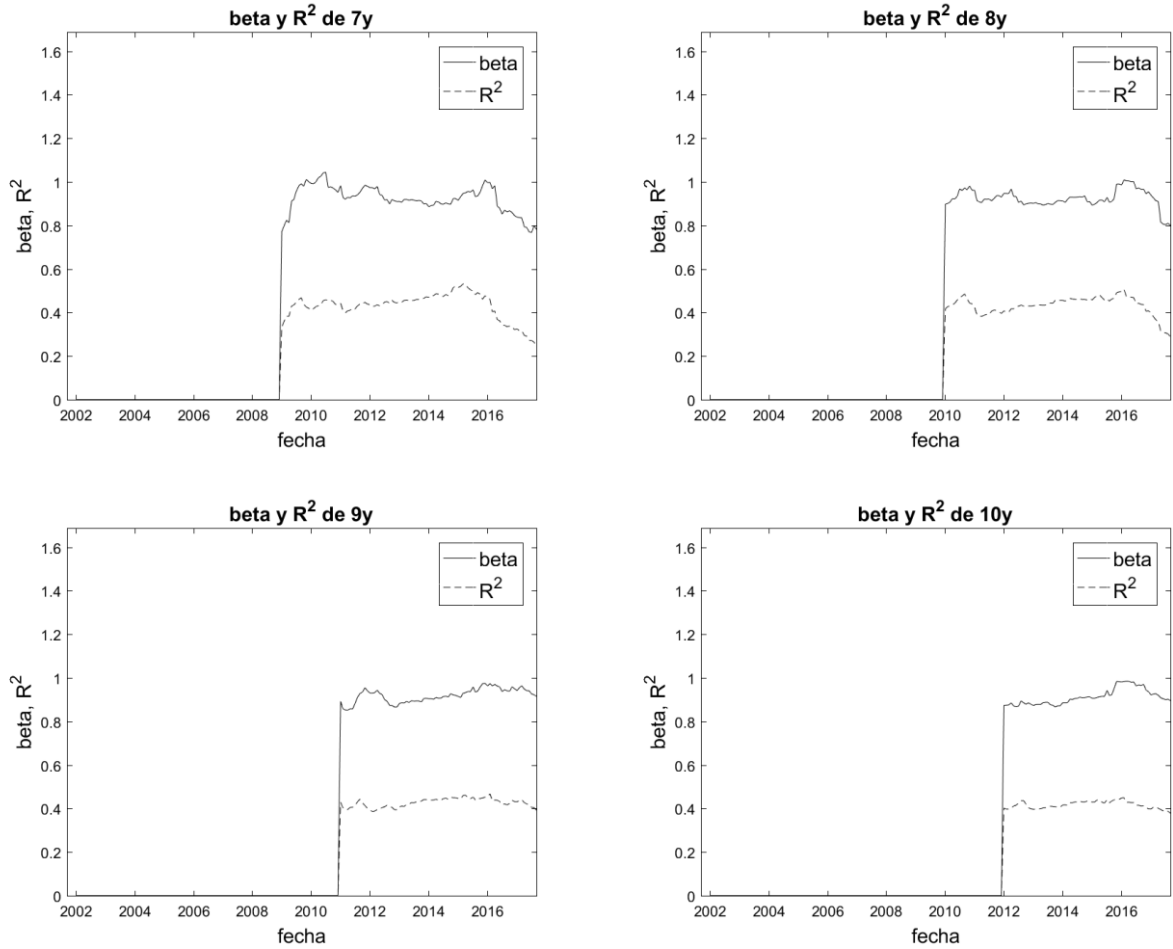


Figura 76. Acerinox: Betas y R^2 . RLS con ventanas de 7 a 10 años. Rentabilidad mensual.

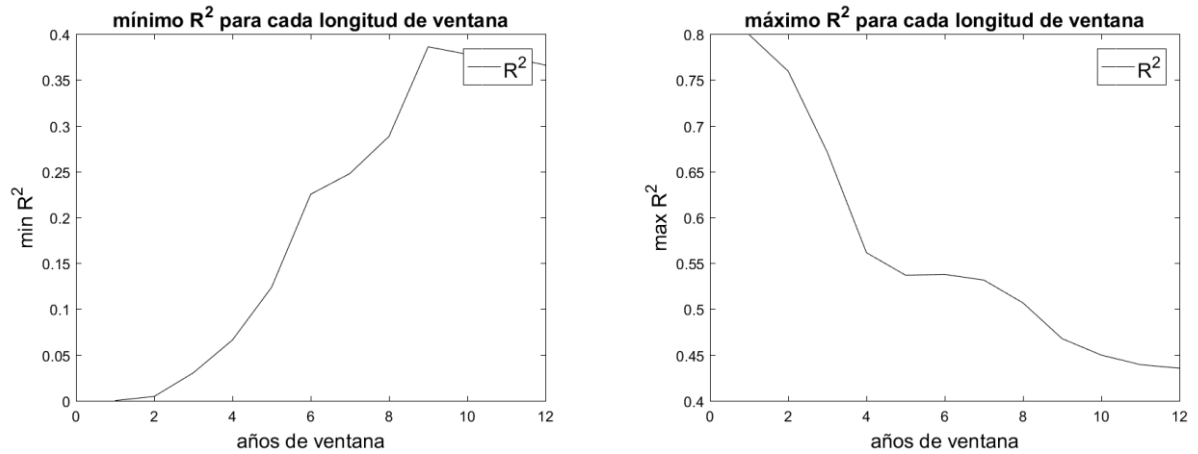


Figura 77. Acerinox: R^2 extremos según ventana. Rentabilidad mensual.

Resultado del filtro de Kalman

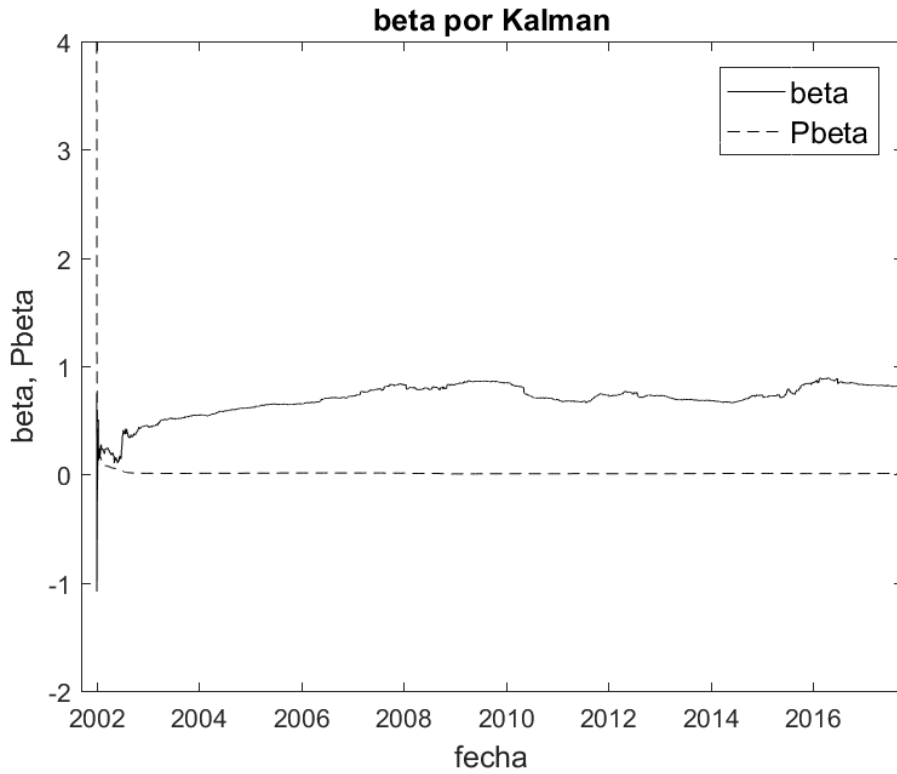


Figura 78. Acerinox: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad diaria.

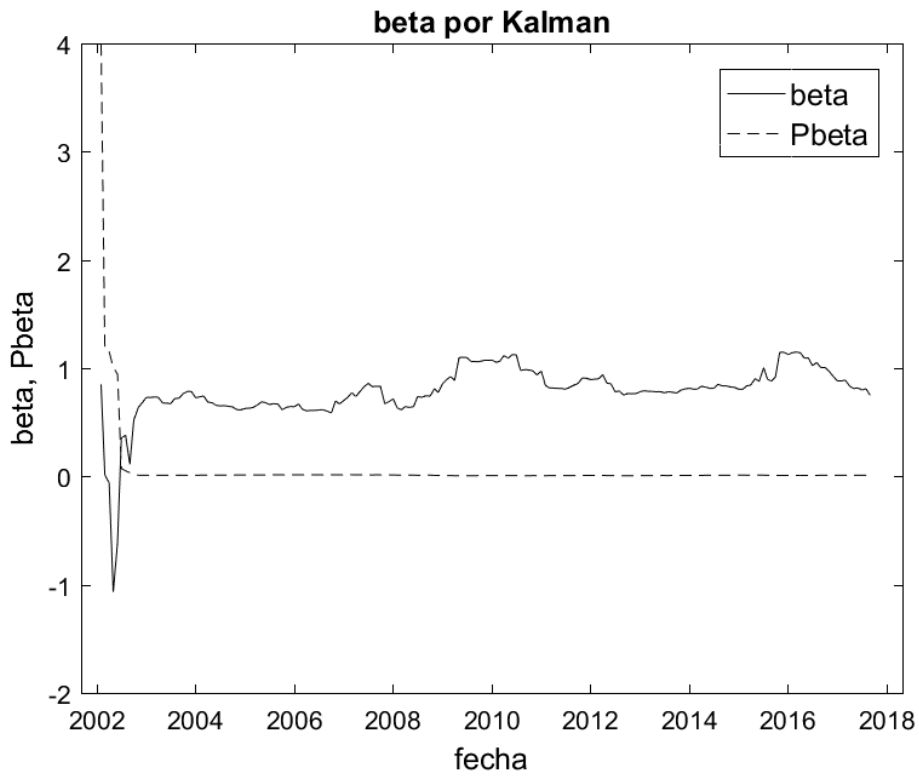


Figura 79. Acerinox: beta y Pbeta por Kalman. Rentabilidad mensual.

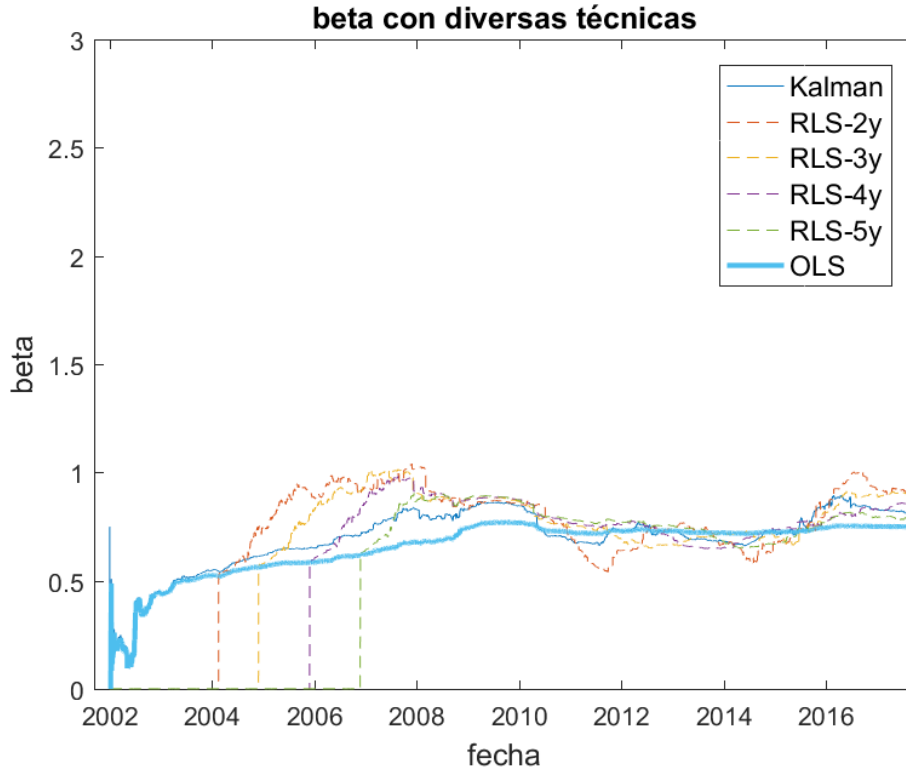


Figura 80. Acerinox: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad diaria.

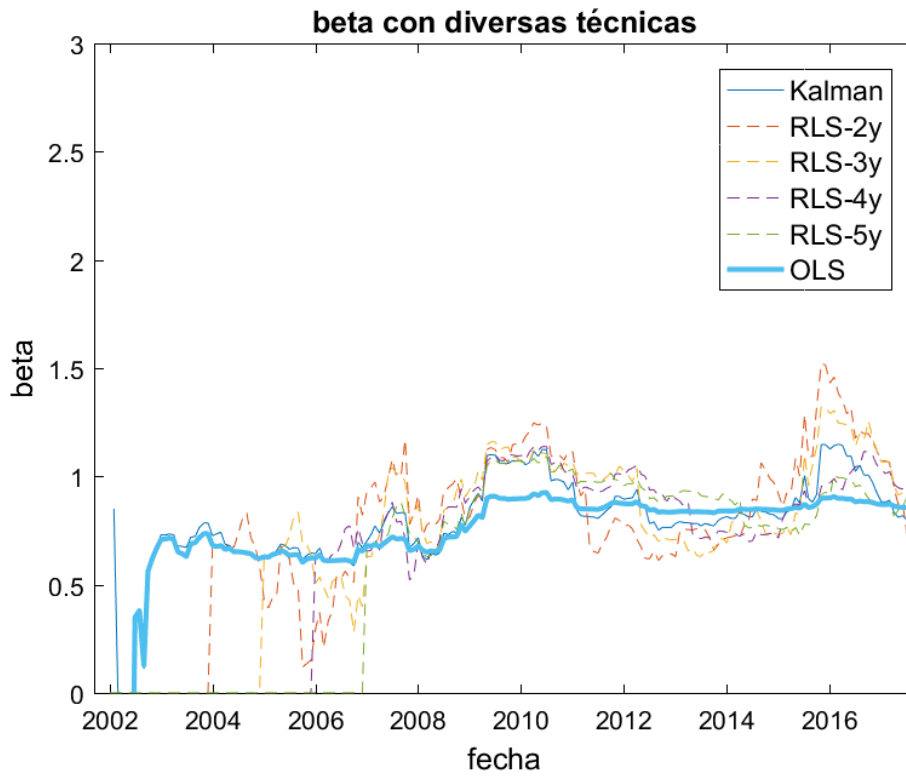


Figura 81. Acerinox: beta por Kalman, RLS y OLS. Rentabilidad mensual.

4.4 Análisis de resultados

En las siguientes tablas se resumen los resultados de periodo completo, OLS, obtenidos en todos los casos estudiados.

Valor de S&P 500	Rentabilidad diaria		Rentabilidad mensual	
	α_i	β_i	α_i	β_i
Amazon	0.0016	1.3867	0.0310	1.9904
AT&T Inc.	0.0002	0.7801	0.0058	0.6281
The Boeing Company	0.0004	1.0409	0.0076	1.1778
Exxon Mobil Corporation	0.0003	0.8581	0.0071	0.6651

Tabla 3. Parámetros OLS de los valores estudiados del NYSE.

Valor de IBEX35	Rentabilidad diaria		Rentabilidad mensual	
	α_i	β_i	α_i	β_i
Telefónica, S.A.	0.0000	1.0227	0.0004	0.9457
Banco Santander, S.A.	0.0003	1.3570	0.0048	1.3457
Red Eléctrica Corporación, S.A.	0.0013	0.5325	0.0277	0.6615
Acerinox, S.A.	0.0003	0.7491	0.0062	0.8514

Tabla 4. Parámetros OLS de los valores estudiados del Mercado Continuo español.

A la vista de los resultados obtenidos, y mostrados como figuras en este apartado para los ocho valores estudiados, el autor deriva las siguientes conclusiones:

- 1) En las estimaciones, RLS, cuanto mayor es la duración de la ventana, mayor es el retardo en los cambios, siendo las de 1 año las de variación más brusca.
- 2) Las estimaciones RLS de 1 año son especialmente volátiles.
- 3) En RLS, el mínimo de los coeficientes de determinación crece al aumentar el tamaño de ventana.
- 4) En RLS, el máximo de los coeficientes de determinación decrece al aumentar el tamaño de ventana.
- 5) Como análisis de los dos puntos anteriores, las ventanas más cortas, en los instantes en que ajustan peor, R^2 menores, lo hacen muy mal, y cuando ajustan bien, R^2 mayores, lo hacen muy bien.
- 6) Las estimaciones de Kalman tienen las respuestas más rápidas, más incluso que las RLS de 1 año, sin sufrir de la volatilidad de las estimaciones RLS de ventanas cortas.

- 7) Las estimaciones de Kalman son fiables cuando las covarianzas de los errores de estimación se hacen pequeñas, cosa que ocurre en menos de 1 año de datos.
- 8) Las estimaciones de beta a partir de rentabilidades diarias, son consistentes entre sí.
- 9) Las estimaciones de beta a partir de rentabilidades mensuales son consistentes entre sí y con mayor volatilidad que las de rentabilidad diaria.
- 10) Las estimaciones de beta obtenidas a partir de estimaciones diarias han resultado consistentemente distintas de las obtenidas a partir de las rentabilidades mensuales.

Capítulo 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado la problemática existente en el cálculo de la beta del CAPM, haciendo hincapié en dos aspectos, por un lado el intervalo utilizado para la evaluación de las rentabilidades, y por otro lado, la técnica utilizada para el cálculo de la beta.

Respecto al intervalo de rentabilidades, se han considerado tanto las rentabilidades diarias como las rentabilidades mensuales.

Respecto a la técnica utilizada se han planteado:

- Hipótesis de beta constante en el tiempo: cálculo mediante mínimos cuadrados ordinarios aplicados a todo el intervalo de muestras disponible (OLS).
- Hipótesis de beta variable en el tiempo. Se han estudiado las implementaciones de mínimos cuadrados de ventana móvil (RLS), de distintos tamaños de ventana (de 1 a 12 años); y por otro lado, se ha planteado el cálculo mediante filtro de Kalman. Respecto a esta formulación, el autor ha aportado una formulación unificada, con un modelo consistente tanto para los parámetros utilizados en el caso de rentabilidades diarias como en el caso de rentabilidades mensuales.

Todas estas combinaciones han sido programadas en lenguaje Matlab y aplicadas a cuatro valores del S&P500 y a cuatro valores del IBEX35, mostrándose gráficas de todas las estimaciones de betas y coeficientes de determinación de los respectivos ajustes, para todos los activos estudiados; constituyendo una base empírica suficiente para alcanzar las conclusiones mostradas en el análisis de resultados.

Entre las conclusiones obtenidas en el análisis de resultados destacan:

- La evolución monótona del coeficiente de determinación, que hace poco recomendable el uso de RLS con ventanas muy cortas.
- La pérdida de adaptabilidad en RLS con ventanas más largas.
- El buen comportamiento de las estimaciones mediante filtro de Kalman.
- La discrepancia sistemática entre el uso de rentabilidades diarias y rentabilidades mensuales.

Como última conclusión, el autor plantea la conveniencia de caracterizar la beta, como mínimo, mediante un parámetro que describa el intervalo utilizado para la obtención de la rentabilidad; por lo que debería de hablarse de beta de rentabilidad diaria (β_{1d}), mensual (β_{1m}), anual (β_{1y}), etc.

A las vista de la conclusiones obtenidas en este TFM para los casos de estudio, parece interesante contrastar, en futuras líneas de trabajo, por un lado, si son afirmaciones generalizables a otras empresas y mercados, incluso añadiendo a la comparación otras técnicas como las basadas en la hipótesis GARCH; y por otro lado, valorar la relevancia que tendrían sobre distintos escenarios de uso de la beta.

Bibliografía

- Black F., Scholes M., Jensen M. (1972): "The Capital-Asset Pricing Model: Some empirical tests", in Jensen M. C. (editor), *Studies in the Theory of Capital Markets*.
- Black F., Litterman R. (1992): "Global portfolio optimization". *Financial Analysts Journal*, 48(5), pp. 28-43.
- Fama, E. F., French K. R. (1993): "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds". *Journal of Financial Economics*, 33, pp. 3-56.
- Fama E. F., French K. R. (2004): "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence". *Journal of Economic Perspectives*, Volume 18, Number 3, Pages 25–46.
- Markowitz H. (1952): "Portfolio selection". *Journal of Finance*, vol. 7, núm. 1, pp. 77-91.
- Mergner S., Bulla J. (2008): "Time-varying beta risk of Pan-European industry portfolios: a comparison of alternative modeling techniques". *European Journal of Finance*, 14, pp. 771–802.
- Nieto B., Orbe S., Zarraga A. (2014): "Time-Varying Market Beta: Does the estimation methodology matter?". *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, Vol. 38, núm. 1, pp. 13-42.
- Ross S. (1976): "The arbitrage theory of capital asset pricing" *Journal of Economic Theory*. vol. 13, pp. 341-360.
- Scholes M., Williams J. (1977): "Estimating betas from nonsynchronous data". *Journal of Financial Economics*, Volume 5, Issue 3, pp. 309-327.
- Sharpe W. F. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.
- Simon D. (2006): *Optimal State Estimation: Kalman, H^∞ , and Nonlinear Approaches*, John Wiley & Sons, New Jersey. ISBN: 978-0-471-70858-2.
- Tobin J. (1958): "Liquidity preference as behavior towards risk" *The Review of Economic Studies*. Vol. 25, pp.65-86.