INTEGRACIÓN ~~BILINEAL~~

PRODUCTOS DE MEDIDAS VECTORIALES

Y

OPERADORES DE CARLEMAN

Juan Carlos García Vázquez

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

INTEGRACIÓN BILINEAL: PRODUCTOS DE MEDIDAS VECTORIALES Y OPERADORES DE CARLEMAN

Memoria presentada por
D. Juan Carlos García Vázquez
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Juan Carlos García Vázquez

V° B° del Director

D. Francisco José Freniche Ibáñez
Catedrático del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Noviembre 1996.

Quiero agradecer a mi director Francisco José Freniche la atención que me ha dedicado durante estos años, en los que he tenido la posibilidad de aprender tanto de sus enseñanzas matemáticas como de su buen talante y tolerancia. Su constante apoyo, optimismo y amabilidad han hecho muy agradable la realización de esta Tesis.

También me gustaría hacer constar mi gratitud hacia Luis Rodríguez Piazza por sus valiosos comentarios.

Del mismo modo me gustaría agradecer a mis amigos Rafa Espínola, Fernando Sancho y Rafa Villa, su grata compañía y apoyo. Con ellos he podido compartir mi pasión por las Matemáticas (y por el tenis). Desde luego sin ellos mi estancia en el Departamento no sería igual.

Por último, expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres y por supuesto a Nativi, por su comprensión y apoyo incondicional en todo momento.

A Nativi

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La memoria está dedicada al estudio de tres temas de Análisis Funcional, siendo su principal punto de unión la integración vectorial.

En el primer Capítulo de la Tesis estudiamos algunos aspectos del espacio de las funciones Pettis integrables fuertemente medibles. La integral de Pettis y la de Bochner son dos generalizaciones diferentes de la integral de Lebesgue al caso de funciones valoradas en espacios de Banach de dimensión infinita. Como se observa en [D-U], la integral de Bochner es una abstracción inmediata de la integral de Lebesgue, reemplazando el valor absoluto por la norma del espacio; de este modo, muchas (aunque no todas) de las propiedades de las funciones escalares integrables Lebesgue se traducen directamente al caso de funciones integrables Bochner. Sin embargo no ocurre lo mismo con la integral de Pettis. Por ejemplo, el espacio $P_1(\lambda, X)$ de funciones fuertemente medibles Pettis integrables respecto de la medida positiva λ con valores en un espacio de Banach X infinito dimensional, no es completo, ver [J-K]. Existen otros resultados que contrastan la diferente naturaleza de estas dos generalizaciones: en 1938, Pettis [Pe] se plantea la cuestión de si una función Pettis integrable respecto de la medida de Lebesgue cumple el Teorema de diferenciación de Lebesgue. La respuesta es que no: en 1995 Dilworth y Girardi [D-G] demuestran que existen funciones Pettis integrables fuertemente medibles que no cumplen el Teorema de diferenciación de Lebesgue en ningún punto. Este tipo de función resulta ser no integrable Bochner sobre ningún intervalo.

En el Capítulo 1 estudiamos si al igual que para las funciones integrables

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

en el sentido Bochner, la convolución de una función Pettis integrable definida en el toro $\mathbb{T}$ con valores en un espacio de Banach complejo, con el núcleo de sumabilidad de Fejér o con el de Poisson converge a la función en algún sentido. Demostraremos en la segunda Sección de este Capítulo que la convolución con cualquiera de los dos núcleos anteriores converge en norma Pettis, pero no puntualmente: en el Teorema 1.2.4 damos para cada espacio de Banach X de dimensión infinita una función Pettis integrable, fuertemente medible, con valores en X tal que su convolución con el núcleo de Fejér (o con el de Poisson) no converge ni siquiera débilmente a la función en ningún punto.

En la tercera Sección de este Capítulo fijamos nuestra atención sobre el espacio de las funciones Pettis integrables respecto de la medida de Lebesgue en el toro que son analíticas, esto es, que sus coeficientes de Fourier negativos son nulos. Primeramente demostramos que para cada espacio de Banach X de dimensión infinita existe una función fuertemente medible analítica, Pettis integrable, que no es Bochner integrable. Probamos que este espacio funcional, dotado de la norma inducida como subespacio cerrado de $P_1(\mathbb{T}, X)$, no es completo. También nos planteamos si es posible dar una función analítica Pettis integrable cuya convolución con alguno de los núcleos anteriores no converja puntualmente a la función: aunque este problema no ha sido resuelto, sí podemos dar para cada espacio de Banach X de dimensión infinita una medida vectorial numerablemente aditiva analítica, valorada en X, tal que su convolución con el núcleo de Fejér (o el de Poisson) no converge en ningún punto (Teorema 1.3.4). En relación con este último problema abierto, también desconocemos si existen funciones analíticas Pettis integrables que no sean Bochner integrables sobre ningún intervalo.

En el segundo Capítulo estudiamos algunos problemas sobre el producto de medidas vectoriales: existe una forma natural de definir el producto de dos medidas vectoriales numerablemente aditivas con valores en dos espacios de Banach respecto de una aplicación bilineal continua sobre el álgebra formada por los rectángulos medibles. En 1970, I. Kluvanek [K] probó que, a diferencia con el caso escalar, si las medidas vectoriales toman valores en un espacio de Banach de dimensión infinita, el producto no siempre puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles; su ejemplo utiliza el producto tensorial proyectivo de dos medidas vectoriales. Posteriormente, en 1972, respondiendo a un problema planteado por P. Masani, los autores Bhaskara Rao [Bh], y Dudley y Pakula [D-P], demuestran que existen medidas con valores en ℓ_2 cuyo producto respecto del producto escalar natural no puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra producto: el primero dando una medida producto no numerablemente aditiva sobre el álgebra de los rectángulos medibles y los segundos dando un ejemplo de una medida producto no acotada sobre el álgebra.

Los primeros trabajos donde aparecen condiciones que aseguran la existencia de la extensión son debidos a M. Duchon e I. Kluvanek [D-K], [D], donde se demuestra que el producto tensorial inyectivo (ver párrafo posterior al Teorema 2.1.4) de dos medidas siempre puede extenderse de forma numerablemente aditiva, y lo mismo para el caso en que una de las medidas tenga variación acotada. Algunos años más tarde, en 1975, utilizando la semivariación de la medida vectorial respecto de la aplicación bilineal, C. Swartz [S1] redemuestra los resultados anteriores dando un teorema más general:

> Si μ es una medida numerablemente aditiva con valores en X, dominada respecto de la aplicación bilineal $\phi : X \times Y \to Z$, entonces el producto de μ con cualquier medida numerablemente aditiva valorada en Y respecto de ϕ puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra producto.

Hay que decir que los resultados anteriores son todos obtenidos en el contexto de espacios vectoriales topológicos locamente convexos, pero nosotros nos limitaremos a medidas con valores en espacios de Banach. En la Sección 1 definimos el concepto de semivariación de una medida respecto de una aplicación bilineal así como el de dominación, que fueron introducidos por Bartle [B] para el estudio de la integración bilineal, y que resultan ser cruciales en el estudio del problema de extensión de la medida producto.

En la segunda Sección del Capítulo 2 nos fijamos en el caso de que ϕ sea una forma bilineal, esto es, tome valores en el cuerpo de los escalares. Si ϕ es una forma bilineal integral en el sentido de Grothendieck, como consecuencia inmediata de que el producto tensorial inyectivo de dos medidas siempre puede extenderse de forma numerablemente aditiva, se obtiene que el producto de cualquier par de medidas respecto de ϕ puede extenderse. Estudiamos hasta qué punto esta condición es necesaria. Teniendo en cuenta la identificación existente entre el espacio de formas bilineales y continuas definidas sobre $X \times Y$ y el espacio de los operadores lineales y continuos $\mathcal{L}(X, Y^*)$, y un teorema de C. Piñeiro y L. Rodríguez Piazza [P-R], demostramos en el Teorema 2.2.2 que un operador lineal $u : X \longrightarrow Y^*$ es 1-sumante si y sólo si para cada par de medidas numerablemente aditivas $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ y $\nu : \Theta \longrightarrow Y$, su producto respecto de ϕ_u, la forma bilineal asociada a u, puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles.

En la tercera Sección se responde a la siguiente pregunta, planteada en [S1]: si ϕ es una aplicación bilineal sobre $X \times Y$ fijada y $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida numerablemente aditiva tal que para cualquier otra medida numerablemente aditiva $\nu : \Theta \longrightarrow Y$, el producto de ambas respecto de la bilineal puede extenderse, ¿está necesariamente μ dominada respecto de ϕ? En la Proposición 2.3.1 demostramos que la respuesta es negativa dando una medida numerablemente aditiva con valores en ℓ_2 cuyo producto tensorial proyectivo con respecto a cualquier medida con valores en ℓ_1 puede extenderse, pero no está dominada respecto de la correspondiente aplicación bilineal. En el resto de la Sección ponemos diferentes ejemplos mostrando que la condición de dominación no es necesaria en absoluto para asegurar la existencia de la extensión de la medida producto. También estudiamos algún tipo de condición de dominación de la medida respecto de la aplicación bilineal que sí es necesaria.

En la Sección 4 definimos el concepto de factor. Se dice que X es factor de Y si el producto de cualquier par de medidas numerablemente aditivas con respectivos valores en X e Y respecto de cualquier aplicación bilineal definida sobre $X \times$

Y tiene extensión numerablemente aditiva. Del mismo modo definimos factor compacto poniendo la condición de que las medidas tengan rango relativamente compacto. Se probó en [B-S] que c_0 no es factor de ℓ_p para $p \in [1, \infty]$.

Dos hechos claves: si el producto proyectivo de dos medidas puede extenderse, entonces puede extenderse el producto de ambas respecto de cualquier aplicación bilineal y que ser factor compacto tiene naturaleza finito dimensional, nos permiten probar que ℓ_p es un factor de ℓ_q si y sólo si $p, q \in [1, 2]$ y $\min\{p, q\} = 1$ (Teorema 2.4.4). En la prueba de este resultado utilizamos un teorema de Rosenthal y Szarek [R-S] sobre el producto tensorial de series incondicionalmente convergentes en un $L_1(\alpha)$-espacio.

Para terminar el Capítulo, en la Sección 5 introducimos la definición de factor universal. Diremos que X es un factor universal si es factor de todo espacio de Banach, y lo mismo con factor universal compacto. El resultado central de la Sección es el siguiente: X es un factor universal compacto si y sólo si $\Pi_1(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$, si y sólo si para cada medida vectorial numerablemente aditiva con rango relativamente compacto $\mu : \Sigma \to X$ existe una medida numerablemente aditiva ν, con valores en X, de variación acotada tal que $\mathrm{rg}(\mu) \subset \mathrm{rg}(\nu)$, donde $\Pi_1(X, \ell_1)$ es el espacio de los operadores 1-sumantes de X en ℓ_1 y $\mathrm{rg}(\mu)$ nota el rango de la medida μ.

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos que X es un factor universal compacto si y sólo si es factor de c_0, si y sólo si X y X^* verifican el Teorema de Grothendieck, esto es, $\mathcal{L}(X, \ell_2) = \Pi_1(X, \ell_2)$ y lo mismo con X^*. Este corolario demuestra, en particular, que existen factores universales compactos de dimensión infinita; sin embargo, desconocemos si ser factor universal implica tener dimensión finita. La Sección termina viendo una relación de estos resultados con ciertos problemas sobre sucesiones contenidas en el rango de una medida vectorial que han sido considerados en [P-R]. Concretamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie incondicionalmente convergente en X, se define la suma de los segmentos $[-x_n, x_n]$ por

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-x_n, x_n] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Con esta notación se demuestra en el Teorema 2.5.9 que X es un factor universal compacto si y sólo si toda suma de segmentos $\sum_{n=1}^{\infty}[-x_n, x_n]$ definida por una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente en X, cae dentro de una suma de segmentos $\sum_{n=1}^{\infty}[-y_n, y_n]$ definido por una serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ absolutamente convergente en X.

En el tercer Capítulo estudiamos un tipo especial de operadores integrales, los llamados operadores de Carleman, y su relación con la integración bilineal de Bartle. Clásicamente, un operador $u : L_2([0,1]) \longrightarrow L_2([0,1])$ es un operador de Carleman si existe una función real $K(s,t)$ medible respecto de la medida producto, tal que para cada $f \in L_2([0,1])$

$$u(f)(s) = \int_{[0,1]} K(s,t) f(t) dt,$$

para casi todo s (esto es, u es un operador integral), y además las secciones $K_s(\cdot) = K(s, \cdot)$ pertenecen a $L_2([0,1])$. El estudio de este tipo de operadores es iniciado por Carleman en los años 20, y posteriormente han sido profusamente estudiados, conociéndose varias caracterizaciones de los mismos. El siguiente resultado puede encontrarse en [W]:

> Para un operador $u : L_2([0,1]) \longrightarrow L_2([0,1])$ las condiciones siguientes son equivalentes:
>
> (1) u es un operador de Carleman.
>
> (2) Existe una función g, positiva y medible tal que para toda $f \in L_2([0,1])$ se tiene
>
> $$|u(f)(s)| \leq \|f\|_2 g(s) \text{ en casi todo } s.$$
>
> (3) Para toda sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente en norma a cero en $L_2([0,1])$, se tiene que la sucesión imagen $(u(f_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero puntualmente en casi todo s.

La condición (2) se conoce como condición de Korotkov.

Se han seguido varios caminos diferentes para extender la definición de operador de Carleman a situaciones más generales. En los años 80 aparecen extensiones al caso de operadores definidos entre retículos de Banach de funciones medibles [Sc], [V]; también ha sido considerado el caso aún más general de operadores definidos sobre un espacio de Banach con valores en un retículo de Banach de funciones medibles [G-U], [G-E]. Mientras que en [G-E] la definición de operador de Carleman sigue la idea de la anterior condición equivalente (2) de operador de Carleman clásico, en [G-U] se considera la siguiente definición.

> Sea $0 \leq p \leq \infty$, y (S, Σ, σ) un espacio de medida finito. Un operador $u : X \to L_p(S, \sigma)$ se dice de Carleman si existe una función fuertemente medible $F : S \to X^*$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $u(x)(s) = x(F(s))$, en casi todo $s \in S$.

Con esta definición Gretsky y Uhl demuestran en 1983 que un operador de Carleman L-w-compacto lleva conjuntos débilmente condicionalmente compactos en conjuntos compactos.

Siguiendo la línea de [G-U], en la Sección 2 generalizamos la definición de Carleman a operadores definidos sobre un espacio de Banach con valores en un retículo de Banach abstracto orden continuo con unidad débil (Definición 3.2.1). La definición es tal que si el retículo abstracto considerado es un espacio de funciones definidas sobre un espacio de medida finito (S, Σ, σ) entonces un operador $u : X \to L$ es de Carleman si y sólo si existe una función fuertemente medible $F : S \to X^*$ tal que $u(x) = x(F(\cdot))$ para todo $x \in X$. También consideramos la definición de operador de Korotkov, que se corresponde con los operadores que tienen asociada una función F que es w-escalarmente medible.

En la Sección 3, utilizando como herramientas una representación del retículo L como el espacio de Banach de funciones integrables respecto de cierta medida vectorial $\nu : \Sigma \to Y$ [C] y la integración bilineal de Bartle, obtenemos en el

Teorema 3.3.4 que un operador de Carleman L-w-compacto es compacto. Una vez representado el retículo L de esta forma, demostramos que el núcleo fuertemente medible asociado a un operador de Carleman compacto es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y la aplicación bilineal natural con valores en el producto tensorial inyectivo; el recíproco también es cierto: una función F fuertemente medible con valores en X^* integrable Bartle respecto de ν y esa aplicación bilineal es el núcleo de un operador de Carleman compacto de X en L. Estudiamos también otras condiciones equivalentes de ser integrable Bartle respecto de la bilineal natural con valores en el producto tensorial inyectivo, y se demuestra en la Proposición 3.3.8 que una de estas condiciones no es válida para el caso proyectivo.

La Sección 4 se dedica a estudiar el espacio de los operadores de Carleman compactos, encontrando ciertas analogías entre este espacio y el de las funciones fuertemente medibles Pettis integrables. Demostramos en el Teorema 3.4.8 que si el espacio de Banach es infinito dimensional y el retículo no es puramente atómico entonces existen operadores compactos que no son de Carleman (ni siquiera de Korotkov): esto prueba en particular la incompletitud del espacio de los operadores de Carleman, y redemuestra el siguiente teorema de Roberts [R] para el caso no atómico:

> Si L es un retículo de Banach orden continuo y todos los operadores lineales y continuos de X en L son orden acotados entoces X es de dimensión finita.

En la última Sección estudiamos la validez del Teorema de Fubini para el producto tensorial inyectivo de medidas vectoriales. Se demuestra que no es posible en general dar un teorema del tipo de Fubini, y utilizando algunas caracterizaciones de la integrabilidad Bartle vistas en las secciones anteriores se estudian algunos casos en que sí es posible, por ejemplo, cuando las funciones están esencialmente acotadas o una de las medidas es atómica.

PRELIMINARES

En este Capítulo introduciremos la notación que se usará en la memoria. Presentaremos también los resultados esenciales sobre medidas vectoriales, retículos de Banach, operadores y productos tensoriales que serán la base de nuestro trabajo. Algunas notaciones más específicas se presentarán dentro de cada Capítulo, justo en el lugar donde vayan a ser utilizadas.

A lo largo de la tesis las letras X, Y, Z usualmente notarán espacios de Banach sobre el cuerpo de los números reales a menos que se especifique otra cosa. El dual topológico de un espacio de Banach X será notado por X^*, y por B_X la bola unidad cerrada de X. A menudo los elementos de X se identificarán con funcionales lineales y continuos sobre X^*, esto es, como elementos de X^{**}, con la actuación $x(x^*) = x^*(x)$ si $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Sobre el espacio X se considerará la topología dada por la norma y también la topología débil, que notaremos por w. Sobre el espacio dual X^* se considerarán la topología de la norma, la débil respecto del bidual X^{**} y la topología débil-$*$, que notaremos por w^*.

Sea $c > 1$. Diremos que dos espacios de Banach X, Y son c-isomorfos si existe un isomorfismo $u : X \to Y$ tal que $\|u\| \, \|u^{-1}\| \leq c$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Diremos que X es un L_p-espacio si existe una medida positiva α tal que $X = L_p(\alpha)$. Diremos que X es un $\mathcal{L}_{p,c}$-espacio si para todo

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

subespacio E de dimensión finita de X existe $F \subset X$ subespacio de dimensión finita con $E \subset F$ y un isomorfismo $v : F \to l_p^{\dim F}$ con $\|v\| \, \|v^{-1}\| < c$.

1. Medidas vectoriales.

La referencia básica de esta sección es el Capítulo I de la monografía "Vector Measures" de J. Diestel y J.J. Uhl [D-U]. Aunque la notación que usamos difiere, la terminología y el contenido siguen fielmente el tratado anterior.

Sea S un conjunto y Σ una σ-álgebra de conjuntos de S. El par (S, Σ) se llama espacio medible. Los elementos de Σ se denominan conjuntos medibles. Una partición de un conjunto medible A es una colección finita $(A_k)_{k=1}^n$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos cuya unión es A.

Un espacio de medida es una terna (S, Σ, σ) donde (S, Σ) es un espacio medible y σ es una medida positiva numerablemente aditiva definida sobre Σ. El espacio se dice de medida finita si $\sigma(S) < \infty$ y σ-finito si $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $\sigma(A_n) < \infty$.

Diremos que una propiedad se cumple en casi todo punto respecto de σ si se cumple en todos los puntos de S salvo en un conjunto medible de medida nula para σ.

Si A es un conjunto medible entonces χ_A es la función característica del conjunto A, esto es $\chi_A(s) = 0$ si $s \notin A$ y $\chi_A(s) = 1$ si $s \in A$.

Una función $F : S \to X$ es fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a F en casi todo punto; si X es el cuerpo de escalares diremos que F es medible. La función F es w-escalarmente medible si la función escalar $x^*(F(\cdot))$ es medible para cada $x^* \in X^*$. Si F

toma valores en un dual X^* diremos que es w^*-escalarmente medible si $x(F(\cdot))$ es medible para cada $x \in X$. Un resultado de Pettis afirma que una función $F : S \to X$ es fuertemente medible si y sólo si es w-escalarmente medible y toma valores esencialmente en un conjunto separable de X, esto es, existe un conjunto medible Z de medida nula, tal que $\{F(s) : s \in S \setminus Z\}$ es separable.

Una función μ definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de S, con valores en un espacio de Banach X, se llama medida vectorial finitamente aditiva, si para todo par A_1, A_2 de conjuntos medibles disjuntos se tiene que $\mu(A_1 \bigcup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Si además para cada sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos de $\mathcal{A}$ se tiene que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ en la norma de X entonces diremos que μ es una medida vectorial numerablemente aditiva. Por medida vectorial (o simplemente medida si no hay lugar a confusión) entenderemos medida vectorial numerablemente aditiva, especificándose finitamente aditiva en el caso que corresponda.

Una medida vectorial $\mu : \mathcal{A} \to X$ finitamente aditiva es w-numerablemente aditiva si la medida $x^*\mu(A) = x^*(\mu(A))$ es numerablemente aditiva para cada $x^* \in X^*$. Si μ toma valores en un espacio dual X^* diremos que es w^*-numerablemente aditiva si $x\mu$ es numerablemente aditiva para cada $x \in X$.

Sea $\mu : \mathcal{A} \to X$ una medida vectorial finitamente aditiva. La variación de μ es la medida no negativa $|\mu|(\cdot)$ definida sobre un conjunto medible A como

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} ||\mu(A_k)||,$$

donde el supremo se toma entre todas las particiones $(A_k)_{k=1}^{n}$ de A. La variación total $|\mu|(S)$ será notada por $|\mu|$. Si $|\mu| < \infty$ diremos que μ tiene variación acotada.

La semivariación de μ es la función de conjuntos no negativa $||\mu||(\cdot)$ cuyo valor en un medible A viene dado por

$$\|\mu\|(A) = \sup\{|x^*\mu|(A) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\},$$

donde $|x^*\mu|$ es la variación de la medida finitamente aditiva $x^*\mu$. La semivariación total $\|\mu\|(S)$ será notada por $\|\mu\|$. Si $\|\mu\| < \infty$ entonces se dice que μ tiene semivariación acotada, o que μ es acotada. Para cada medible A se tiene

$$\|\mu\|(A) = \sup \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \right\|,$$

donde el supremo se toma entre todas las particiones $(A_k)_{k=1}^n$ de A y todas las sucesiones finitas $(a_k)_{k=1}^n$ verificando $|a_k| \leq 1$. Además:

$$\sup\{\|\mu(A)\| : A \in \mathcal{A}\} \leq \|\mu\|(A) \leq 2\sup\{\|\mu(A)\| : A \in \mathcal{A}\}.$$

Toda medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre un álgebra tiene semivariación acotada.

El rango de una medida vectorial finitamente aditiva $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es el conjunto $\text{rg}(\mu) = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Notaremos por $\text{ca}(\mathcal{A}, X)$ el espacio de Banach de las medidas vectoriales numerablemente aditivas con valores en X definidas sobre $\mathcal{A}$, dotadas de la norma de la semivariación. En el caso de que X sea el cuerpo de escalares entonces escribiremos $\text{ca}(\mathcal{A})$ en lugar de $\text{ca}(\mathcal{A}, X)$. El rango de una medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre una σ-álgebra es un conjunto acotado débilmente relativamente compacto.

El subespacio cerrado de $\text{ca}(\mathcal{A}, X)$ formado por las medidas con rango relativamente compacto será notado por $\text{cca}(\Sigma, X)$. Diremos que μ tiene rango finito dimensional si existe E, subespacio de dimensión finita de X, tal que $\text{rg}(\mu) \subset E$. Notaremos por $\text{fdca}(\mathcal{A}, X)$ el subespacio de $\text{cca}(\mathcal{A}, X)$ formado por todas las medidas de rango finito dimensional. Diremos que μ tiene rango finito si el conjunto $\text{rg}(\mu)$ tiene cardinal finito. Una medida vectorial se dice escalar si toma valores en el cuerpo de los escalares.

Si $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre una σ-álgebra Σ, entonces un resultado de Bartle, Dunford y Schwartz afirma que existe una medida σ positiva numerablemente aditiva definida sobre Σ tal que $\sigma(A) \to 0$ si y sólo si $\|\mu\|(A) \to 0$. Una medida σ en estas condiciones se llama medida de control para μ. Un teorema de Rybakov asegura que tal medida σ siempre puede escogerse de la forma $|x^*\mu|$, con $x^* \in X^*$, que se denomina funcional de Rybakov.

Sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre una σ-álgebra, y σ una medida de control para μ. Definimos el operador integración u_μ asociado a μ sobre una función simple $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ como $u_\mu(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$. Se comprueba que $\|u_\mu(f)\| \leq \|\mu\| \, \|f\|_\infty$, y por densidad de las funciones simples en $L_\infty(S,\sigma)$ el operador u_μ puede extenderse a un operador w^* a w-continuo de $L_\infty(S,\sigma)$ en X. Para $f \in L_\infty(S,\sigma)$ se escribe $\int f d\mu = u_\mu(f)$ y se llama integral de Bartle de f respecto de μ. Se demuestra que

$$x^*\left(\int f d\mu\right) = \int f dx^*\mu,$$

para todo $x^* \in X^*$ y

$$\overline{\text{co}}(\text{rg}(\mu)) = \left\{\int f d\mu : 0 \leq f \leq 1, f \in L_\infty(\lambda)\right\}.$$

Sean (S_1, Σ_1) y (S_2, Σ_2) dos espacios medibles y $\mu_i : \Sigma_i \to X$, con $i = 1, 2$, dos medidas vectoriales. Se considera entonces la suma directa $\mu : \Sigma \to X$ como la medida vectorial definida sobre la σ-álgebra Σ de subconjuntos A de la unión disjunta $S = S_1 \bigcup S_2$ tales que $A \cap S_i \in \Sigma_i$ para $i = 1, 2$, dada por $\mu(A) = \mu_1(A \cap S_1) + \mu_2(A \cap S_2)$. Esta construcción puede hacerse también para una cantidad numerable de medidas, ver [K-K, Teorema II.7.2].

2. Retículos de Banach.

Para esta sección seguiremos el Capítulo I de [L-T].

Un retículo de Banach L es un espacio de Banach dotado de una relación de orden, que notaremos por $\leq$, verificando (a) si $x, y, z \in L$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$, (b) si $x, y \in L$ y $a \in \mathbb{R}, a > 0$ entonces $ax \leq ay$, (c) para cada $x, y \in L$ existe $\sup\{x, y\}$ y $\inf\{x, y\}$ respecto del orden en L, y d) si $|x| \leq |y|$ entonces $||x|| \leq ||y||$, donde $|x| = \sup\{x, -x\}$. Dos elementos x, y de L se dicen disjuntos si $\inf\{|x|, |y|\} = 0$.

Un conjunto C de L se dice orden acotado si existe $x \geq 0$ tal que $|z| \leq x$ para todo $z \in C$. Notaremos por $[x, y]$ el conjunto de los $z \in L$ tales que $x \leq z \leq y$.

Un subespacio vectorial R de L es un ideal si $y \in R$ siempre que exista $x \in R$ tal que $|y| \leq |x|$. El ideal R es una banda si cumple que si $C \subset R$ y existe $\sup C$, el supremo del conjunto C en L, entonces $\sup C \in L$.

Si L es un retículo de Banach entonces L^* es un retículo de Banach con el orden $x^* \leq y^*$ si y sólo si $x^*(x) \leq y^*(y)$ para cada $x \in L, x \geq 0$.

Un elemento e de L es una unidad débil si $\inf\{x, e\} = 0$ implica que $x = 0$. Un elemento $x > 0$ de L es un átomo si $0 \leq z \leq x$ implica que $z = ax$ para cierto $a \in [0, 1]$. Un retículo de Banach es puramente atómico si existe una familia (x_α) de átomos verificando que si $\inf\{x_\alpha, x\} = 0$ para todo α entonces $x = 0$.

Un operador lineal u entre dos retículos de Banach es un orden isomorfismo si es biyectivo y respeta la estructura del orden, esto es, $u(\sup\{x, y\}) = \sup\{u(x), u(y)\}$ y $u(\inf\{x, y\}) = \inf\{u(x), u(y)\}$. Si u es un orden isomorfismo entonces u es un isomorfismo topológico. Diremos que u es una orden isometría si u es una isometría lineal sobreyectiva que respeta el orden.

Un espacio de Köthe de funciones sobre un espacio de medida (S, Σ, σ) es un espacio de Banach L de (clases de) funciones reales, localmente integrables, que cumplen (a) si $|f(s)| \leq |g(s)|$, f medible y $g \in L$ entonces $f \in L$ y $\|f\| \leq \|g\|$, y (b) para cada conjunto medible A la función característica χ_A pertenece a L.

Un retículo de Banach se dice orden continuo si todo conjunto $C \subset X$ dirigido decrecientemente cuyo ínfimo sea cero verifica que $\inf\{\|x\| : x \in C\} = 0$. Equivalentemente, un retículo de Banach es orden continuo si toda sucesión creciente acotada respecto del orden es convergente.

Si L es un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil entonces se puede representar como un espacio de Köthe de funciones. Concretamente, existe un espacio de probabilidad (S, Σ, σ), un ideal $\tilde{L}$ de $L_1(S, \sigma)$ y una norma $\|\cdot\|$ sobre $\tilde{L}$ que lo hace retículo de Banach, cumpliendo que (a) L y $\tilde{L}$ son orden isométricos, (b) $\tilde{L}$ es denso en $L_1(S, \sigma)$ y $L_\infty(S, \sigma)$ es denso en $\tilde{L}$, (c) $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\tilde{L}} \leq 2\|f\|_\infty$ si $f \in L_\infty(S, \sigma)$ y (d) el dual de $\tilde{L}$ es el espacio de las funciones medibles h verificando que $\sup\{\int_S |fh| d\sigma : \|f\|_{\tilde{L}} \leq 1\} < \infty$; el valor tomado por el funcional asociado a h en $f \in \tilde{L}$ viene dado por la integral $\int_S fh d\sigma$.

Si L es un retículo orden continuo, un conjunto acotado C de L se dice L-w-compacto si es casi-orden acotado, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $x \geq 0$ tal que $C \subset [-x, x] + \epsilon B_L$, donde B_L es la bola unidad de L. Si L es un espacio de Köthe de funciones orden continuo entonces C es L-w-compacto si y sólo si es equi-integrable, esto es, $\lim_{\sigma(A) \to 0} \sup\{\|f\chi_A\| : f \in C\} = 0$. Si C es relativamente compacto entonces C es L-w-compacto, y si C es L-w-compacto entonces es relativamente débilmente compacto.

3. Operadores.

Los tipos de operadores y propiedades que vamos a tratar pueden encontrarse en [D-J-T] o [Pi].

Sean X e Y dos espacios de Banach. Notaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio de Banach de los operadores $u : X \to Y$ lineales y continuos dotados de la norma de operadores

$$||u|| = \sup\{||u(x)|| : ||x|| \leq 1\}.$$

Suponer que $1 \leq p < \infty$ y $u : X \to Y$ es un operador lineal. Se dice que u es p-sumante si existe una constante $c \geq 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1, ..., x_n$ en X se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||u(x_k)||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : ||x^*|| \leq 1\right\}.$$

La menor constante c para la cual se tiene la desigualdad anterior se nota por $\pi_p(u)$, norma p-sumante de u. El espacio de Banach de los operadores p-sumantes será notado por $\Pi_p(X,Y)$.

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X se dice débilmente p-sumable si

$$||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_p^w = \sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : ||x^*|| \leq 1\right\} < \infty$$

y absolutamente p-sumable si

$$||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se puede demostrar que u es p-sumante si y sólo si u lleva sucesiones débilmente p-sumables en sucesiones absolutamente p-sumables.

Si $u : X \to Y$ es un operador 2-sumante entonces existe una probabilidad regular de Borel σ definida sobre B_{X^*} dotada de la topología w^* y un operador $v : L_2(B_{X^*}, \sigma) \to Y$ tales que $u = v \circ j \circ i$, donde $j : L_\infty(B_{X^*}, \sigma) \to L_2(B_{X^*}, \sigma)$ e $i : X \to L_\infty(B_{X^*}, \sigma)$ son las inclusiones naturales. Además v se puede elegir de forma que $\pi_2(u) = \|v\|$.

Supongamos que K es un compacto de Hausdorff. Si $u : C(K) \to Y$ es un operador p-sumante entonces existe una probabilidad de Borel regular σ sobre K y un operador $\tilde{u} : L_p(K, \sigma) \to Y$, tales que $u = \tilde{u} \circ i_p$, donde i_p es la inclusión de $C(K)$ en $L_p(K, \sigma)$. Además $\tilde{u}$ se puede elegir con $\|\tilde{u}\| = \pi_p(u)$.

Un operador lineal $u : X \to Y$ se llama nuclear si existen sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ en X^* y $(y_n)_{n=1}^\infty$ en Y tales que $\sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\| \, \|y_n\| < \infty$ y

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n,$$

para todo $x \in X$. Si u es nuclear, la norma nuclear de u se define como

$$\mathrm{n}(u) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\|,$$

donde el ínfimo se toma entre todas las sucesiones $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ tales que $u(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) y_n$ para todo $x \in X$. El espacio de Banach formado por los operadores nucleares dotados con la norma $\mathrm{n}(\cdot)$ se nota por $\mathcal{N}(X, Y)$.

Sea X un espacio de Banach y L un retículo de Banach. Un operador lineal $u : X \to L$ es orden acotado si existe $f \in L$ tal que $|u(x)| \leq \|x\| f$. Para u orden acotado se define la norma $\|u\|_m$ como el ínfimo de las normas $\|f\|$, donde f satisface la desigualdad anterior. El espacio de los operadores orden acotados dotado de esta norma, notado por $\mathcal{B}(X, L)$, es completo. Si L es un espacio de Köthe orden continuo de funciones definidas sobre un espacio de medida finito (S, Σ, σ), entonces todo operador orden acotado $u : X \to L$ tiene asociada una función $F : S \to X^*$, que es w^*-escalarmente medible, tal que, para cada $x \in X$,

$$u(x) = x(F(\cdot)),$$

en casi todo punto. Ver [H-N-O].

Un operador $u : X \to L$ es L-w-compacto si lleva la bola unidad de X en un conjunto L-w-compacto de L.

4. Productos tensoriales.

Las nociones referentes a productos tensoriales que vamos a manejar pueden encontrarse en [D-U] y en [H-N-O].

Sean X e Y dos espacios de Banach, y sea $X \otimes Y$ el producto tensorial algebraico de ambos espacios.

Si $u \in X \otimes Y$ se define la norma inyectiva ϵ de u como:

$$||u||_\epsilon = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} x^*(x_k) y^*(y_k) : ||x|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1 \right\},$$

si $u = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$. El completado del espacio normado resultante se llama producto tensorial inyectivo de X e Y y será notado por $X \otimes_\epsilon Y$. Este espacio se identifica con el espacio de los operadores $u : X^* \to Y$, que son w^* a w-continuos y límite de operadores de rango finito. El dual de $X \otimes_\epsilon Y$ es el espacio de la formas bilineales integrales definidas sobre $X \times Y$. Una forma bilineal ϕ sobre $X \times Y$ es integral si existe una medida de Borel γ regular sobre $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ tal que, para cada $x \in X, y \in Y$:

$$\phi(x, y) = \int_{B_{X^*} \times B_{Y^*}} x^*(x) y^*(y) d\gamma(x^*, y^*).$$

La norma de ϕ como elemento del dual viene dado por la variación total de γ.

Un operador $u : X \to Y$ se llama integral (en el sentido de Grothendieck) si la forma bilineal ϕ_u definida sobre $X \times Y^*$ por $\phi_u(x, y^*) = u(x)(y^*)$ es integral.

Otra norma de interés sobre el producto tensorial algebraico de X e Y es la norma proyectiva. Si $u \in X \otimes Y$ se define la norma proyectiva π de u como:

$$||u||_\pi = \inf \sum_{k=1}^{n} ||x_k|| ||y_k||,$$

donde el ínfimo se toma entre todas las posibles representaciones de u de la forma $u = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$. El completado de $X \otimes Y$ para la norma π se nota por $X \otimes_\pi Y$ y se llama producto tensorial proyectivo de X e Y. El dual de $X \otimes_\pi Y$ se identifica isométricamente con las formas bilineales continuas definidas sobre $X \times Y$, dotadas de la norma usual

$$||\phi(x,y)|| = \sup\{|\phi(x,y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}.$$

Sea L un retículo de Banach. El completado de $X \otimes L$ con la norma de operadores orden acotados $|| \cdot ||_m$ definida anteriormente se notará por $X \otimes_m L$. Si L es un espacio de Köthe de funciones sobre (S, Σ, σ), cada elemento u de $X \otimes_m L$ tiene asociada una función fuertemente medible $F : S \to X^*$ tal que para cada $x \in X$,

$$u(x)(s) = x(F(s)),$$

en casi todo punto. El espacio $X \otimes_m L$ se identifica isométricamente con el espacio de funciones vectoriales

$$L(X) = \{F : S \to X, \text{ fuertemente medible y } f_F = ||F(\cdot)|| \in L\},$$

dotado de la norma $||F||_{L(X)} = ||f_F||_L$. El dual de $X \otimes_m L$ es el espacio $\mathcal{B}(X, L^*)$.

CAPÍTULO 1

PROMEDIOS DE FUNCIONES PETTIS INTEGRABLES

1. Introducción y resultados previos.

En este Capítulo consideraremos como espacio de medida base el toro $\mathbb{T}$ con la medida de Lebesgue λ normalizada sobre él, de manera que $\lambda(\mathbb{T}) = 1$. Notaremos por $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{T}$. Los espacios de Banach serán complejos.

Existen varias generalizaciones del espacio $L_1(\mathbb{T})$ de (clases de) funciones complejas integrables Lebesgue a espacios de funciones fuertemente medibles "integrables" en cierto sentido, con valores en un espacio de Banach X.

Una de ellas es el espacio de las funciones Bochner integrables. Una función $F : \mathbb{T} \to X$ fuertemente medible es Bochner integrable si

$$\int_{\mathbb{T}} ||F(t)|| d\lambda(t) < \infty.$$

El espacio de las funciones Bochner integrables se notará por $L_1(\mathbb{T}, X)$. Dotado de la norma

$$||F|| = \int_{\mathbb{T}} ||F(t)|| d\lambda(t)$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

es un espacio de Banach. Puede probarse que $L_1(\mathbb{T}, X)$ es isométrico al producto tensorial proyectivo $L_1(\mathbb{T}) \otimes_\pi X$. Para ésta y otras propiedades de la integral de Bochner ver [D-U].

Otra posible generalización es la llamada integral de Pettis. Para definir esta integral no es necesario que la función sea fuertemente medible, basta con que sea w-escalarmente medible.

Sea por tanto $F : \mathbb{T} \to X$ una función w-escalarmente medible. Se dice que F es Pettis integrable si: (a) para cada $x^* \in X^*$ la función escalar $x^*(F(\cdot))$ es integrable respecto de λ y (b) para cada $A \in \mathcal{M}$ existe un elemento de X, que se nota por $\int_A F(t)d\lambda(t)$, tal que $x^*(\int_A F(t)d\lambda(t)) = \int_A x^*(F(t))d\lambda(t)$ para todo $x^* \in X^*$.

El espacio de las funciones fuertemente medibles Pettis integrables se nota por $P_1(\mathbb{T}, X)$, y se dota de la norma

$$||F|| = \sup\left\{\int_{\mathbb{T}} |x^*(F(t))|d\lambda(t) : ||x^*|| \leq 1\right\}.$$

El completado del espacio $P_1(\lambda, X)$ se identifica con un espacio de operadores: el producto tensorial inyectivo $L_1(\mathbb{T}) \otimes_\epsilon X$, que es isométrico al espacio $\mathrm{cca}(\lambda, \mathcal{M}, X)$ de medidas vectoriales numerablemente aditivas con rango relativamente compacto que son absolutamente continuas respecto de λ. Es conocido que si X tiene dimensión infinita, el espacio $P_1(\mathbb{T}, X)$ no es completo (ver por ejemplo [J-K]).

Estas dos generalizaciones son por tanto muy diferentes entre sí cuando el espacio de Banach X tiene dimensión infinita. De hecho puede demostrarse fácilmente a partir del Teorema de Dvoretsky-Rogers que si X tiene dimensión infinita entonces existe una función F fuertemente medible Pettis integrable que no es Bochner integrable.

Sea $F \in P_1(\mathbb{T}, X)$; diremos que es analítica si

$$\widehat{F}(n) = \int_{\mathbb{T}} F(t)\ \mathrm{e}^{-int} d\lambda(t) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. El correspondiente espacio de funciones analíticas fuertemente medibles Pettis integrables visto como subespacio de $P_1(\mathbb{T}, X)$ tampoco es completo: ésto se probará en el Teorema 1.3.1.

Supongamos que F es una función Bochner integrable y notemos por $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ el núcleo de sumabilidad de Fejér:

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \mathrm{e}^{ijt}.$$

Siguiendo [Ka] la convolución $K_n * F$ de una función F con el núcleo de Fejér evaluada en un $t \in \mathbb{T}$ será notada por $K_n * F(t) = \sigma_n(F, t)$.

Se puede demostrar [He, Section 2.4] que:

(a) $\lim_{n\to\infty} K_n * F = F$ en $L_1(\mathbb{T}, X)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(F, t) = F(t)$ en casi todo $t \in \mathbb{T}$.

Las mismas propiedades serían ciertas si en vez de considerar $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ consideráramos el núcleo de Poisson $(P_r)_{0\leq r<1}$. Recordar que:

$$P_r(t) = P(r, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Si F es Pettis integrable la convolución con el núcleo de Fejér $K_n * F$, o con el de Poisson $P_r * F$, también tiene sentido: en este caso

$$\sigma_n(F, t) = \int_{\mathbb{T}} K_n(t - s)F(s)d\lambda(s)$$

donde la integral anterior es en el sentido de Pettis, y lo mismo con el de Poisson poniendo $P_r * F(t) = \int_{\mathbb{T}} P_r(t-s)F(s)d\lambda(s)$. Incluso en el caso de que $\mu : \mathcal{M} \to X$ sea una medida vectorial numerablemente aditiva podemos definir también la convolución de manera natural como:

$$\sigma_n(\mu, t) = \int_{\mathbb{T}} K_n(t-s)d\mu(s),$$

y lo mismo con el núcleo de Poisson.

En este Capítulo estudiaremos si los resultados anteriores se mantienen para funciones Pettis integrables. También trataremos de estudiar qué ocurre si además de integrabilidad Pettis se exige analiticidad a las funciones.

2. Promedios de funciones Pettis integrables.

En esta Sección vamos a probar que los promedios $(K_n * F)_{n=1}^{\infty}$ y $(P_r * F)_{0 \leq r < 1}$ de una función F fuertemente medible Pettis integrable convergen a F en la norma de $P_1(\mathbb{T}, X)$ no siendo cierta, sin embargo, la convergencia puntual en casi todo punto de los promedios hacia la función, ni siquiera en la topología débil de X. Haremos el desarrollo completo sólo para el núcleo de Fejér

Si $u : L_\infty(\mathbb{T}) \to X$ es un operador lineal y continuo entonces se puede definir la convolución $K_n * u$ como el operador $(K_n * u)(f) = u(K_n * f)$. Demostraremos el siguiente resultado cuya prueba está inspirada por [Bl, Theorem 11].

TEOREMA 1.2.1. *Si $u : L_\infty(\mathbb{T}) \to X$ es compacto y w^* a w-continuo entonces $(K_n * u)_{n=1}^{\infty}$ converge a u en la norma de operadores.*

PRUEBA. El operador adjunto u^* toma valores en $L_1(\mathbb{T})$ por ser u un operador w^* a w-continuo. Si $x^* \in X^*$ entonces $(K_n * u)^*(x^*) = K_n * u^*(x^*)$: para ver la igualdad basta tomar $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ y observar que

$$(K_n * u)^*(x^*)(f) = x^*(u(K_n * f)) = u^*(x^*)(K_n * f) = (K_n * u(x^*))(f).$$

Dado $\epsilon > 0$, por la compacidad de u^*, existen $(x_j^*)_{j=1}^m$ tales que $(u^*(x_j^*))_{j=1}^m$ es una ϵ-red en $u^*(B_{X^*})$. Si $\|x^*\| \leq 1$ podemos encontrar un x_j^* y un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces:

$$\|u^*(x^*) - (K_n * u)^*(x^*)\| = \|u^*(x^*) - K_n * u^*(x^*)\| \leq$$

$$\leq \|u^*\| \, \|x^* - x_j^*\| + \|u^*(x_j^*) - K_n * u^*(x_j^*)\| + \|K_n * u^*(x^* - x_j^*)\| \leq$$

$$\leq (\|u^*\| + 1 + \|u^*\|)\epsilon.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|u - K_n * u\| =& \|u^* - (K_n * u)^*\| \\ \leq& (\|u^*\| + 1 + \|u^*\|)\epsilon,\end{aligned}$$

si $n \geq n_0$. □

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 1.2.2. *Si F es una función fuertemente medible y Pettis integrable entonces $K_n * F$ converge a F en $P_1(\mathbb{T}, X)$.*

PRUEBA. Si $F \in P_1(\mathbb{T}, X)$ podemos asignarle el operador compacto y w^* a w-continuo $u_F : L_\infty(\mathbb{T}) \to X$ definido por $u_F(f) = \int_{\mathbb{T}} F(t)f(t)d\lambda(t)$.

La función $K_n * F$ es fuertemente medible: la función $t \to K_n(t-s) \in L_\infty(\mathbb{T})$ es continua y $K_n * F$ es la composición de tal función con el operador lineal y continuo u_F; y es Pettis integrable: para cada $A \in \mathcal{M}$ se tiene que $\int_A K_n * F(t)d\lambda(t) = \int_{\mathbb{T}} F(t)K_n * \chi_A(t)d\lambda(t)$, que es un elemento de X. Observar por último que el operador asociado $u_{K_n * F}$ coincide con el operador $K_n * u_F$. Entonces:

$$||F - K_n * F||_{P_1(\mathbb{T},X)} = ||u_F^* - u_{K_n*F}^*|| = ||u_F - u_{K_n*F}|| = ||u_F - K_n * u_F||,$$

que tiende a cero por el teorema anterior. □

COMENTARIO 1.2.3. El corolario anterior es cierto aunque la función no sea fuertemente medible ya que si el espacio de medida es perfecto entonces el operador integración asociado a una función w-escalarmente medible Pettis integrable es compacto y w^* a w-continuo [T].

En el siguiente teorema demostraremos que, en general, los promedios de funciones Pettis integrables fuertemente medibles no convergen puntualmente en casi todo punto.

TEOREMA 1.2.4. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Existe una función $F : \mathbb{T} \to X$ fuertemente medible y Pettis integrable tal que $(\sigma_n(F,t))_{n=1}^{\infty}$ no es convergente (ni siquiera débilmente) en ningún punto $t \in \mathbb{T}$. Lo mismo se tiene para el núcleo de Poisson $(P_r)_{0\leq r<1}$.*

PRUEBA. La construcción de la función es la que aparece en [D-G]. Podemos suponer que X tiene base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos finitos de números naturales consecutivos, esto es, $\max A_n < \min A_{n+1}$, tales que para cada $n \in N$ existe un subespacio E_n de dimensión 2^n contenido en el espacio generado por los vectores $\{x_j : j \in A_n\}$, 2-isomorfo a $\ell_2^{2^n}$. Sea $P_{A_n} : X \to X$ la proyección sobre el espacio generado por $\{x_j : j \in A_n\}$; existe una constante c tal que $||P_{A_n}|| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $(e_{n,k})_{k=1}^{2^n} \subset E_n$ una sucesión de vectores que verifiquen:

$$\frac{1}{2}||(a_k)_{k=1}^{2^n}||_2 \leq ||\sum_{k=1}^{2^n} a_k e_{n,k}|| \leq 2||(a_k)_{k=1}^{2^n}||_2.$$

Por otra parte considerar $\{I_k^n : n \geq 0; k = 1, ..., 2^n\}$ los intervalos diádicos sobre $\mathbb{T}$, esto es,

$$I_k^n = \left[\frac{2\pi(k-1)}{2^n}, \frac{2\pi k}{2^n}\right).$$

Consideraremos una colección de conjuntos medibles $\{A_k^n : n \geq 0; k = 1, ..., 2^n\}$ contruidos como conjuntos de Cantor, cada uno de ellos de medida estrictamente positiva, disjuntos en n y en k, con $A_k^n \subset I_k^n$. En la siguiente Sección se hará una construcción de los conjuntos A_k^n con cierto control de las medidas, que aquí no es necesario.

Definimos la función $F : \mathbb{T} \to X$ como

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-3n}{4}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \chi_{A_k^n}(t) e_{n,k}.$$

Como los conjuntos A_k^n son disjuntos la función F está bien definida y es claramente fuertemente medible.

Como en [D-G] se demuestra que F es Pettis integrable probando que para cada medible $A \in \mathcal{M}$:

$$\int_A F(t) d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-3n}{4}} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_A \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \chi_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right) e_{n,k}$$

es un elemento de X pues

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_A \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \chi_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right) e_{n,k} \right\| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} \left| \int_A \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \chi_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2^{\frac{n}{2}+1}.$$

También se tiene que para cada $x^* \in X^*$

$$\int_A x^*(F(t))d\lambda(t) = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-3n}{4}} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\int_A \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \chi_{A_k^n}(t) d\lambda(t)\right) e_{n,k}\right).$$

Fijemos $t_0 \in \mathbb{T}$ y $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$\frac{2\pi}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{m \log m} \leq \frac{2\pi}{2^{n_0 - 1}},$$

y k_0 tal que $t_0 \in I_{k_0}^{n_0}$.

La función $K_m(t)$ verifica que $K_m(0) = m$ y $|K_m'(t)| \leq m^2$ para todo $t \in \mathbb{T}$ ya que

$$\begin{aligned} |K_m'(t)| &= \left| \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=-j}^{j} ik e^{ikt} \right| \\ &\leq \frac{2}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{j} k \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} j(j+1) \\ &\leq m^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $t \in [-\frac{2\pi}{2^{n_0}}, \frac{2\pi}{2^{n_0}}]$

$$|K_m(t) - K_m(0)| \leq m^2 |t| \leq \frac{m}{\log m},$$

luego

$$K_m(t) \geq m\left(1 - \frac{1}{\log m}\right).$$

De las acotaciones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\sigma_m(F,t_0)\| =& \left\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{-3n}{4}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \sigma_n(\chi_{A_k^n}, t_0) e_{n,k} \right\| \\ \geq& \frac{c}{2} 2^{\frac{-3n_0}{4}} \frac{1}{\lambda(A_{k_0}^{n_0})} \left| \int_{A_{k_0}^{n_0}} K_m(t_0 - s) d\lambda(s) \right| \\ \geq& \frac{c}{2} m \left(1 - \frac{1}{\log m}\right) 2^{\frac{-3n_0}{4}} \\ \geq& \frac{c}{2} m \left(1 - \frac{1}{\log m}\right) \left(\frac{1}{4\pi m \log m}\right)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m(F,t_0)\| = +\infty$ y no puede haber convergencia débil.

Para el núcleo de Poisson observar que $P_r(0) = \dfrac{1+r}{1-r}$ y

$$|P_r'(t)| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \leq \frac{2r}{(1-r)^2}.$$

Fijado $t_0 \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$ se elige $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2\pi}{2^{n_0}} \leq \frac{1-r}{-\log(1-r)} \leq \frac{2\pi}{2^{n_0-1}},$$

y k_0 para que $t_0 \in I_{k_0}^{n_0}$. Se verifica que

$$|P_r(t) - P_r(0)| \leq \frac{2r}{(1-r)^2} |t|,$$

luego

$$|P_r(t)| \geq \frac{1}{1-r} \left(1 + r + \frac{2r}{\log(1-r)}\right),$$

para cada $t \in [-\frac{2\pi}{2^{n_0}}, \frac{2\pi}{2^{n_0}}]$.

Siguiendo los mismos pasos que en la prueba del núcleo de Fejér tenemos que

$$\begin{aligned}\|P_r * F(t_0)\| \geq& \frac{c}{2} 2^{\frac{-3n_0}{4}} \frac{1}{\lambda(A_{k_0}^{n_0})} \left| \int_{A_{k_0}^{n_0}} P_r(t_0 - s) d\lambda(s) \right| \\ \geq& \frac{c}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{-(1-r)}{\log(1-r)}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1-r} \left(1 + r + \frac{r}{\log(1-r)}\right),\end{aligned}$$

que tiende a ∞ cuando r tiende a 1. □

COMENTARIO 1.2.5. Esta construcción fue utilizada en [D-G] para obtener una función Pettis integrable que no cumple el Teorema de diferenciación de Lebesgue en ningún punto, esto es, que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} F(s) d\lambda(s)\| = \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

3. Funciones Pettis integrables analíticas.

El espacio de las funciones fuertemente medibles, Pettis integrables y analíticas, dotado de la norma de $P_1(\mathbb{T}, X)$, será notado por $P_1^{\mathrm{a}}(\mathbb{T}, X)$, esto es,

$$P_1^{\mathrm{a}}(\mathbb{T}, X) = \{F \in P_1(\mathbb{T}, X) : F \text{ es analítica } \}.$$

Comenzaremos la sección demostrando que $P_1^{\mathrm{a}}(\mathbb{T}, X)$ no es completo; como este subespacio es cerrado en $P_1(\mathbb{T}, X)$ se obtiene así que éste tampoco es completo.

TEOREMA 1.3.1. *El espacio $P_1^a(\mathbb{T}, X)$ no es completo si X es de dimensión infinita.*

PRUEBA. Supongamos que es completo y notemos por $L_0(\mathbb{T}, X)$ el espacio de las (clases de) funciones fuertemente medibles con valores en X. El operador inclusión $i : P_1^{\mathrm{a}}(\lambda, X) \to L_0(\lambda, X)$, es continuo por el Teorema del grafo cerrado. En efecto, si $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en $P_1(\mathbb{T}, X)$ entonces $x^*(F(\cdot))$ converge a cero en $L_1(\mathbb{T})$ para cada $x^* \in X^*$. Si además $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cierta F en medida, entonces $x^*(F_n(\cdot))$ converge a $x^*(F(\cdot))$ en medida. Se sigue que $x^*(F(t)) = 0$ en casi todo t, y como F es fuertemente medible, $F = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $(x_k)_{k=1}^n \subset X$, una sucesión de elementos normalizados tales que

$$\frac{1}{2}\|(a_k)_{k=1}^n\|_2 \leq \|\sum_{k=1}^n a_k x_k\| \leq 2\|(a_k)_{k=1}^n\|_2,$$

y $(A_k)_{k=1}^n$ una partición de $\mathbb{T}$ con $\lambda(A_k) = \frac{1}{n}$ para todo k. Consideramos la función analítica F_n definida como

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^n (\chi_{A_k}(t) + i\widetilde{\chi}_{A_k}(t))x_k,$$

donde $\widetilde{\chi}_{A_k}(t)$ es la función conjugada de la función característica de A_k [Ka, Chapter II].

Para cada $t \in \mathbb{T}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n (\chi_{A_k}(t) + i\widetilde{\chi}_{A_k}(t))x_k\right\| &\geq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n |\chi_{A_k}(t) + i\widetilde{\chi}_{A_k}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2}|\chi_{A_{n_0}}(t) + i\widetilde{\chi}_{A_{n_0}}(t)| \\ &\geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

luego F_n no converge a cero en medida.

Por otra parte, para cada $x^* \in B_{X^*}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|x^*(F_n(\cdot))\|_1 = &\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k=1}^{n} (\chi_{A_k}(t) + i\widetilde{\chi}_{A_k}(t)) x^*(x_k) \right| d\lambda(t) \\
\leq &\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \left(\|\chi_{A_k}\|_1 + \|\widetilde{\chi}_{A_k}\|_{\frac{3}{2}} \right) \\
\leq &\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \left(\|\chi_{A_k}\|_1 + c\|\chi_{A_k}\|_{\frac{3}{2}} \right) \\
\leq &2\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} + c\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \right),
\end{aligned}$$

donde c es la norma de la transformada de Hilbert en $L_{\frac{3}{2}}(\mathbb{T})$. De aquí F_n converge a cero en $P_1^{\mathrm{a}}(\lambda, X)$, llegando así a contradicción. □

Como ya enunciamos en la Sección 1, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita entonces existen funciones fuertemente medibles Pettis integrables que no son Bochner integrables. Cabe preguntarse si tales funciones pueden encontrarse analíticas. El resultado es positivo.

TEOREMA 1.3.2. *Si X es dimensión infinita entonces existen funciones en $P_1^a(\mathbb{T}, X)$ que no son Bochner integrables.*

PRUEBA. Por el lema de Dvoretsky-Rogers podemos encontrar una serie incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$ y $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w \leq 1$. Sea $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ la sucesión de conjuntos

$$A_k = \left[2\pi \left(1 - \frac{1}{k} \right), 2\pi \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \right).$$

Llamemos $g_k(t) = (\lambda(A_k))^{-1} \chi_{A_k}(t)$.

Sea $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que

$$a_k < \frac{\lambda(A_{k+1})}{4}.$$

Definimos $J_1 = (\pi - a_1, \pi + a_1)$ y si $k \geq 2$ ponemos

$$J_k = \left(2\pi\left(1-\frac{1}{k}\right) - a_{k-1}, 2\pi\left(1-\frac{1}{k}\right) + a_{k-1}\right)$$
$$\bigcup\left(2\pi\left(1-\frac{1}{k+1}\right) - a_k, 2\pi\left(1-\frac{1}{k+1}\right) + a_k\right).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sup\{|\sigma_{n_k}(g_k, t) - g_k(t)| : t \in J_k^c\} \leq 2^{-k},$$

donde J_k^c es el complemento de J_k en $\mathbb{T}$ ([Ka, Theorem 3.1]).

Cada $t \in \mathbb{T}$ pertenece a lo sumo a dos de los J_k, por lo tanto:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{n_k}(g_k, t) = \lim_{k\to\infty} g_k(t) = 0.$$

Definimos la función $F : \mathbb{T} \to X$ como

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t).$$

La función está bien definida y es fuertemente medible por ser la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ incondicionalmente convergente.

Observar que si $t \in J_k^c \cap I_k$ entonces

$$|\sigma_{n_k}(g_k, t)| \geq g_k(t) - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{\lambda(A_k)} - \frac{1}{2^k},$$

y por otra parte si $t \in J_m^c \cap A_m$ con $m \neq k$ se tiene que $t \in J_k^c$ y $g_k(t) = 0$ por lo tanto

$$|\sigma_{n_k}(g_k, t)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Observar también que $\lambda(J_k^c \cap A_k) \geq \lambda(A_k)/2$, por la elección de los $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \|F(t)\| d\lambda(t) &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{J_m^c \cap A_m} \|F(t)\| d\lambda(t) \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{J_m^c \cap A_m} \|x_m \ \mathrm{e}^{in_m t} \sigma_{n_m}(g_m, t)\| d\lambda(t) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{J_m^c \cap A_m} \| \sum_{k \neq m} x_k \ \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t)\| d\lambda(t) \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \left(\frac{1}{\lambda(A_m)} - \frac{1}{2^m} \right) \frac{\lambda(A_m)}{2} \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{J_m^c \cap A_m} \| \sum_{k \neq m} x_k \ \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t)\| d\lambda(t) \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

ya que al ser $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ incondicionalmente convergente se tiene que

$$\| \sum_{k \neq m} x_k \ \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t)\| \leq$$

$$\leq \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_1^w \ \sup\{|\sigma_{n_k}(g_k, t)| : k \neq m, t \in J_m^c \cap A_m\} \leq \frac{1}{2}.$$

Esto demuestra que F no es Bochner integrable.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |x^*(F(t))| d\lambda(t) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| \int_{\mathbb{T}} | \ \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t)| d\lambda(t) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| \|K_{n_k}\|_1 \|g_k\|_1 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Como para cada conjunto medible A, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_A \ \mathrm{e}^{in_k t} \sigma_{n_k}(g_k, t) d\lambda(t)$ converge en X, F es Pettis integrable.

Para terminar la prueba, si $n < 0$ entonces $\widehat{F}(n) = 0$ pues para todo $k \in \mathbb{N}$ $x_k \, e^{in_k t}\sigma_{n_k}(g_k, t)$ es analítica. $\square$

En la misma línea de este resultado podemos preguntarnos si la función F postulada en el Teorema 1.2.3 puede elegirse analítica. A partir de este teorema podemos deducir el siguiente resultado, para el cual necesitamos el siguiente lema. Recordamos que $I_k^n = \left[\frac{2(k-1)\pi}{2^n}, \frac{2k\pi}{2^n}\right)$.

Lema 1.3.3. *Existe una sucesión A_k^n de conjuntos medibles, con $n \in \mathbb{N}$ no múltiplo de 3 y $k = 1, ..., 2^n$, tales que:*

(1) $A_k^n \subset I_k^n$.
(2) $\lambda(A_k^n) \geq \frac{2}{3}\frac{1}{2^{3n}}$.
(3) $A_k^n \cap A_{k'}^{n'} = \emptyset$ *si* $(n, k) \neq (n', k')$.

Prueba. Sea T el conjunto de las sucesiones finitas de ceros y unos, esto es,

$$T = \{\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) : \beta_i \in \{0, 1\}\}.$$

Para $\beta \in T$, definimos $|\beta|$ como el número de elementos de la sucesión β. Si $\beta^1 = (\beta_1^1, ..., \beta_m^1)$ y $\beta^2 = (\beta_1^2, ..., \beta_n^2)$ son dos elementos de T, se define el elemento $\beta^1 \cup \beta^2 = (\beta_1^1, ..., \beta_m^1, \beta_1^2, ..., \beta_n^2)$. Diremos que $\beta^1 < \beta$ si existe β^2 tal que $\beta = \beta^1 \cup \beta^2$; en ese caso se define la sucesión diferencia $\beta \setminus \beta^1 = \beta^2$.

Esta relación define un orden parcial sobre T. Dos elementos $\alpha, \beta \in T$ están relacionados si $\alpha < \beta$ o bien $\beta < \alpha$.

Ponemos $A_k^n = A_\beta$, donde $n = |\beta|$ y $k = 1 + \beta_n + \beta_{n-1}2 + ... + \beta_1 2^{n-1}$, si $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ $(A_1^1 = A_0, A_2^1 = A_1, A_1^2 = A_{00}, A_2^2 = A_{01}, A_3^2 = A_{10}, A_4^2 = A_{11}, ...)$, y lo mismo para los intervalos diádicos I_β. Observar que $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ si y sólo si α y β están relacionados.

Definimos la función $\varphi : T \to T$ inductivamente como $\varphi(0) = (0,0,0)$, $\varphi(1) = (1,0,0)$, y para $\beta \in T$ con $|\beta| \geq 2$:

(1) Si existe $\alpha < \beta$ tal que $\varphi(\alpha) \leq \beta$ entonces ponemos

$$\varphi(\beta) = \varphi(\min\{\alpha : \alpha < \beta, \varphi(\alpha) \leq \beta\}).$$

(2) Si no existe $\alpha < \beta$ tal que $\varphi(\alpha) \leq \beta$, distinguimos dos casos:

(2.1) Existe $\alpha < \beta$ tal que $\varphi(\alpha) > \beta$. Entonces definimos

$$\varphi(\beta) = \beta \cup (1, 0, ..., 0),$$

de manera que $|\varphi(\beta)| = 3|\beta|$.

(2.2) No existe $\alpha < \beta$ tal que $\varphi(\alpha) > \beta$, definimos

$$\varphi(\beta) = \beta \cup (0, 0, ..., 0),$$

de manera que $|\varphi(\beta)| = 3|\beta|$.

La función φ verifica las siguientes propiedades:

(a) Para cada $\beta \in T$, $\varphi(\beta)$ está relacionado con β: en el caso (1), $\varphi(\beta) \leq \beta$ y en el caso (2) $\varphi(\beta) > \beta$.

(b) Si α, β son distintos y cumplen la condición (2) de la definición de φ entonces $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ no están relacionados. En efecto, si fuera $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$ entonces se tendría $\alpha < \beta < \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$, de donde $(\varphi(\beta))_{|\beta|+1} = 1$; pero $(\varphi(\alpha))_{|\beta|+1} = 0$, contradicción.

(c) Para cada elemento $\varphi(\alpha)$ existe un único elemento β cumpliendo la condición (2) de la definición de φ, tal que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Basta considerar $\beta = \min\{\alpha^1 :$

$\varphi(\alpha^1) = \varphi(\alpha)\}$; β no está en el caso (1) pues no existe $\alpha^1 < \beta$ con $\varphi(\alpha^1) = \varphi(\beta)$. La unicidad sigue entonces de (b).

(d) Para cada β, $|\varphi(\beta)| \leq 3|\beta|$, por lo tanto $\lambda(I_{\varphi(\beta)}) \geq \dfrac{1}{2^{3|\beta|}}$.

Llamamos $T_1 = \{\varphi(\beta) : \beta \in T\}$, y por inducción , si $n > 1$ definimos

$$T_n = \{\alpha \cup \varphi(\beta) : \alpha \in T_{n-1}, \beta \in T\} = \{\varphi(\beta^1) \cup ... \cup \varphi(\beta^n) : \beta^k \in \mathbb{T}\}.$$

Para cada $\beta \in T_n$, por las propiedades anteriores de la función φ, existen unos únicos $\beta^1, ..., \beta^n$ cumpliendo la condición (2) de la definición de φ tales que $\beta = \varphi(\beta^1) \cup ... \cup \varphi(\beta^n)$.

Ponemos $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subset T$. Observar que si $n \neq m$ entonces $T_n \cap T_m = \emptyset$. En efecto, si existiese $\beta \in T_n \cap T_m$, escribiendo

$$\beta = \varphi(\beta^1) \cup ... \cup \varphi(\beta^n) = \varphi(\alpha^1) \cup ... \cup \varphi(\alpha^m),$$

con β^k, α^j cumpliendo la condición (2) de la definición de φ, se observa $n = m$ y que cada α^j debe coincidir con β^j.

De la misma forma se puede demostrar que si $\alpha < \beta$ y $\alpha, \beta \in S$, entonces existen $\beta^1, ..., \beta^n$ tales que $\alpha = \varphi(\beta^1) \cup ... \cup \varphi(\beta^m)$ y $\beta = \varphi(\beta^1) \cup ... \cup \varphi(\beta^m) \cup ... \cup \varphi(\beta^n)$.

Definimos $\Psi : \{\beta \in T : |\beta| \text{ no múltiplo de } 3\} \rightarrow T$, sobre un β, del siguiente modo:

(1) Si $\{\alpha \in T : \alpha < \beta\} \cap S = \emptyset$ entonces ponemos

$$\Psi(\beta) = \varphi(\beta).$$

(2) Si $\{\alpha \in T : \alpha < \beta\} \cap S \neq \emptyset$ entonces considerar $\alpha^0 = \max\{\alpha < \beta : \alpha \in S\}$, y definimos

$$\Psi(\beta) = \alpha^0 \cup \varphi(\beta \setminus \alpha^0).$$

Podemos definir los conjuntos

$$A_\beta = I_{\Psi(\beta)} \setminus \bigcup_{\alpha \in T} I_{\Psi(\beta) \cup \varphi(\alpha)},$$

para $|\beta|$ no múltiplo de 3. Vamos a demostrar que los conjuntos A_β cumplen las tres propiedades del enunciado del lema.

Para ver la primera de las propiedades basta en realidad demostrar que $\beta < \Psi(\beta)$, ya que esto implica que $I_{\Psi(\beta)} \subset I_\beta$. Tomar entonces la definición $\Psi(\beta) = \alpha^0 \cup \varphi(\beta \setminus \alpha^0)$, o bien $\Psi(\beta) = \varphi(\beta)$. En el primer caso observar que $\beta \setminus \alpha^0$ está en la condición (2) de la definición de φ por ser α^0 el máximo de los elementos de S menores que β. Recordar que $\varphi(\beta \setminus \alpha^0)$ se escribe de la forma $(\beta \setminus \alpha^0) \cup \beta^0$, para cierto $\beta^0 \in T$, por lo tanto podemos poner que $\Psi(\beta) = \beta \cup \beta^0$. En el segundo caso el razonamiento es el mismo.

Para la segunda propiedad, observar que si $\Psi(\beta) = \alpha^0 \cup \Psi(\beta \setminus \alpha^0)$ entonces

$$|\Psi(\beta)| = |\alpha^0| + |\varphi(\beta \setminus \alpha^0)| = |\alpha^0| + 3|(\beta \setminus \alpha^0)| \leq 3|\beta|,$$

mientras que si $\Psi(\beta) = \varphi(\beta)$ entonces $|\Psi(\beta)| = 3|\beta|$.

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{\alpha \in T} I_{\Psi(\beta)\cup\varphi(\alpha)}\right) &= \lambda\left(\bigcup_{\alpha \in (2)} I_{\Psi(\beta)\cup\varphi(\alpha)}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{|\alpha|=n, \alpha \in (2)} I_{\Psi(\beta)\cup\varphi(\alpha)}\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_{\Psi(\beta)}) 2^n \frac{1}{2^{3n}} \leq \frac{1}{3}\lambda(I_{\Psi(\beta)}),
\end{aligned}$$

donde $\alpha \in (2)$ debe interpretarse como α cumple la condición (2) de la definición de φ.

De aquí se deduce que

$$\lambda(A_\beta) = \lambda\left(I_{\Psi(\beta)} \setminus \bigcup_{\alpha\in T} I_{\Psi(\beta)\cup\varphi(\alpha)}\right) \geq \frac{1}{2^{3|\beta|}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^{3|\beta|}} \geq \frac{2}{3}\frac{1}{2^{3|\beta|}}.$$

Por último, para probar la tercera propiedad vamos a suponer que $\beta^1 \neq \beta^2$ y $A_{\beta^1} \cap A_{\beta^2} \neq \emptyset$. Entonces β^1, β^2, $\Psi(\beta^1)$ y $\Psi(\beta^2)$ están relacionados todos entre sí. Pongamos que $\beta^1 < \beta^2$.

Si $\Psi(\beta^1)$ y $\Psi(\beta^2)$ se calculasen como $\Psi(\beta^1) = \varphi(\beta^1)$ y $\Psi(\beta^2) = \varphi(\beta^2)$, entonces β^1 y β^2 cumplen la condición (2) de la definición de φ y por lo tanto no están relacionados $\varphi(\beta^1)$ y $\varphi(\beta^2)$, contradicción.

Si por el contrario las definiciones se escriben como $\Psi(\beta^1) = \alpha^1 \cup \varphi(\beta^1 \setminus \alpha^1)$ y $\Psi(\beta^2) = \alpha^2 \cup \varphi(\beta^2 \setminus \alpha^2)$, entonces observamos que α^1 no puede coincidir con α^2 ya que en este caso los elementos $\varphi(\beta^1 \setminus \alpha^1)$ y $\varphi(\beta^2 \setminus \alpha^2)$ no estarían relacionados y sería imposible que $\Psi(\beta^1)$ y $\Psi(\beta^2)$ lo estuviesen. Así pues tenemos $\alpha^1 < \beta^1 < \beta^2$. Como $\alpha_2 \in S$ no puede ser $\alpha^1 < \alpha^2 \leq \beta^1$ por la definición de α^1, y tampoco $\alpha^2 < \alpha^1$ por la definición de α^2. Por lo tanto $\alpha^1 < \beta^1 < \alpha^2 < \beta^2$.

Dado que $\alpha^1 < \alpha^2$ y $\Psi(\beta_1)$ está relacionado con α^2 podemos escribir (de forma única además)

$$\beta^2 > \alpha^2 = \Psi(\beta^1) \cup \varphi(\zeta^1) \cup ... \cup \varphi(\zeta^n),$$

para ciertos ζ^j cumpliendo la condición (2) de la definición de φ (pudiendo darse el caso de que no haya ninguno si fuese $\alpha^2 = \alpha^1 \cup \varphi(\beta^1 \setminus \alpha^1) = \Psi(\beta^1)$).

Para terminar observar que

$$\Psi(\beta^2) = \alpha^2 \cup \varphi(\beta^2 \setminus \alpha^2) = \Psi(\beta^1) \cup \varphi(\zeta^1) \cup ... \cup \varphi(\zeta^n) \cup \varphi(\beta^2 \setminus \alpha^2),$$

con lo que $I_{\Psi(\beta^2)} \subset I_{\Psi(\beta_1)\cup\varphi(\zeta)}$ para cierto $\zeta \in T$. Como $A_{\Psi(\beta^1)} \cap I_{\Psi(\beta_1)\cup\varphi(\zeta)} = \emptyset$ sigue la última propiedad por contradicción.

Una demostración similar vale para el caso en que sólo uno de los dos β^1, β^2 se calcule como $\Psi(\beta) = \varphi(\beta)$. $\square$

TEOREMA 1.3.4. *Si X tiene dimensión infinita entonces existe una medida vectorial $\mu : \mathcal{M} \to X$ numerablemente aditiva y analítica tal que $(\sigma_n(\mu, t))_{n=1}^{\infty}$ no converge (ni siquiera débilmente) en ningún punto. Se tiene un resultado análogo para el núcleo de Poisson.*

PRUEBA. Con los mismos elementos de la prueba del Teorema 1.2.4, y con los A_k^n construidos en el Lema anterior definimos la medida vectorial $\mu : \mathcal{M} \to X$ como

$$\mu(A) = \sum_{n=1, n\neq 3j}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3n}{4}}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \left(\lambda(A_k^n \cap A) + i \int_A \widetilde{\chi}_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right) e_{n,k},$$

donde la suma está extendida a $n \in \mathbb{N}$, n no múltiplo de 3.

Para probar que μ está bien definida sea $q_n = 6n$ y p_n el exponente conjugado. Se tiene:

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \left(\lambda(A_k^n \cap A) + i \int_A \widetilde{\chi}_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right) e_{n,k} \right\| \leq$$

$$2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} \left| \frac{\lambda(A_k^n \cap A)}{\lambda(A_k^n)} + i \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \int_A \widetilde{\chi}_{A_k^n}(t) d\lambda(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{\lambda(A_k^n \cap A)}{\lambda(A_k^n)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{1}{\lambda(A_k^n)} \|\widetilde{\chi}_{A_k^n}\|_{p_n} \|\chi_A\|_{q_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{n}{2}+1} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)^2} \lambda(A_k^n)^{\frac{2}{p_n}} \frac{c^2 p_n^4}{(p_n - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{n}{2}+1} + 2\left(\sum_{k=1}^{2^n} \lambda(A_k^n)^{\frac{-2}{q_n}} q_n^2 c^2 p_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{n}{2}+1} + 2^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6n}} 4c^2 6n,$$

donde $c\frac{p_n^2}{p_n-1}$ es la norma de la transformada de Hilbert en $L_{p_n}(\mathbb{T})$ ([Du, Chapter 4]), siendo c una constante absoluta.

Por el Teorema de Vitali-Hahn-Saks ([D-U, Corollary I.4.10]) la medida μ es numerablemente aditiva. Como cada sumando es una medida analítica, sigue que μ es analítica. Comprobemos que $\sigma_m(\mu, t)$ tiende infinito en cada $t \in \mathbb{T}$.

Como en el Teorema 1.2.4, fijados $t_0 \in \mathbb{T}$ y $m \in \mathbb{N}$, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{2\pi}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{m \log m} \leq \frac{2\pi}{2^{n_0-1}}.$$

Si n_0 fuese un múltipo de 3 entonces tomamos $n_0 + 1$, de modo que, en general podemos suponer que n_0 no es múltiplo de 3 y verifica

$$\frac{2\pi}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{m \log m} \leq \frac{2\pi}{2^{n_0-2}}.$$

Elegimos k_0 tal que $t_0 \in I_{k_0}^{n_0}$. Usando las propiedades del núcleo de Fejér como en el Teorema 1.2.4 tenemos

$$\begin{aligned}
\|\sigma_m(\mu, t_0)\| &= \left\| \int_{\mathbb{T}} K_m(t_0 - s) d\mu(s) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1, n\neq 3j}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{3n}{4}}} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda(A_k^n)} \left(\sigma_m(\chi_{A_k^n}, t_0) + i\sigma_m(\widetilde{\chi}_{A_k^n}, t_0)\right) e_{n,k} \right\| \\
&\geq \frac{c}{2} \frac{1}{2^{\frac{3n_0}{4}}} \frac{1}{\lambda(A_{k_0}^{n_0})} \left| \sigma_m(\chi_{A_{k_0}^{n_0}}, t_0) + i\sigma_m(\widetilde{\chi}_{A_{k_0}^{n_0}}, t_0) \right| \\
&\geq \frac{c}{2} \frac{1}{2^{\frac{3n_0}{4}}} \frac{1}{\lambda(A_{k_0}^{n_0})} |\sigma_m(\chi_{A_{k_0}^{n_0}}, t_0)|,
\end{aligned}$$

y se termina con el mismo razonamiento que en el Teorema 1.2.4. □

CAPÍTULO 2

PRODUCTOS DE MEDIDAS VECTORIALES

1. Introducción y resultados previos.

Sean (S,Σ) y (T,Θ) dos espacios medibles. Si σ y τ son dos medidas escalares numerablemente aditivas definidas sobre Σ y Θ respectivamente, entonces existe una única medida numerablemente aditiva $\sigma \otimes \tau$ definida sobre la menor σ-álgebra de subconjuntos de $S \times T$ que contiene a los conjuntos de la forma $\{A \times B; A \in \Sigma, B \in \Theta\}$, de manera que $\sigma \otimes \tau(A \times B) = \sigma(A)\tau(B)$ para cada par $A \in \Sigma, B \in \Theta$; una prueba de este resultado clásico puede encontrarse en [D-S]. La medida escalar $\sigma \otimes \tau$ se llama medida producto de σ y τ.

Existe una forma natural de definir el producto de medidas vectoriales que tomen valores en espacios de dimensión infinita. Aunque la definición se podría dar en un contexto más general nosotros nos ceñiremos a medidas vectoriales numerablemente aditivas con valores en espacios de Banach.

Considerar X, Y, Z tres espacios de Banach, Σ y Θ dos σ-álgebras de subconjuntos de los conjuntos S y T respectivamente, y $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Theta \to Y$ dos medidas vectoriales numerablemente aditivas. Por último, sea $\phi : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal continua.

El producto de las medidas μ y ν respecto de la aplicación ϕ es la medida

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

vectorial con valores en Z, finitamente aditiva, definida sobre el álgebra $\Sigma \times \Theta$ generada por los rectángulos medibles por la fórmula:

$$\mu \times_\phi \nu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \times B_k) = \sum_{k=1}^{n} \phi(\mu(A_k), \nu(B_k)),$$

donde $(A_k \times B_k)_{k=1}^n$ es una colección de rectángulos medibles disjuntos dos a dos.

La σ-álgebra generada por los rectángulos medibles será notada por $\Sigma \otimes \Theta$ y por $\mu \otimes_\phi \nu$ la extensión numerablemente aditiva de $\mu \times_\phi \nu$ a $\Sigma \otimes \Theta$, si tal extensión existe (observar que de existir la extensión es única); en ese caso diremos que las medidas vectoriales μ y ν admiten producto respecto de la aplicación bilineal ϕ, o bien que μ admite producto respecto de ν y de ϕ.

Si X e Y son dos espacios de dimensión finita, pongamos $\dim(X) = m$ y $\dim(Y) = n$, el producto de μ y ν puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra producto generada por los rectángulos medibles. Para ver esta afirmación escribimos $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$, $\nu = \sum_{j=1}^n \nu_j y_j$, donde $(x_i)_{i=1}^m$ y $(y_j)_{j=1}^n$ son bases de X e Y respectivamente, y $(\mu_i)_{i=1}^m$, $(\nu_j)_{j=1}^n$ son medidas escalares numerablemente aditivas. Observar que la medida vectorial $\mu \otimes_\phi \nu$, definida sobre un conjunto $C \in \Sigma \otimes \Theta$ como

$$\mu \otimes_\phi \nu(C) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \otimes \nu_j(C)\phi(x_i, y_j),$$

es numerablemente aditiva y coincide con $\mu \times_\phi \nu$ cuando se restringe a $\Sigma \times \Theta$.

A diferencia con el caso finito dimensional el producto de dos medidas vectoriales con valores en espacios de Banach de dimensión infinita no siempre puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra generada por el álgebra de los rectángulos medibles. En [D-P] y [Bh] se demuestra que, incluso en las situaciones más "simples" (medidas vectoriales con valores en espacios de Hilbert y como aplicación bilineal el producto escalar), la medida producto puede ser no acotada sobre el álgebra de los rectángulos medibles o, aún siendo acotada, no numerablemente aditiva sobre ella.

PROPOSICIÓN 2.1.1. [Bh] *Existe una medida producto finitamente aditiva y acotada sobre el álgebra generada por los rectángulos medibles que no es numerablemente aditiva.*

PRUEBA. La proposición está basada en la existencia de una medida acotada, positiva y finitamente aditiva γ, definida sobre el álgebra de los rectángulos medibles de tal forma que no es numerablemente aditiva pero al fijar una de sus componentes la medida marginal obtenida ($\gamma(\cdot \times B)$ o bien $\gamma(A \times \cdot)$ para cada A, B medibles) es numerablemente aditiva sobre la correspondiente σ-álgebra. La construcción explícita de una medida en $[0,1] \times [0,1]$ con estas propiedades puede encontrarse en [M-R].

Una vez supuesta la existencia de tal γ, definida digamos sobre $\Sigma \times \Theta$, considerar H_1 el espacio vectorial formado por todas las funciones simples que están modeladas sobre elementos de $\Sigma \times \Theta$, esto es, funciones que se escriben de la forma $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \times B_i}$ donde $(A_i \times B_i)_{i=1}^n$ es una sucesión finita de elementos disjuntos de $\Sigma \times \Theta$. Se define sobre H_1 el siguiente producto escalar: para $f, g \in H_1$ ponemos

$$\langle f, g\rangle_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \gamma((A_i^1 \times B_i^1) \cap (A_j^2 \times B_j^2)),$$

si $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i^1 \times B_i^1}$ y $g = \sum_{j=1}^n b_i \chi_{A_j^2 \times B_j^2}$. Este producto escalar dota a H_1 de estructura de espacio prehilbertiano definiendo la seminorma $\|f\|_1^2 = \langle f, f\rangle_1$. Llamamos entonces H al completado del espacio resultante de hacer cociente sobre H_1 módulo las funciones con seminorma nula, y seguimos notando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto escalar.

Se define $\mu : \Sigma \to H$ como $\mu(A) = \chi_{A \times T}$ y $\nu : \Theta \to H$ dada por $\nu(B) = \chi_{S \times B}$.

Observar que si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medibles disjuntos en Σ entonces:

$$\|\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\| = \|\chi_{(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \times T}\|_1 = \gamma((\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) \times T),$$

que tiende a cero pues $\gamma(\cdot \times T)$ es numerablemente aditiva. Esto prueba que μ es numerablemente aditiva y del mismo modo se demuestra que ν también lo es. Por último observar que la medida producto respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida como $\langle \mu, \nu \rangle (A \times B) = \langle \mu(A), \nu(B) \rangle$ coincide sobre el álgebra $\Sigma \times \Theta$ con γ, por lo tanto no es numerablemente aditiva pero sí acotada. $\square$

COMENTARIO 2.1.2. Dos espacios medibles $(S, \Sigma), (T, \Theta)$ se dicen mutuamente singulares si existen sucesiones crecientes de particiones $\{E_i^n\}_{i=1}^n$ de S y $\{F_i^n\}_{i=1}^n$ de T, $n = 1, 2, \ldots$ tales que $\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{n} (E_i^n \times F_i^n) = \emptyset$. En [K-M] se demuestra que si los espacios medibles no son mutuamente singulares entonces una medida producto con valores en un espacio de Banach Z está acotada sobre el álgebra generada por los rectángulos medibles si y sólo si la medida producto puede extenderse a una medida definida sobre la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles, con valores en Z^{**}, que sea w^*-numerablemente aditiva. Como consecuencia, bajo la hipótesis de que los espacios medibles no sean mutuamente singulares, se tiene que si Z no contiene ninguna copia isomorfa de c_0 entonces una medida producto con valores en Z está acotada sobre el álgebra de los rectángulos medibles si y sólo si puede extenderse de forma numerablemente aditiva, y con valores en Z, a la σ-álgebra generada por el álgebra producto.

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Existe una medida producto no acotada sobre el álgebra de los rectángulos medibles.*

PRUEBA. Vamos a poner aquí un ejemplo más sencillo que el aparece en [D-P]. Considerar la medida vectorial μ definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, la σ-álgebra de las partes del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, y con valores en ℓ_2, dada por

$\mu(A) = \sum_{n\in A}(1/n)e_n$, donde e_n nota el vector n-ésimo de la base canónica de ℓ_2 y A es un subconjunto cualquiera de números naturales. Claramente μ está bien definida y es numerablemente aditiva.

Por otro lado consideremos la medida vectorial ν definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue del intervalo $[0,1]$, y con valores en ℓ_2, como $\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_B r_n(t)d\lambda(t))e_n$, donde $r_n(t)$ nota la n-ésima función de Rademacher definida sobre el intervalo $[0,1]$, y λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Esta medida vectorial está bien definida por la ortonormalidad de las funciones de Rademacher en $L_2([0,1])$ y es numerablemente aditiva.

Veamos que μ y ν no admiten producto respecto del producto escalar usual $\phi : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definido por $\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Para ello observar que:

$$\mu \times_\phi \nu(\bigcup_{k=1}^{n}\{k\} \times \{t : r_k(t) = 1\}) = \sum_{k=1}^{n} \phi(\mu\{k\}, \nu\{t : r_k(t) = 1\}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \phi((1/k)e_k, (1/2)e_k) = (1/2)\sum_{k=1}^{n}(1/k) \to \infty,$$

con lo cual $\mu \times_\phi \nu$ no está acotada sobre el álgebra generada por los rectángulos medibles. Esto demuestra en particular que el producto de ambas medidas no se puede extender de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra producto. $\square$

El problema de la existencia de la extensión de la medida producto ha sido tratado en varios artículos publicados a lo largo de los años setenta y ochenta. En estos trabajos se dan condiciones tanto sobre las medidas vectoriales como sobre la aplicación bilineal considerada para asegurar la existencia la extensión de la medida producto (no sólo para medidas con valores en espacios de Banach sino incluso con valores en espacios vectoriales topológicos localmente convexos). Vamos a presentar en esta Sección algunos resultados conocidos sobre este problema que serán posteriormente utilizados.

Una noción clave en el estudio de la existencia de la extensión de la medida producto es el concepto de semivariación de una medida vectorial respecto de una aplicación bilineal. Si $\phi : X \times Y \to Z$ es una aplicación bilineal continua y $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial finitamente aditiva, se define la semivariación de μ respecto de ϕ como la función de conjuntos:

$$||\mu||_\phi(A) = \sup || \sum_1^n \phi(\mu(A_k), y_k)||$$

donde el supremo se toma entre todas las particiones de $A \in \Sigma$ y todas las posibles elecciones de $\{y_1, ..., y_n\}$ en la bola unidad de Y. La semivariación de μ respecto de ϕ es no negativa, monótona y subaditiva. Esta función de conjuntos fue introducida por Bartle [B] para el estudio de la integración bilineal y será de gran utilidad a lo largo del Capítulo.

Se dice que μ está dominada respecto de ϕ si existe una medida numerablemente aditiva acotada y positiva σ definida sobre Σ que verifique:

$$\lim_{\sigma(A)\to 0} ||\mu||_\phi(A) = 0.$$

En tal caso diremos que σ es una medida de control para μ respecto de ϕ. Utilizando estos conceptos se prueba en [S1] el siguiente teorema del cual por completitud incluimos la prueba para espacios de Banach.

TEOREMA 2.1.4. [S1, Theorem 1] *Si $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial numerablemente aditiva dominada respecto de $\phi : X \times Y \to Z$, entonces para cualquier otra medida vectorial numerablemente aditiva $\nu : \Theta \to Y$, el producto $\mu \times_\phi \nu$ tiene una extensión numerablemente aditiva a $\Sigma \otimes \Theta$ con valores en Z.*

PRUEBA. Sea σ una medida positiva que domina a μ respecto de ϕ. Probemos primero que $||\mu||_\phi(S) < \infty$. De la definición de dominación podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\sigma(A) < \delta$ entonces $||\mu||_\phi(A) < 1$. Por un teorema de Saks [D-S, IV.9.7], existe una partición $\{A_1, ..., A_n\}$ de S tal que para cada i, o bien

$\sigma(A_i) < \delta$, o bien A_i es un átomo. Si A_j fuese un átomo, como $\sigma(B) = 0$ implica por la definición de medida de control que $||\mu||_\phi(B) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} ||\mu||_\phi(A_j) &= \sup\{||\phi(\mu(B), y)|| : B \subset A_j, ||y|| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{||\phi|| \, ||\mu(B)|| : B \subset A_j\} \\ &\leq ||\phi|| \, ||\mu||(S), \end{aligned}$$

con lo que la semivariación de μ respecto de ϕ en cada A_i es finita. Utilizando la subaditividad de la semivariación se tiene que $||\mu||_\phi(S) < \infty$.

Sigamos con la demostración del teorema. Dado que ν es numerablemente aditiva y está definida sobre una σ-álgebra existe τ medida de control para ν. Considerar la medida producto $\sigma \otimes \tau$ definida sobre la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles. Basta probar que:

$$\lim_{\sigma \otimes \tau(D) \to 0} \mu \otimes_\phi \nu(D) = 0,$$

para $D \in \Sigma \times \Theta$.

Sea $\epsilon > 0$ y $D \in \Sigma \times \Theta$. Podemos suponer que $D = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$, donde los A_i son disjuntos dos a dos. Elegimos $\delta > 0$ tal que si $\tau(B) < \delta$ entonces $||\nu||(B) < \epsilon$ y si $\sigma(A) < \delta$ entonces $||\mu||_\phi(A) < \epsilon$. También podemos suponer que los $(B_i)_{i=1}^n$ están ordenados de modo que $\tau(B_i) < \delta$ para $i = 1, ..., k$ y $\tau(B_i) \geq \delta$ para $i = k+1, ..., n$. Si tomamos D tal que $\sigma \otimes \tau(D) < \delta^2$, observar que:

$$\delta^2 > \sigma \otimes \tau(D) \geq \sum_{i=k+1}^{n} \sigma(A_i)\tau(B_i) \geq \delta\sigma(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i),$$

de lo que se deduce que $||\mu||_\phi(\bigcup_{i=k+1}^n A_i) < \epsilon$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||\mu \times_\phi \nu(D)|| &\leq \epsilon \left\| \sum_{i=1}^{k} \phi\left(\mu(A_i), \frac{\nu(B_i)}{\epsilon}\right) \right\| + ||\nu||(T) \left\| \sum_{i=k+1}^{n} \phi\left(\mu(A_i), \frac{\nu(B_i)}{||\nu||(T)}\right) \right\| \\ &\leq \epsilon ||\mu||_\phi(S) + ||\nu||(T) \, ||\mu||_\phi(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i) \\ &\leq \epsilon(||\mu||_\phi(S) + ||\nu||(T)). \quad \square \end{aligned}$$

De este teorema se pueden deducir directamente varios de los resultados más conocidos sobre la existencia de la extensión de la medida producto. Destaquemos dos de ellos como más interesantes.

Considerar la aplicación bilineal y continua $\phi_\epsilon : X \times Y \rightarrow X \otimes_\epsilon Y$, definida como $\phi_\epsilon(x, y) = x \otimes y$, con valores en el producto tensorial inyectivo de X e Y. Observar que si μ es una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en X y A es un conjunto medible:

$$\begin{aligned} ||\mu||_\epsilon(A) &= \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \otimes y_k \right\|_\epsilon : (A_k) \text{ partición de } A, ||y_k|| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left| \sum_{k=1}^{n} x^*(\mu(A_k)) y^*(y_k) \right|, \end{aligned}$$

donde el último supremo se toma entre todas las particiones de A e y_k, x^*, y^* en las respectivas bolas unidades de Y, X^* e Y^*. Dado que $|y^*(y_k)| \leq 1$ y que $\sum_{k=1}^{n} |x^*(\mu(A_k))| \leq |x^*\mu|(A)$ para cada elección posible de elementos del supremo anterior, se sigue la desigualdad $||\mu||_{\phi_\epsilon}(A) \leq ||\mu||(A)$. La existencia de una medida de control para medidas numerablemente aditivas definidas sobre una σ-álgebra nos dice que μ está dominada respecto de $\phi_\epsilon : X \times Y \rightarrow X \otimes_\epsilon Y$, y por tanto, por el Teorema 2.1.4 siempre es posible extender el producto de dos medidas vectoriales numerablemente aditivas cualesquiera respecto de ϕ_ϵ. Esta medida será notada por $\mu \otimes_\epsilon \nu$ en vez de $\mu \otimes_{\phi_\epsilon} \nu$ y la llamaremos producto tensorial inyectivo de μ y ν. Este resultado apareció por primera vez publicado en [D-K].

Otro caso importante es aquél en el que una de las medidas tiene variación acotada. Si μ es una medida con variación acotada y ϕ es cualquier aplicación bilineal continua entonces se comprueba con cálculos parecidos a los anteriores que $||\mu||_\phi(A) \leq ||\phi|| |\mu|(A)$, para cualquier medible A. Por tanto μ está dominada respecto de cualquier aplicación bilineal continua, de lo que se deduce que su producto con respecto cualquier otra medida vectorial siempre admite una extensión numerablemente aditiva.

Mencionemos finalmente que otros aspectos relacionados con la medida producto estudiados han sido, por ejemplo, el producto de medidas con densidades Pettis integrables [S3], o también el producto de medidas con valores en un álgebra de Banach respecto de la convolución [D1]. También pueden encontrarse aplicaciones de los resultados sobre la existencia de la extensión de la medida producto a la convolución de medidas vectoriales, ver [H] y [D2].

2. Productos respecto de formas bilineales.

Duchon y Kluvanek probaron [D-K] que cualquier par de medidas admite producto respecto de la aplicación bilineal ϕ_ϵ, que a cada par de vectores (x, y) del espacio producto $X \times Y$, le asigna el tensor $x \otimes y$, del producto tensorial inyectivo de X e Y. Por tanto, si φ es una forma bilineal integral definida sobre $X \times Y$, esto es, un elemento del dual de $X \otimes_\epsilon Y$, todo par de medidas vectoriales μ y ν con respectivos valores en X e Y admiten producto respecto de φ. De hecho, si notamos por $\mu \otimes_\epsilon \nu$ el producto tensorial inyectivo de μ y ν, se comprueba que la medida producto $\mu \times_\varphi \nu$ puede extenderse a $\Sigma \otimes \Theta$ verificando la relación $\mu \otimes_\varphi \nu = \varphi(\mu \otimes_\epsilon \nu)$, donde $\varphi(\mu \otimes_\epsilon \nu)$ es la medida escalar determinada por $\varphi(\mu \otimes_\epsilon \nu)(A \times B) = \varphi(\mu(A), \nu(B))$, para $A \in \Sigma$ y $B \in \Theta$. Así, cualquier forma bilineal integral tiene la propiedad de que cualquier par de medidas con respectivos valores en X e Y admiten producto respecto de ella. Sin embargo esta condición no es necesaria para asegurar que cualquier par de medidas admitan producto respecto de la forma bilineal. En esta Sección daremos una condición suficiente para que esto sea cierto, que además es necesaria en el caso de que uno de los espacios de Banach que aparecen tenga dual isomorfo a un subespacio de un L_1-espacio. Esta hipótesis se necesita para poder aplicar el siguiente teorema, que fue demostrado en [P-R], y que posteriormente volveremos a utilizar.

TEOREMA 2.2.1. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Toda sucesión convergente a cero en X cae dentro del rango de una medida vectorial numerablemente aditiva.*

(2) *Existe una constante positiva c, tal que para todo subconjunto finito H de la bola unidad de X existe una medida vectorial μ con valores en X tal que $H \subset rg(\mu)$ y $||\mu|| \leq c$.*

(3) $\Pi_1(X, \ell_1) = \mathcal{N}(X, \ell_1)$.

(4) *El dual X^* es isomorfo a un subespacio de un L_1-espacio.*

Sea u un operador lineal y continuo de X en Y^*. De manera natural u induce una forma bilineal continua sobre $X \times Y$, que notamos por ϕ_u, definida por $\phi_u(x, y) = u(x)(y)$, para cada par x, y. Puede comprobarse que $||u|| = ||\phi_u||$. Recíprocamente, cada forma bilineal continua definida sobre $X \times Y$ define un operador lineal y continuo u_ϕ de X en Y^* con $||\phi|| = ||u_\phi||$. Tras esta observación podemos enunciar el siguiente resultado.

Recordamos que por medida (o medida vectorial) entenderemos una medida vectorial numerablemente aditiva, a menos que se especifique lo contrario.

TEOREMA 2.2.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach tales que Y^* sea isomorfo a un subespacio de un L_1-espacio, y $u : X \to Y^*$ un operador lineal y continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *u es 1-sumante.*

(2) *Todo par de medidas μ y ν con respectivos valores en X y en Y admiten producto respecto de ϕ_u.*

(3) *Todo par de medidas con respectivos valores en X e Y y con rangos relativamente compactos admiten producto respecto de ϕ_u.*

PRUEBA. (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que $u : X \to Y^*$ es un operador 1-sumante y que $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial. Observar que la medida imagen $u\mu$ definida como $u\mu(A) = u(\mu(A))$ tiene variación acotada; en efecto, para cada partición de $A \in \Sigma$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \|u(\mu(A_k))\| \leq \pi_1(u) \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x^*(\mu(A_k))| : \|x^*\| \leq 1 \right\} \leq \pi_1(u)\|\mu\|(A),$$

con lo que $|u\mu|(A) \leq \pi_1(u)\|\mu\|(A)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\phi_u}(A) &= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} u(\mu(A_k))(y_k) \right| : (A_k) \text{ partición de } A, \|y_k\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|u(\mu(A_k))\| : (A_k) \text{ partición de } A \right\} \\ &= |u\mu|(A), \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $\|\mu\|_{\phi_u}(A) \leq \pi_1(u)\|\mu\|(A)$. Utilizando que toda medida numerablemente aditiva definida sobre una σ-álgebra tiene medida de control obtenemos que toda medida con valores en X está dominada respecto de ϕ_u. Esto permite aplicar el Teorema de Swartz que enunciamos en la Sección anterior y concluir así esta implicación. Observar que la hipótesis de que Y^* sea un subespacio de un L_1-espacio no se ha utilizado todavía.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1): Dadas Σ y Θ, dos σ-álgebras, consideramos la aplicación bilineal

$$P_{(\Sigma,\Theta)} : \text{cca}(\Sigma, X) \times \text{cca}(\Theta, Y) \longrightarrow \text{ca}(\Sigma \otimes \Theta),$$

definida por $P_{(\Sigma,\Theta)}(\mu, \nu) = \mu \otimes_{\phi_u} \nu$. Esta aplicación está bien definida por hipótesis y es claramente bilineal. Utilizando el Teorema del grafo cerrado se comprueba que $P_{(\Sigma,\Theta)}$ es separadamente continua y, por tanto, continua.

Afirmamos que existe una constante absoluta c_1 tal que $\|P_{(\Sigma,\Theta)}\| \leq c_1$ independientemente del par de σ-álgebras Σ y Θ.

Supongamos que esto no fuese verdad; entonces podríamos encontrar dos sucesiones de σ-álgebras $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\Theta_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que los correspondientes operadores $P_{(\Sigma_n,\Theta_n)}$ definidos sobre $\mathrm{cca}(\Sigma_n, X) \times \mathrm{cca}(\Theta_n, Y)$ y con valores en el espacio $\mathrm{ca}(\Sigma_n \otimes \Theta_n)$, tengan norma mayor que $n4^n$. Podemos elegir dos sucesiones de medidas $\mu_n \in \mathrm{cca}(\Sigma_n, X)$ y $\nu_n \in \mathrm{cca}(\Theta_n, Y)$ tales que $||\mu_n|| = ||\nu_n|| = 2^{-n}$ y $||P_{(\Sigma_n,\Theta_n)}(\mu_n, \nu_n)|| \geq n$. Considerar la suma directa de las sucesiones $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ que notaremos por μ y ν respectivamente (ver [K-K, II.7.]). De la definición de suma directa de medidas vectoriales se deduce que $||\mu|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\mu_n|| \leq 1$ y del mismo modo $||\nu|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\nu_n|| \leq 1$. Usando que $\mathrm{rg}(\mu) = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \in \mathrm{rg}(\mu_n)\}$ se comprueba que μ tiene rango relativamente compacto, y lo mismo se tiene para ν. De la misma definición de la medida μ y ν se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$||\mu \times_{\phi_u} \nu|| \geq ||\mu_n \times_{\phi_u} \nu_n|| = ||\mu_n \otimes_{\phi_u} \nu_n|| \geq n,$$

por tanto μ y ν no admiten producto respecto de ϕ_u. Esto es una contradicción con (3), y prueba la afirmación.

Siguiendo con el teorema vamos a probar que u es un operador 1-sumante. Considerar una sucesión finita $(x_k)_{k=1}^n$ en X con $||(x_k)_{k=1}^n||_1^w \leq 1$ y sea $\epsilon > 0$ un número real positivo cualquiera. Definimos la medida $\mu : \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) \to X$ mediante $\mu(\{i\}) = x_i$ para cada i entre 1 y n. Se puede ver que

$$||\mu|| = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| : ||x^*|| \leq 1 \right\} = ||(x_k)_{k=1}^n||_1^w \leq 1.$$

Elegimos $y_1, ..., y_n$ en la bola unidad de Y tales que

$$\sum_{k=1}^{n} ||u(x_k)|| \leq \sum_{k=1}^{n} u(x_k)(y_k) + \epsilon.$$

Por hipótesis Y^* es un subespacio de un L_1-espacio, por lo tanto, utilizando el apartado (2) del Teorema 2.2.1, existe una constante c_2 que sólo depende de Y, y una medida con valores en Y, que llamaremos ν, tal que $\{y_1, ..., y_k\} \subset \mathrm{rg}\ (\nu)$ y

$\|\nu\| \leq c_2$. Sean $B_1, ..., B_n$ conjuntos medibles para ν tales que $\nu(B_k) = y_k$ para $k = 1, ..., n$.

Restringiendo ν a la σ-álgebra (finita) generada por los conjuntos medibles $(B_i)_{i=1}^n$ podemos suponer que la medida ν tiene rango relativamente compacto. De todo lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\| \leq & \sum_{k=1}^{n} u(x_k)(y_k) + \epsilon \\
\leq & \sum_{k=1}^{n} \mu \otimes_{\phi_u} \nu(\{k\} \times B_k) + \epsilon \\
= & \mu \otimes_{\phi_u} \nu \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{k\} \times B_k \right) + \epsilon \\
\leq & \|\mu \otimes_{\phi_u} \nu\| + \epsilon \\
\leq & c_1 \|\mu\| \|\nu\| + \epsilon \\
\leq & c_1 c_2 + \epsilon,
\end{aligned}$$

y se demuestra que u es un operador 1-sumante con norma $\pi_1(u) \leq c_1 c_2$. $\square$

Consideremos ahora la aplicación bilineal $\phi_\pi : X \times Y \to X \otimes_\pi Y$, con valores en el producto tensorial proyectivo de X y de Y, definida como $\phi_\pi(x, y) = x \otimes y$. El producto de dos medidas μ y ν con respectivos valores en X y en Y, respecto de ϕ_π será notado por $\mu \times_\pi \nu$. Caso de que exista la extensión numerablemente aditiva a la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles, ésta será notada por $\mu \otimes_\pi \nu$ y diremos en ese caso que μ y ν admiten producto tensorial proyectivo. A diferencia con el producto tensorial inyectivo, el producto tensorial proyectivo no siempre existe [K]. Esto también puede deducirse del siguiente corolario al Teorema 2.2.2.

COROLARIO 2.2.3. *Supongamos que Y^* es isomorfo a un subespacio de un L_1-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{L}(X, Y^*) = \Pi_1(X, Y^*)$.

(2) *Todo par de medidas μ y ν con valores en X y en Y respectivamente admite producto tensorial proyectivo.*

(3) *Todo par de medidas μ, ν con rangos relativamente compactos y con valores en X e Y respectivamente, admite producto tensorial proyectivo.*

PRUEBA. (1) $\Rightarrow$ (2): Si todo operador lineal y continuo de X en Y^* es 1-sumante entonces por el Teorema de la aplicación abierta debe existir una constante c tal que $\pi_1(u) \leq c\|u\|$ para cada $u \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Por definición de semivariación de μ respecto de ϕ_π se tiene:

$$\|\mu\|_{\phi_\pi}(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \otimes y_k \right\|_\pi : (A_k) \text{ partición de } A\ , \|y_k\| \leq 1 \right\}.$$

Sea $(A_k)_{k=1}^n$ una partición de A y sean $y_1, ..., y_n$ elementos de la bola unidad de Y. Como el dual de $X \otimes_\pi Y$ puede identificarse con $\mathcal{L}(X, Y^*)$ podemos poner:

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \otimes y_k\|_\pi &= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} u(\mu(A_k))(y_k) \right| : u \in \mathcal{L}(X, Y^*), \|u\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|u(\mu(A_k))\| : u \in \mathcal{L}(X, Y^*), \|u\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \{ |u\mu|(A) : u \in \mathcal{L}(X, Y^*), \|u\| \leq 1 \}. \end{aligned}$$

Tomando supremos entre todas las particiones de A y todas las posibles elecciones de subconjuntos finitos en la bola unidad de Y tenemos que

$$\|\mu\|_{\phi_\pi}(A) \leq \sup \{ |u\mu|(A) : u \in \mathcal{L}(X, Y^*), \|u\| \leq 1 \},$$

por lo tanto, utilizando la misma observación que en la implicación (1) $\Rightarrow$ (2) del Teorema 2.2.2 tenemos que $\|\mu\|_{\phi_\pi}(A) \leq c\|\mu\|(A)$, y deducimos que toda medida con valores en X está dominada respecto de ϕ_π. Aplicando el Teorema de Swartz de la Sección anterior terminamos la implicación.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1): Observar que si cada par de medidas μ y ν con rangos relativamente compactos admite producto tensorial proyectivo entonces para cada $u \in \mathcal{L}(X, Y^*) = (X \otimes_\pi Y)^*$ el producto $\mu \times_{\phi_u} \nu$ tiene extensión numerablemente aditiva satisfaciendo la relación $\mu \otimes_{\phi_u} \nu = \phi_u(\mu \otimes_\pi \nu)$. Por lo tanto, si fijamos el operador u, todo par de medidas μ y ν con rangos relativamente compactos admite producto respecto de la forma bilineal ϕ_u. De este modo, el Teorema 2.2.2 nos dice que u debe ser un operador 1-sumante. $\square$

COMENTARIO 2.2.4. En particular, si tomamos $X = Y = \ell_2$ en el corolario anterior obtenemos el Teorema 8 de [S2] para el caso de espacios de Hilbert. Basta recordar que un operador definido entre dos espacios de Hilbert es 1-sumante si y sólo si es de Hilbert-Schmidt.

COMENTARIO 2.2.5. Si Y^* no es un subespacio de un L_1-espacio la equivalencia entre (1) y (2) en el Teorema 2.2.2 es falsa. Para verlo supongamos que Y^* no es un subespacio de un L_1-espacio; por el Teorema 2.2.1, $\Pi_1(Y, \ell_1) \neq \mathcal{N}(Y, \ell_1)$. Podemos por tanto tomar $u : Y \rightarrow \ell_1$ operador 1-sumante no nuclear. Sea $u' : c_0 \rightarrow Y^*$ la restricción a c_0 del operador adjunto $u^* : \ell_\infty \rightarrow Y^*$.

Afirmamos ahora que u' no es nuclear. Si lo fuera existiría un par de sucesiones $(z_k^*)_{k=1}^\infty \subset \ell_1$ y $(y_k^*)_{k=1}^\infty \subset Y^*$ tales que $\sum_{k=1}^\infty \|z_k^*\| \|y_k^*\| < \infty$ y de modo que $u'(z) = \sum_{k=1}^\infty z_k^*(z) y_k^*$ para todo $z \in c_0$. En ese caso, es claro que $u(y) = \sum_{k=1}^\infty y_k^*(y) z_k^*$ para todo $y \in Y$, contradiciendo el hecho de que u no sea nuclear. Así que u' es no nuclear y por lo tanto u' no es 1-sumante ya que $\mathcal{N}(c_0, Y^*) = \Pi_1(c_0, Y^*)$ (ver [Pi, Corollary 1.1.5']). Tomamos $\phi_{u'}$ la forma bilineal continua inducida por u', definida sobre $Y \times c_0$. Ya que u es 1-sumante se puede demostrar que toda medida Y-valorada está dominada respecto de $\phi_{u'}$, por tanto $\mu \otimes_{\phi_{u'}} \nu$ existe para cada par de medidas aunque u' no sea 1-sumante.

A la vista de este último comentario surge una pregunta natural: si ϕ es una forma bilineal fijada y todo par de medidas admiten producto respecto de ϕ, ¿debe ser uno de los dos operadores inducidos por ϕ 1-sumante? La respuesta es que no, como veremos en la Sección 4 de este Capítulo.

3. La dominación de la medida.

En esta Sección vamos a probar que la dominación de una de las medidas respecto de la aplicación bilineal no es necesaria en absoluto para asegurar la existencia de la extensión del producto. En [S1] se plantea la siguiente pregunta: si ϕ es una aplicación bilineal sobre $X \times Y$ fijada y $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida numerablemente aditiva tal que para cualquier otra medida $\nu : \Theta \longrightarrow Y$, el producto $\mu \otimes_\phi \nu$ existe, ¿está necesariamente μ dominada respecto de ϕ? Una respuesta positiva a esta pregunta se da en [C-S], pero imponiendo restricciones sobre el espacio X y sobre la medida μ. Nosotros probaremos en los siguientes ejemplos que la respuesta a esta pregunta en general es que no y veremos algún otro tipo de condición similar de dominación que en algunos casos sí es necesaria.

PROPOSICIÓN 2.3.1. *Existe una medida con valores en ℓ_2 que no está dominada respecto de la aplicación bilineal $\phi_\pi : \ell_2 \times \ell_1 \longrightarrow \ell_2 \otimes_\pi \ell_1$, y que sin embargo admite producto tensorial proyectivo con cualquier medida que tome valores en ℓ_1.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la σ-álgebra de las partes de los naturales. Consideramos la medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_2$ definida por $\mu(\{n\}) = (1/n)e_n$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ nota de nuevo la base canónica de ℓ_2. Vamos a ver que μ no está dominada respecto de ϕ_π. Para ello fijamos $n \in \mathbb{N}$; como en la prueba del Teorema 2.2.2 se tiene que:

$$||\mu||_{\phi_\pi}(\{1, ..., n\}) = \sup\{|u\mu|\{1, ..., n\} : u \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_\infty), ||u|| \leq 1\}.$$

Considerar la inclusión natural $\mathrm{i} : \ell_2 \to \ell_\infty$. Es claro que

$$|\mathrm{i}\mu|(\{1,...,n\}) \geq \sum_{k=1}^{n} ||\mathrm{i}(\mu\{k\})|| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

y por lo tanto

$$||\mu||_{\phi_\pi}(\mathbb{N}) \geq ||\mu||_{\phi_\pi}(\{1,...,n\}) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La desigualdad anterior demuestra que μ no está dominada respecto de ϕ_π, ya que en caso contrario la semivariación total $||\mu||_{\phi_\pi}(\mathbb{N})$ sería finita.

El hecho de que μ admite producto tensorial proyectivo con cualquier medida ℓ_1-valorada es una consecuencia del Corolario 2.2.3. $\square$

COMENTARIO 2.3.2. Como se puede ver en el ejemplo anterior la clave está en que toda medida con valores en ℓ_1 está dominada respecto de la aplicación bilineal $\phi_\pi : \ell_1 \times \ell_2 \to \ell_1 \otimes_\pi \ell_2$. En efecto, para cada B conjunto medible se tiene que $||\nu||_{\phi_\pi}(B) = \sup\{|v\nu|(B) : v \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_2), ||v|| \leq 1\}$, y por lo tanto se deduce que $||\nu||_\pi(B) \leq K_G ||\nu||(B)$, donde K_G es la constante de Grothendieck [Pi].

A raíz del comentario anterior cabe plantearse la siguiente cuestión: ¿es necesaria la dominación de alguna de las dos medidas para la existencia del producto? El siguiente resultado responde a esta pregunta.

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para aligerar la notación escribiremos L_p en vez de $L_p([0,1])$.

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Existen dos medidas numerablemente aditivas con respectivos valores en L_1 y L_p $(p \neq 1, 2, \infty)$ tales que ninguna de ellas está domi-*

nada respecto de $\phi_\pi : L_1 \times L_p \to L_1 \otimes_\pi L_p$, pero sí existe su producto tensorial proyectivo.

PRUEBA. Sea q el exponente conjugado de p, donde $p \in (1, +\infty)$ y $p \neq 2$; entonces $q \neq 2$. Observar que $\mathcal{L}(L_1, L_q) \neq \Pi_1(L_1, L_q)$: para ver esta afirmación tomar u, operador lineal acotado definido sobre ℓ_1 con valores en L_q sobreyectivo, dado por la separabilidad de L_q. Si u fuese 1-sumante estonces también sería 2-sumante, y por tanto u factorizaría a traves de un espacio de Hilbert, obteniendo que L_q es isomorfo a un cociente de un espacio de Hilbert, y por lo tanto isomorfo a un espacio de Hilbert, que es imposible. Elegimos $u_0 \in \mathcal{L}(L_1, L_q)$, tal que $||u_0|| \leq 1$ y $\pi_1(u_0) = +\infty$. Debe existir una serie incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en L_1 tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||u_0(x_n)|| = +\infty$. Definimos la medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to L_1$ como aquélla que verifica $\mu(\{n\}) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora definiremos $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to L_p$. Notemos por R_p el subespacio cerrado de L_p generado por las funciones de Rademacher $(r_n)_{n=1}^{\infty}$. Es conocido que R_p es isomorfo a ℓ_2, por tanto $\mathcal{L}(R_p, L_\infty) \neq \Pi_1(R_p, L_\infty)$ (ℓ_2 es isomorfo a un subespacio de L_∞, luego basta tomar el operador inclusión correspondiente). Elegimos $v_0 \in \mathcal{L}(R_p, L_\infty)$ tal que $||v_0|| \leq 1$ y $\pi_1(v_0) = +\infty$. Dado que L_∞ es un espacio de Banach inyectivo podemos extender v_0 a L_p (continuamos notando por v_0 la extensión) y que siga satisfaciendo las dos condiciones anteriores $||v_0|| \leq 1$ y $\pi_1(v_0) = +\infty$. Podemos encontrar una serie incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ en $R_p \subset L_p$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||v_0(y_n)|| = +\infty$. Definimos la medida $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to L_p$ como $\nu(\{n\}) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se tiene que

$$||\mu||_{\phi_\pi}(\mathbb{N}) \geq |u_0\mu|(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} ||u_0 x_n|| = +\infty,$$

por tanto μ no está dominada respecto de ϕ_π y el mismo argumento puede aplicarse también a ν.

Para finalizar el ejemplo vamos a probar que $\mu \times_\pi \nu$ tiene extensión numerablemente aditiva a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con valores en $L_1 \otimes_\pi L_p$. Observar que $L_1 \otimes_\pi R_p$ es un subespacio cerrado de $L_1 \otimes_\pi L_p$ [D-U] y ν toma valores en R_p; por tanto es suficiente probar que la extensión toma valores en $L_1 \otimes_\pi R_p$. Pero esto se sigue del hecho de que R_p es isomorfo a ℓ_2 y que μ está dominada respecto de $\phi_\pi : L_1 \times R_p \rightarrow L_1 \otimes_\pi R_p$, ya que todo operador definido sobre L_1 y con valores en ℓ_2 es 1-sumante. $\square$

En realidad lo que hemos hecho en el ejemplo anterior es "agrandar" ℓ_2 lo suficiente como para evitar la dominación de μ; sin embargo, μ sí que está dominada si consideramos a ν como una medida con valores en R_p y como forma bilineal $\phi_\pi : L_1 \times R_p \rightarrow L_1 \otimes_\pi R_p$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Sea B un subconjunto acotado de Y. Definimos la semivariación de μ respecto de ϕ sobre B de la misma forma que se definió la semivariación de Bartle pero tomando los $\{y_k\}$ en B. Es decir:

$$||\mu||_{\phi,B}(A) = \sup \left\{ ||\sum_{k=1}^{n} \phi(\mu(A_k), y_k)|| : \ (A_k) \text{ partición de } A, (y_k) \subset B \right\}.$$

Diremos que μ está dominada respecto de ϕ sobre B si existe σ, medida numerablemente aditiva, no negativa y acotada sobre Σ tal que $\lim_{\sigma(A)\rightarrow 0} ||\mu||_{\phi,B}(A) = 0$.

La prueba del Teorema 2.1.4 demuestra en realidad que si μ está dominada en la bola unidad cerrada del subespacio cerrado generado por $\mathrm{rg}(\nu)$ (y no necesariamente en todo Y) el producto $\mu \times_\phi \nu$ puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra producto, que es lo que exactamente ocurre en el ejemplo anterior. Afirmamos ahora que ni siquiera esta condición más débil de dominación es necesaria. Para ello modificaremos las medidas de la Proposición anterior.

PROPOSICIÓN 1.3.4. *Existen μ y ν dos medidas vectoriales numerablemente* *aditivas tales que ninguna de ellas está dominada en la bola unidad del subespacio cerrado generado por el rango de la otra, pero tales que sí existe su producto tensorial proyectivo.*

PRUEBA. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ como en el ejemplo anterior. Sean $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(y''_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones densas en la bola unidad de L_1 y L_p, respectivamente. Considerar $x'_n = 2^{-n}x''_n$, $y'_n = 2^{-n}y''_n$. Consideramos $\mu' : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to L_1$ definida por

$$\mu'(\{n\}) = \begin{cases} x_k, & \text{si } n = 2k \\ x'_k, & \text{si } n = 2k-1. \end{cases}$$

De manera similar definimos $\nu'(\{n\}) = y_k$ si $n = 2k$ y $\nu'(\{n\}) = y'_k$ si $n = 2k-1$. Ambas son medidas numerablemente aditivas.

Observar que $\mathrm{rg}(\mu')$ expande un subespacio denso en L_1 y $\mathrm{rg}(\nu')$ tiene la misma propiedad en L_p. Podemos descomponer $\mu' = \mu'_1 + \mu'_2$, donde $\mu'_1(A) = \mu'(A \cap \{ \text{ números impares}\})$ y $\mu'_2(A) = \mu'(A \cap \{ \text{ números pares}\})$, para todo $A \subset \mathbb{N}$. También descomponemos ν' de la misma forma: $\nu' = \nu'_1 + \nu'_2$. Podemos escribir $\mu' \times_\pi \nu = \mu' \times_\pi \nu'_1 + \mu' \times_\pi \nu'_2 = \mu' \times_\pi \nu'_1 + \mu'_1 \times_\pi \nu'_2 + \mu'_2 \times_\pi \nu'_2$.

Para ver que $\mu' \times_\pi \nu'$ tiene extensión numerablemente aditiva es suficiente probar que $\mu' \times_\pi \nu'_1$, $\mu'_1 \times_\pi \nu'_2$, y $\mu'_2 \times_\pi \nu'_2$ la tienen. Esto es claro para $\mu' \times_\pi \nu'_1$ y para $\mu'_1 \times_\pi \nu'_2$ debido a que μ'_1 y ν'_1 son de variación acotada; que $\mu'_2 \times_\pi \nu'_2$ tiene extensión numerablemente aditiva se demostró en el ejemplo anterior.

Los mismos argumentos ya utilizados previamente en esta Sección prueban que ninguna de las medidas está dominada. □

Concluimos esta Sección dando una condición necesaria de dominación para la existencia del producto tensorial proyectivo. Utilizaremos el siguiente resultado:

si σ es una medida de control de ν entonces

$$\overline{\text{co}}(\text{rg }(\nu)) = \left\{ \int_T f d\nu : 0 \le f \le 1, f \in L_\infty(S,\sigma) \right\},$$

donde $\overline{\text{co}}(\text{rg }(\nu))$ nota la envolvente convexa y cerrada de rg (ν) y el símbolo $\int_T f d\nu$ representa la integral de Bartle de f respecto de ν definida en [D-U].

TEOREMA 2.3.5. *Sean μ y ν dos medidas con valores en X e Y, respectivamente. Si $\mu \otimes_\pi \nu$ existe, entonces μ está dominada respecto de ϕ_π sobre $\overline{co}(rg\ (\nu))$.*

PRUEBA. Sean $\mu : \Sigma \to X$ y $\nu : \Theta \to Y$ dos medidas vectoriales numerablemente aditivas. Sea τ una medida de control de ν. Considerar $A \in \Sigma$, $(A_k)_{k=1}^n$ partición finita de A y $(y_k)_{k=1}^n \subset \overline{\text{co}}(\text{rg }(\nu))$. Por el párrafo anterior a este teorema existe una sucesión finita $(f_k)_{k=1}^n \subset L_\infty(T,\tau)$ con $0 \le f_k \le 1$ tales que $\int_T f_k d\nu = y_k$. Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \otimes y_k \right\|_\pi &= \left\| \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \otimes \int_T f_k d\nu \right\|_\pi \\
&= \sup \left| \sum_{k=1}^n u(\mu(A_k)) \left(\int_T f_k d\nu \right) \right| \\
&= \sup \left| \sum_{k=1}^n \int_T f_k d(u(\mu(A_k))(\nu)) \right| \\
&\le \sup \sum_{k=1}^n |u(\mu(A_k))(\nu)|(T),
\end{aligned}$$

donde los supremos anteriores se toman en $u \in \mathcal{L}(X,Y^*), \|u\| \le 1$. Observar ahora que $u(\mu(A_k))(\nu)$ es una medida escalar para la cual se tiene la desigualdad:

$$\begin{aligned}
|u(\mu(A_k))(\nu)|(T) &\le 2 \sup\{|u(\mu(A_k))(\nu(B))| : B \in \Theta\} \\
&\le 2|u(\mu \otimes_\pi \nu)|(A_k \times T).
\end{aligned}$$

Para cada u de norma menor o igual a 1 es claro que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |u(\mu \otimes_\pi \nu)|(A_k \times T) \leq& |u(\mu \otimes_\pi \nu)|(A \times T) \\ \leq& ||\mu \otimes_\pi \nu||(A \times T).\end{aligned}$$

Tomando supremos en u de norma menor o igual que uno se obtiene finalmente que

$$||\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \otimes y_k|| \leq ||\mu \otimes_\pi \nu||(A \times T),$$

para cualquier partición $(A_k)_{k=1}^n$ de A.

Bajo la hipótesis de que $\mu \otimes_\pi \nu$ existe, podemos encontrar una medida de control γ para ella. Entonces la medida α definida como $\alpha(A) = \alpha(A \times T)$ es claramente una medida de control para μ sobre $\overline{\text{co}}(\text{rg }(\nu))$. □

4. Factores.

Si X, Y, Z son tres espacios de Banach y $u_\phi : X \otimes_\pi Y \to Z$ es el operador lineal inducido por una aplicación bilineal y continua $\phi : X \times Y \to Z$, entonces se tiene la factorización $\phi = u_\phi \circ \phi_\pi$, donde recordamos que $\phi_\pi : X \times Y \to X \otimes_\pi Y$ está definida por $\phi_\pi(x, y) = x \otimes y$. Por lo tanto, si $\mu \otimes_\pi \nu$ existe (ver el párrafo previo al Corolario 2.2.3 para la definición del producto tensorial proyectivo de μ y ν), entonces $\mu \otimes_\phi \nu$ también existe y coincide con la medida $u_\phi(\mu \otimes_\pi \nu)$. Es decir, en este contexto, la condición de existencia del producto tensorial proyectivo de dos medidas es la condición más fuerte que se puede pedir.

DEFINICIÓN 2.4.1. *Diremos que X es un factor de Y si todo par de medidas con respectivos valores en X e Y admite producto tensorial proyectivo. De la misma forma diremos que X es un factor compacto de Y si para cualquier par de* *medidas μ, ν con respectivos valores en X e Y, y ambas con rango relativamente compacto, $\mu \otimes_\pi \nu$ existe.*

Observar que la relación ser factor es simétrica. Con estas definiciones el Corolario 2.2.3 afirma que si Y^* es un subespacio de un L_1-espacio entonces X es un factor de Y si y sólo si X es un factor compacto de Y, si y sólo si $\mathcal{L}(X, Y^*) = \Pi_1(X, Y^*)$.

El siguiente lema pone de manifiesto que ser factor compacto es un hecho de naturaleza finito dimensional.

LEMA 2.4.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es un factor compacto de Y.*
(2) *Existe una constante $c > 0$ tal que si μ y ν son dos medidas con respectivos valores en X e Y, y con rangos finito dimensionales, entonces $||\mu \otimes_\pi \nu|| \leq c||\mu||||\nu||$.*

PRUEBA. (1) $\Rightarrow$ (2): Si (1) es cierto, entonces para cada par de σ-álgebras Σ y Θ podemos definir la aplicación

$$P^\pi_{(\Sigma,\Theta)} : \text{ cca}(\Sigma, X) \times \text{ cca}(\Theta, Y) \rightarrow \text{ ca}(\Sigma \otimes \Theta, X \otimes_\pi Y),$$

como $P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}(\mu, \nu) = \mu \otimes_\pi \nu$. Como en la prueba del Teorema 2.2.2 se puede demostrar que $P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}$ es continua y que existe una constante c tal que $||P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}|| \leq c$ para cualesquiera Σ y Θ. Por tanto para cualquier par de medidas con rangos relativamente compactos, y en particular para medidas de rango finito dimensional, tenemos que $||\mu \otimes_\pi \nu|| \leq c||\mu||||\nu||$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Para cada par de σ-álgebras Σ y Θ, podemos definir la aplicación

$$P^\pi_{(\Sigma,\Theta)} : \text{fdca}(\Sigma, X) \times \text{fdca}(\Theta, Y) \rightarrow \text{ca}(\Sigma \otimes \Theta, X \otimes_\pi Y),$$

como $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}(\mu,\nu)=\mu\otimes_{\pi}\nu$. Este operador siempre está bien definido como vimos en la primera Sección de este Capítulo. Es un resultado conocido que el espacio vectorial de las medidas con rango finito dimensional es denso en el espacio de las medidas con rango relativamente compacto [L2]; por lo tanto $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}$ puede extenderse por densidad a $\mathrm{cca}(\Sigma,X)\times \mathrm{cca}(\Theta,Y)$ con norma menor o igual que c independientemente del par de σ-álgebras consideradas. Seguiremos notando la extensión por $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}$. Para terminar basta observar que si $\mu\in \mathrm{cca}(\Sigma,X)$ y $\nu\in \mathrm{cca}(\Theta,Y)$ entonces $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}(\mu,\nu)$ restringida al álgebra producto coincide con $\mu\times_{\pi}\nu$, de donde sigue la implicación. □

LEMA 2.4.3. *Supongamos que X es un factor compacto de Y. Si μ y ν son dos medidas con respectivos valores en X e Y y tal que una de ellas al menos tiene rango relativamente compacto, entonces existe el producto tensorial proyectivo de ambas.*

PRUEBA. Como toda $\nu\in \mathrm{fdca}(\Theta,Y)$ tiene variación acotada, sea cual sea la medida $\mu\in\ \mathrm{ca}(\Sigma,X)$, el producto tensorial proyectivo $\mu\otimes_{\pi}\nu$ existe. Por lo tanto podemos definir la aplicación bilineal $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}$ sobre $\mathrm{ca}(\Sigma,X)\times \mathrm{fdca}(\Theta,Y)$ con valores en $\mathrm{ca}(\Sigma\otimes\Theta,X\otimes_{\pi}Y)$ como $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}(\mu,\nu)=\mu\otimes_{\pi}\nu$. Dadas ahora $\mu\in ca(\Sigma,X)$ y $\nu\in \mathrm{fdca}(\Theta,Y)$, podemos encontrar una sub-σ-álgebra finita de Σ, tal que la restricción de μ, que notaremos por μ', a tal sub-σ-álgebra, satisface $||\mu\otimes_{\pi}\nu||\leq 2||\mu'\otimes_{\pi}\nu||$. Por el Lema 2.4.2 existe una constante c independiente de μ' y ν tal que $||\mu'\otimes_{\pi}\nu||\leq c||\mu'||||\nu||$, y obtenemos entonces que $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}$ es continuo. Dado que $\mathrm{fdca}(\Theta,Y)$ es denso en $\mathrm{cca}(\Theta,Y)$ podemos extender $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}$ a $\mathrm{ca}(\Sigma,X)\times \mathrm{cca}(\Theta,Y)$ y se puede comprobar que realmente $P^{\pi}_{(\Sigma,\Theta)}(\mu,\nu)$ coincide con la extensión $\mu\otimes_{\pi}\nu$ de $\mu\times_{\pi}\nu$ a la σ-álgebra producto. Dado que la relación ser factor es simétrica el lema queda probado. □

Pasemos ahora a probar el resultado central de esta Sección. En él se estudia cuándo ℓ_p es un factor de ℓ_q dependiendo de los valores de los índices p y q.

TEOREMA 2.4.4. *Sean* $1 \leq p, q < \infty$. *Entonces* ℓ_p *es un factor de* ℓ_q *si y solo si* $p, q \in [1, 2]$ *y* $\min\{p, q\} = 1$.

PRUEBA. El primer paso será probar que si ℓ_p es un factor de ℓ_q entonces o bien $p = 1$ ó $q = 1$.

Suponer que este no sea el caso; entonces ℓ_p y ℓ_q contienen copias de ℓ_2^n uniformemente complementadas. Esto es, existe una constante c_1 tal que para todo natural n existe un subespacio $H_n \subset \ell_p$, 2-isomorfo a ℓ_2^n y una proyección $P_n : \ell_p \rightarrow E_n$ con $||P_n|| \leq c_1$, y lo mismo es válido para ℓ_q con cierta constante c_2, F_n subespacios y Q_n proyecciones. Entonces $\ell_2^n \otimes_\pi \ell_2^n$ es $(4c_1c_2)$-isomorfo a un subespacio de $\ell_p \otimes_\pi \ell_q$.

Es conocido [Ro, Proposición 2.3] que la bola n-dimensional euclídea es el rango de una medida vectorial cuya semivariación está acotada independientemente de la dimensión por una cierta constante c_3. De este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una medida μ_n con valores en ℓ_2^n tal que $||\mu_n|| \leq c_3$ y conjuntos medibles $A_1, .., A_n$ tales que $\mu_n(A_i) = e_i$ para cada $i = 1, .., n$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ nota la base canónica de ℓ_2^n. Definimos también la medida $\nu_n : \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) \rightarrow \ell_2^n$ dada por $\nu_n(\{k\}) = e_k$. Entonces podemos escribir:

$$||\mu_n \otimes_\pi \nu_n|| \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_n(A_k) \otimes \nu_n(k) \right\|_\pi \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k \right\|_\pi = n.$$

Por otra parte $||\mu_n|| \, ||\nu_n|| \leq c_3\sqrt{n}$. Por el Lema 2.4.2, obtenemos que ℓ_p no es ni siquiera un factor compacto de ℓ_q.

De este modo tenemos que forzar que uno de los índices, digamos p, por ejemplo, sea igual a 1. Pero, en tal caso si q fuese mayor que 2, su exponente conjugado q^* dado por la relación $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$, pertenecería al intervalo $(1, 2)$ y observar que en ese caso ℓ_{q^*} es isomorfo a un subespacio de $L_1([0, 1])$. Por el Corolario 2.2.3 sabemos que ℓ_q es un factor de ℓ_1 si y sólo si $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_{q^*}) =$

$\Pi_1(\ell_1, \ell_{q^*})$, pero esto no es posible a menos que $q = 2$. Por lo tanto tenemos que imponer también que $1 \leq q \leq 2$ para tener alguna posibilidad de encontrar dos factores.

Para $q = 2$, el hecho de que todos los operadores lineales y continuos de ℓ_1 en ℓ_2 son 1-sumantes implica por el Corolario 2.2.3 que ℓ_1 y ℓ_2 son factores. Sólo queda estudiar por tanto el caso $p = 1$ y $1 \leq q < 2$. Para ello necesitaremos el siguiente lema.

LEMA 2.4.5. *Existe una constante positiva c' tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada par de medidas $\mu : \Sigma \to l_1^n$, $\nu : \Theta \to l_1^n$*

$$||\mu \otimes_\pi \nu||_{\ell_1^n \otimes_\pi \ell_1^n} \leq c' ||\mu|| ||\nu||.$$

PRUEBA. Sean $\mu : \Sigma \to \ell_1^n$, $\nu : \Theta \to \ell_1^n$. Podemos escribir

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} (\int_A f_k d\sigma) e_k, \ \nu(A) = \sum_{k=1}^{n} (\int_A g_k d\tau) e_k,$$

para ciertas medidas no negativas σ y τ definidas sobre Σ and Θ, y ciertas funciones $f_k \in L_1(S, \sigma)$ y $g_k \in L_1(T, \tau)$. En [R-S] se prueba que existe una constante absoluta $c' > 0$ tal que

$$||(f_i g_j)_{i,j=1}^n||_1^w \leq c' ||(f_i)_{i=1}^n||_1^w \, ||(g_j)_{j=1}^n||_1^w,$$

donde recordamos que $||(x_k)||_1^w = \sup \{\sum_k |x^*(x_k)| : ||x^*|| \leq 1\}$ es la norma débilmente 1-sumable de la serie $\sum x_k$.

Los operadores de integración en el sentido de Bartle $u_\mu : L_\infty(S, \sigma) \to \ell_1^n$ y $u_\nu : L_\infty(T, \tau) \to \ell_1^n$ definidos como $u_\mu(f) = \int_S f d\mu$ y $u_\nu(g) = \int_T g d\nu$ [D-U] verifican que

$$||\mu|| = ||u_\mu|| = ||(f_i)_{i=1}^n||_1^w \text{ y } ||\nu|| = ||u_\nu|| = ||(g_j)_{j=1}^n||_1^w.$$

Se comprueba fácilmente que $\mu \otimes_\pi \nu : \Sigma \otimes \Theta \to \ell_1^n \otimes_\pi \ell_1^n$ admite la expresión $\mu \otimes_\pi \nu(C) = \sum_{i,j=1}^n (\int_C f_i g_j d\sigma \otimes \tau) e_i \otimes e_j$ para cada $C \in \Sigma \otimes \Theta$, por lo tanto $u_{\mu \otimes_\pi \nu}$, el operador de integración de Bartle asociado a $\mu \otimes_\pi \nu$ definido sobre $L_\infty(S \times T, \sigma \otimes \tau)$, viene dado por $u_{\mu \otimes_\pi \nu}(h) = \sum_{i,j=1}^n (\int_{S \times T} h f_i g_j d\sigma \otimes \tau) e_i \otimes e_j$. Observar que $\ell_1^n \otimes_\pi \ell_1^n$ es isométrico al espacio de los operadores nucleares definidos sobre ℓ_∞^n con valores en ℓ_1^n, y que la norma nuclear de un operador $u : \ell_\infty^n \to \ell_1^n$ viene dada por $\sum_{k=1}^n \|ue_k\|$. De lo anterior, para cada $h \in L_\infty(S \times T, \sigma \otimes \tau)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u_{\mu \otimes_\pi \nu}(h)\| &= \left\| \sum_{i,j=1}^n \left(\int h f_i g_j d\sigma \otimes \tau \right) e_i \otimes e_j \right\|_\pi \\
&= \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{i,j=1}^n \left(\int h f_i g_j \right) e_i(e_k) e_j \right\| \\
&= \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \int h f_k g_j e_j \right\| \\
&= \sum_{k,j=1}^n \left| \int h f_k g_j d\sigma \otimes \tau \right|,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\|\mu \otimes_\pi \nu\| = \|u_{\mu \otimes_\pi \nu}\| = \|(f_i g_j)_{i,j=1}^n\|_1^w$. Esto termina la prueba del lema. □

Continuamos ahora con la prueba el teorema.

Primero vamos a probar que ℓ_1 es un factor de sí mismo. Como toda medida con valores en ℓ_1 tiene rango relativamente compacto [Ros, Remark 2, pág. 211], por el Lema 2.4.5 es suficiente demostrar que existe una constante c tal que $\|\mu \otimes_\pi \nu\|_{\ell_1 \otimes_\pi \ell_1} \leq c\|\mu\|\|\nu\|$, para cada par de medidas con valores en ℓ_1 y rango finito dimensional.

Consideremos entonces μ y ν, medidas ℓ_1-valoradas con rango finito dimensional. Como ℓ_1 es un $\mathcal{L}_{1,2}$-espacio podemos encontrar un natural n y E, subespacio de dimensión finita de ℓ_1, tal que E sea 2-isomorfo a ℓ_1^n, y que contenga el rango de μ y el de ν.

Observar que $\ell_1 \otimes_\pi E$ es un subespacio de $\ell_1 \otimes_\pi \ell_1$ y $E \otimes_\pi E$ es 4-isomorfo a un subespacio de $\ell_1 \otimes_\pi E$, por lo tanto, la semivariación de $\mu \otimes_\pi \nu$ considerada como medida con valores en $E \otimes_\pi E$ es equivalente a la semivariación de $\mu \otimes_\pi \nu$ cuando consideramos ambas medidas con valores en ℓ_1. Por la misma razón las semivariaciones de μ y ν son las mismas si las consideramos con valores en E o en ℓ_1. Si aplicamos el Lema 2.4.5 a μ y ν consideradas con valores en E obtenemos

$$||\mu \otimes_\pi \nu||_{\ell_1 \otimes_\pi \ell_1} \leq 4||\mu \otimes_\pi \nu||_{E \otimes_\pi E} \leq c||\mu||\,||\nu||,$$

donde c es una constante que sólo depende de la constante que aparece en el lema anterior. Esto demuestra que ℓ_1 es un factor de sí mismo.

Para terminar la prueba del teorema, si $p \in (1,2)$ entonces ℓ_p es un subespacio de $L_1([0,1])$ y $\ell_1 \otimes_\pi \ell_p$ es un subespacio de $\ell_1 \otimes_\pi L_1([0,1])$, por lo tanto podemos considerar de nuevo dos medidas vectoriales con rangos de dimensión finita y con respectivos valores en ℓ_1 and $L_1([0,1])$. Como $L_1([0,1])$ es un $\mathcal{L}_{1,2}$-espacio podemos hacer lo mismo de antes, probando de este modo que ℓ_p es un factor compacto de ℓ_1. Pero todas las medidas numerablemente aditivas ℓ_p-valoradas con $1 \leq p < 2$ tienen rango relativamente compacto, de donde el teorema queda demostrado. □

COROLARIO 2.4.6. *El producto tensorial proyectivo de dos medidas vectoriales numerablemente aditivas con valores en un L_1-espacio y un L_p-espacio con $1 \leq p \leq 2$ siempre existe.*

PRUEBA. Para $p = 2$ es claro por el Corolario 2.2.3. En cualquier caso sean $\mu : \Sigma \rightarrow L_1(\alpha)$ y $\nu : \Theta \rightarrow L_p(\beta)$ dos medidas. Sea $D = \bigcup_{k=1}^n A_k \times B_k$ un elemento de $\Sigma \times \Theta$. Notemos por μ_0 la restricción de μ a la σ-álgebra finita generada por los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ (que claramente es una medida de rango compacto). De igual manera definimos ν_0 como la restricción de ν a la σ-álgebra generada por los $(B_k)_{k=1}^n$.

Por el teorema anterior existe cierta constante $c > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}||\mu \times_\pi \nu(D)|| \leq& ||\mu_0 \times_\pi \nu_0|| \\ \leq& c||\mu_0||\,||\nu_0|| \\ \leq& ||\mu||\,||\nu||,\end{aligned}$$

con lo que se demuestra que $\mu \times_\pi \nu$ es una medida acotada sobre el álgebra $\Sigma \times \Theta$. Por otro lado, como $L_1(\alpha)\otimes_\pi L_p(\beta)$ es isomorfo a $L_1(\alpha, L_p(\beta))$, por un teorema de Kwapien se sigue que este producto tensorial proyectivo no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 y por [D-U] se deduce que la medida anterior es fuertemente aditiva sobre el álgebra. Probemos que de hecho es numerablemente aditiva. Si no lo fuese existiría una sucesión $(D_k)_{k=1}^\infty$ en el álgebra producto tal que su unión D pertenece al álgebra y sin embargo $\mu \times_\pi \nu(D)$ no es la suma de la serie incondicionalmente convergente (por ser fuertemente aditiva) $\sum_{k=1}^\infty \mu \times_\pi \nu(D_k)$.

Como $L_1(\alpha)$ tiene la propiedad de la aproximación, el espacio $L_1(\alpha)\otimes_\pi L_1(\beta)$ es isométrico al espacio de los operadores nucleares $\mathcal{N}(L_\infty(\alpha), L_1(\beta))$, por lo tanto podemos encontrar f, g en $L_\infty(\alpha)$ y $L_\infty(\beta)$ respectivamente, tales que

$$\mu \times_\pi \nu(D)(f)(g) \neq \sum_{k=1}^\infty (\mu \times_\pi \nu(D_k))(f)(g),$$

esto es, son operadores diferentes.

Pero por otra parte μ y ν siempre admiten producto tensorial inyectivo, por tanto $\mu \otimes_\epsilon \nu(D) = \sum_{k=1}^\infty \mu \otimes_\epsilon \nu(D_k)$, donde la convergencia es el espacio de los operadores continuos de $L_\infty(\alpha)$ en $L_1(\beta)$, lo cual es una contradicción con lo anterior.

Tenemos por tanto que $\mu \times_\pi \nu$ es una medida acotada sobre el álgebra, débilmente numerablemente aditiva y ademas fuertemente aditiva. Por un teorema de Kluvanek [D-U] se sigue que la medida producto puede extenderse de forma numerablemente aditiva a la σ-álgebra generada por dicha álgebra. Esto termina el corolario. □

COMENTARIO 2.4.7. Hemos probado que ℓ_1 es un factor de sí mismo. Por la observación que aparece al principio de esta Sección sabemos que si ϕ es una forma bilineal continua sobre $\ell_1 \times \ell_1$, entonces para todo par de medidas ℓ_1-valoradas μ y ν, el producto $\mu \times_\phi \nu$ tiene una extensión numerablemente aditiva satisfaciendo que $\mu \otimes_\phi \nu = \phi(\mu \otimes_\pi \nu)$. Como ℓ_1 es un espacio de Banach separable existe $j : \ell_1 \to \ell_\infty$ un isomorfismo entre ℓ_1 y cierto subespacio de ℓ_∞. Obviamente j no puede ser 1-sumante y, por la inyectividad de ℓ_∞, j tampoco es un operador integral. Considerar entonces $\phi_j : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{R}$, la forma bilineal asociada a j. Los operadores inducidos por ϕ_j son j y j^* restringido a ℓ_1. Es un hecho conocido que un operador es integral si y sólo si su adjunto lo es, de donde se sigue que j^* restringido a ℓ_1 no puede ser integral y dado que toma valores en ℓ_∞, es lo mismo que decir que no es 1-sumante. Esto responde a la pregunta que nos planteábamos en la Sección 2: si ϕ es una forma bilineal fijada y todo par de medidas admiten producto respecto de ϕ, ¿debe ser uno de los dos operadores inducidos por ϕ 1-sumante?.

COMENTARIO 2.4.8. En [B-S, Theorem 2] se probó que c_0 no es factor de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$. Esto se puede deducir directamente de nuestro Corolario 2.2.3. De hecho probaremos en la siguiente Sección que si X es un factor compacto de c_0 entonces X es un factor compacto de cualquier espacio de Banach, por lo tanto ser factor compacto para c_0 implica que toda medida X-valorada con rango relativamente compacto admite producto con cualquier otra medida y respecto de cualquier aplicación bilineal y continua.

COMENTARIO 2.4.9. Hemos probado en el teorema anterior que si α y β son dos medidas entonces $L_1(\alpha)$ es un factor de $L_1(\beta)$. Todo operador lineal y continuo $u : L_\infty(\sigma) \to X$, que sea w^* a w-continuo define una medida numerablemente aditiva X-valorada μ_u definida como $\mu_u(A) = u(\chi_A)$. Por lo tanto nuestra observación puede ser vista del modo siguiente:

Sean $u : L_\infty(\sigma) \to L_1(\alpha)$, $v : L_\infty(\tau) \to L_1(\beta)$ dos operadores w^* a w-continuos, entonces el producto tensorial $u \otimes v : L_\infty(\sigma) \otimes L_\infty(\tau) \to L_1(\alpha) \otimes L_1(\beta)$ puede extenderse a un operador w^* a w-continuo definido sobre $L_\infty(\sigma \otimes \tau)$ con valores en $L_1(\alpha) \otimes_\pi L_1(\beta)$. La existencia de tal extensión del producto de los operadores puede deducirse indirectamente de [R-S]; que la extensión sea w^* a w-continua sigue del hecho de que la medida inducida por la extensión del producto tensorial $u \otimes v$ es precisamente la medida vectorial numerablemente aditiva $\mu \otimes_\pi \nu$, si μ y ν son las medidas inducidas por u y v, respectivamente.

5. Factores universales.

En esta sección tratamos de estudiar la existencia de espacios de Banach de dimensión infinita X que tengan la propiedad de que cualquier medida con valores en X admita producto con cualquier otra medida y respecto de cualquier aplicación bilineal. Comenzaremos la Sección con una definición.

DEFINICIÓN 2.5.1. *Diremos que un espacio de Banach X es un factor universal si cualquier medida con valores en él admite producto con cualquier otra medida (valorada en cualquier otro espacio de Banach) y respecto de cualquier aplicación bilineal continua. Del mismo modo definimos el concepto de factor universal compacto, exigiendo lo mismo de antes pero además imponiendo que las medidas tengan rango relativamente compacto.*

Como ya se comentó en la Sección anterior, si dos medidas admiten producto tensorial proyectivo entonces admiten producto respecto de cualquier aplicación bilineal continua.

En el siguiente teorema caracterizamos los factores universales compactos. Para ello vamos a necesitar el siguiente resultado [P, Theorem 2.4] sobre sucesiones en el rango de una medida vectorial.

TEOREMA 2.5.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach, y u un operador lineal y continuo de X en Y. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El operador u lleva sucesiones nulas de X en sucesiones que caen dentro del rango de una medida de variación acotada en Y.*

(2) *El operador adjunto $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es 1-sumante.*

El siguiente teorema es el resultado central de esta Sección.

TEOREMA 2.5.3. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Existe una constante c' tal que para toda medida μ con valores en X y rango finito dimensional podemos encontrar otra medida ν también con valores en X verificando $rg(\mu) \subset rg(\nu)$ y además $|\nu| \leq c'||\mu||$.*

(2) *Existe una constante c tal que para toda medida μ con valores en X y rango finito existe otra medida ν con valores en X satisfaciendo que $rg(\mu) \subset rg(\nu)$ y $|\nu| \leq c||\mu||$.*

(3) $\Pi_1(X^*, \ell_1) = \mathcal{L}(X^*, \ell_1)$.

(4) $\Pi_1(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$.

(5) *Toda medida con valores en X y con rango relativamente compacto admite producto con cualquier otra medida respecto de cualquier aplicación bilineal.*

PRUEBA. (5) $\Rightarrow$ (4): Es claro que si (5) es cierto entonces en particular todo par de medidas con respectivos valores en X y en c_0 con rangos relativamente compactos admite producto tensorial proyectivo. Como el dual de c_0 es un subespacio de L_1, aplicando el Corolario 2.2.3 se demuestra (4).

(4) $\Rightarrow$ (3): Probaremos que si c_1 es una constante tal que $\pi_1(v) \leq c_1 \|v\|$ para todo $v : X \longrightarrow \ell_1$ entonces $\pi_1(u) \leq c_1 \|u\|$ para todo $u \in \mathcal{L}(X^*, \ell_1)$.

Sea $u : X^* \longrightarrow \ell_1$ un operador lineal y continuo. Existe una sucesión $(x_k^{**})_{k=1}^{\infty}$ en el espacio bidual X^{**} tal que $u(x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{**}(x^*) e_k$ para todo $x^* \in X^*$, donde los e_k son los vectores de la base canónica de ℓ_1. Se tiene que $\|u\| = \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\}$.

Consideremos $x_1^*, ..., x_n^*$, una sucesión finita de elementos de X^*. Se observa que

$$\sum_{j=1}^{n} \|u x_j^*\| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{**}(x_j^*)|.$$

Sean ahora $m \in \mathbb{N}$ y $0 < \epsilon$. Por el principio de reflexividad local (ver [D-J-T]) podemos encontrar $\{x_1, ..., x_m\} \subset X$ tales que:

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{m} |x_k(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\right\} \leq (1+\epsilon) \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} |x_k^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\right\},$$

y además $x_k(x_j^*) = x_k^{**}(x_j^*)$ para cada $j = 1, ..., n$; $k = 1, ..., m$. De lo anterior se deduce que:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |x_k^{**}(x_j^*)| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |x_k(x_j^*)| = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x_k)| = \sum_{k=1}^{m} \|v x_k\|,$$

donde $v : X \longrightarrow \ell_1^n$ es el operador asociado a la sucesión finita $(x_j^*)_{j=1}^n$, esto es, es el operador definido como $v(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j$. Se tiene por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{m} \|v x_k\| \leq \pi_1(v) \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} |x_k(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\right\} \leq$$

$$\leq c_1 \|v\| \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} |x_k(x^*)| : \|x^*\| \leq 1\right\} \leq$$

$$\leq c_1 \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x)| : ||x|| \leq 1\right\} \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} |x_k^{**}(x^*)| : ||x^*|| \leq 1\right\} (1+\epsilon) \leq$$

$$\leq c_1 \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x)| : ||x|| \leq 1\right\} ||u||(1+\epsilon).$$

Como la desigualdad anterior es válida para todo $\epsilon > 0$ y para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos deducir que

$$\sum_{j=1}^{n} ||ux_j^*|| \leq c_1 \sup\{\sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x)| : ||x|| \leq 1\}||u||,$$

con lo que u es un operador 1-sumante con norma $\pi_1(u) \leq c_1||u||$.

(3) $\Rightarrow$(2): Sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida con rango finito, es decir, $\mathrm{rg}(\mu) = \{x_1, ..., x_n\}$ donde $(x_i)_{i=1}^n \subset X$. Consideramos σ medida de control de Rybakov para μ. Por definición de medida de control $\sigma(A) \to 0$ si y sólo si $||\mu||(A) \to 0$. Considerar también el operador de integración asociado a μ, $u_\mu : L_\infty(S, \sigma) \to X$, definido como $u_\mu(f) = \int_S f d\mu$. El operador adjunto $u_\mu^* : X^* \to L_1(S, \sigma)$ es 1-sumante por hipótesis. Se sigue de la prueba del Teorema 2.5.2 [P, Theorem 2.4] que existe una constante absoluta c_2 tal que para todo subconjunto finito H de la bola unidad de $L_\infty(S, \sigma)$ existe una medida con valores en X, que llamamos ν, tal que $u_\mu(H) \subset \mathrm{rg}\ (\nu)$ y $|\nu| < c_2\pi_1(u_\mu^*)$.

Elegimos $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ de modo que $\mu(A_i) = x_i$. Tomamos el conjunto $H = \{\chi_{A_i} : i = 1, ..., n\}$ formado por las funciones características de los medibles $(A_i)_{i=1}^n$. Observar que $u_\mu(\chi_{A_i}) = x_i$. Claramente H es un subconjunto de la bola unidad de $L_\infty(S, \sigma)$ así que por la observación anterior podemos encontrar una medida ν con valores en X de tal modo que $\mathrm{rg}(\mu) \subset \mathrm{rg}(\nu)$ y $|\nu| \leq c_2\pi_1(u_\mu^*)$. Observar que ν puede ser elegida de rango finito; de hecho, podemos restringir convenientemente ν a una σ-álgebra finita de conjuntos y que todavía verifique $\mathrm{rg}(\mu) \subset \mathrm{rg}(\nu)$ y $|\nu| \leq c_2\pi_1(u_\mu^*)$. Por hipótesis existe una constante c_1 tal que

$\pi_1(v) \leq c_1||v||$ para todo $v : X^* \longrightarrow L_1(S, \sigma)$, así que $\pi_1(u_\mu^*) \leq c_1||u_\mu^*|| = c_1||\mu||$. Esto prueba la implicación con $c = c_1c_2$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ una medida con rango finito dimensional . Sea E un subespacio de X de dimensión finita tal que $\mathrm{rg}(\mu) \subset E$ y sea d la dimensión de E. Dado que la bola unidad de ℓ_2^d es el rango de una medida con valores en ℓ_2^d [Ro, Proposición 2.3], podemos encontrar una medida $\nu' : \Theta \longrightarrow E$ tal que la bola unidad de E está contenida en $\mathrm{rg}(\nu')$. Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar una ϵ-red $\{x_1, ..., x_n\}$ en $\mathrm{rg}(\mu)$. Elegimos $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ tales que $\mu(A_i) = x_i$ para $i = 1, ..., n$ y notaremos por μ'_ϵ la restricción de μ a la σ-álgebra finita generada por los medibles $\{A_1, ..., A_n\}$. Entonces μ'_ϵ es una medida de rango finito con $||\mu'_\epsilon|| \leq ||\mu||$.

Por (2) podemos encontrar $\nu : \Theta \longrightarrow X$ de manera que su rango contenga a $\mathrm{rg}(\mu)$ y $|\nu| \leq c||\mu'_\epsilon||$.

Sea $\nu \oplus \epsilon\nu'$ la suma directa de ν y $\epsilon\nu'$. Como ya hemos visto anteriormente la suma directa verifica que $\mathrm{rg}(\nu \oplus \nu') = \mathrm{rg}(\nu)+ \epsilon\mathrm{rg}(\nu')$ y $|\nu \oplus \nu'| = |\nu| + \epsilon|\nu'|$. Por lo tanto podemos escribir que $\mathrm{rg}(\mu) \subset \mathrm{rg}(\nu \oplus \epsilon\nu')$ y

$$|\nu \oplus \epsilon\nu'| = |\nu| + \epsilon|\nu'| \leq c||\mu|| + \epsilon|\nu'|.$$

Si tomamos $\epsilon < (||\mu||/|\nu'|)$ obtenemos (1) con $c' = (1 + c)$.

(1) $\Rightarrow$ (5) : Sea Y un espacio de Banach. Consideremos para cada par de σ-álgebras, Σ y Θ, la aplicación bilineal

$$P^\pi_{(\Sigma,\Theta)} : \mathrm{fdca}(\Sigma, X) \times \mathrm{ca}(\Theta, Y) \longrightarrow \mathrm{ca}(\Sigma \otimes \Theta, X \otimes_\pi Y),$$

definida como otras veces por $P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}(\mu, \nu) = \mu \otimes_\pi \nu$.

Sea $\mu \in \mathrm{fdca}(\Sigma, X)$ y $\nu \in \mathrm{ca}(\Theta, Y)$. Por (1) existe una medida μ' con valores en X tal que $\mathrm{rg}(\mu) \subset \mathrm{rg}(\mu')$ y $|\mu'| \leq c'||\mu||$. Como μ' tiene variación acotada, se sigue que admite producto tensorial proyectivo con cualquier medida. Es fácil ver que $\mathrm{rg}(\mu \times_\pi \nu) \subset \mathrm{rg}(\mu' \times_\pi \nu)$ y por lo tanto podemos deducir que $||\mu \otimes_\pi \nu|| \leq 2||\mu' \otimes_\pi \nu||$. Un cálculo nos muestra que $||\mu' \otimes_\pi \nu|| \leq 2|\mu'|\,||\nu||$, por lo que finalmente obtenemos que $||\mu \otimes_\pi \nu|| \leq 4|\mu'|\,||\nu|| \leq 4c'||\mu||||\nu||$.

Hemos probado que $||P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}|| \leq 4c'$. Usando el hecho de que las medida de rango finito dimensional son densas en el espacio de las medidas con rango relativamente compacto podemos extender por densidad la aplicación bilineal $P^\pi_{(\Sigma,\Theta)}$ al espacio producto $\mathrm{cca}(\Sigma, X) \times \mathrm{ca}(\Theta, Y)$. Como ya hemos visto alguna otra vez se comprueba que realmente $P_{(\Sigma,\Theta)}(\mu,\nu)$ es una extensión numerablemente aditiva de $\mu \times_\pi \nu$ para toda μ con rango relativamente compacto en X y ν con valores en Y. Se deduce de la observación que hicimos al principio de la Sección 4 que ambas admiten producto respecto de cualquier aplicación bilineal continua. Esto demuestra (5), y cierra la demostración del teorema. □

Siguiendo la notación de [Pi], un espacio de Banach satisface el Teorema de Grothendieck si verifica $\mathcal{L}(X, \ell_2) = \Pi_1(X, \ell_2)$. En tal caso de dice que X es un G.T.-espacio. Con esta notación podemos enunciar el siguiente corolario.

COROLARIO 2.5.4. *Sea X un espacio de Banach. Toda medida con valores en X y con rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con cualquier otra medida si y sólo si X y X^* son G.T.- espacios.*

PRUEBA. En [Pi, Chapter 6] se demuestra que X es un G.T-espacio si y sólo si el espacio de los operadores lineales y continuos $\mathcal{L}(X^*, Z)$ coincide con el de los operadores 2-sumantes $\Pi_2(X^*, Z)$, para cada L_1-espacio Z. Por tanto, si toda medida con valores en X y rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con cualquier otra medida entonces las condiciones (4) y (3) del Teorema 1.5.3 implican que X y X^* son G.T.-espacios (observar que X es un G.T.-espacio si y sólo si X^{**} lo es [Pi]).

Recíprocamente, supongamos que X y X^* son G.T-espacios y sea $u : X \to \ell_1$ un operador lineal y continuo. Dado que X^* es un G.T.-espacio, u debe ser 2-sumante, y por tanto u factoriza a través de un espacio de Hilbert H:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & L^1 \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle v} \\ L^\infty & \xrightarrow{i} & H \end{array}$$

Como X también es un G.T-espacio se sigue que el operador $i \circ j$ es 1-sumante. Por lo tanto, u es 1-sumante. Esto prueba que $\Pi_1(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$ y, por el Teorema 2.5.3, toda medida con valores en X y rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con cualquier otra medida. □

COMENTARIO 1.5.5. Es conocido que existen espacios de Banach de dimensión infinita que verifican las condiciones del Corolario 1.5.4. Por ejemplo en [P] se prueba que existe un espacio de Banach de dimensión infinita tal que él y su dual son G.T.-espacios, además de tener ambos cotipo 2. Esto se traduce en que existen factores universales compactos de dimensión infinita. Sin embargo no sabemos si el hecho de ser factor universal implica necesariamente ser de dimensión finita.

Para terminar esta Sección estudiaremos algunas conexiones del Teorema 2.5.3 con problemas relacionados con sucesiones en el rango de una medida vectorial. Este tipo de problemas ha sido considerado en [P-R]. Necesitamos introducir algunas definiciones.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie incondicionalmente convergente en X. Se define la suma de los segmentos $[-x_n, x_n]$ por

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-x_n, x_n] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Esta suma de segmentos es siempre el rango de una medida vectorial numerablemente aditiva con rango relativamente compacto. Se probó en [P-R] que para toda medida μ con valores en X y rango relativamente compacto existe una suma de segmentos definido por una serie incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X que contiene a su rango, y que además cumple

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w \leq 4\|\mu\|.$$

Notaremos por $R_c(X)$ el espacio de Banach de las sucesiones de X que caen dentro de un rango relativamente compacto, y las dotaremos de la norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{rc} = \inf \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(y_k)| : \|x^*\| \leq 1 \right\},$$

donde el ínfimo se toma en el conjunto de las series $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ incondicionalmente convergentes que cumplan que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en $\sum[-y_k, y_k]$.

Notaremos también por $R_{bv}(X)$ el espacio de las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tales que existe una medida con valores en X de variación acotada que satisfaga la condición $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{rg}(\mu)$. Ponemos

$$\|(x_n)\|_{bv} = \inf\{|\mu| : \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{rg}(\mu)\}.$$

Para ver propiedades de estos espacios ver [P], [PR]. Probaremos a continuación el teorema siguiente.

TEOREMA 2.5.6. *Sea X un espacio de Banach. X es un factor universal compacto si y sólo si toda sucesión de X que cae dentro de un rango relativamente compacto de hecho cae dentro de un rango de variación acotada.*

PRUEBA. Supongamos que toda medida con valores en X y rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con respecto a cualquier otra medida y sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida con rango relativamente compacto.

Como las medidas de rango finito dimensional son densas en el espacio de las medidas con rango relativamente compacto podemos encontrar una sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ de medidas cada una de ellas con rango finito dimensional, de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} ||\mu_n|| < 2||\mu|| < \infty$ y $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Por el Teorema 2.5.3 existe una constante c' y una sucesión de medidas ν_n con valores en X tal que $\text{rg}(\mu_n) \subset \text{rg}(\nu_n)$ y $|\nu_n| \leq c'||\mu_n||$. Notaremos por ν la suma directa de la sucesión $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$. Es fácil comprobar que

$$|\nu| = \sum_{k=1}^{\infty} |\nu_n| \leq c' \sum_{k=1}^{\infty} ||\mu_n|| \leq 2c'||\mu||.$$

Por otra parte $\text{rg}(\mu) \subset \text{rg}(\nu)$, por lo tanto hemos probado que la condición (1) del Teorema 2.5.3 es equivalente a la existencia de una constante c' tal que para toda medida μ con valores en X y rango relativamente compacto, existe otra medida ν con variación acotada tal que $\text{rg}(\mu) \subset \text{rg}(\nu)$ y $|\nu| \leq 2c||\mu||$. Esto implica en particular que toda sucesión que está contenida en un rango relativamente compacto, de hecho está contenida en uno de variación acotada.

Recíprocamente, si toda sucesión que esté dentro de un rango relativamente compacto de hecho cae dentro de un rango de variación acotada entonces el operador inclusión de $R_c(X)$ en $R_{bv}(X)$ estaría bien definido. Por la definición de las normas de $R_c(X)$ y $R_{bv}(X)$ se sigue que tiene grafo cerrado y que por tanto existe una constante $c' > 0$ tal que $||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_{bv} \leq c'||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_{rc}$ para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $R_c(X)$. Considerar μ una medida con valores en X y con rango finito. Pongamos que $\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \text{rg}(\mu)$. Por las consideraciones anteriores se tiene que $||(x_k)_{k=1}^{n}||_{bv} \leq c'||(x_k)_{k=1}^{n}||_{rc}$, y también que $||(x_k)_{k=1}^{n}||_{rc} \leq 4||\mu||$.

Por lo tanto es claro que existe una medida ν tal que $\text{rg}(\mu) \subset \text{rg}(\nu)$ y $|\nu| \leq 4c'||\mu||$. Por el Teorema 2.5.3 se concluye la implicación. □

Comentario 2.5.7. Hemos obtenido que un espacio de Banach X tiene la propiedad de que toda medida con valores en él y con rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con cualquier otra medida si y sólo si todo rango relativamente compacto en X está contenido en el rango de una medida de variación acotada.

COMENTARIO 2.5.8. Si consideramos a la vez el Teorema 2.5.3 y el Teorema 2.2.1 obtenemos que si X es un espacio de Banach tal que toda sucesión convergente a cero cae dentro de un rango de variación acotada X es de dimensión finita. Esto fue demostrado en [P-R].

Veamos la prueba. Si toda sucesión nula cae dentro de un rango de variación acotada, por el Teorema 2.2.1, obtendríamos en particular que $\Pi_1(X, \ell_1) = N(X, \ell_1)$. Pero si toda sucesión cae dentro de un rango de variación acotada, cualquier relativamente compacto también. El corolario anterior nos dice que X también satisface la igualdad $\Pi_1(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$. En conclusión hemos obtenido que si toda sucesión cae dentro de un rango de variación acotada entonces $N(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$. Pero esta condición claramente implica que X debe ser de dimensión finita.

Para terminar la Sección enunciaremos un resultado que caracteriza a los factores universales compactos en términos de sumas de segmentos. Como la demostración es prácticamente igual a la del Teorema 2.5.3 sólo incluiremos una indicación de la misma.

TEOREMA 2.5.9. *X es un factor universal compacto si y sólo si toda suma de segmentos $\sum[-x_n, x_n]$ definida por una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente en X, cae dentro de una suma de segmentos $\sum[-y_n, y_n]$ definida por una serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ absolutamente convergente en X.*

PRUEBA. Vamos a dar una idea de la prueba. Supongamos que toda medida con valores en X y con rango relativamente compacto admite producto tensorial proyectivo con cualquier medida. Usando las mismas ideas que en el Teorema 2.5.3 se podría demostrar que existe una constante c' tal que para cualquier medida μ con valores en X y rango finito dimensional existe una suma de segmentos $\sum_{k=1}^{\infty}[-y_k, y_k]$ que contiene el rango de μ y tales que $\sum \|y_k\|_{k=1}^{\infty} \leq c'\|\mu\|$; de aquí es fácil demostrar que cualquier suma de segmentos definida por una serie incondicionalmente convergente en X (que es el rango de cierta medida de rango relativamente compacto) cae dentro de una suma de segmentos definido por una serie absolutamente convergente en Y, justamente de la misma manera que se procedió en el Teorema 2.5.6.

Recíprocamente, dado que todo rango compacto cae dentro de una suma de segmentos definido por una serie incondicionalmente convergente y que toda suma de segmentos definida por una serie absolutamente convergente es el rango de una medida vectorial de variación acotada obtenemos que X es un factor universal compacto. $\square$

CAPÍTULO 3

OPERADORES DE CARLEMAN Y LA INTEGRACIÓN BILINEAL DE BARTLE

1. Introducción y resultados previos.

Sean (T,τ) y (S,σ) dos espacios de medida finitos. Un operador lineal $u : L_2(T,\tau) \rightarrow L_2(S,\sigma)$ se dice integral si existe una función real $K(s,t)$, denominada núcleo de u, que es medible respecto de $\sigma \otimes \tau$ y tal que, para cada $f \in L_2(T,\tau)$, la relación:

$$u(f)(s) = \int_T K(s,t)f(t)d\tau(t),$$

se verifica en casi todo $s \in S$. Observar que el conjunto de medida nula fuera del cual se verifica la igualdad anterior puede depender de $f \in L_2(T,\tau)$. Un caso especial de los operadores integrales son los llamados clásicamente operadores de Carleman. Un operador $u : L_2(T,\tau) \rightarrow L_2(S,\sigma)$ es de Carleman si u es integral y además para casi todo s de S las secciones $K_s(\cdot) = K(s,\cdot)$ del núcleo K de u pertenecen a $L_2(T,\tau)$. El estudio de este tipo de operadores se inicia por Carleman en los años 20.

Si el espacio de medida (T,τ) es separable entonces se puede comprobar que la definición anterior de operador de Carleman es equivalente a la existencia de una función $K : S \rightarrow L_2(T,\tau)$ fuertemente medible tal que para cada $f \in L_2(T,\tau)$ la igualdad $u(f)(s) = \int_T K(s)(t)f(t)d\tau(t)$, es cierta en casi todo s. Observar de

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

nuevo que el conjunto de medida nula donde se da la igualdad puede depender de la función f.

Se conocen varias caracterizaciones de los operadores clásicos de Carleman. En el siguiente teorema incluimos algunas de ellas cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [W].

TEOREMA 3.1.1. *Para un operador* $u : L_2(T,\tau) \to L_2(S,\sigma)$ *las condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) *u es un operador de Carleman.*

(2) *Existe una función g definida en S, positiva y medible tal que para toda $f \in L_2(T,\tau)$ se tiene*

$$|u(f)(s)| \leq \|f\|_2 g(s) \text{ en casi todo } s \in S.$$

(3) *Para toda sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente en norma a cero en $L_2(T,\tau)$, se tiene que la sucesión imagen $(u(f_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero puntualmente en casi todo S.*

La condición (2) del teorema anterior se conoce como condición de Korotkov y nos dice que los operadores de Carleman son aquéllos que vistos como operadores con valores en $L_0(S,\sigma)$ son orden acotados, esto es, transforman la bola unidad de $L_2(T,\tau)$ en un conjunto de $L_0(S,\sigma)$ acotado en el orden.

Existen varios caminos para extender la definición de operador de Carleman a situaciones más generales: ver por ejemplo [G-U], [F], [Sc] o [G-E]. Nosotros seguiremos la terminología que aparece en [G-U], que difiere esencialmente de la presentada en [G-E].

La definición considerada en [G-U] para un operador de Carleman es la siguiente. Sea $0 \leq p \leq \infty$, y (S,Σ,σ) un espacio de medida finito. Un operador

$u : X \rightarrow L_p(S,\sigma)$ se dice de Carleman si existe una función fuertemente medible $F : S \rightarrow X^*$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$u(x)(s) = x(F(s)),$$

en casi todo $s \in S$. Con esta definición Gretsky y Uhl prueban el siguiente resultado.

Recordamos que un operador $u : X \rightarrow L_p(S,\sigma)$ se dice casi (débilmente) compacto en $L_\infty(S,\sigma)$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto medible A con $\sigma(S \setminus A) < \epsilon$ tal que $P_A \circ u$ es un operador (débilmente) compacto con valores en $L_\infty(S,\sigma)$, donde P_A es la proyección definida por $P_A(f) = f\chi_A$ para cada $f \in L_p(S,\sigma)$.

TEOREMA 3.1.2. *Sea $0 \leq p \leq \infty$ y sea X un espacio de Banach. Si $u : X \rightarrow L_p(S,\sigma)$ es de Carleman entonces u es casi compacto en $L_\infty(S,\sigma)$. Recíprocamente, si u es casi débilmente compacto en $L_\infty(S,\sigma)$ entonces u es de Carleman.*

Otro tipo de operadores estrechamente relacionados con los operadores de Carleman son los llamados operadores de Korotkov. La definición [G-U] es la siguiente. Un operador $u : X \rightarrow L_p(S,\sigma)$ es de Korotkov si existe una función medible $g \in L_0(S,\sigma)$ tal que para cada $x \in X$ se tiene $|u(x)| \leq \|x\|g$ en casi todo $s \in S$.

De la definición se deduce que si $u : X \rightarrow L_p(S,\sigma)$ es un operador de Carleman entonces u es de Korotkov; basta para ello tomar $g(s) = \|F(s)\|$, si F es el núcleo de u. Es conocido que el recíproco no es cierto en general. Sin embargo se tiene el siguiente resultado [G-U], del cual incluimos la prueba por no encontrarse desarrollada en la referencia anterior.

TEOREMA 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach. La siguientes condiciones* *son equivalentes:*

(1) X^* *tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

(2) *Si* $u : X \longrightarrow L_p(S, \sigma)$ *es un operador de Korotkov entonces es de Carleman.*

PRUEBA. (1) $\Rightarrow$ (2): Está demostrada en [G-U].

(2) $\Rightarrow$ (1) : Si X^* no tiene la propiedad de Radon-Nikodym existe un operador $v : L_1(S, \sigma) \longrightarrow X^*$ que no es representable por medio de una función fuertemente medible, esto es, no existe $F : S \longrightarrow X^*$, fuertemente medible tal que $v(f) = \int fFd\sigma$. Considerar la restricción $v' : X \longrightarrow L_\infty(S, \sigma)$ del operador adjunto de v a X. Sea $u : X \longrightarrow L_p(S, \sigma)$, el operador definido por la composición $u = i \circ v'$, donde i es la inclusión continua de $L_\infty(S, \sigma)$ en $L_p(S, \sigma)$ (recordar que estamos considerando un espacio de medida finito). El operador u es de Korotkov ya que para cada $x \in X$ se tiene

$$|u(x)(s)| \leq \|v^*(x)\|_\infty \leq \|v^*\| \, \|x\|,$$

en casi todo $s \in S$. Por otra parte u no es de Carleman por ser v no representable. $\square$

Es conocido que los operadores de Korotkov poseen ciertas propiedades de compacidad. Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado [G-U]:

TEOREMA 3.1.3. *Sea* $0 < p < \infty$. *Si* $u : X \longrightarrow L_p(S, \sigma)$ *es un operador de Korotkov L-w compacto entonces u lleva conjuntos débilmente condicionalmente compactos en conjuntos compactos. Por tanto si X no contiene ninguna copia isomorfa de* ℓ_1 *todo operador de Korotkov de X en* $L_p(S, \sigma)$*, L-w compacto, es compacto.*

En este Capítulo daremos una extensión de la definición de operador de Carleman y de Korotkov para operadores definidos sobre un espacio de Banach con valores en un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Demostraremos su consistencia con las definiciones anteriores, estudiaremos varias propiedades de estos operadores asociando a cada operador su núcleo fuertemente medible y utilizando como herramientas principales: primero, una representación adecuada del retículo de Banach como un espacio de funciones integrables respecto de cierta medida vectorial numerablemente aditiva y segundo, la integración bilineal de Bartle. Obtendremos por ejemplo que un operador de Carleman L-w-compacto es compacto sin ninguna hipótesis sobre el espacio de Banach sobre el que está definido el operador.

A lo largo del Capítulo iremos viendo algunas propiedades del espacio de los operadores de Carleman compactos que mostrarán la analogía de este espacio con el de las funciones fuertemente medibles e integrables en el sentido de Pettis respecto de una medida escalar.

2. Operadores de Carleman y de Korotkov.

Para dar la siguiente generalización de la definición clásica de operador de Carleman necesitamos recordar algunas nociones de retículos de Banach.

Si L es un retículo de Banach orden continuo y $e \in L, e \geq 0$, se nota por $I(e)$ el ideal generado por e, esto es, el conjunto

$$I(e) = \{z \in L : \exists c > 0 \text{ tal que } |z| \leq ce\}.$$

El espacio $I(e)$ dotado de la norma

$$||z||_\infty = \inf\{c > 0 : |z| \leq c||e||^{-1}e\},$$

es un retículo de Banach con el orden de L. La inclusión natural $i_e : I(e) \longrightarrow L$ es un operador lineal y continuo con norma menor o igual que 1. Se define también el operador $P_e : L \longrightarrow I(e)$ como la única proyección lineal definida sobre cada $z \in L$, $z \geq 0$ del siguiente modo $P_e(z) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf\{ne, z\}\}$.

DEFINICIÓN 3.2.1. *Sea X un espacio de Banach, L un retículo de Banach orden continuo con unidad débil y $u : X \longrightarrow L$ un operador lineal. Diremos que u es un operador de Carleman si existe una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de L, positivos y disjuntos dos a dos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es una unidad débil en L y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P_{e_n} \circ u = i_{e_n} \circ u_{e_n}$, donde $u_{e_n} : X \longrightarrow I(e_n)$ definido por $u_{e_n}(x) = P_{e_n}(u(x))$ es un operador compacto.*

Consideremos L un retículo de Banach orden continuo con unidad débil y sea $\tilde{L}$ un espacio de Köthe de funciones definidas sobre un espacio de medida finito (S, Σ, σ), tales que L es orden isométrico a $\tilde{L}$. Observar que siempre existe tal espacio de Köthe, como dijimos en los Preliminares. Notaremos por $w : L \longrightarrow \tilde{L}$ la orden isometría existente entre L y $\tilde{L}$.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de los operadores de Carleman que permitirá posteriormente utilizar representaciones adecuadas del retículo L como espacio de funciones medibles para estudiar algunas propiedades de estos operadores. Asimismo, demuestra la consistencia de nuestra Definición 3.1.1 con la dada en [G-U].

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Un operador lineal $u : X \longrightarrow L$ es de Carleman si y sólo si para el operador inducido $\tilde{u} = w \circ u : X \longrightarrow \tilde{L}$ existe una función fuertemente medible $F : S \longrightarrow X^*$ tal que para todo $x \in X$ la igualdad $\tilde{u}(x)(s) = x(F(s))$ es cierta en casi todo $s \in S$.*

PRUEBA. Suponer que u es un operador de Carleman. Sea entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por la definición. Las funciones $w(e_n)$ tienen soportes disjuntos por ser w un orden isomorfismo. Llamemos B_n al soporte de $w(e_n)$; observar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = S$.

De nuevo por ser w un orden isomorfismo se tiene que

$$w \circ P_{e_n} \circ u = P_{w(e_n)} \circ w \circ u = P_{w(e_n)} \circ \tilde{u},$$

por lo tanto este último operador admite la siguiente factorización:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{P_{w(e_n)}\circ\tilde{u}} & \tilde{L} & & \\ {\scriptstyle u_{e_n}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i_{w(e_n)}} & & \\ I(e_n) & \xrightarrow{w_n} & I(w(e_n)) & \xrightarrow{v_n} & L_\infty(B_n,\sigma), \end{array}$$

donde $w_n : I(e_n) \to I(w(e_n))$ es la restricción continua del operador w a $I(e_n)$ y el operador $v_n : I(w(e_n)) \to L_\infty(B_n,\sigma)$ es la orden isometría definida por $v_n(h) = h/w(e_n)$, para $h \in I(w(e_n))$.

Observar ahora que el operador $v_n \circ w_n \circ u_{e_n}$ es compacto y toma valores en $L_\infty(B_n,\sigma)$, por lo tanto usando [D-U, Teorema III.2] existe una función fuertemente medible $F_n' : B_n \to X^*$ tal que $v_n \circ w_n \circ u_{e_n}(x) = x(F_n'(\cdot))$ para todo $x \in X$. Se puede comprobar que la función $F_n = w(e_n)F_n'$ verifica que $P_{w(e_n)} \circ \tilde{u}(x) = x(F_n(\cdot))$ para todo $x \in X$. Definimos la función $F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, que es claramente fuertemente medible.

Estamos suponiendo que $\tilde{L}$ es un retículo de funciones orden continuo, por lo tanto para cada $f \in \tilde{L}$ se tiene que $f = \lim_{n\to\infty} f\chi_{(\cup_{k=1}^{n} B_k)}$, incluso en la norma de $\tilde{L}$. Por tanto, para cada $x \in X$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} P_{w(e_n)}(\tilde{u}(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x(F_n(\cdot)) \\ &= x(F(\cdot)), \end{aligned}$$

donde los límites anteriores son en medida.

Recíprocamente, supongamos que existe una función fuertemente medible $F : S \to X^*$ tal que $\tilde{u}(x) = x(F(\cdot))$ para todo $x \in X$. Como en la prueba de [G-U], se puede encontrar una sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ con $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y tales que los operadores $P_{A_n} \circ u : X \to L_\infty(S, \sigma)$ son compactos.

En efecto, por ser F fuertemente medible existe $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples convergiendo a F en casi todo punto. Dado $\epsilon > 0$, por el Teorema de Egorov, existe un conjunto medible A con $\sigma(S \setminus A) < \epsilon$ y tal que $\lim_{n\to\infty} \|F_n(s) - F(s)\| = 0$ uniformemente en $s \in A$. Se definen los operadores de rango finito $u_{F_n} : X \to L_\infty(S, \sigma)$ como los operadores de Carleman $u_{F_n}(x) = x(F_n(\cdot))$. Se comprueba fácilmente que $P_A \circ u$ es límite de los operadores $P_A \circ u_{F_n}$, por lo tanto es un operador compacto. De aquí se sigue la afirmación anterior.

Para terminar observar que $e_n = w^{-1}(\chi_{A_n})$ son los elementos de la sucesión que buscamos para probar que u es un operador de Carleman. □

La siguiente proposición será de utilidad en la Sección 3.

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Un operador débilmente compacto $u : X \to L$ es de Carleman si y sólo si su biadjunto es de Carleman. En ese caso, si L es un espacio de Köthe orden continuo de funciones definidas sobre un espacio de medida finito el núcleo de u y el de u^{**} son iguales en casi todo.*

PRUEBA. Por la Proposición 3.2.2 y el párrafo siguiente a la Definición 3.2.1 podemos suponer de partida que L es un espacio de Köthe de funciones medibles definidas sobre un espacio de medida (S, Σ, σ) finito.

Supongamos que u es un operador de Carleman. Dado que u es débilmente compacto, u^{**} toma valores en L. Suponer que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión dada por la definición. El operador $P_{e_n} \circ u : X \to L$, admite la factorización $P_{e_n} \circ u = i_{e_n} \circ u_{e_n}$, donde $u_{e_n} : X \to I(e_n)$ es un operador compacto. Se puede comprobar que $(u_{e_n})^{**} = (u^{**})_{e_n}$, de lo que se deduce que

$$P_{e_n} \circ u^{**} = i_{e_n} \circ (u^{**})_{e_n},$$

por lo tanto u^{**} es un operador de Carleman ya que $(u^{**})_{e_n}$ es compacto.

Recíprocamente, si u^{**} es un operador de Carleman entonces u también lo es, ya que u es la restricción de u^{**} a X.

Supongamos que $F' : S \to X^{***}$ es una función fuertemente medible tal que $u^{**}(x^{**}) = x^{**}(F'(\cdot))$, para todo $x^{**} \in X^{**}$. Si consideramos la proyección natural $P : X^{***} \to X^*$, es claro que $x^{**}(F'(s)) = x^{**}(P(F'(s))$, por lo tanto podemos suponer que F' el núcleo de u^{**} toma sus valores en X^*. Por otra parte sea $F : S \to X^*$ el núcleo del operador u. Observar que

$$x(F(\cdot)) = u(x) = u^{**}(x) = x(F'(\cdot)),$$

por lo tanto las funciones F y F' son w^*-escalarmente equivalentes y fuertemente medibles. De aquí se puede deducir [D-U, Corolario II.2.7] que ambas coinciden en casi todo $s \in S$, y por tanto que u y u^{**} tienen el mismo núcleo. □

Teniendo en mente la Definición 3.1.1 y siguiendo [G-U] damos la siguiente definición de operador de Korotkov.

DEFINICIÓN 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach, L un retículo de Banach orden continuo con unidad débil y $u : X \to L$ un operador lineal. Diremos que u es un operador de Korotkov si existe una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de L, positivos y disjuntos dos a dos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es una unidad débil en L y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P_{e_n} \circ u = i_{e_n} \circ u_{e_n}$, donde $u_{e_n} : X \to I(e_n)$ es el operador definido por $u_{e_n}(x) = P_{e_n}(u(x))$, para cada $x \in X$.*

Si para los operadores de Carleman teníamos una representación por medio de funciones fuertemente medibles, para los operadores de Korotkov con valores en retículos de Banach orden continuos de funciones medibles obtendremos que existe una representación por medio de funciones que no son necesariamente fuertemente medibles, aunque sí w^*-escalarmente medibles. Seguimos utilizando la misma notación que en las proposiciones anteriores.

PROPOSICIÓN 3.2.5. *Sea $u : X \longrightarrow L$ un operador lineal y $\tilde{L}$ una representación de L como espacio de Köthe de funciones definidas sobre un espacio de medida finito (S, Σ, σ). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *u es un operador de Korotkov.*

(2) *Existe una función $F : S \longrightarrow X^*$, w^*-escalarmente medible tal que para cada $x \in X$, $\tilde{u}(x)(s) = x(F(s))$ en casi todo $s \in S$.*

(3) *El operador inducido $\tilde{u}$ lleva la bola unidad de X en un conjunto orden acotado de $L_0(S, \sigma)$.*

PRUEBA. (1)$\Rightarrow$(2): La prueba es igual que la del Teorema 3.2.2, pero como los operadores $v_n \circ w_n \circ u_{e_n}$ no son necesariamente compactos no se puede aplicar el resultado de Dunford, Pettis y Philips; sin embargo sí podemos aplicar la existencia de un "lifting"[T, 7-1-2], para obtener una función F'_n definida sobre S que es w^*-escalarlmente medible con valores en X^* tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$v_n \circ w_n \circ u_{e_n}(x) = x(F'(\cdot)).$$

(2)$\Rightarrow$ (3): Suponer que tal función F existe. De la demostración de [St, Lemma 2.6] podemos conseguir una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles con $S = \cup_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos tales que, para todo x, $|x(F(s))\chi_{A_n}(s)| \leq \|x\| c_n$ en casi todo $s \in S$. Considerar la función $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{A_n}(s)$, que está bien definida por ser los $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ disjuntos. Se comprueba que, para cada x, $|\tilde{u}(x)(s)| \leq \|x\|\, g(s)$ en casi todo $s \in S$.

(3)$\Rightarrow$(1): Sea g una función medible y positiva definida sobre S verificando que $|\tilde{u}(x)| \leq \|x\|g$ para cada $x \in X$. Considerar una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, cuya unión es S, tales que g esté esencialmente acotado en cada A_n. Entonces $(w^{-1}(\chi_{A_n}))_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión que buscamos para demostrar que u es de Korotkov. $\square$

Como ya comentamos en la sección anterior, se han estudiado algunas condiciones de compacidad de los operadores de Carleman y de Korotkov. Terminaremos esta sección presentado una serie de ejemplos sobre operadores de Korotkov y condiciones de compacidad, para aclarar su relación.

EJEMPLOS 3.2.6.

(1) Un operador de Korotkov L-w-compacto que no es compacto. Considerar $u : \ell_1 \to L_1([0,1])$ definido por $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n r_n$ si $x \in \ell_1$ es la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funciones de Rademacher. Es claro que $|u(x)(s)| \leq \|x\|$, por tanto es un operador de Korotkov; de hecho es orden acotado, por tanto u es L-w-compacto. Por otra parte u no es compacto pues la imagen de la bola unidad de X contiene a las funciones de Rademacher.

(2) Un operador de Korotkov compacto que no es de Carleman. Sea L un espacio de Köthe de funciones orden continuo. Supondremos que el espacio de medida base es el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue λ. Considerar la sucesión de los intervalos diádicos $A_1 = [0,1/2), A_2 = [1/2,1), A_3 = [0,1/4), A_4 = [1/4,1/2), A_5 = [1/2,3/4), \ldots$. Por orden continuidad de L, como $\lambda(A_n)$ tiende a cero, es claro que la sucesión $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ tiende a cero en norma de L. Definimos el operador $u : \ell_1 \to L$ como

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{A_n},$$

si $x \in \ell_1$ es la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. El operador u está bien definido y además verifica que

$$|u(x)(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \chi_{A_n}(s) \leq \|x\|,$$

por lo tanto es de Korotkov con $g(s) = 1$ para todo $s \in [0,1]$. Observar que la imagen de la bola unidad de ℓ_1 mediante u está incluida en la envolvente convexa y cerrada de la sucesión $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$. Como esta sucesión es un conjunto relativamente compacto su envolvente convexa y cerrada también lo es. Esto prueba que el operador u es compacto. Por otra parte u no es de Carleman. Por reducción al absurdo, suponer que existe una función fuertemente medible $F : [0,1] \to \ell_\infty$ cumpliendo que $u(x)(\cdot) = x(F(\cdot))$ para todo x en ℓ_1. Entonces para cada n natural la igualdad $u(e_n)(s) = e_n(F(s))$ es cierta en casi todo $s \in S$, por lo tanto la componente n-ésima de F debe coincidir con la función χ_{A_n} en casi todo punto. Al ser F fuertemente medible F tiene que tomar valores esencialmente en un separable, por lo tanto debe existir $Z \subset [0,1]$ de medida nula tal que $F([0,1] \setminus Z)$ es separable. Sea pues $(F(s_n))_{n=1}^{\infty}$ dentro de la imagen de $[0,1] \setminus Z$ un conjunto denso. Elegir $s \notin Z$ con $s \neq s_n$. Fijemos k natural; como $s \neq s_k$, podemos encontrar algún $A_{i(k)}$ tal que s no pertenezca a $A_{i(k)}$ pero s_k sí. Entonces es claro que la distancia en ℓ_∞ entre $F(s)$ y $F(s_k)$ es 1. Esto contradice que $(F(s_n))_{n=1}^{\infty}$ sea denso en $F([0,1] \setminus Z)$.

(3) Un operador de Carleman que no es débilmente compacto. Considerar el operador lineal definido sobre ℓ_1 con valores en $L_1[0,1]$ que lleva el vector de la base canónica $e_k \in \ell_1$ en la función $n(n+1)\chi_{B_n}$, donde $B_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Este operador es de Carleman pero no es débilmente compacto pues la imagen de la bola unidad de ℓ_1 no es equi-integrable en $L_1([0,1])$.

(4) Un operador de Carleman débilmente compacto que no es compacto. Considerar el operador lineal de ℓ_1 en $L_2[0,1]$ que lleva el vector de la base canónica $e_n \in \ell_1$ en la función $\sqrt{n(n+1)}\chi_{B_n}$. Este operador es débilmente compacto por ser $L_2([0,1])$ reflexivo, pero no es compacto.

3. Núcleos de Carleman y la integral bilineal de Bartle.

En esta Sección demostraremos que los núcleos asociados a operadores de Carleman compactos son integrables en el sentido de Bartle respecto de cierta medida vectorial y cierta aplicación bilineal. Comenzaremos la Sección introduciendo el concepto de integrabilidad respecto de una medida vectorial.

Sea $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva. Una función medible $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se dice integrable respecto de ν si (a) para cada $y^* \in Y^*$, f es integrable respecto de $|y^*\nu|$ y (b) para cada conjunto medible A existe un elemento en Y, que es notado por $\int_A f d\nu$, tal que $y^*(\int_A f d\nu) = \int_A f dy^*\nu$ para cada $y^* \in Y^*$.

El espacio de las funciones que satisfacen las condiciones (a) y (b) se conoce como el espacio de funciones integrables respecto de ν y es notado por $L_1(\nu)$. Las funciones que satisfacen la condición (a) se llaman escalarmente integrables respecto de ν. Se define una norma en $L_1(\nu)$ del siguiente modo: si $f \in L_1(\nu)$ entonces

$$||f|| = \sup\left\{\int |f| d|y^*\nu| : ||y^*|| \leq 1\right\}.$$

Se puede demostrar que con esta norma $L_1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo con el orden puntual (ver [C]). Se puede dar una norma equivalente sobre $L_1(\nu)$ poniendo $||f|| = \sup\{||\int_A f d\nu|| : A \in \Sigma\}$. Para más propiedades del espacio $L_1(\nu)$ ver [C].

También necesitaremos la definición de integración bilineal dada por Bartle [B]. Aunque su definición es más general nosotros sólo la necesitaremos para el caso en que la medida vectorial sea numerablemente aditiva y esté dominada respecto de la aplicación bilineal considerada. Para la definición de dominación de la medida respecto de la aplicación bilineal ver la Sección 1 del Capítulo 2.

Sean X, Y, Z tres espacios de Banach y $\phi : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal y continua. Sea $F : S \to X$ una función fuertemente medible y $\nu : \Sigma \to Y$ una medida vectorial numerablemente aditiva.

Diremos que F es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν si (a) existe una sucesión de funciones simples $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a F en casi todo punto de S respecto de una medida de control de la semivariación de ν respecto de ϕ y (b) la sucesión de integrales indefinidas $((\phi)\int_A F_n d\nu)_{n=1}^{\infty}$ converge en la norma de Z para cada conjunto medible A, donde

$$(\phi)\int_A F_n d\nu = \sum_{k=1}^{m} \phi(x_k, \nu(A_k \cap A)) \in Z,$$

si $F_n = \sum_{k=1}^{m} x_k \chi_{A_k}$. El límite de tal sucesión será notado por $(\phi)\int_A F d\nu$. Se comprueba que el límite de $(\phi)\int_A F_n d\nu$ existe en Z uniformemente en A, por lo tanto la integral indefinida $(\phi)\int F d\nu$ es numerablemente aditiva. Ver [B] para más propiedades de esta integral.

En esta Sección estudiaremos la integrabilidad en el sentido de Bartle en el caso de que ϕ sea la aplicación bilineal $\phi_\epsilon : X \times Y \to X \otimes_\epsilon Y$, definida como $\phi_\epsilon(x, y) = x \otimes y$ con valores en el producto tensorial inyectivo de X e Y. Observar que en ese caso la semivariación de Bartle de ν respecto de ϕ_ϵ está dominada respecto de una medida de control de ν (Sección 1 del Capítulo 2).

Sea L un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Se demostró en [C] que existe un espacio de Banach Y, y una medida vectorial numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \to Y$ tal que L y $L_1(\nu)$ son espacios orden isométricos. Utilizaremos esta representación de L en los siguientes resultados.

Supongamos ahora que $F : S \to X^*$ es una función tal que para cada par $x \in X$, $y^* \in Y^*$, la función $x(F(\cdot))$ es integrable respecto de $|y^*\nu|$. Podemos asociar a la función F la medida vectorial $\int F d\nu$ con valores en $\mathrm{Bil}(X \times Y^*)$ del siguiente modo. Para cada conjunto medible A, considerar la aplicación $\int_A F d\nu$

definida como

$$\left(\int_A F d\nu\right)(x, y^*) = \int_A x(F(s)) dy^*\nu(s)$$

sobre cada par $(x, y^*) \in X \times Y^*$. Esta aplicación así definida es bilineal y utilizando el teorema del grafo cerrado se demuestra que es separadamente continua, por lo tanto es una forma bilineal continua, de modo que $\int_A F d\nu \in \mathrm{Bil}(X \times Y^*)$.

Para cada conjunto medible A se tiene que

$$\sup\left\{\left|\int_A x(F(s)) dy^*\nu\right| : \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1\right\} = \left\|\int_A F d\nu\right\|,$$

entonces por el Teorema de acotación uniforme de Nikodym-Grothendieck [D-U] se deduce que que la medida vectorial finitamente aditiva que asocia a cada A la forma bilineal $\int_A F d\nu$ tiene semivariación acotada. Vamos a demostrar que si F es fuertemente medible el hecho de que la medida asociada a F sea numerablemente aditiva es equivalente a que F induzca un operador de Carleman compacto de X en $L_1(\nu)$ mediante la aplicación $x \in X \to x(F(\cdot)) \in L_1(\nu)$. Para ello necesitaremos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.3.1. *Sea $F : S \to X^*$ una función integrable en el sentido de Bartle respecto de $\nu : \Sigma \to Y$ y $\phi_\epsilon : X^* \times Y \to X^* \otimes_\epsilon Y$. Para cada $x \in X$, $x(F(\cdot)) \in L_1(\nu)$ y para todo $A \in \Sigma$ se tiene que $(\phi_\epsilon)\int_A F d\nu = \int_A F d\nu$.*

PRUEBA. Si F puede escribirse como $F(s) = x^*\chi_B(s)$ es claro que

$$(\phi_\epsilon)\int_A F d\nu = x^* \otimes \nu(A \cap B) = \int_A F d\nu,$$

y por linealidad el resultado es cierto para funciones simples.

Para una función arbitraria F integrable en el sentido de Bartle podemos encontrar por definición una sucesión de funciones simples $(F_n)_{n=1}^\infty$ que convergen a F en casi todo punto y tales que $((\phi_\epsilon)\int_A F_n d\nu)_{n=1}^\infty$ converge a $(\phi_\epsilon)\int_A F d\nu$

en $X^* \otimes_\epsilon Y$, uniformemente en A. Por lo tanto, fijados $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, la sucesión $(x(F_n(\cdot)))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L_1(|y^*\nu|)$, y su límite debe ser $x(F(\cdot))$, de este modo podemos asociar a F la medida vectorial $\int F d\nu$ como hicimos en el párrafo previo a la proposición. Para cada conjunto medible A se tiene que

$$\left((\phi_\epsilon)\int_A F_n d\nu\right)(x, y^*) = \int_A x(F_n(s)) dy^*\nu(s),$$

que es una sucesión convergente a $\int_A x(F(s))dy^*\nu(s)$, de lo que se deduce que $(\phi_\epsilon)\int_A F d\nu = \int_A F d\nu$.

Para terminar observar que $\int_A F d\nu \in X^* \otimes_\epsilon Y$, por tanto si $x \in X$ entonces $\int_A x(F(s))d\nu(s) = (\int_A F d\nu)(x) \in Y$, que por definición es equivalente a decir que $x(F(\cdot))$ pertenezca a $L_1(\nu)$. □

El siguiente teorema es el resultado central de esta sección.

TEOREMA 3.3.2. *Sea $F : S \to X^*$ una función fuertemente medible. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *La función F induce un operador compacto de X en $L_1(\nu)$ definido por $x \to x(F(\cdot))$.*
(2) *La función F induce un operador L-w-compacto de X en $L_1(\nu)$ definido por $x \to x(F(\cdot))$.*
(3) *Para cada par $(x, y^*) \in (X, Y^*)$, la función $x(F(\cdot))$ es integrable respecto de $|y^*\nu|$ y la correspondiente medida vectorial $\int F d\nu$ asociada a F es numerablemente aditiva.*
(4) *La función F es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y de la aplicación bilineal $\phi_\epsilon : X^* \times Y \to X^* \otimes_\epsilon Y$.*

PRUEBA. (1) $\Rightarrow$ (2): Sigue pues todo operador compacto es L-w-compacto.

(2) $\Rightarrow$ (3): La primera parte de la condición (3) sigue directamente de la

definición de $L_1(\nu)$. Para probar la segunda considerar σ una medida de control para ν. Observar que $\|\int_A F d\nu\| \leq \sup\{\|x(F(\cdot))\chi_A\|_{L_1(\nu)} : x \in B_X\}$, por lo tanto como el operador inducido por F es L-w-compacto podemos deducir que $\|\int_A f d\nu\| \to 0$ cuando $\sigma(A) \to 0$, y de aquí que la medida vectorial $\int f d\nu$ es numerablemente aditiva. Esta implicación está demostrada en [C].

(3) $\Rightarrow$ (4): Considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto medible $E_n = \{s \in S : \|F(s)\| \leq n\}$. Las funciones $F\chi_{E_n}$ son fuertemente medibles y esencialmente acotadas, por tanto son integrables en el sentido de Bartle [B, Theorem 3]. Es claro además que $(F\chi_{E_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a F en casi todo punto.

Por otra parte, si A es un conjunto medible, por la Proposición 3.3.1 tenemos que

$$(\phi_\epsilon)\int_A F\chi_{E_n} d\nu = \int_A F\chi_{E_n} d\nu = \int_{A\cap E_n} F d\nu,$$

y la sucesión de formas bilineales $(\int_{A\cap E_n} F d\nu)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\int_A F d\nu$, ya que $(A \cap E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente y $\int F d\nu$ es una medida vectorial numerablemente aditiva por hipótesis. Observar que las medidas vectoriales $\int f\chi_{E_n} d\nu$ son numerablemente aditivas, y para cada medible A la sucesión $\int_A F\chi_{E_n} d\nu$ converge a $\int_A F d\nu$. Luego por [B, Theorem 10] y el Teorema de Vitali-Hahn-Saks se sigue que F es integrable en el sentido de Bartle.

(4) $\Rightarrow$ (1): Dado que F es integrable en el sentido de Bartle podemos encontrar una sucesión de funciones simples $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ convergentes a F en casi todo punto y tales que la sucesión de integrales indefinidas $(\phi_\epsilon)\int_A F_n d\nu$ converjan a $(\phi_\epsilon)\int_A F\nu$ en la norma de $X^* \otimes_\epsilon Y$ (incluso uniformemente en $A \in \Sigma$). Para cada $x \in X$, por la Proposición 3.3.1, tenemos de nuevo que $x(F(\cdot)) \in L_1(\nu)$. Notemos por u_F el operador de Carleman definido sobre X con valores en $L_1(\nu)$ asociado a F y por u_{F_n} los operadores de Carleman asociados a las funciones simples F_n.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|u_F - u_{F_n}\| &= \sup\{\|x(F(\cdot) - F_n(\cdot))\|_{L_1(\nu)} : x \in B_X\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\int_A x((F - F_n)(s))dy^*\nu\right| : x \in B_X, y^* \in B_{Y^*}, A \in \Sigma\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left\|\int_A Fd\nu - \int_A F_n d\nu\right\| : A \in \Sigma\right\}.
\end{aligned}$$

Como la sucesión de medidas vectoriales numerablemente aditivas $(\int F_n d\nu)_{n=1}^{\infty}$ converge en la norma de la semivariación a la medida vectorial $\int Fd\nu$ podemos deducir que el operador u_F es límite en la norma de operadores de los operadores de rango finito u_{F_n}, demostrando en particular que u_F es compacto. □

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente corolario.

COROLARIO 3.3.3. *Sea L un retículo orden continuo con unidad débil y $u : X \to L$ un operador de Carleman. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *u es un operador compacto.*

(2) *u es un operador L-w compacto.*

(3) *u es límite de operadores de rango finito.*

PRUEBA. Por la Proposición 3.1.1 podemos suponer que $L = L_1(\nu)$ para cierta medida vectorial numerablemente aditiva ν. El corolario sigue entonces de las condiciones (1), (2) y de la prueba de la implicación (4) $\Rightarrow$ (1) del teorema anterior. □

Si F es ahora una función fuertemente medible $F : S \to X$ tal que $x^*(F(\cdot)) \in L_1(|y^*\nu|)$ para todo $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, podemos definir la medida vectorial $\int Fd\nu : \Sigma \to \mathrm{Bil}(X^*, Y^*)$ del mismo modo que antes: para cada medible A tenemos $(\int_A Fd\nu)(x^*, y^*) = \int_A x^*(F(s))dy^*\nu$. La prueba del siguiente teorema es análoga a la de Teorema 3.3.2, por lo tanto será omitida.

TEOREMA 3.3.4. *Sea $F : S \to X$ una función fuertemente medible. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *La función F induce un operador compacto de X^* en $L_1(\nu)$ definido por $x^* \to x^*(F(\cdot))$.*
(2) *La función F induce un operador L-w-compacto de X en $L_1(\nu)$ definido por $x^* \to x^*(F(\cdot))$.*
(3) *Para cada par $(x^*, y^*) \in (X^*, Y^*)$, la función $x^*(F(\cdot))$ es integrable respecto de $|y^*\nu|$ y la correspondiente medida vectorial $\int F d\nu$ asociada a F es numerablemente aditiva.*
(4) *La función F es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y de la aplicación bilineal $\phi_\epsilon : X \times Y \to X \otimes_\epsilon Y$.*

COMENTARIO 3.3.5. Este teorema tiene también asociado un corolario análogo al Corolario 3.3.3. Observar que en este caso los términos de la sucesión de operadores de rango finitos postulada en la condición (3) del Corolario 3.3.3 son operadores w^* a w-continuos.

El siguiente corolario da una condición equivalente de ser integrable en el sentido de Bartle para una función $F : S \to X$ fuertemente medible: que su medida vectorial asociada tome valores en $X \otimes_\epsilon Y$ en vez de en $\mathrm{Bil}(X^*, Y^*)$. Observar que esta condición guarda cierta analogía con el caso de las funciones fuertemente medibles integrables en el sentido de Pettis, a las que se le pide que su integral indefinida tome valores en X en lugar de en X^{**}.

COROLARIO 3.3.6. *Sea $F : S \to X$ una función fuertemente medible. La función F es integrable respecto de ν y de la aplicación bilineal $\phi_\epsilon : X \times Y \to X \otimes_\epsilon Y$ si y sólo si para cada par (x^*, y^*) de elementos de $X^* \times Y^*$, la función $x^*(F(\cdot))$ es integrable respecto de $|y^*\nu|$ y la correspondiente medida vectorial asociada a F toma valores en $X \otimes_\epsilon Y$.*

PRUEBA. Para ver que la condición es suficiente probaremos que la medida inducida por F es numerablemente aditiva. Basta ver que es débilmente numerablemente aditiva por estar definida sobre una σ-álgebra. Por [L2] es suficiente probar que para cada $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ la medida escalar $(\int F d\nu)(x^*, y^*)$ es numerablemente aditiva pero esto es claro ya que

$$(\int_A F d\nu)(x^*, y^*) = \int_A x^*(F(s)) dy^* \nu(s)$$

para cualquier conjunto medible A. □

Del Teorema 3.3.4 y del Comentario 3.3.5 podemos deducir que una función $F : S \rightarrow X$ es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y de la aplicación bilineal $\phi_\epsilon : X \times Y \rightarrow X \otimes_\epsilon Y$ si y sólo si la función F induce un operador que pertenece a $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$. Vamos a probar que el correspondiente resultado para el producto tensorial proyectivo es falso. Antes demostraremos el siguiente lema, para el cual necesitamos el siguiente resultado debido a Robert [R]:

> Sea X un espacio de Banach y L un retículo de Banach orden continuo. Si todos los operadores lineales y continuos de X en L son orden acotados entonces X es de dimensión finita.

LEMA 3.3.7. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y L un retículo de Banach con dual orden continuo, y uno de ellos con la propiedad de la aproximación. Entonces existe un operador $u \in L \otimes_m X$ que no pertenece a $L \otimes_\pi X$.*

PRUEBA. Por tener uno de los dos espacios la propiedad de la aproximación el espacio $L \otimes_\pi X$ es en realidad isométrico al espacio de los operadores nucleares w^* a w-continuos de X^* en L. Suponer que todo elemento de $L \otimes_m X$ es un operador nuclear; dado que la norma proyectiva define una topología más fina que la norma de operadores orden acotados, por el Teorema de la aplicación abierta se deduce que ambas normas serían equivalentes sobre $L \otimes X$, por ello los respectivos duales serían isomorfos. Es conocido que el dual de $L \otimes_m X$ es el espacio de los operadores orden acotados definidos sobre X y con valores en el retículo dual L^*. Por otra parte el dual de $L \otimes_\pi X$ se identifica isométricamente con el espacio $\mathcal{L}(X, L^*)$. Esto es una contradicción con [R]. □

PROPOSICIÓN 3.3.8. *Existen espacios de Banach X e Y, una medida vectorial numerablemente aditiva $\nu : \Sigma \longrightarrow Y$, y una función $F : S \longrightarrow X$ fuertemente medible que es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y de $\phi_\pi : X \times Y \longrightarrow X \otimes_\pi Y$, pero el operador de Carleman asociado a F no pertenece a $L_1(\nu) \otimes_\pi X$.*

PRUEBA. Considerar la medida vectorial ν definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue del intervalo $[0, \pi]$ y con valores en $\ell_2(\mathbb{Z})$, dada por

$$\nu(A) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_A \operatorname{sen}(kt) d\lambda(t) \right)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Esta medida está bien definida ya que $(\operatorname{sen}(kt))_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal en $L_2([0, \pi])$ y es numerablemente aditiva. El retículo de Banach de las funciones integrables respecto de ν es $L_2([0, \pi])$ ya que la sucesión $(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(kt))_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $[0, \pi]$ y $L_2([0, \pi])$ no contiene ninguna copia de c_0. Dado que $L_1([0, \pi])$ contiene subespacios isomorfos a $\ell_2(\mathbb{Z})$ podemos considerar ν como una medida valorada en $L_1([0, \pi])$, obteniendo que $L_1(\nu)$, vista ν con valores en $L_1([0, \pi])$, es el retículo de funciones $L_2([0, \pi])$ dotado de una norma equivalente. Por el lema anterior existe un operador u en $L_1(\nu) \otimes_m \ell_2(\mathbb{Z})$ que no pertenece a $L_1(\nu) \otimes_\pi \ell_2(\mathbb{Z})$. Por [H-N-O], el operador u tiene asociado un núcleo fuertemente medible, digamos $F : [0, \pi] \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$, tal que $u(x^*) = x^*(F(\cdot))$ para cada $x^* \in \ell_2(\mathbb{Z})^*$.

Veamos ahora que F es integrable en el sentido de Bartle respecto de ν y $\phi_\pi : \ell_2(\mathbb{Z}) \times L_1([0, \pi]) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes_\pi L_1([0, \pi])$.

Utilizando la identificación del producto tensorial $L_1(\nu) \otimes_m \ell_2(\mathbb{Z})$ con el espacio

$$L_1(\nu)(\ell_2(\mathbb{Z})) = \{F : S \to \ell_2(\mathbb{Z}) : F \text{ es fuertemente medible y } ||F(\cdot)|| \in L_1(\nu)\},$$

es posible encontrar una sucesión de funciones simples $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a F en casi todo punto y tales que la sucesión de operadores de Carleman asociados $(u_{F_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a u en la norma de $L_1(\nu) \otimes_m X$.

Primeramente probaremos que para todo conjunto medible A, la aplicación bilineal $\int_A F d\nu$ definida como en el párrafo previo al Teorema 3.3.4, es un elemento de $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes_\pi L_1([0,\pi])$. Para ello observar que el operador inducido por la aplicación bilineal $\int_A F d\nu$, definido sobre $\ell_2(\mathbb{Z})^*$ y con valores en $L_1([0,\pi])$, es la composición de u con el operador integración sobre A, que será notado por $\int_A$, y que está definido como $f \in L_1(\nu) \to \int_A f d\nu \in L_1([0,\pi])$.

Por otra parte, como u es un operador orden acotado, factoriza a través de un $C(K)$-espacio (concretamente el ideal generado por la función que acota en $L_1([0,1])$ a la imagen de la bola unidad de X) mediante dos operadores $S_1 : \ell_2(\mathbb{Z})^* \to C(K)$ y $S_2 : C(K) \to L_1(\nu)$ tales que $u = S_2 \circ S_1$. Observar que el operador adjunto $(\int_A F d\nu)^*$ admite la factorización $(\int_A F d\nu)^* = S_1^* \circ S_2^* \circ (\int_A)^*$, por lo tanto $(\int_A F d\nu)^*$ es un operador nuclear ya que $(\int_A)^* \circ S_2^*$ y S_1^* son operadores 2-sumantes [D-U, pág. 254]. Se deduce de ésto que $\int_A F d\nu = (\int_A F d\nu)^{**}$ es un operador nuclear. Como el espacio de los operadores nucleares de $\ell_2(\mathbb{Z})$ en $L_1([0,\pi])$ coincide con el producto tensorial proyectivo $\ell_2(\mathbb{Z}) \otimes_\pi L_1([0,\pi])$ se sigue que $\int_A f d\nu \in \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes_\pi L_1([0,\pi])$.

Observar que la semivariación en el sentido de Bartle de ν respecto de ϕ_π está dominada. En efecto, dada una partición $(A_k)_{k=1}^n$ de A, $(x_k)_{k=1}^n$ en $B_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ y $w \in \mathcal{L}(L_1([0,\pi]), \ell_2(\mathbb{Z})^*)$, tenemos que

$$|\sum_k w(\nu(A_k))(x_k)| \leq \sum_{k=1}^n ||w \circ \nu(A_k)|| \leq K_G ||w|| \, ||\nu||(A),$$

donde K_G es la constante de Grothendieck [Pi]. Obtenemos por tanto que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \phi_\pi(x_k, \nu(A_k)) \right\|_\pi \leq K_G \|\nu\|(A).$$

Para finalizar la prueba basta con demostrar que para cada conjunto medible A, las integrales $(\phi_\pi) \int_A F_n d\nu \in \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes L_1([0,\pi])$, convergen a $\int_A F d\nu$ en la norma del producto tensorial proyectivo.

Como ya hemos visto antes para cada operador orden acotado definido sobre $\ell_2(\mathbb{Z})^*$ con valores en $L_1(\nu)$, la composición con el operador integración sobre A produce un operador nuclear de $\ell_2(\mathbb{Z})^*$ en $L_1([0,\pi])$. Se sigue del Teorema del grafo cerrado que existe una constante c tal que:

$$\left\| \int_A F d\nu - ((\phi_\pi) \int_A F_n d\nu) \right\|_\pi = \left\| \int_A \circ (u - u_{F_n}) \right\|_\pi \leq c \|u_F - u_{F_n}\|_m,$$

que por hipótesis tiende a cero. □

4. El espacio de los operadores de Carleman compactos.

En esta Sección estudiaremos el espacio de las funciones fuertemente medibles asociadas a operadores de Carleman compactos. Como ya hicimos en la Sección anterior utilizaremos una representación del retículo L como un $L_1(\nu)$ para cierta medida vectorial numerablemente aditiva. Comenzamos con una definición.

DEFINICIÓN 3.4.1. *Definimos el espacio $P_1(\nu, X)$ como el espacio de las (clases de) funciones fuertemente medibles $F : S \longrightarrow X$ tales que definen un operador de Carleman compacto de X^* en $L_1(\nu)$ mediante la aplicación definida por $x^* \longrightarrow x^*(F(\cdot))$, donde se identifican dos funciones si son iguales salvo en un conjunto de medida nula para una medida de control de ν.*

Dotaremos a este espacio de la norma de operadores, esto es, si F es un elemento de $P_1(\nu, X)$ ponemos $\|F\| = \sup\{\|x^*(F(\cdot))\|_{L_1(\nu)} : x^* \in B_X^*\}$.

Observar que si $F_1 = F_2$ en casi todo punto entonces ambas funciones definen el mismo operador de Carleman, y recíprocamente si dos funciones fuertemente medibles definen el mismo operador de Carleman entonces coinciden en casi todo punto.

COMENTARIO 3.4.2. Para un espacio dual X^*, una función F de $P_1(\nu, X^*)$ define en particular un operador de Carleman compacto de X en $L_1(\nu)$. Recíprocamente, por la Proposición 3.2.3, todo operador de Carleman compacto de X en $L_1(\nu)$ tiene asociado un núcleo fuertemente medible F que está en $P_1(\nu, X^*)$. Por lo tanto podemos identificar el espacio de los operadores de Carleman compactos de X en $L_1(\nu)$ con el espacio de funciones $P_1(\nu, X^*)$.

Observar que la notación usada para el espacio de los operadores de Carleman compactos es consistente con la notación usual del espacio de las funciones fuertemente medibles y Pettis integrables respecto de una medida escalar, esto es, si ν es una medida positiva entonces $P_1(\nu, X)$ es el clásico espacio de funciones fuertemente medibles integrables en el sentido de Pettis respecto de ν.

PROPOSICIÓN 3.4.3. *El espacio completado de $P_1(\nu, X)$ es $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$. Si L es un retículo orden continuo con unidad débil, entonces $L \otimes_\epsilon X^*$ es el completado del espacio de los operadores de Carleman compactos definidos en X con valores en L.*

PRUEBA. En la prueba de la implicación (4) $\Rightarrow$ (1) en el Teorema 3.3.4 se puede encontrar que el operador de Carleman inducido por F es límite en la norma de operadores de los operadores finito dimensionales asociados a una cierta sucesión de funciones simples que convergen a F en casi todo punto.

Además estos operadores pueden elegirse w^* a w-continuos. Por tanto el operador de Carleman inducido por F es un elemento de $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$. La densidad de los operadores asociados a funciones simples $\sum_{k=1}^n x_k \chi_{A_k}$ en el producto tensorial inyectivo $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$ demuestra la primera parte. La segunda sigue del Comentario 3.4.2. y de que L es orden isomorfo a un $L_1(\nu)$. □

En la siguiente proposición identificaremos los operadores de $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$ que son de Carleman como los elementos de $P_1(\nu, X)$.

PROPOSICIÓN 3.4.4. *El operador asociado a una función $F \in P_1(\nu, X)$ es límite de operadores de rango finito y w^* a w-continuos. Recíprocamente, el núcleo $F : S \to X^{**}$ de un operador de Carleman compacto y w^* a w-continuo de X^* en $L_1(\nu)$ es un elemento de $P_1(\nu, X)$.*

PRUEBA. La primera afirmación es clara por el Teorema 3.3.4. Para la segunda es suficiente demostrar que el núcleo $F : S \to X^{**}$ toma valores esencialmente en X. Considerar un funcional de Rybakov $y^* \in Y^*$; si $u \in L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$ entonces $u \in L_1(|y^*\nu|) \otimes_\epsilon X$. De aquí se deduce que el núcleo de F es una función Pettis integrable respecto de $|y^*\nu|$, y además $\int_A F d|y^*\nu|$ es un elemento de X para cada conjunto medible A. Considerar un conjunto medible A donde F esté esencialmente acotada; $F\chi_A$ es por tanto integrable Bochner y sus integrales caen en X por tanto $F\chi_A$ toma valores esencialmente en X [D-U, Theorem V.2.8], de donde se deduce que F toma esencialmente sus valores en X. □

COMENTARIO 3.4.5. Si Z es un subespacio de X y $v \in Z \otimes_\epsilon L_1(\nu)$ no es de Carleman entonces su extensión $u : X^* \to L_1(\nu)$ no es de Carleman. En efecto, si lo fuese existiría una función fuertemente medible $F : S \to X$ tal que $u(x) = x(F(\cdot))$ para cada $x \in X$. Observar que si $h \in L_1(\nu)^*$ y $x^* \in X^*$ se tiene que:

$$u^*(h)(x^*) = v^*(h)(x^*|_Z),$$

donde $(x^*|_Z)$ es la restricción de x^* a Z. De aquí se deduce que $u^*(h) \in Z$.

Como en la prueba de la Proposición 3.4.4 se puede demostrar que F toma sus valores esencialmente en $Z \subset X$, y por tanto se deduce que v es de Carleman, que es una contradicción.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que si L no es puramente atómico y X es de dimensión infinita entonces siempre existen operadores compactos que no son de Carleman. Observar que si el retículo de Banach es puramente atómico todo operador $u : X \to L$ es de Carleman.

Primeramente daremos una demostración para el caso en que L tiene cotipo finito; posteriormente veremos otra prueba diferente para la cual no es necesaria tal condición. Recordamos que un espacio de Banach tiene cotipo $q \in [2, \infty)$ si existe una constante $c \geq 0$ tal que para toda sucesión finita de vectores $x_1, ..., x_n$ en X se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^{n} x_k r_k(t)||^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

LEMA 3.4.6. *Si $L_1(\nu)$ tiene cotipo finito y no es puramente atómico entonces existe una sucesión $(r_n)_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\nu)$ de funciones construidas como las de Rademacher tales que $\sum_k |r_k(h)|^2 < \infty$ para toda $h \in L_1(\nu)^*$.*

PRUEBA. Lo demostraremos suponiendo que el espacio S es el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue λ como medida de control para ν, de modo que $L_\infty([0, 1]) \subset L_1(\nu) \subset L_1([0, 1])$. En el caso general la prueba es similar.

Considerar el operador inclusión

$$i : L_\infty([0, 1]) \to L_1(\nu).$$

Como $L_1(\nu)$ tiene cotipo finito, el operador inclusión es q-sumante [D-J-T, Theorem 11.14] para cierto $2 < q < \infty$, y factoriza por tanto a través de cierto $L_q(\alpha)$-espacio como $u_\mu = S_2 \circ S_1$, donde $S_1 : L_\infty([0,1]) \to L_q(\alpha)$ y $S_2 : L_p(\alpha) \to L_1(\nu)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea f_n un elemento en $L_p(\alpha)$ que se transforma en r_n por el operador S_2. Dado que la sucesión $(r_n)_{n=1}^\infty$ tiende débilmente a cero en $L_1(\nu)$ (de hecho, para toda $g \in L_1([0,1])$, las integrales $\int_0^1 g(t) r_n(t) d\lambda(t)$ tienden a cero) se deduce que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$, que es un conjunto acotado en $L_p(\alpha)$, debe tener una subsucesión que tiende débilmente a cierta f tal que $S_2(f) = 0$. Por [A-D, Proposition D] existe una subsucesión de $(f_n - f)_{n=1}^\infty$ que es débilmente 2-sumable, por lo tanto la subsucesión imagen correspondiente también es débilmente 2-sumable. Esto termina el lema. □

Podemos enunciar el siguiente resultado.

TEOREMA 3.4.7. *Si $L_1(\nu)$ tiene cotipo finito y no es puramente atómico y X es un espacio de Banach de dimensión infinita entonces $P_1(\nu, X)$ no es completo.*

PRUEBA. Por el lema anterior sabemos que existe una subsucesión de funciones como las de Rademacher, que seguiremos notando por $(r_n)_{n=1}^\infty$, en $L_1(\nu)$ que es débilmente 2-sumable.

Podemos suponer que X tiene base de Schauder: en efecto, si existe Z subespacio cerrado de X con base de Schauder y $u \in Z \otimes_\epsilon L_1(\nu)$ que no es de Carleman, entonces su extensión a un operador de X^* en $L_1(\nu)$, que es un elemento de $X \otimes_\epsilon L_1(\nu)$, tampoco es de Carleman por el Comentario 3.4.5.

Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una base de Schauder en X. Sea $d_n = n^2 4^n$. Para cada natural n existe E_n subespacio de dimensión finita de X 2-isomorfo a $\ell_2^{d_n}$ tal que está contenido en el espacio generado por los vectores de la base $(x_j)_{j \in A_n}$, donde los A_n son ciertos intervalos de los números naturales disjuntos y consecutivos, esto es, $\max A_n < \min A_{n+1}$. Llamaremos $P_{A_n} : X \to X$ a la proyección $P_{A_n}(x) = \sum_{j\in A_n} x(x_j^*)x_j$ con x_n^* los correspondientes funcionales biortogonales de los x_n.

Sean $(e_{n,k})$ vectores normalizados de E_n tales que

$$\frac{1}{2}\|(a_k)_{k=1}^{2^n}\|_2 \leq \|\sum_{k=1}^{2^n} a_k e_{n,k}\| \leq 2\|(a_k)_{k=1}^{2^n}\|_2.$$

Definimos el operador $u_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{d_n} e_{n,k}\otimes r_k$, sobre X^* y con valores en L.

Se comprueba que

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{2^n}\|(r_k)_{k=1}^{\infty}\|_2^w,$$

y que para cada $s \in S$ se tiene que

$$\left\|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{d_n} e_{n,k} r_k(s)\right\| = n.$$

Se puede considerar el operador $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ que claramente es un elemento de $L_1(\nu)\otimes_\epsilon X$. Suponer que existe $F : S \to X$ función fuertemente medible tal que $x^*(F(\cdot)) = u(x^*)$ para cada $x^* \in X^*$.

Observar que la función $P_{A_n}(F(\cdot)) : S \to X$ es el núcleo del operador u_n ya que

$$\begin{aligned} x^*(P_{A_n}(F(\cdot))) &= P_{A_n}^*(x^*)(F(\cdot)) \\ &= u(P_{A_n}^*(x^*)) \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} u_k)(P_{A_n}^*(x^*)) \\ &= u_n(P_{A_n}^*(x^*)) \\ &= u_n(x^*). \end{aligned}$$

Por otra parte la función $\sum_{k=1}^{d_n} e_{n,k}r_k(\cdot)$ es el núcleo de u_n, por lo tanto esta función debe ser igual salvo en un conjunto Z_n de medida nula a $P_{A_n}(F(\cdot))$ por ser ambas funciones fuertemente medibles. Si s no pertenece a $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ entonces

$$n = \left\| \sum_{k=1}^{d_n} e_{n,k}r_k(s) \right\| = \|P_{A_n}F(s)\| \leq \|P_{A_n}\| \, \|F(s)\| \leq c\|F(s)\|,$$

donde c es una constante que acota uniformemente las normas de las proyecciones P_{A_n}. Esto demuestra que $P_1(\nu, X)$ no es completo. □

En el siguiente teorema utilizaremos una construcción diferente que nos permite prescindir de la hipótesis de cotipo finito sobre el retículo. Deduciremos un resultado más fuerte que el anterior.

TEOREMA 3.4.8. *Sea L un retículo de Banach orden continuo con unidad débil no puramente atómico y X un espacio de Banach de dimensión infinita. Existe $u \in L \otimes_\epsilon X$ que no es un operador de Korotkov.*

PRUEBA. Por la Proposición 3.2.4 supondremos que L es un $L^1(\nu)$ para cierta medida vectorial numerablemente aditiva ν. Sea σ una medida de control de Rybakov para ν. Esta medida no es puramente atómica; podemos suponer que $\sigma(S) = 1$ y que σ no tiene átomos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos utilizar el lema de Dvoretsky-Rogers para encontrar una sucesión finita $x_1, ..., x_m$ en X tales que $\sum_{k=1}^{m} \|x_k\| = 1$ y $\sup\{\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)| : x^* \in B_{X^*}\} \leq 1/n$.

Elegimos una partición de S en conjuntos $A_1, A_2, ..., A_m$ tales que $\sigma(A_k) = \|x_k\|$ para cada $k = 1, ..., m$. Considerar la función:

$$F_n(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{\|x_k\|} \chi_{A_k}(s).$$

Es claro que $\|F_n(s)\| = 1$ para cada $s \in S$. Vamos a probar que la sucesión de los operadores de Carleman $(u_{F_n})_{n=1}^{\infty}$ asociados a las funciones F_n tiende a cero en $L_1(\nu)\otimes_\epsilon X$. Sea $\epsilon > 0$ y $x^* \in X^*$. Se tiene que:

$$||x^*(F_n(\cdot))|| \leq ||x^*(F_n(\cdot))\chi_{[|x^*(F_n(\cdot))|\geq\epsilon]}|| + ||x^*(F_n(\cdot))\chi_{[|x^*(F_n(\cdot))|<\epsilon]}||,$$

donde las normas se consideran en el espacio $L_1(\nu)$ y $[|x^*(F_n(\cdot))| \geq \epsilon]$ nota el conjunto $\{s \in S : |x^*(F_n(s))| \geq \epsilon\}$.

El segundo sumando es menor o igual que $\epsilon||\chi_S|| = \epsilon||\nu||(S)$. Para encontrar una acotación del primer sumando observar que

$$\begin{aligned}\sigma([|x^*(F_n(\cdot))| \geq \epsilon]) \leq & \frac{1}{\epsilon}||x^*(F_n(\cdot))||_{L_1(S,\sigma)}\\ \leq & \frac{1}{\epsilon}\sum_{k=1}^{m}|x^*(x_k)|\\ \leq & \frac{1}{n\epsilon}.\end{aligned}$$

Como ν es una medida vectorial numerablemente aditiva, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\sigma(B) \leq \delta$ entonces $||\nu||(B) \leq \epsilon$. Elegimos n_0 tal que $\frac{1}{n_0\epsilon} \leq \delta$; si $n \geq n_0$, como $|x^*(F_n(s))| \leq ||F_n(s)|| = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}||x^*(F_n(\cdot))\chi_{[|x^*(F_n(\cdot))|\geq\epsilon]}|| \leq & ||\chi_{[|x^*(F_n(\cdot))|\geq\epsilon]}||\\ \leq & ||\nu||([|x^*(F_n(\cdot))| \geq \epsilon])\\ \leq & \epsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que la sucesión $(F_n)_{n=1}^\infty$ tiende a cero en la norma de $P_1(\nu, X)$.

Para demostrar el teorema podemos suponer como en el Teorema 3.4.7 que el espacio de Banach X tiene una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$. En efecto, supongamos que Z es un subespacio cerrado infinito dimensional de X con base de Schauder tal que existe un elemento $u \in Z\otimes_\epsilon L_1(\nu)$ que define un operador de Z^* en $L_1(\nu)$ que no es de Korotkov. El operador extensión $\tilde{u} : X^* \to L_1(\nu)$ definido por $\tilde{u}(x^*) = u(x^*|_Z)$, donde $x^*|_Z$ es la restricción de x^* a Z, es un elemento de $X \otimes_\epsilon L_1(\nu)$ y no es de Korotkov: para demostrar esta afirmación suponer, por reducción al absurdo, que $\tilde{u}$ lo fuera; por la definición existiría una función medible g tal que $|\tilde{u}(x^*)| \leq \|x^*\| g$, para todo $x^* \in X^*$. Si $z^* \in Z^*$ tenemos que $u(z^*) = \tilde{u}(\widetilde{z^*})$ donde $\widetilde{z^*}$ es una extensión de z^* a X con $\|z^*\| = \|\widetilde{z^*}\|$. Por lo tanto, $|u(z^*)| = |\tilde{u}(\widetilde{z^*})| \leq \|z^*\| g$, llegando a una contradicción con el hecho de que u no es un operador de Korotkov.

Sea $(A_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de intervalos finitos de números naturales con $\max A_n < \min A_{n+1}$, y tales que, usando de nuevo el lema de Dvoretsky-Rogers como en la primera parte de la demostración, podemos encontrar una sucesión de funciones simples $F_n : S \to [x_k]_{k \in A_n}$ verificando que $\|F_n(s)\| = n$ en casi todo punto de S y $\|F_n\|_{P_1(\nu,X)} \leq 2^{-n}$. Sean P_n las proyecciones continuas definidas sobre X con valores en el espacio de dimensión finita generado por los vectores $\{x_k : k \in A_n\}$. La prueba sigue casi como en la demostración del Teorema 3.4.7.

Sea $u = \sum_{n=1}^\infty u_{F_n}$ donde la convergencia de la serie es en la norma del espacio $L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$, y u_{F_n} es el operador de Carleman con núcleo asociado F_n. Si u fuese un operador de Korotkov existiría una función w^*-escalarmente medible $F : S \to X^{**}$ tal que $u(x^*) = x^*(F(\cdot))$ para cada $x^* \in X^*$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} x^*(P_n^{**}(F(\cdot))) &= (P_n^* \circ x^*)(F(\cdot)) = u(P_n^* \circ x^*) \\ &= \sum_{k=1}^\infty u_{F_k}(P_n^* \circ x^*) = u_{F_n}(P_n^* \circ x^*) \\ &= (P_n^* \circ x^*)(F_n(\cdot)) = x^*(F_n(\cdot)), \end{aligned}$$

y por lo tanto $P_n^{**}(F(\cdot)) = F_n(\cdot)$ en casi todo punto. Se sigue que $n = \|F_n(s)\| = \|P_n^{**}(F(\cdot))\| \leq \|P_n^{**}\| \|F(s)\|$ en casi todo punto, llegando así a una contradicción. $\square$

Como consecuencia tenemos los siguientes corolarios.

COROLARIO 3.4.9. *Sean X y L como en el Teorema 3.4.8. Entonces existe un operador $u : X \to L$ que es límite de operadores de rango finito pero no es de Korotkov.*

PRUEBA. Por el Teorema 3.4.8 existe $u \in X^* \otimes_\epsilon L$ que define un operador de X^{**} en L que no es de Korotkov. De hecho, si suponemos que L está representado como un espacio de Köthe de funciones, la prueba del Teorema 3.4.8 nos dice que para cada conjunto medible A con medida positiva, el operador $P_A \circ u$ no es de Korotkov.

Si $v = u|_X$ fuese un operador de Korotkov existiría un conjunto medible A no nulo tal que $P_A \circ v : X \to L$ es orden acotado. Para terminar el corolario basta demostrar que si $w : X \to L$ es un operador orden acotado entonces $w^{**} : X \to L$ también es orden acotado, ya que en ese caso por ser $P_A \circ u = (P_A \circ v)^{**}$ sería un operador orden acotado con lo que se llegaría a contradicción.

Supongamos que $w : X \to L$ es orden acotado. Existe $g \in L$ tal que $|w(x)| \leq \|x\| g$, para todo $x \in X$. Observar que si w es orden acotado entonces es L-w-compacto, y por tanto débilmente compacto. Por lo tanto w^{**} toma valores en L.

Sea $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| \leq 1$, y $h \in L^*$, $h \geq 0$. Sea $\epsilon > 0$; existe $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} |w^{**}(x^{**})(h)| =& |x^{**}(w^*(h))| \leq |x(w^*(h))| + \epsilon \\ =& |w(x)(h)| + \epsilon \\ \leq& g(f) + \epsilon, \end{aligned} ,$$

por lo que $|w^{**}(x^{**})| \leq g$. $\square$

COROLARIO 3.4.10. *Sea L un retículo de Banach orden continuo y no puramente atómico, y X un espacio de Banach. La norma inyectiva y la de operado-*

res orden acotados son equivalentes sobre $X \otimes L$ si y sólo si X es de dimensión finita

PRUEBA. Si X es de dimensión finita es claro que ambas normas son equivalentes.

Recíprocamente, por la prueba de [L-T, Proposición 1.a.9] podemos suponer que L tiene unidad débil. También podemos suponer que no tiene átomos. Si X es de dimensión infinita entonces el operador $u \in L \otimes_\epsilon X$ dado en el Teorema 3.4.8 no está en $L \otimes_m X$. □

COMENTARIO 3.4.10. Como ya mencionamos, en [R] se probó que si todo operador lineal y continuo de X en L es orden acotado y L es un retículo de Banach orden continuo, entonces X es de dimensión finita. Este resultado sigue del corolario anterior para el caso en que L es no puramente atómico: si todos los operadores lineales y continuos fuesen orden acotados entonces la norma inyectiva y la norma de operadores orden acotados serían equivalentes sobre $L^* \otimes X^*$, por lo tanto X^* sería de dimensión finita.

COROLARIO 3.4.12. *Si $L_1(\nu)$ no es puramente atómico y X es de dimensión infinita entonces $P_1(\nu, X)$ no es completo.*

PRUEBA. Por el Teorema 3.4.8 existe $u \in L_1(\nu) \otimes_\epsilon X$ que no es de Korotkov. El operador u es un elemento del completado de $P_1(\nu, X)$ que no es de Carleman. □

En lo que queda de Sección consideraremos espacios de Banach complejos. Sea $\mathbb{T}$ el toro dotado de la medida normalizada de Lebesgue λ. Sea $H_p(\mathbb{T})$ el espacio de Hardy, $1 \leq p < \infty$. El espacio de Hardy no es un retículo con el orden puntual. Dado $u \in H_p(\mathbb{T}) \otimes_\epsilon X$, diremos que es representable si existe una función $F : \mathbb{T} \to X^{**}$ w^*-escalarmente medible tal que $u(x^*) = x^*(F(\cdot))$ en casi todo punto, para cada $x^* \in X^*$. Usando las mismas ideas que en el Teorema 3.4.8 podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 3.4.13. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita complejo y $1 \leq p < \infty$, entonces existe $u \in H_p(\mathbb{T}) \otimes_\epsilon X$ que no es representable.*

PRUEBA. Tomemos una sucesión lacunar de números naturales $(k_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{N}$ (ver [Z]), y definimos

$$F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j e^{ik_j t},$$

donde $(x_k)_{k=1}^n$ son vectores tales que

$$\frac{1}{2} ||(a_k)_{k=1}^n||_2 \leq || \sum_{k=1}^n a_k x_k || \leq 2 ||(a_k)_{k=1}^n||_2 .$$

Se tiene que $||F_n(t)|| \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{T}$ y si $x^* \in X^*$:

$$\begin{aligned}
(\int |x^*(F_n(t))|^p dt)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int | \sum_{j=1}^n x^*(x_j) e^{ik_j t} |^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c \, \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2c}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

por [Z, I.8.20]. La prueba sigue los mismos pasos que el Teorema 3.4.8. □

5. El Teorema de Fubini para productos de medidas vectoriales.

En esta última sección del Capítulo vamos a ver que en general no es posible extender el clásico Teorema de Fubini para el producto de medidas escalares al caso vectorial.

Vamos a trabajar en el siguiente contexto. Sean Σ y Θ dos σ-álgebras de subconjuntos de S y T respectivamente.

Si $\mu : \Sigma \to X$, $\nu : \Theta \to Y$ son dos medidas numerablemente aditivas, recordar que el producto tensorial inyectivo de μ y ν es la medida numerablemente aditiva definida sobre la σ- álgebra $\Sigma \otimes \Theta$ generada por los rectángulos medibles, determinada por $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B) \in X \otimes_\epsilon Y$ (ver Capítulo 2).

Si $f \in L_1(\mu \otimes_\epsilon \nu)$, veremos en el siguiente resultado que las secciones $f(s, \cdot)$ no tienen porqué ser ni siquiera escalarmente integrables respecto de ν; esto responde a una pregunta de [S4]. En el siguiente teorema λ será la medida de Lebesgue definida en el intervalo $[0,1]$, y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los medibles Lebesgue.

TEOREMA 3.5.1. *Para cada espacio de Banach infinito dimensional X, existe una medida vectorial numerablemente aditiva ν con valores en X y existe una función f en $L_1(\lambda \otimes \nu)$ tal que para todo $s \in [0,1)$ la correspondiente sección $f(s, \cdot)$ no es una función escalarmente integrable respecto de ν.*

PRUEBA. Estamos suponiendo que X es un espacio de Banach de dimensión infinita por tanto podemos aplicar el Teorema de Dvoretsky-Rogers para encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X con $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente y tal que

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}\log n},$$

que es una sucesión de cuadrado sumable. Definimos la medida numerablemente aditiva $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$ mediante la igualdad $\nu(\{n\}) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Considerar la medida producto $\lambda \otimes_\epsilon \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \otimes_\epsilon X$. Observar que $\mathbb{R} \otimes_\epsilon X$ es isométrico a X y que para cada $x^* \in X^*$ la medida $x^*(\lambda \otimes_\epsilon \nu)$ es en realidad la medida producto $\lambda \otimes x^*\nu$. Además $|\lambda \otimes x^*\nu| = \lambda \otimes |x^*\nu|$.

Se considera la sucesión de intervalos diádicos $(A_n)_{n=1}^\infty$ del intervalo $[0,1]$ en el orden $A_1 = [0,1], A_2 = [0,1/2), A_3 = [1/2,1), A_4 = [0,1/4), A_5 = [1/4,1/2), \ldots.$ Podemos definir la función $f : [0,1] \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como

$$f(s,n) = \frac{1}{\lambda(A_n)}\chi_{A_n}(s).$$

Primero vamos a demostrar que la función f así definida es escalarmente integrable respecto de la medida producto $\lambda \otimes_\epsilon \nu$. Para ello tomemos $x^* \in X^*$, y calculemos la siguiente integral:

$$\int |f(s,n)| d|\lambda \otimes x^*\nu|(s,n) = |x^*\nu|(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty.$$

De hecho f es integrable respecto de $\lambda \otimes \nu$. Para probar esta afirmación sea $C \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{P}$ y observar que:

$$\int_C f d\lambda \otimes \nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(A_n \cap C)}{\lambda(A_n)} x_n \in X.$$

Para finalizar el teorema sea $s \in [0,1)$; es claro que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s \in A_n\}$ tiene infinitos elementos gracias a la elección de los conjuntos A_n. Notemos por $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ la colección de índices para los cuales A_{n_j} contiene a s. Es fácil ver que $2^j \leq n_j \leq 2^{j+1}$.

La serie $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(A_{n_j})} x_{n_j}$ no es débilmente incodicionalmente de Cauchy ya que la sucesión $\displaystyle\left(\frac{1}{\lambda(A_{n_j})} x_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ no es acotada porque

$$\left\| \frac{1}{\lambda(A_{n_j})} x_{n_j} \right\| = \frac{1}{\lambda(A_{n_j})} \|x_{n_j}\| \geq 2^j \frac{1}{2^{\frac{j}{2}} \log 2^j} = \frac{2^{\frac{j}{2}}}{\log 2^j},$$

cantidad que tiende a infinito. Por lo tanto podemos encontrar un elemento $x_s^* \in X^*$, que depende de s, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_s^*(x_n)| = \infty$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{N}} f(s,n) d|x_s^* \nu|(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(A_{n_j})} |x_s^* x_{n_j}| = \infty,$$

que demuestra que $f(s,\cdot)$ no es escalarmente integrable respecto de ν. $\square$

COMENTARIO 3.5.2. Es conocido que existen operadores integrales que no son de Carleman [H-S]. Observar que la función anterior nos da un ejemplo. Sea σ una medida de control de Rybakov para ν, esto es $\sigma = |x_0^* \nu|$ para cierto funcional $x_0^* \in X^*$; considerar el operador $u : L_1(\nu)^* \to L_1(\lambda)$, dado por

$$u(h) = \int h(n) f(n,t) d\sigma(n),$$

para $h \in L_1(\nu)^*$. Recordar que el dual de $L_1(\nu)$ puede identificarse con el conjunto de funciones $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que $gh \in L_1(\sigma)$ para toda $g \in L_1(\nu)$.

El operador u está bien definido por ser f integrable respecto de la medida producto $\lambda \otimes_\epsilon \nu$. En efecto, si $h \in L_1(\nu)^*$ la función $\int h(n) f(n,t) d\sigma(n)$ es integrable respecto de λ pues:

$$\int \left(\int |h(n) f(n,t)| d\sigma(n) \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| \sigma(n) < \infty.$$

Sin embargo este operador no es de Carleman: basta observar que las secciones del núcleo de u, $f(t,\cdot)$ no están valoradas en el dual de $L_1(\nu)^*$. Esto en esencia es lo que se hace en la prueba del Teorema 3.5.1 para probar que las secciones no son escalarmente integrables.

Teniendo en cuenta el Teorema 3.5.1, para enunciar un teorema general de Fubini para el producto tensorial inyectivo de medidas vectoriales tenemos que comenzar con una función f tal que casi todas las secciones $f(s,\cdot)$ sean funciones de $L_1(\nu)$, por tanto definiendo realmente una función vectorial de S en $L_1(\nu)$. Como consecuencia de la caracterización de integrabilidad en el sentido de Bartle obtenida en la Sección 3, obtenemos que esta condición ya es suficiente para enunciar el siguiente teorema de Fubini.

TEOREMA 3.5.3. *Si $f : S \times T \to \mathbb{R}$ pertenece a $L_1(\mu \otimes \nu)$ y $f(s,\cdot)$ es un elemento de $L_1(\nu)$ para casi todo $s \in S$, entonces:*

(1) *La función $F : s \in S \to \int_T f(s,t)d\nu(t) \in Y$ es fuertemente medible e integrable en el sentido de Bartle respecto de μ y de ϕ_ϵ.*

(2) $(\phi_\epsilon) \displaystyle\int_S F(s)d\nu(s) = \int_{S\times T} f d\mu \otimes \nu.$

PRUEBA. Observar que, dado un conjunto medible $C \subset S \times T$, la función $\int_T \chi_C(\cdot,t)d\nu(t)$ definida en S con valores en $L_1(\nu)$ es fuertemente medible. Esto se deduce de [L1, Theorem. 2.2] y de que χ_M es límite puntual en $S \times T$ de una sucesión de funciones características de uniones finitas de rectángulos medibles. Sea entonces $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones simples y medibles sobre $S \times T$, convergiendo en casi todo punto a f y tales que $|f_n(s,t)| \leq 2|f(s,t)|$. De nuevo por [L1, Theorem. 2.2] se tiene que $f_n(s,\cdot) \to f(s,\cdot)$ en $L_1(\nu)$ en casi todo punto $s \in S$. Que la función F es fuertemente medible se sigue de que $\int_T f_n(s,t)d\nu(t)$ converge a $\int_T f(s,t)d\nu(t)$ y de la observación anterior.

Dados $x^* \in X^*$ y $y^* \in Y^*$, se tiene

$$\int_S |y^*(F(s))| d|x^*\mu|(s) \leq \int_S \left(\int_T |f(s,t)| d|y^*\nu|(t) \right) d|x^*\mu|(s)$$
$$= \int_{S \times T} |f(s,t)| d|x^*\mu \otimes y^*\nu|(s,t) < +\infty.$$

Sea $A \subset S$ un conjunto medible. Se verifica que:

$$\int_A F d\nu = \int_{A \times T} f d\mu \otimes \nu,$$

ya que ambas formas bilineales coinciden sobre $X^* \otimes Y^*$. Como $f \in L_1(\mu \otimes \nu)$, (1) sigue directamente del Corolario 3.3.6

La condición (2) sigue tomando $A = S$ en la igualdad anterior y aplicando la Proposición 3.3.1. $\square$

COMENTARIO 3.5.4. Del teorema anterior se deduce fácilmente que el teorema de Fubini se cumple para funciones esencialmente acotadas y para funciones en $L_1(|\mu| \otimes |\nu|)$ (ver [H]).

Finalmente probaremos que si una de las medidas es puramente atómica entonces la integral doble se puede hacer por medio de una integral reiterada, si uno integra en el orden adecuado. En la prueba haremos uso de nuevo de la caracterización de integrabilidad Bartle obtenida en la Sección 3 para el caso $\phi = \phi_\epsilon$.

PROPOSICIÓN 3.5.5. *Sea μ una medida numerablemente aditiva y puramente atómica con valores en X y sea ν una medida numerablemente aditiva con valores en Y. Sea $f(s,t)$ una función escalar integrable respecto de $\mu \otimes \nu$. Entonces:*

(1) *En casi todo punto s, la sección $f(s,\cdot)$ es integrable respecto de ν.*

(2) *La función* $F(s) = \int_T f(s,t)d\nu(t)$ *es fuertemente medible e integrable en el sentido de Bartle respecto de* μ *y* ϕ_ϵ.

(3) $(\phi_\epsilon)\displaystyle\int_S F d\mu = \int_{S\times T} fd(\mu\otimes\nu)$.

Prueba. Podemos suponer que μ está definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y que $\mu(\{n\}) \neq 0$ para todo n.

Como $f \in L_1(\mu\otimes_\epsilon\nu)$ sabemos que para cada par $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ se tiene:

$$\int\left(\int |f(n,t)|d|y^*\nu|(t)\right) d|x^*\mu|(n) < \infty.$$

Si consideramos una medida de control de Rybakov para μ, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, las secciones $f(n,\cdot)$ son escalarmente integrables por el Teorema de Fubini escalar.

Probemos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n,\cdot) \in L_1(\nu)$. Observar que

$$\mu(\{n\})\otimes_\epsilon \int_A f(n,t)d\nu(t) = \int_{\{n\}\times A} fd(\mu\otimes_\epsilon\nu),$$

por tanto la medida vectorial definida por $A \in \Sigma \rightarrow \int_A f(n,t)d\nu(t)$ es numerablemente aditiva. Se deduce de [L1, Theorem 3.2] que $f(n,\cdot) \in L_1(\nu)$ para cada conjunto medible A.

Si $(f_j(n,s))_{j=1}^\infty$ es una sucesión de funciones simples que convergen en casi todo punto a f con $|f_j| \leq 2|f|$, de nuevo se deduces de [L1, Theorem. 2.2] que las funciones simples $\int_S f_j(\cdot,s)d\nu(s)$ convergen a $\int_S f(\cdot,s)d\nu(s)$.

Las condiciones (2) y (3) se deducen del Corolario 3.3.6 y de que $\int_A Fd\mu = \int_{A\times T} fd(\mu\otimes_\epsilon\nu) \in X\otimes_\epsilon Y$ para todo conjunto medible A. □

REFERENCIAS

[AD] R. Anantharaman and J. Diestel, *Sequences in the range of a vector measure*, Annales Societatis Mathematicae Polonae, Serie I: Comm. Math. **XXX** (1991), 221-235.

[B] R.G. Bartle, *A general bilinear vector integral*, Studia Math. **XV** (1956), 337-352.

[Bl] O. Blasco, *Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators*, Studia Math. **LXXXVI** (1987), 19-33.

[Bh] M. Bhaskara Rao, *Countable additivity of a set function induced by two vector-valued measures*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 847-848.

[B-S] R. Bagby and C.Swartz, *Projective tensor product of ℓ_p-valued measures*, Math. Čas. **25** (1975), 265-269.

[C] G.P. Curbera, *Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*, Math. Ann. **293** (1992), 317-330.

[C-S] R. Rao Chivukula and A. S. Sastry, *Product Vector Measures via Bartle integrals*, J. Math. Anal. Appl. **96** (1983), 180-195.

[D] M. Duchon, *On the projective tensor product of vector-valued measures*, Mat. Cas. **17** (1967), 108-112.

[D1] M. Duchon, *Product of dominated vector measures*, Math. Slovaca. **27** (1977), 293-301.

[D2] M. Duchon, *Biprojective tensor products and convolutions of vector-valued measures on a compact group*, Studia Math. **XXXVIII** (1970), 188-192.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

[D-G] S.J. Dilworth y M. Girardi, *Nowhere weak differentiability of the Pettis integral*, Preprint (1995).

[D-J-T] J. Diestel, H. Jarchow y A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, Cambridge, 1995.

[D-P] R. M. Dudley and L. Pakula, *A counter-example on the inner product of measures*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 843-845.

[D-S] N. Dunford y J. Schartz, *Linear operators I*, Interscience, New York, 1958.

[D-U] J. Diestel and J.J. Uhl, *Vector measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc, Providence, R.I, 1977.

[Du] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.

[F] W. Feldman, *Carleman operators on Banach Lattices*, Math. Z. **199** (1988), 549-553.

[G-E] J.J. Grobler and P. van Eldik, *Carleman operators in Riesz spaces*, Indag. Math. **45** (1983), 421-433.

[G-U] N.E. Gretsky and J.J. Uhl, *Carleman and Korotkov operators on Banach spaces*, Acta Sci. Math. **43** (1981), 207-218.

[H] J. E. Huneycutt, *Products and convolutions of vector valued set functions*, Studia Math. **XLI** (1972), 119-129.

[He] W. Hensgen, *On the dual space of $H^p(X)$, $1 < p < \infty$*, J. Funct. Anal. **92** (1990), 348-371.

[H-S] P.R. Halmos y V.S. Sunder, *Bounded integral operators on L_2 spaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.

[H-N-O] S. Heinrich, N.J. Nielsen and G.H. Olsen, *Order bounded operators and tensor products of Banach lattices*, Math. Scand. **49** (1981), 99-17.

[J-K] L. Janicka y N.J. Kalton, *Vector measures of infinite variation*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **XXV** (1977), 239-241.

[Ka] Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover publications, Inc., New York, 1976.

[K] I. Kluvanek, *An example concerning the projective tensor product of vector measures*, Math. Cas. **17** (1970), 81-83.

[K-K] I. Kluvanek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, Math. Stud., vol.20, North-Holland, 1976.

[K-M] S. Karni y E. Merzbach, *On the extension of bimeasures*, J. Anal. Math. **55** (1990), 1-16.

[L1] D.R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pac. J. Math. **33** (1970), 157-165.

[L2] D. R. Lewis, *Conditional weak compactness in certain inductive tensor products*, Math. Ann. **201** (1973), 201-209.

[L-T] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Berlin Heidelberg, 1979.

[M-R] E. Marczewski y C. Ryll-Nardzewki, *Remarks on the compactness and non-direct products of measures*, Fund. Math. **40** (1953), 165-170.

[Pe] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 277-304.

[P] C. Piñeiro, *Operators on Banach spaces taking compact sets inside ranges of vector measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 1031-1040.

[P-R] C. Piñeiro and L. Rodríguez-Piazza, *Banach spaces in which every compact lies inside the range of a measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 505-517.

[Pi] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS, vol. 60, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984.

[R] D. Robert, *Sur les opérateurs linéaires qui transforment la boule unité d'un espace de Banach en une partie latticiellement bornée d'un espace de Banach reticulé*, Israel J. Math. **22** (1975), 354-360.

[Ro] L. Rodríguez Piazza, *Rango y propiedades de medidas vectoriales. Conjuntos p-Sidon p.s.*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1991.

[Ros] H. P. Rosenthal, *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces, with an Appendix on compactness of operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$*, J. of Funct. Anal. **4** (1969), 176-214.

[R-S] H. P. Rosenthal and S. J. Szarek, *On tensor products of operators from L^p to L^q*, Lecture Notes in Mathematics **1470** (1991), 108-132.

[S1] C. Swartz, *A generalization of a Theorem of Duchon on products of vector measures*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), 621-628.

[S2] C. Swartz, *Tensor products of ℓ_2-valued measures*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **21** (1976), 241-246.

[S3] C. Swartz, *The product of vector-valued measures*, J. Austral. Math. Soc. **8** (1973), 359-366.

[S4] C. Swartz, *Fubini's Theorem for tensor product measures*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **XXIX** (1984), 97-103.

[Sc] A.R. Schep, *Generalized Carleman operators*, Indag. Math. **42** (1980), 49-59.

[St] G.F. Stefansson, *Pettis integrability*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), 401-418.

[T] M. Talagrand, *Pettis integral and measure theory*, Memoirs Amer. Math. Soc. vol 307, Providence, R.I., 1984.

[V] D.T. Vuza, *Characterizations of Carleman operators*, Proc. Acad. Amsterdam **A 92** (1989), 343-354.

[W] J. Weidmann, *Carlemanoperatoren*, Manuscr. Math. **2** (1970), 1-38.

[Z] A. Zygmund, *Trigonometric series, second edition*, Cambridge Univ. Press, 1968.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal ... los abajo firmantes ... Tesis Doctoral de

Juan Carlos García Vázquez

Integración bilineal: producto de medidas vectoriales y operadores de Carleman

APTO CUM LAUDE, POR

UNANIMIDAD.

Sevilla, 21 de ENERO de 1997

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,