

ASPECTOS NUMERICOS DEL CALCULO FOTOELASTICO DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES MEDIANTE DESARROLLOS EN SERIE

R. Pícn, F. París y C. Rivas.

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos. E. T. S. Ingenieros Industriales de Sevilla.
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla.

RESUMEN:

En un trabajo previo [1] se expuso la metodología general del cálculo fotoelástico de los factores de intensidad de tensiones mediante desarrollos en serie del campo general de tensiones y posterior ajuste de los coeficientes de dichos desarrollos a los datos experimentales obtenidos del campo de isocromáticas. En dicho trabajo se estudió la influencia de un cierto número de factores en los resultados numéricos obtenidos. En este trabajo se completa el estudio numérico propuesto, analizándose la influencia en los resultados de una serie de factores, como son la solución inicial escogida, los errores de medida, la distribución y número de los puntos utilizados y la relación puntos-coeficientes. A partir de los resultados obtenidos se dan una serie de recomendaciones para el uso eficiente de este tipo de métodos.

ABSTRACT :

In a previous work [1], the general methodology to obtain stress intensity factors photoelastically by the use of stress-functions series expansions and subsequent fitting of the coefficients to the experimental isochromatic pattern was presented, analysing the influence of several parameters on the numerical results. In this paper, that numerical study is completed, taking into account a number of factors: initial estimations, error measures, distribution and number of points used and the ratio points-coefficients. From the results obtained, some recommendations for the efficient use of this type of methods are made.

1.- INTRODUCCION

En un trabajo previo [1] se expuso el método general de cálculo fotoelástico de los factores de intensificación de tensiones K_I y K_{II} mediante desarrollos en serie de las funciones de tensión. En esencia, el procedimiento propuesto es el siguiente: en primer lugar, el tensor de tensiones plano se expresa [1] a partir de cuatro funciones de la variable compleja $z = x + iy = r e^{i\theta}$ (r, θ : coordenadas polares medidas desde el borde de grieta):

$$\sigma_{jk}(x,y) = f^s_{jk} [Z_I(z), \eta_I(z)] + f^a_{jk} [Z_{II}(z), \eta_{II}(z)] \quad j,k = x,y \quad (1)$$

Las funciones complejas $Z_I, \eta_I (Z_{II}, \eta_{II})$ están asociadas al campo simétrico (antisimétrico) de tensiones, respecto al

eje de la grieta ($y=0$), y pueden ser expresadas mediante desarrollos en serie que satisfagan las condiciones de contorno en dicha línea $y = 0$, en la que existe una grieta semidefinida en $x < 0$. En forma simbólica, se tiene:

$$(Z_I, \eta_I, Z_{II}, \eta_{II}) = g(A_n, B_m, C_p, D_q, r, \theta) \quad (2)$$

representando A_n, B_m, C_p, D_q , genéricamente, los N, M, P, Q términos de los desarrollos en serie de Z_I, η_I, Z_{II} y η_{II} . Los valores de K_I y K_{II} se obtienen según: $K_I = -\sqrt{8\pi} \cdot A_0$ y $K_{II} = -\sqrt{8\pi} \cdot B_0$. Sustituyendo los desarrollos (2) en (1) y usando las expresiones de las tensiones en la ecuación de una isocromática de orden N , para un material de factor de franja λ y espesor e [2]:

$$F(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, N) = (e/N\lambda) \sqrt{[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\sigma_{xy})^2]} - 1 = 0 \quad (3)$$

se obtiene la ecuación de una isocromática de orden N en función de los coeficientes del desarrollo:

$$F(A_n, B_m, C_p, D_q, r, \theta, N) = 0 \quad (4)$$

La función utilizada en (3) es la denominada F_0 en [1]. La dificultad de situar con precisión el extremo de grieta hace aconsejable incluir las coordenadas de este extremo, r_c, θ_c , como variables del ajuste. Las variables r y θ reales se expresan a partir de r_c, θ_c y de r^*, θ^* , (valores medidos) según (Fig. 1).

$$r^2 = (r^*)^2 + r_c^2 - 2r^*r_c \cos(\theta^* - \theta_c) \quad (5a)$$

$$\operatorname{tg}\theta = (r^* \operatorname{sen} \theta^* - r_c \operatorname{sen} \theta_c) / (r^* \operatorname{cos} \theta^* - r_c \operatorname{cos} \theta_c) \quad (5b)$$

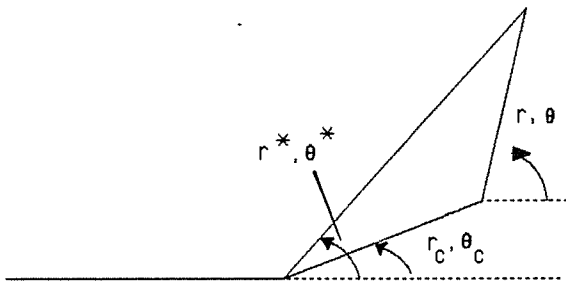


Fig. 1.- Relación geométrica entre r, θ, r_c, θ_c y r^*, θ^*

La ec. (4) se generaliza entonces en la forma:

$$F(A_n, B_m, C_p, D_q, r_c, \theta_c, r^*, \theta^*, N) = 0 \quad (6)$$

Los coeficientes de la ec (6), en número $N + M + P + Q + 2 = T$ se calculan particularizando dicha ecuación en S puntos de distintas isocromáticas, cada uno con unos valores r^*_s, θ^*_s, N_s , ($s = 1, S$). Para minimizar el efecto de los errores de medida es conveniente adoptar $S > T$, lo que dá un sistema sobredeterminado no lineal de ecuaciones, que en general no tendrá ninguna solución. Si denominamos vector residuo al conjunto de valores F_s ($s = 1, S$) $\neq 0$, en cada punto, se busca la solución que minimice el módulo del vector residuo. Dicha solución se obtiene mediante un procedimiento iterativo que combina el método de Newton-Raphson generalizado [1] con el de mínimos cuadrados. Una vez calculados los coeficientes se representan las isocromáticas obtenidas para evaluar visualmente la bondad del ajuste obtenido.

2.- ANALISIS NUMERICO

El caso analizado consiste en una placa traccionada que contiene una grieta inclinada, de grandes dimensiones comparada con el ancho de la placa, para que aparezca una perturbación debida al borde libre. Las dimensiones exactas y las propiedades del material fotoelástico, así como una fotografía del campo de isocromáticas, puede verse en [1]. En la Fig. 2 puede verse el conjunto de puntos utilizado (signo +), estando la zona de medida caracterizada por $0'01 < r/a < 0'3$. La posible invalidez de la solución elástica en los puntos

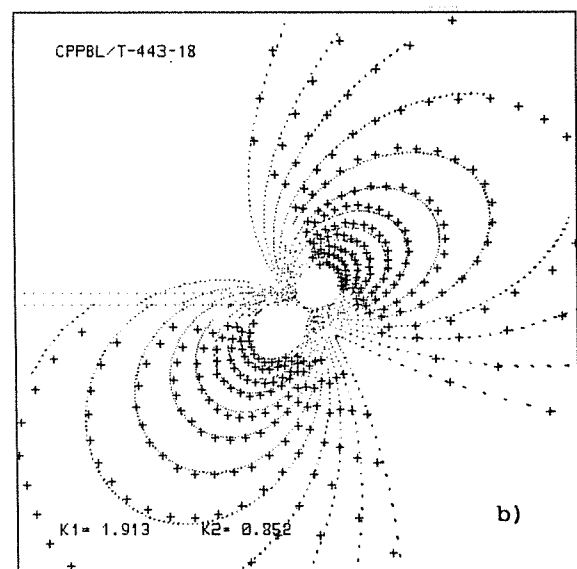
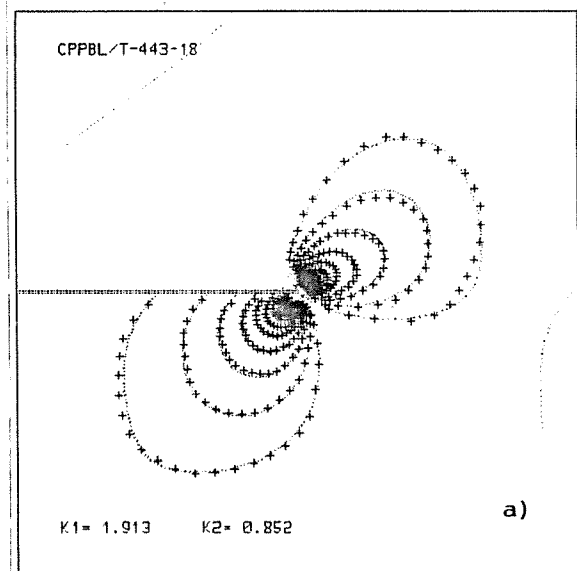


Fig. 2.- Caso óptimo: T-443-18. a) vista global; b) vista cercana.

más cercanos al borde de grieta se comprobará mediante la bondad de los ajustes. A continuación se analizan una serie de factores numéricos, que completan el estudio iniciado en [1].

2.1. ESTIMACION INICIAL

La solución inicial que se proponía en [1] era $K_I = K_{II} = 1$ y el resto de los coeficientes nulos. Por un error, sin embargo, el coeficiente A_3 era igual a 0'006. Al recalcular los casos analizados en [1] usando una nueva solución inicial con $A_3 = 0$ se encontró que los valores de $K_I = K_{II}$ obtenidos no sufrían excesivas variaciones pero, en algunos casos, el ajuste de las isocromáticas más lejanas (las de orden menor) variaba sensiblemente. Esto hizo aconsejable proceder a una nueva búsqueda del ajuste que se vá a usar como óptimo, para lo que se manejó el número total de puntos (443). En todos los casos se usó ya la solución inicial $K_I = K_{II} = 1$ y el resto de los coeficientes nulos. En la Fig. 3 se muestra la evolución del residuo con el número de coeficientes usado; de este número, dos coeficientes son las coordenadas del borde de grieta y el resto son los términos de los desarrollos de las cuatro funciones complejas (ec. (2)), a partes iguales entre cada una de ellas.

La inspección visual revela un ajuste correcto de todo el campo para 18 coeficientes, Fig. 2, lo que está asociado a una

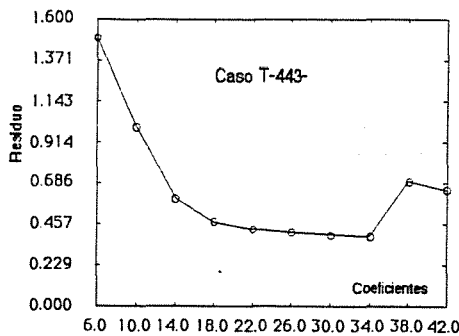


Fig. 3.- Residuo frente a número de coeficientes. Caso T-443-COEFICIENTES.

estabilización del residuo. (La letra T, Fig. 2., indica que se usan todos los puntos, y las dos siguientes cifras indican el número de puntos y el número de coeficientes utilizados). El residuo, sin embargo, no es un indicador absoluto, en el sentido de que aparecen perturbaciones del ajuste cuando aún el residuo se comporta monótonamente, como se muestra en la Fig. 4, en la que se ha representado el caso T-443-34.

Una vez escogido el caso óptimo de referencia T-443-18 se procedió a resolver este caso variando la estimación inicial de las siguientes formas: a) se usó como solución inicial la obtenida en el caso T-443-18 multiplicada por 0.2; b) Idem 3.5; c) se usó como solución inicial para los valores de A_0 y B_0 (asociados a $K_I = K_{II}$) los del óptimo multiplicados por 0.2, manteniendo nulas el resto de las variables; y d) Idem

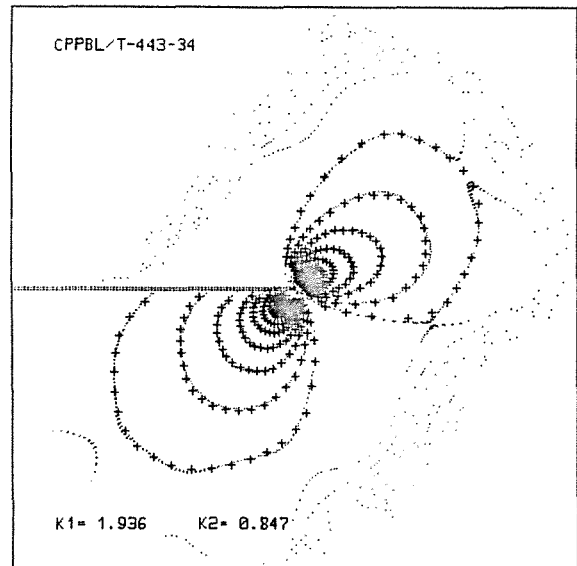


Fig. 4.- Caso T-443-34. Vista global.

3.5. En todos los casos el método convergió a la solución óptima, lo que parece indicar robustez ante cambios homogéneos y cierta sensibilidad ante pequeños cambios aleatorios. En todo caso, conviene realizar algunas pruebas con la estimación inicial antes de dar un ajuste por malo.

2.2. ERRORES DE MEDIDA

Las isocromáticas de orden bajo tienen una banda muy ancha, por lo que es fácil cometer errores al medir el radio de los puntos. Para estimar como influirían estos errores se resolvió el caso óptimo variando los radios de las isocromáticas de orden 1.5 y 2 (las de radios mayores), que se aumentaron en un 10 y 5%, respectivamente; posteriormente se repitió el análisis pero disminuyendo los radios en los mismo porcentajes. Los factores de intensidad de tensiones obtenidos fueron $K_I = 1'883$, $K_{II} = 0'855$, para el caso de radios aumentados, y $K_I = 1'95$, $K_{II} = 0'847$ para el caso de radios disminuidos. En conjunto, la máxima variación de K_I fué del 1'9% y la de K_{II} del 0'6%, por lo que parece que estos errores no tienen una influencia sensible.

2.3. DISTRIBUCION DE LOS PUNTOS

Usando aproximadamente la mitad del número total de puntos estos se dispusieron: a) sobre las zonas laterales (es decir de menor radio) de cada isocromática (clave LAT); b) sobre las zonas extremas (es decir, las de mayor radio de cada isocromática (clave MAX); y c) repartidos uniformemente por todas las isocromáticas (clave MIT). El tanto por ciento de variación de los valores obtenidos de K_I y

K_{II} respecto a los del óptimo (ΔK_I ΔK_{II}) se muestran en la Tabla 1. Como además el ajuste fué mejor en el caso MIT, concluimos que es conveniente distribuir los puntos uniformemente sobre todo el campo.

Tabla 1: Distribución de puntos

CASO	ΔK_I	ΔK_{II}
LAT - 221 - 18	1.4	-1.3
MAX - 222 - 18	-1.2	0.87
MIT - 220 - 18	-0.2	0.11

2.4 NUMERO DE PUNTOS NECESARIOS

El número total de puntos se obtuvo trazando radios de 5 en 5 grados e intersectando estas rectas con las isocromáticas. Para generar una serie decreciente de puntos se trazaron los radios con intervalos de 10, 15, 20, 25 y 30 grados, lo que dió un número de puntos de aproximadamente la mitad del total, un tercio del total, etc..., hasta un sexto del total (claves MIT, TER, CUA, QUI, SEX). Los valores obtenidos de ΔK_I y ΔK_{II} (definidos en el apartado anterior) se muestran en la Tabla 2. En cuanto al aspecto de los ajustes obtenidos, son prácticamente idénticos al óptimo hasta el caso QUI-88-18. En el caso SEX-72-18 se produce ya una perturbación evidente en las zonas más alejadas del borde de grieta, como se aprecia en la vista global de la Fig. 5. En ésta, los puntos representados con el símbolo "*" son aquellos que no han sido utilizados en el ajuste.

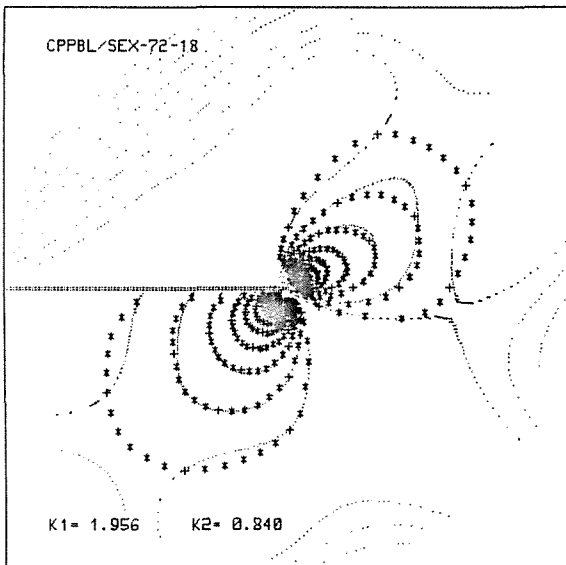


Fig. 5.- Caso SEX-72-18. Vista global

Es interesante mencionar que la forma utilizada de ir reduciendo los puntos no los reparte uniformemente entre todas las isocromáticas. Como ejemplo se muestran en la

Tabla 2: Número de puntos necesarios

CASO	ΔK_I	ΔK_{II}
MIT - 220 - 18	-.18	.11
TER - 147 - 18	-.11	.23
CUA - 108 - 18	-.83	.65
QUI - 88 - 18	.15	-.16
SEX - 72 - 18	2.0	2.3

Tabla 3 los puntos adoptados en cada isocromática en los casos QUI-88-18 y SEX-72-18. Para estimar la influencia de esta disposición de los puntos se resolvió un nuevo caso adoptando 6 puntos por isocromática, 3 por cada lazo cerrado; de estos 3 puntos, uno tenía el radio máximo y los otros dos los radios mínimos. Esto dá un total de 72 puntos, igual que en el caso SEX-72-18, que aún daba valores aceptables de K_I y K_{II} .

Tabla 3: Puntos por isocromática

ISO CROMATICA \ CASO	QUI-88-18	SEX-72-18
1.5	11	9
2	11	8
2.5	9	7
3	8	7
3.5	8	6
4	8	6
4.5	7	6
5	7	6
5.5	6	6
6	5	5
6.5	4	4
7	4	2

Los resultados obtenidos fueron pésimos, debido a una mala convergencia del proceso iterativo. Parece pues recomendable graduar el número de puntos por isocromática, en la línea descrita anteriormente.

En cuanto al número de puntos a utilizar, los resultados obtenidos parecen indicar que 5 ó 6 puntos, por cada lazo cerrado, en las isocromáticas más externas, son suficientes, lo que, en nuestro ejemplo, está asociado al caso QUI-88-18. Este número de puntos (88) es razonablemente pequeño como para ser manejado con comodidad en los casos reales que pueden presentarse.

2.5. RELACION PUNTOS-COEFICIENTES

Las ideas anteriores son una orientación respecto al número de puntos que es conveniente utilizar. Respecto al número de coeficientes, es obvio que debe ser el suficiente para poder ajustar correctamente en la zona de medida utilizada. Sin embargo, no es una buena estrategia utilizar un número excesivo de coeficientes, pues para un cierto valor de

la relación puntos/coeficientes empiezan a producirse inestabilidades numéricas, aparentemente debidas a que los coeficientes de las matrices que intervienen en el proceso toman valores de órdenes de magnitud muy diferentes. En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos para el caso de clave QUI, al aumentar el número de coeficientes. R y P/C representan el residuo obtenido y la relación entre puntos y coeficientes. Las columnas AC y AL reflejan la impresión visual de los ajustes en las zonas cercanas (AC) y lejanas (AL), según B(bueno), R(regular) y M (malo). La nomenclatura B-n indica que el ajuste es bueno excepto en las n isocromáticas más externas, en que es malo, por haberse producido una perturbación de la solución.

Tabla 4: Serie creciente de coeficientes, para el caso QUI-88-COEF.

COEF.	ΔK_I	ΔK_{II}	R	AC	AL	P/C
6	-14.3	10.6	.7	M	M	15.
10	-7.7	3.9	.5	M	M	8.8
14	-2.1	3.0	.25	B	B-1	6.3
18	.15	-1.6	.20	B	B	4.9
22	1.2	-1.0	.17	B	B-2	4.0
26	.9	-1.1	1.1	B	B-3	3.4
30	NO CONVERGE					2.9

La tendencia que se observa en dicha tabla es general, y se presenta siempre que intentemos ajustar un campo amplio de isocromáticas. Aparecen en principio malos ajustes debido a que un bajo número de coeficientes no puede ajustar un campo amplio, se pasa por una etapa de buen ajuste y finalmente empiezan a aparecer perturbaciones de la solución. Al final el método no converge, tendiendo a permanecer en la solución inicial proporcionada. Aunque el residuo, como ya se comentó anteriormente, no es un indicador absoluto, sí que puede decirse: a) que cuando el residuo empieza a estabilizarse estamos en las proximidades del número óptimo de coeficientes; y b) que saltos bruscos del residuo indican un número excesivo de coeficientes (obsérvese esto en la Tabla 4, para 26 coeficientes y en la Fig. 3, para 38 coeficientes).

Como conclusión, no se debe ir de entrada a un alto número de coeficientes, siendo preferible un aumento progresivo de éstos. Aunque en la Tabla 4 el ajuste empieza a perturbarse para P/C ñ 4 y el método no converge para P/C ñ 3, estos factores no parecen poderse generalizar, estrictamente, a otros casos en que varíe la zona de toma de puntos, ó el número de éstos.

2.6. OTRAS POSIBILIDADES

Aunque la metodología general que se recomienda es la descrita en apartados anteriores, se incluyen aquí algunas otras posibilidades que manejan un menor número de puntos.

2.6.1. SIMULACION DEL CAMPO CERCANO

En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos usando todos los puntos de las dos isocromáticas más cercanas (6.5 y 7) clave C657-44-COEF, al incrementar el número de coeficientes. La nueva columna PAC indica, mediante los símbolos S(si), R(regular) y N(no), si el ajuste está perturbado, es decir si el aspecto del campo obtenido es análogo al real.

Tabla 5: Serie creciente de coeficientes, para el caso C657-44-COEF.

COEF.	ΔK_I	ΔK_{II}	R	AC	PAC	P/C
6	2.	-4.7	.07	B	N	7.3
10	15.4	-19.	.05	B	R	4.4
14	3.	-10.3	.27	M	S	3.1
18	42	-42.	.03	B	S	2.4

Se observa que con 6 coeficientes los resultados son aceptables pero a partir de ahí el comportamiento es errático. El ajuste del campo cercano sería, aún utilizando un método que permite el ajuste en todo el dominio, la idea más inmediata, pues mientras más cercana al borde de grieta sea la zona de toma de puntos, más controlado está ese campo de tensiones por los términos singulares del desarrollo en serie. Sin embargo hay diversos problemas asociados a tomar medidas en dicha zona, entre los que cabe mencionar los siguientes: a) las tensiones en la zona de medida pueden estar alteradas por diversas no-linealidades; b) Pueden no existir isocromáticas cercanas, por falta de sensibilidad del material, ó aquellas pueden estar ocultas por la presencia de una cáustica (hecho frecuente en fotoelasticidad dinámica); y c) el valor obtenido para K_I y K_{II} depende no sólo del buen ajuste obtenido en los puntos utilizados, sino del aspecto local del campo de tensiones.

En las figuras 6a y b se muestra el ajuste cercano de los casos C657-44-06 y C657-44-10, observándose en este último que, aunque el ajuste de los puntos utilizados es bueno, la solución está perturbada, lo que origina sensibles diferencias entre los valores de K_I y K_{II} en uno y otro caso. Parece mejor conseguir ajustes de zonas más amplias según las recomendaciones de los apartados anteriores ó siguiendo las líneas del apartado siguiente. que intentar estimar subjetivamente en cuanto alterará los resultados una cierta perturbación del ajuste.

2.6.2. SIMULACION DEL CAMPO CERCANO Y LEJANO

En la Tabla 6 se muestran los resultados obtenidos usando: a) 48 puntos dispuestos en las isocromáticas 1.5, 2, 6.5 y 7, obtenidos usando radios separados 15 grados (clave

TER152657); y b) 35 puntos dispuestos sobre las isocromáticas 1.5 y 7, obtenidos usando radios separados 10

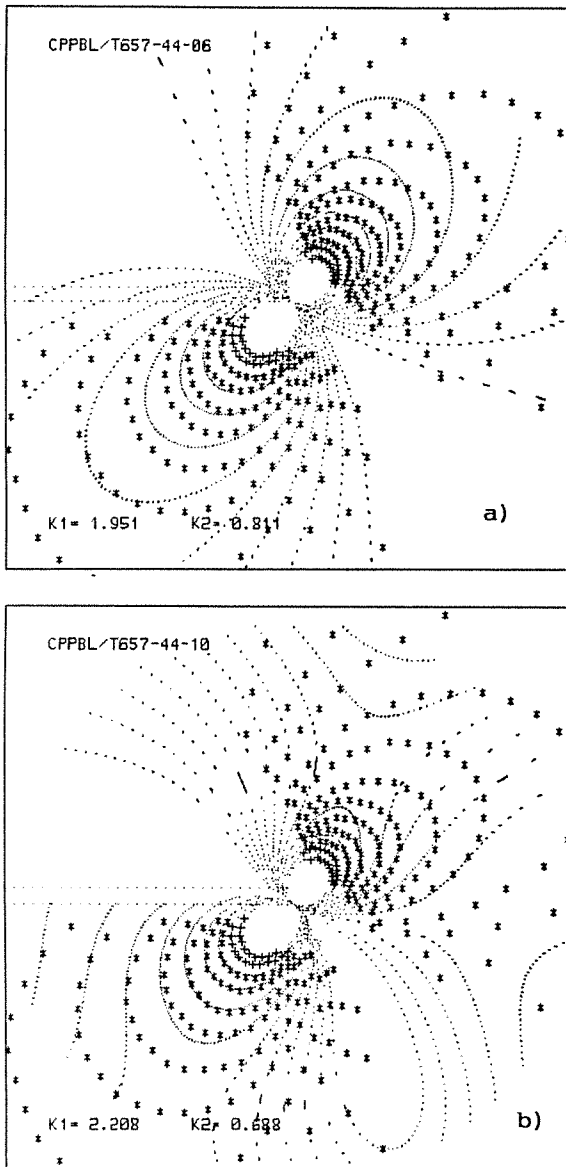


Fig. 6.- a) Caso C657-44-06. Vista cercana; b) Caso C657-44-10. Vista cercana.

grados (clave MIT15Y7). En ambos casos se han usado 18 coeficientes.

Como puede observarse, pueden obtenerse resultados muy aceptables ajustando a la vez puntos de isocromáticas de

Tabla 6: Casos TER152657-48-18 y MIT15Y7-35-18.

CASO	ΔK_I	ΔK_{II}	R	AC	AL	P/C
TER152657-48-18	2.7	-2.3	.17	B	B	2.7
MIT15Y7-35-18	3.2	-3.4	.06	B	B	1.9

orden alto y bajo. El ajuste en los puntos de isocromáticas intermedias, no utilizadas, viene forzado por las de ordenes más extremos.

3. CONCLUSIONES

Del estudio del comportamiento numérico de los métodos fotoelásticos de cálculo de factores de intensidad de tensiones mediante desarrollos en serie pueden extraerse algunas conclusiones, que deberían añadirse a las establecidas en [1]:

- a) El método parece robusto respecto a variaciones regulares de la estimación inicial, aunque cambios aislados en algún coeficiente pueden alterar la solución. Se recomienda probar varias soluciones iniciales antes de dar por malo un ajuste. Asimismo, se observa que la solución no varía sensiblemente con variaciones del orden del 5 al 10% en los radios mayores.
- b) Se recomienda usar todo el campo de medida, disponiendo puntos uniformemente distribuidos en cada isocromática, y usando más puntos en las de orden menor. En estas, un número de puntos, por cada lazo cerrado, aproximadamente igual a 5 ó 6, parece ser suficiente.
- c) Escogido un número de puntos, el número de coeficientes necesario coincide aproximadamente con la estabilización del residuo, y debe ser validado visualmente. Un número de coeficientes excesivo provoca problemas numéricos.
- d) Pueden obtenerse estimaciones fiables ajustando a la vez zonas cercanas y lejanas, lo que fuerza el ajuste en las zonas intermedias.

4. AGRADECIMIENTOS

- Los autores agradecen el imprescindible trabajo de Antonio Cañas en el Laboratorio.

- Este trabajo ha sido financiado mediante el Proyecto 5853 de la Junta de Andalucía, "Caracterización de Grietas en Régimen Elastodinámico".

5. REFERENCIAS

[1] Picón, R.; París, F. y Rivas C. (1990) "Cálculo fotoelástico de factores de intensidad de tensiones mediante desarrollos en serie. Estudio numérico". Anales de Mecánica de la Fractura, Vol. 7 pgs. 218-224.

[2] Dally, J.W. y Riley, W.F. (1978) "Experimental stress analysis". McGraw-Hill.