

CALCULO FOTOELASTICO DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES MEDIANTE DESARROLLOS EN SERIE . ESTUDIO NUMÉRICO.

R. Picón, F. París, C. Rivas

Departamento de Mecánica de Medios Continuos . E. T. S. Ingenieros Industriales de Sevilla. Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla.

RESUMEN:

Los métodos fotoelásticos más potentes para estimar los coeficientes de intensidad de tensiones son los que usan los datos fotoelásticos experimentales para ajustar los coeficientes del desarrollo en serie de las funciones de tensión complejas, a partir de las cuales se obtiene el campo general de tensiones. En este trabajo se realiza un estudio numérico de la influencia en los resultados de algunos de los factores que influyen en el proceso. En concreto se consideran el tipo de función de ajuste utilizada, el número de coeficientes de ajuste usados, y la inclusión o no de otros parámetros de ajuste.

ABSTRACT :

The most powerful photoelastic methods to obtain stress-intensity factors are those based on stress-function series expansions. The coefficients of this expansions are fit to the experimental isochromatic pattern using an overdeterministic Newton-Raphson least-squares method. In this paper, a numerical study has been made to analyse the influence on the results of several parameters, specifically the fit function, the number of fit coefficients, and the inclusion or not of other fit parameters

1.- INTRODUCCION

En principio, el problema de estimar fotoelásticamente los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{II} se plantea de forma muy simple. La fotoelasticidad proporciona el valor de la tensión tangencial máxima T_m en los puntos de una isocromática de orden N en la forma, Dally, [1]:

$$(2T_m)^2 = (N\lambda/e)^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\sigma_{xy})^2 \quad (1)$$

siendo λ el factor de franja y "e" el espesor de la placa. La aproximación del tensor de

tensiones en función de los factores de intensidad de tensiones (FIT) y, en su caso, de otros parámetros, permite plantear el problema de buscar los valores de K_I y K_{II} (y de los otros parámetros, si existen) que consigan un mejor ajuste entre la ec.(1) y los datos experimentales.

Inicialmente las expresiones de las tensiones utilizadas fueron las del campo singular, válido en puntos muy próximos al borde de la grieta, lo que crea problemas al requerir medidas en esa zona, en la que aparecen diversos tipos de no linealidades y en la que los errores de medida pueden tener una gran influencia. Posteriormente fueron siendo usados más términos en las

aproximaciones de las tensiones, lo que permitió ampliar la zona de medida; este proceso culminó en aproximaciones de las tensiones en forma de desarrollos en serie en los que la zona de medida puede ser, en principio cualquiera, tomando el número suficiente de términos de la serie (ver [13] para una revisión de métodos).

En este trabajo se muestran primero brevemente los fundamentos de los métodos de desarrollo en serie (MDS) pasándose luego a considerar la influencia, en los resultados numéricos obtenidos, de una serie de factores como son el tipo de función de ajuste utilizada, el número de coeficientes de ajuste usados y la inclusión o no de otros parámetros de ajuste.

2. ECUACIONES BASICAS

La solución general al problema elástico plano puede ser expresada a partir de las funciones $Z(z)$ y $\eta(z)$ de la variable compleja $z = x + iy$ [2]. Dos posibles formas de la solución general de tensiones son

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= \text{Re}Z_I - y\text{Im}Z_I' + y\text{Im}\eta_I' - 2\text{Re}\eta_I \\ \sigma_{yy}^I &= \text{Re}Z_I + y\text{Im}Z_I' - y\text{Im}\eta_I' \\ \sigma_{xy}^I &= -y\text{Re}Z_I' + y\text{Re}\eta_I' + \text{Im}\eta_I \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{II} &= 2\text{Im}Z_{II} + y\text{Re}Z_{II}' - y\text{Re}\eta_{II}' - \text{Im}\eta_{II} \\ \sigma_{yy}^{II} &= -y\text{Re}Z_{II}' + y\text{Re}\eta_{II}' - \text{Im}\eta_{II} \\ \sigma_{xx}^{II} &= \text{Re}Z_{II} - y\text{Im}Z_{II}' + y\text{Im}\eta_{II}' \end{aligned} \quad (3)$$

Por supuesto las representaciones de las ecs.(2) y (3) son equivalentes; el uso de distintas funciones de tensión tiene por objetivo simplificar las expresiones de las condiciones de contorno en los casos de deformación según el modo I (caso simétrico) y el modo II (caso antisimétrico). Así, supóngase que existe una grieta semiindefinida en $y=0, x<0$; las condiciones de contorno son:

caso simétrico:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^I &= 0 \text{ en } y=0 \Rightarrow \text{Im}\eta_I = 0 \text{ en } y=0 \\ \sigma_{yy}^I &= 0 \text{ en } y=0, x<0 \Rightarrow \text{Re}Z_I = 0 \text{ en } y=0, x<0 \end{aligned} \quad (4)$$

caso antisimétrico:

$$\sigma_{yy}^{II} = 0 \text{ en } y=0 \Rightarrow \text{Im}\eta_{II} = 0 \text{ en } y=0$$

$$\sigma_{xy}^{II} = 0 \text{ en } y=0, x<0 \Rightarrow \text{Re}Z_{II} = 0 \text{ en } y=0, x<0 \quad (5)$$

La superposición de las tensiones en ambos estados da el campo total de tensiones

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^I + \sigma_{\alpha\beta}^{II} \quad \alpha, \beta = x, y \quad (6)$$

Obviamente las condiciones de contorno definidas por las ecuaciones(4) y (5) sólo reproducen el estado tensional en un extremo de la grieta por lo que el campo tensional definido por las ecs.(6), (2) y (3) no debe ser usado para el ajuste de los estados tensionales en zonas en las que influyan ambos bordes de grieta. A continuación las funciones de tensión son desarrolladas en serie de potencias. Una forma de estos desarrollos que satisface las condiciones de contorno (4) y (5), además de contener los términos singulares adecuados es

$$Z_I(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[n - \frac{1}{2} \right] A_n z^{n-\frac{1}{2}}, \eta_I(z) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p z^p \quad (7)$$

$$Z_{II}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[m - \frac{1}{2} \right] B_m z^{m-\frac{1}{2}}, \eta_{II}(z) = \sum_{q=0}^{Q-1} D_q z^q \quad (8)$$

en las que A_0 y B_0 son proporcionales a los factores de intensidad de tensiones K_I y K_{II} , que caracterizan el peso de las distribuciones singulares de tensión que aparecen en el borde de una grieta. La idea de expresar las funciones de tensión mediante desarrollos en serie no es nueva. Fue ya planteada por Williams [3] y utilizada en diversos trabajos [4,5,6,7] sobre la obtención de K_I mediante técnicas fotoelásticas. Posteriormente, esta metodología fue generalizada [8] para tratar problemas mixtos, en los que aparecen K_I y K_{II} (Ecs.(7) y (8)).

En este sentido cabe mencionar que en [8] la función $\eta_{II}(z)$ no fue incluida en el planteamiento, aunque sí $\eta_I(z)$. A priori, no parece haber ninguna razón para no incluir η_{II} . Así, si tratamos con un problema simétrico la solución general debe seguir dependiendo de dos funciones de variable compleja, tal como apuntó Sanford [5] lo que hace necesario incluir $\eta_I(z)$; a nivel físico, el primer término del desarrollo de $\eta_I(z)$ está asociado al problema de una placa sometida a tracción (o compresión) horizontal (σ_{xx} constante) siendo el coeficiente C_0 proporcional al término σ_{ox} utilizado en la literatura Irwin,

[9]. Análogamente, si tratamos con un problema antisimétrico, la solución debe ser expresada en función de dos funciones Z_{II} y η_{II} ; a nivel físico, el primer término del desarrollo de $\eta_{II}(z)$ está asociado al problema de una placa sometida a momento flector (σ_{xx} lineal con y). La sustitución de las ecs.(7) y (8) en las ecs.(2), (3) y (6) permite expresar las tensiones en función de los coeficientes de los desarrollos y de la variable z ; poniendo ésta en la forma $z = re^{i\theta}$ se obtendría, simbólicamente,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(A_n, B_m, C_p, D_q, r, \theta) \quad (9)$$

Sustituyendo las ecs (9) en la ec.(1) obtendremos la ecuación de una isocromática de orden N ; simbólicamente ésta se escribiría

$$F(A_n, B_m, C_p, D_q, r, \theta, N) = 0 \quad (10)$$

La aparición frecuente de una cáustica en el extremo de la grieta hace aconsejable incluir como parámetros de ajuste las coordenadas del extremo de la grieta, x_C, y_C , una idea que ya ha sido sugerida con anterioridad, Rossmannith, [7].

Los coeficientes de la ec.(10), en número $N+M+P+Q+2=T$, son calculados particularizando dicha ecuación en S puntos de distintas isocromaticas, definidos cada uno de ellos por unos valores r_s, θ_s, N_s ($s=1, S$). Así se obtiene el sistema no lineal de ecuaciones.

$$F_s(A_n, B_m, C_p, D_q, x_C, y_C, r, \theta, N) = 0 \quad ; \quad s=1, S \quad (11)$$

Si englobamos todos los coeficientes en el vector X_t ($t=1, T$) las ecs.(11) quedan

$$F_s(X_t) = 0; \quad s = 1, S \quad (12)$$

La elección más conveniente para minimizar los errores de medida es tomar $T < S$ lo que convierte las ecs.(12) en un sistema sobredeterminado no lineal de ecuaciones. Dicha sobredeterminación hace que en general dichas ecuaciones no puedan satisfacerse exactamente, por lo que para cada vector X_t puede definirse un vector residuo $R_s = F_s(X_t)$. Mediante un método iterativo que combine el método de Newton-Raphson (NR) con el de mínimos cuadrados [10], se busca el conjunto de valores de los coeficientes (vector X_t) que minimiza el módulo del vector residuo.

3. ASPECTOS NUMERICOS

Existe alguna literatura [11] sobre el comportamiento del Método de Desarrollos en Serie (MDS) descrito, en el caso de existir sólo K_I , pero no conocemos estudios comparables para situaciones en las que se produzca K_{II} sólo, o K_I y K_{II} conjuntamente. Este trabajo intenta realizar un análisis del comportamiento numérico del MDS en este último caso.

En primer lugar, cabe mencionar que existe un gran número de factores susceptibles de variación a la hora de realizar un estudio numérico. Mencionemos aquí los siguientes:

- El tipo de función de ajuste a utilizar
- El número total de coeficientes de ajuste utilizados
- La inclusión o no de las coordenadas del borde de grieta en el ajuste
- La consideración o no de la función η_{II}
- La solución inicial escogida
- El número de puntos de ajuste utilizados
- La distribución de estos puntos

Es difícil manejar paraméricamente todos estos factores. En este trabajo hemos cubierto, a veces en forma no exhaustiva, aspectos numéricos relacionados con los cuatro primeros apartados.

El caso analizado se muestra en la Fig.1.

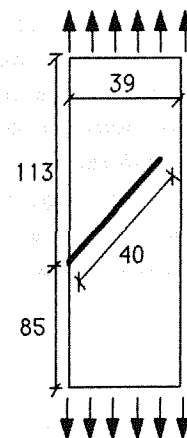


Fig. 1. Probeta utilizada
Espesor: $e=4$ mm. Factor de franja $\lambda = 0.75$ Kg/mm
Carga total aplicada=27 Kg.

Deliberadamente se ha escogido una dimensión de la grieta para la que no existe solución analítica del problema en los manuales clásicos [12]. Nuestra definición de si un ajuste es o no aceptable se basará en el posterior trazado gráfico de dicho ajuste, que se superpondrá y comparará a los puntos reales introducidos.

Una fotografía del campo de isocromáticas obtenido se muestra en la Fig. 2, correspondiente

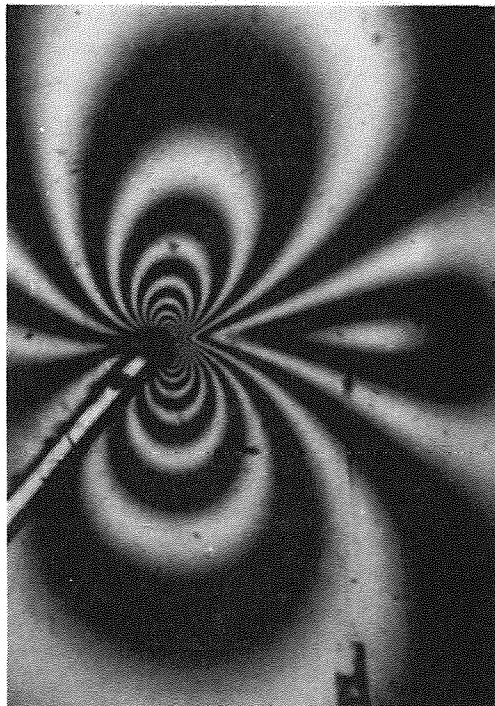


Fig.2. Campo de isocromáticas.

a campo claro. Además, se han usado las isocromáticas obtenidas en el correspondiente campo oscuro.

Con objeto de no hacer intervenir los factores f) y g) se ha tomado un elevado número de puntos, en concreto 443 puntos, que se han distribuido sobre todas las isocromáticas, desde el orden 1'5, correspondiente a la más externa, hasta el orden 7, correspondiente a la más interna. Un dibujo del conjunto de puntos se muestra en las Figs.4 y 5. Como solución inicial se ha tomado en todos los casos $K_I = K_{II} = 1$ y el resto de los coeficientes nulos.

4. ESTUDIO NUMÉRICO

Antes de entrar a definir los estudios paramétricos realizados debe mencionarse que en ocasiones el método de NR convencional no converge adecuadamente, produciéndose crecimientos de residuos entre dos iteraciones, lo que indica la existencia de un mínimo relativo de dicho residuo en el intervalo. Este hecho, comentado en otro trabajo [13], parece estar asociado al aumento del número de mínimos relativos de la función residuo a medida que aumentamos el número de coeficientes, pues no se ha presentado en ninguno de los casos para bajo número de coeficientes, en los cuales el método convencional de NR ha funcionado adecuadamente. Para alto número de coeficientes sí se ha encontrado con frecuencia mal funcionamiento del método convencional. Consecuentemente se ha implementado un método de NR modificado en el cual se procede como sigue. Si el método convencional da un residuo creciente, éste se evalúa en la mitad del intervalo, en los dos tercios centrales, etc., reteniendo como residuo actual el primero que sea menor que el del intervalo completo. Con esta metodología se asegura la convergencia, al menos a un mínimo relativo. En la Fig.3 se ha representado el valor

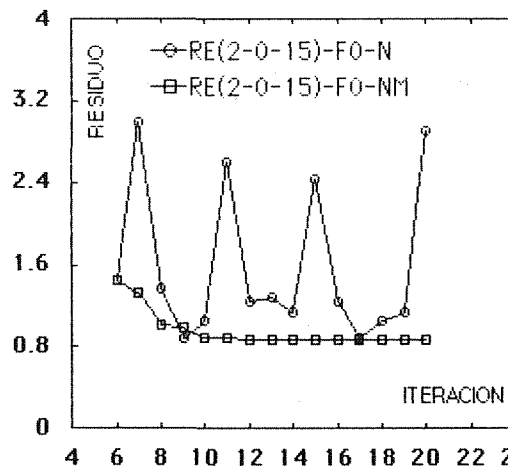


Fig.3. Evolución del residuo para el caso (2-0-15)-F0. N: Método convencional. Nm: Método modificado

del residuo en función del número de iteraciones para un caso de alto número de coeficientes con el método convencional y con la versión modificada del método. Esta versión modificada ha sido utilizada para todos los casos que luego detallaremos.

4.1 Funciones de ajuste

La expresión básica (1) puede ponerse de distintas formas

$$F_0 = (e/N\lambda)2\tau_m - 1 = 0, F_1 = (e/\lambda)2\tau_m - N = 0 \quad (12), (13)$$

$$F_2 = (e^2/\lambda^2)(2\tau_m)^2 - N^2 = 0, F_3 = (e^2/\lambda^2 N^2)(2\tau_m)^2 - 1 = 0 \quad (14), (15)$$

Obviamente todas son equivalentes si se cumpliera estrictamente la igualdad a cero, pero en el caso real de ajuste eso no será así, obteniéndose unas componentes del vector residuo en los segundos miembros, por lo que cabe pensar que el óptimo difiera de una a otra función.

4.2. Otros factores

Las alternativas adoptadas se identifican por una clave de tres números a-b-c que indican, el primero, si x_c, y_c se han incluido o no en el ajuste (valores 2 ó 0); el segundo, el número de términos del desarrollo de la función η_{III} (ec.(8)); y el tercero, el número de términos de las otras tres funciones Z_I, Z_{II} y η_I (ec.(7) y (8)), que se reparten a partes iguales entre ellas.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1

Tabla 1. Resultados obtenidos

| Función Clave | F ₀ | F ₁ | F ₂ | F ₃ |
|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0-0-3 | 1.53 .985 M M | 1.71 .951 M M | 1.75 .922 M M | 1.45 .987 M M |
| 0-1-3 | 1.59 1.00 M M | 1.76 .956 M M | 1.84 .920 M M | 1.54 .997 M M |
| 2-0-3 | 1.62 .934 R M | 1.77 .904 B M | 1.84 .879 B M | 1.60 .926 R M |
| 2-1-3 | 1.64 .947 R M | 1.78 .911 B M | 1.86 .884 B M | 1.64 .940 R M |
| 0-0-15 | 1.73 .898 M ● R | 1.79 .883 M ● R | 1.79 .857 M ● M | 1.68 .896 M ● R(-1) |
| 0-5-15 | 1.88 .849 M B(-1) | 1.87 .856 M R(-2) | 1.86 .833 M ● M | 1.84 .866 M B(-1) |
| 2-0-15 | 1.80 .866 B ● B(-1) | 1.88 .857 B ● B(-2) | 1.91 .848 B ● B(-2) | 1.79 .865 B ● R(-1) |
| 2-5-15 | 1.94 .835 B B(-1) | 1.94 .847 B B(-1) | 1.94 .841 B B(-2) | 1.929 .848 B B |

En ésta, los dos números superiores de cada recuadro son los valores de K_I y K_{II} obtenidos.

Las dos letras inferiores indican, la de la izquierda(derecha) si el ajuste de las isocromáticas más internas (externas) puede considerarse bueno (B), regular (R) ó malo (M). Si un número negativo n acompaña a estas letras indica que el ajuste es como se indica excepto en las n isocromáticas más externas, en que es malo. El círculo negro entre ambas letras indican que el método clásico de MR falló en ese caso y que hubo de ser utilizada la modificación descrita previamente. Dado el lógico grado de subjetividad que conllevan éstas calificaciones se muestran en la Fig.4 el ajuste obtenido para el caso (0-0-3)-F₃, que es uno de los peores, y en la Fig.5 el caso (2-5-15)-F₃, que puede considerarse el óptimo.

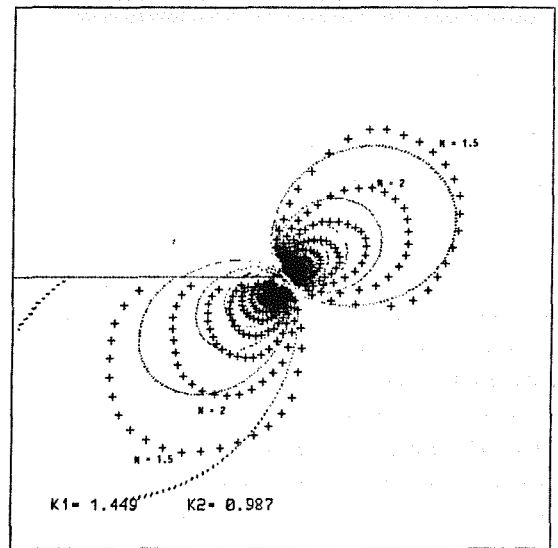
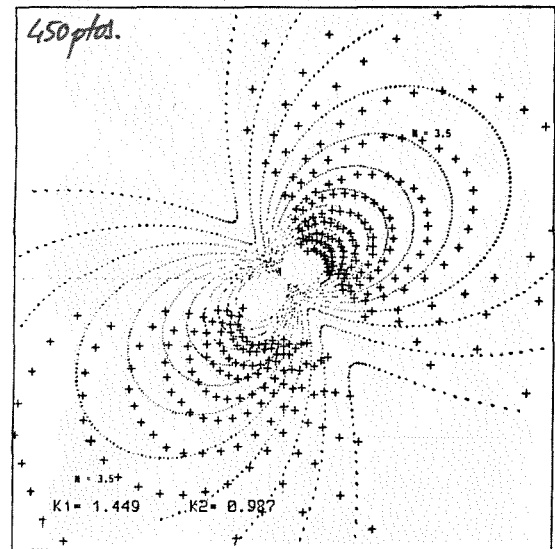
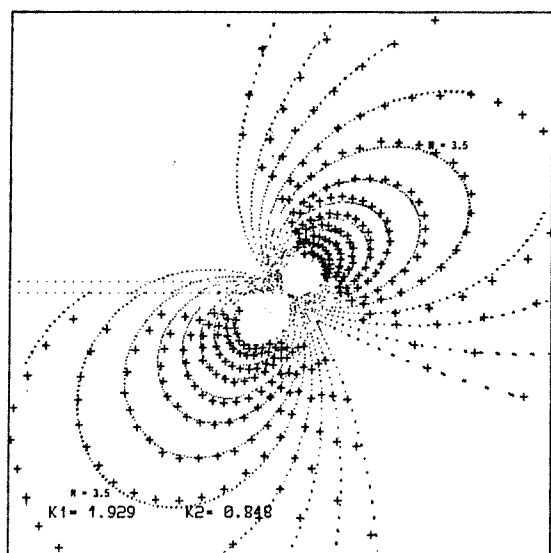
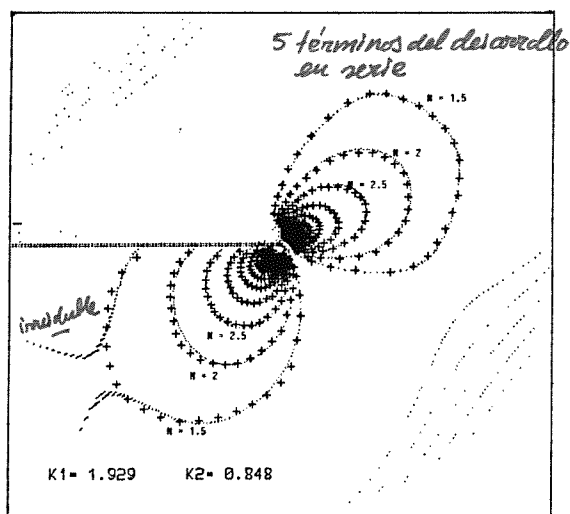


Fig.4. Conjunto de puntos y ajuste en el caso (0-0-3)-F₃. (a):Vista cercana. (b):Vista lejana



(a)



(b)

Fig.5. Conjunto de puntos y ajuste en el caso (2-5-15)-F3. (a): Vista cercana. (b): Vista lejana

5. CONCLUSIONES

Aunque los resultados obtenidos no permiten establecer conclusiones tajantes, pueden hacerse los siguientes comentarios:

a) El posible fallo del método convencional de MR es más probable para un número de coeficientes alto, presumiblemente porque a más coeficientes más mínimos relativos de la función residuo. La presencia de la función η_{III} tiene un claro efecto estabilizante

b) El uso de distintas funciones de ajuste puede provocar sensibles variaciones; esto es más

acusado para un número bajo de coeficientes. Así, se encuentran variaciones en K_I de hasta el 21% para el caso 0-0-3, mientras que éstas no llegan al 7% para el caso 0-0-15. No parece posible definir claramente una función de ajuste mejor que las otras, aunque cabe decir que en el caso 2-5-15 el ajuste mejor se consiguió con la función F_3 .

c) La inclusión de los parámetros x_0, y_0 provoca variaciones de K_I y K_{II} que llegan al 10.3 y 6.2% para bajo número de coeficientes y son algo menores (6.7 y 3.6%) para alto número de coeficientes. La inclusión de dichos parámetros es esencial para conseguir un buen ajuste cercano (del que más van a depender unos buenos valores de los coeficientes de intensificación de tensiones) y es también claramente beneficiosa para conseguir un buen ajuste en zonas más alejadas.

d) La inclusión de la función η_{III} provoca variaciones de K_I y K_{II} que llegan al 6.2 y 4.4% para bajo número de coeficientes y son algo mayores (9.5 y 5.5%) para alto número de coeficientes. Su efecto es nulo para el ajuste cercano, como era de esperar, y claramente positivo para el ajuste lejano.

e) La inclusión conjunta de x_0, y_0 y de la función η_{III} provoca variaciones en K_I y K_{II} de hasta el 13.1 y 8.5% para bajo número de coeficientes y del 14.9 y 7% para alto número de coeficientes. El efecto de estos parámetros es notorio sobre el ajuste y cabe concluir que deberían ser siempre incluidos.

e) Aún en el caso de que los ajustes sean en general buenos hay una aparente dificultad de ajustar la isocromática más lejana, quizás por el hecho de ser ésta la de banda más ancha.

6. REFERENCIAS

[1] Dally, J.W. Riley, W.F. (1978) "Experimental stress analysis", McGraw-Hill.
 [2] Muskhelishvili, N.I. (1953) "Some basic problems of the mathematical theory of Elasticity". Noordhoff.
 [3] Willians, M.L. (1957) "On the stress

distribution at the base of a stationary crack." *J. of Appl. Mech.*, Vol. 24. pp. 109-114.

3, pp. 45-52.

- [4] Dally, J.M. (1979) "Dynamic photoelastic studies of fracture". *Exp. Mech.*, Vol. 20, pp. 192-7.
- [5] Sanford, R.J. (1978) "A critical re-examination of the Westergard method for solving opening-mode crack problems." *Mechanics Research Communications*. Vol. 6, Nº 5, pp 289-294.
- [6] Cottron, M. et al. (1981) "Sur le calcul du facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture pour un problème plan à partir des données de la photoélasticité". *Revue Française de Mécanique*, pp. 31-36.
- [7] Rossmannith, H.P. (1983) "A hybrid technique for improved K determination from photoelastic data". *Exp. Mech.*, Vol 23, pp. 152-157.
- [8] Cottron, M. y Lagarde, A. (1982) "A far field method for the determination of mixed-mode SIF from isochromatic fringe patterns" *SI Archives*, Vol. 7, pp. 1-18.
- [9] Irwing, G.B. (1958) Discussion de: Wells, A.A. y Post, D. (1958) "The dynamic stress distribution surrounding a running crack-A photoelastic analysis". *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, Vol. 16, pp. 69-92.
- [10] Sanford R.I. y Dally J.W. (1979) "A general method for determining mixed-mode SIF from isochromatic fringe patterns". *Engng.Fract. Mech.*, Vol. 11, pp. 621-33.
- [11] Sanford, R.I. et al (1981) "A photoelastic study of the influence of non-singular stresses in fracture test specimens". Report NUREG/CR-2179, University of Maryland. USA.
- [12] Murakami, Y. (Ed) (1987) "Stress Intensity Factors Handbook" Pergamon Press.
- [13] Rivas, C. et al (1988) "Campo tensional en el entorno de una fisura. Determinación de K_I y K_{II} usando técnicas fotoelásticas". *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 6, Nº

AGRADECIMIENTOS:

- Los autores están de acuerdo en que este artículo no hubiera sido posible sin el estimable trabajo en el laboratorio de Antonio Cañas.

- Este trabajo ha sido financiado por la Junta de Andalucía, mediante el Proyecto 5853 "Caracterización de grietas en régimen elastodinámico.