

2.15763

043
98

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA DE TESIS
Grado de Matemáticas para optar al título de Doctor
el día 92 de Agosto de 1992 del libro
correspondiente. 176
del 1.º SEM. 1992
Sevilla,

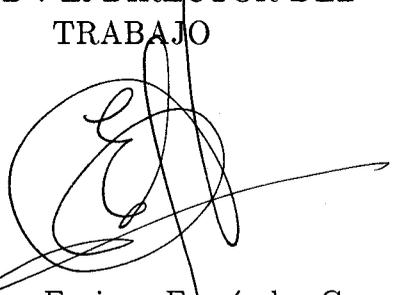
LBS 1002611

Universidad de Sevilla
Dpto. de Análisis Matemático
El Jefe del Negociado de Tesis,
Laura Raffille

NUEVOS RESULTADOS SOBRE EL PROBLEMA DE NAVIER-STOKES CON DENSIDAD VARIABLE Y ALGUNAS VARIANTES:

Existencia, Unicidad, otros Resultados Teóricos y Aproximación Numérica

Vº.Bº: EL DIRECTOR DEL
TRABAJO



Fdo. Enrique Fernández Cara.
Catedrático de Análisis
Matemático de la Universidad
de Sevilla.

Memoria presentada por
Francisco M. Guillén González,
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Sevilla, Agosto 1992.



Fdo. Francisco M. Guillén González

Mi agradecimiento

Al Profesor Dr. D. Enrique Fernández Cara por su valiosa y acertada dirección.

A todos los miembros del Grupo de Investigación ECUADIF de la Universidad de Sevilla por su ayuda y colaboración en la realización de este trabajo y en especial:

A los Profesores Dr. D. José D. Martín Gómez, D. José Real Anguas y D. Tomás Chacón Rebollo por sus indicaciones bibliográficas.

A los Profesores Dr. D. Francisco Ortegón Gallego y D. Daniel Franco Coronil por haber resuelto cuántos problemas de tipo informático les he planteado.

Y a mis compañeros M. González Burgos, J.A. Bello Jiménez y B. Climent Ezquerro por haber atendido con gran interés a mis exposiciones sobre este trabajo.

Sevilla, Agosto de 1992.

A mi Familia
y a Cori

INDICE DE MATERIAS

NOTACIONES	i
0 INTRODUCCION	1
0.1 Los Problemas Considerados. Los Objetivos	1
0.2 Resultados Teóricos Conocidos	6
0.3 Principales Aportaciones Originales de Carácter Teórico	10
0.4 Aportaciones Originales sobre la Aproximación Numérica de (NSDV)	12
0.5 Resumen de la Memoria	13
0.6 Algunos Resultados que Quedan Pendientes	14
1 Nuevos Resultados sobre Existencia de Solución Débil	16
1.1 Resultados Técnicos Preliminares	17
1.1.1 Inyecciones Continuas y Compactas. Productos Continuos	17
1.1.2 Espacios de Nikolskii. Resultado de Compacidad	20
1.1.3 Espacios Relacionados con el Operador Divergencia	21
1.1.4 Primitivas de Distribuciones. Existencia y Regularidad	22
1.1.5 El Problema de Transporte	24
1.2 Existencia de Solución Global en Tiempo para Ω General	28
1.2.1 Planteamiento del Problema	28
1.2.2 El Resultado Principal. Algunos Casos Particulares	31
1.2.3 Demostración del Resultado Principal (I): Construcción y Primeras Propiedades de las Soluciones Aproximadas	36
1.2.4 Demostración del Resultado Principal (II): Compacidad, Proceso de Paso al Límite y Conclusiones	43
1.2.5 Esquema de las Demostraciones de los Casos Particulares	47
1.3 El Caso de Coeficiente de Viscosidad Variable	50
1.3.1 Planteamiento del Problema. Definición de Solución Débil	50
1.3.2 Existencia de Solución Débil	51
1.4 El Caso de Condiciones de Contorno No Homogéneas	54
1.4.1 Planteamiento del Problema	54
1.4.2 Levantamiento del Dato en el Contorno (Independiente del Tiempo)	56
1.4.3 El Resultado Principal	57
1.4.4 Demostración del Resultado Principal	58
1.4.5 Dato en el Contorno Dependiente del Tiempo	64

2 Nuevos Resultados sobre Soluciones Semi-fuertes y Fuertes	69
2.1 Solución Semi-Fuerte Global en Tiempo. Decrecimiento Exponencial . . .	71
2.1.1 El Resultado Principal	71
2.1.2 Demostración del Resultado Principal	74
2.2 Unicidad de Solución Semi-Fuerte	78
2.2.1 Algunos Resultados Conocidos sobre Existencia y Unicidad de Solución Fuerte	78
2.2.2 Sobre la Unicidad de Solución Semi-Fuerte	80
2.3 El Modelo de Stokes con Densidad Variable	84
2.3.1 Deducción del Modelo. Justificación Física	84
2.3.2 Existencia de Solución Semi-Fuerte Global en Tiempo	86
2.3.3 Existencia de Solución Fuerte Global en Tiempo. Unicidad de Solución Semi-Fuerte	95
3 El problema con Difusión de masa	97
3.1 Deducción del Modelo	99
3.2 Solución Débil y Solución Fuerte. Algunos Resultados Conocidos . . .	102
3.3 Existencia de Solución Débil sin Restricciones para la Densidad Inicial	106
3.4 El Comportamiento de la Solución Débil cuando $\lambda \rightarrow +\infty$	113
4 Descripción de Procedimientos de Aproximación Numérica	118
4.1 Distintas Formulaciones del Problema	119
4.2 Los Procedimientos de Aproximación en Tiempo	121
4.2.1 Esquema de Euler Implícito en Diferencias Finitas	121
4.2.2 El Método de las Características	122
4.3 Reformulación en el sentido de los mínimos Cuadrados del Problema No Lineal en (ρ, \mathbf{u}, p) . Algoritmo de Descenso de Tipo Gradiente Conjugado	124
4.4 Algunos Procedimientos de Discretización en Espacio. Resolución Efectiva	127
Apéndices	
A Demostración de Lema 1.6 (Una Versión del Lema de De Rham)	129
B Demostración de Lema 1.15 (Existencia de Solución m -Aproximada)	132
C Existencia y Regularidad de un Rotacional	138
BIBLIOGRAFIA	141

Notaciones

1. Escalar, vectorial y matricial.

\mathbb{N}, \mathbb{R} : conjunto de los números naturales y reales, respectivamente.

$\alpha \in \mathbb{N}^N$: multi-índice, de "longitud" $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ (notación de L. Schwartz).

$|x|$: valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$.

\mathbb{R}^N : espacio Euclídeo de dimensión $N \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N x^i y^i = x^i y^i$: producto escalar Euclídeo de los vectores $\mathbf{x} = (x^i)_{i=1}^N$, $\mathbf{y} = (y^i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$; se usa el convenio de sumación de índices repetidos.

$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$: norma Euclídea de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ o \mathbf{xy} : matriz (producto tensorial) de orden $N \times N$, cuyo coeficiente (i, j) es $x^i y^j$.

$\mathbf{A} : \mathbf{B} = a^{ij} b^{ij}$: producto escalar Euclídeo de matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} : \mathbf{A})^{1/2}$: norma Euclídea de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

2. Nociones geométricas.

Ω : abierto de \mathbb{R}^3 cualquiera (en caso contrario se especificarán las restricciones), de medida de Lebesgue $|\Omega|$. Habitualmente, se trata de un dominio, es decir, un abierto conexo en las variables espaciales $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

$\partial\Omega$ ó Γ : frontera de Ω .

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$: vector normal unitario en el punto $x \in \partial\Omega$ orientado hacia el exterior de Ω .

$\bar{\Omega}$: adherencia de Ω .

$(0, T)$, $0 < T \leq +\infty$: intervalo temporal de observación.

$$Q_T = (0, T) \times \Omega.$$

$$\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega.$$

Para Θ otro abierto cualquiera,

$$Q_{T;\Theta} = (0, T) \times \Theta.$$

$$\Sigma_{T;\Theta} = (0, T) \times \partial\Theta.$$

3. Derivadas parciales. Operadores diferenciales.

Para $(t, \mathbf{x}) \in Q_T$,

$\rho(t, \mathbf{x})$: función (o distribución en general) escalar. Densidad del Fluido.

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$: función (o distribución en general) vectorial, $\mathbf{u} = (u^i)_{i=1}^3$. Campo de velocidades del Fluido.

Las siguientes derivadas parciales y operadores en derivadas parciales, están considerados de forma general en el sentido de las distribuciones.

$$\rho_t \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \rho_{x^i} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial x^i}, \quad \rho_{tx^i} \equiv \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x^i}, \dots : \text{derivadas parciales de } \rho.$$

$u_t^i, u_{x^i}^i, u_{tx^i}^i, u_{x^i x^j}^i, \dots$: derivadas parciales de la componente i -ésima de \mathbf{u} .

$\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{x^i}, \mathbf{u}_{tx^i}, \mathbf{u}_{x^i x^j}, \dots$: derivadas parciales del vector \mathbf{u} .

$D^m \rho, D^m \mathbf{u}$: vector de todas las derivadas de orden $m \in \mathbb{N}$ de ρ y \mathbf{u} resp.

$\nabla \rho = (\rho_{x^i})_{i=1}^3$: vector (fila) gradiente de ρ .

$\nabla \mathbf{u} = (u_{x^i}^j)_{i,j=1}^3$: matriz (o tensor) gradiente de \mathbf{u} .

$\Delta \rho = \rho_{x^i x^i}$: Laplaciano de ρ ($\in \mathbb{R}$).

$\Delta \mathbf{u} = (u_{x^i x^i}^j)_{i=1}^3$: vector Laplaciano de \mathbf{u} .

$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{x^i}^i$: divergencia de \mathbf{u} .

$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = u^i \rho_{x^i}$ término convectivo para la densidad.

$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (u^i u_{x^i}^j)_{j=1}^3$: términos convectivos para el campo de velocidades.

$\nabla \cdot (\mathbf{uv})$: operador divergencia aplicado (por columnas) a la matriz \mathbf{uv} , con \mathbf{v} otra función vectorial. Se tiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{uv}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

4. Espacios de funciones con valores reales.

$C^m(\Omega)$ (resp. $C_b^m(\Omega)$), ($m \geq 0$ entero ó $m = +\infty$) : espacio de Fréchet de las funciones de $\Omega \mapsto \mathbb{R}$ m veces continuamente diferenciables (resp. y acotadas). Para $m = 0$, serán las funciones continuas (resp. y acotadas). $C_b^m(\Omega)$ es un espacio de Banach. Caso de ser $m = 0$, será omitido.

$C^m(\bar{\Omega})$ (resp. $C_b^m(\bar{\Omega})$) = $\{f : f \in C^m(\Theta)$ (resp. $f \in C_b^m(\Theta)$) para algún abierto Θ tal que $\bar{\Omega} \subset \Theta\}$. Obviamente, $C_b^m(\bar{\Omega}) = C^m(\bar{\Omega})$ si Ω es acotado.

$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($0 < \alpha \leq 1$) = $\{f : f \in C^m(\bar{\Omega}), D^m f$ es α -holderiana}

$\mathcal{D}(\Omega)$: espacio vectorial de las funciones "test" habituales; de clase $C^\infty(\Omega)$ y de soporte compacto contenido en Ω .

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espacio de las distribuciones sobre Ω , es decir, aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(\Omega)$ en \mathbb{R} (para la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(\Omega)$).

p ($1 \leq p \leq +\infty$) : exponente de sumabilidad.

p' : exponente conjugado de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, para $p = 1$ resulta $p' = +\infty$; finalmente, si $p = +\infty$ entonces $p' = 1$).

p_* : exponente asociado a p por las inyecciones de Sobolev: Cuando $1 \leq p < 3$,

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^{p_*} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p_*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}.$$

$L^p \equiv L^p(\Omega)$: espacio de Banach de las (clases de) funciones de Ω en \mathbb{R} , medibles y p -sumables.

$L_{loc}^p \equiv L_{loc}^p(\Omega)$: espacio Fréchet de las (clases de) funciones p -sumables en cada subconjunto propio, abierto y acotado de Ω .

$W^{m,p} \equiv W^{m,p}(\Omega)$ (m natural) : espacio de Banach de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$, cuyas derivadas en $\mathcal{D}'(\Omega)$ de orden $\leq m$ son también de $L^p(\Omega)$.

$W_{loc}^{m,p} \equiv W_{loc}^{m,p}(\Omega) = \{f : f \in W^{m,p}(G) \ \forall G \text{ subconjunto propio de } \Omega \text{ abierto acotado}\}$
(un nuevo espacio de Fréchet).

$W_0^{m,p} \equiv W_0^{m,p}(\Omega) : \text{ cierre de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ en } W^{m,p}(\Omega).$

$W^{-m,p'} \equiv W^{-m,p'}(\Omega) : \text{ dual de } W_0^{m,p}(\Omega), \text{ para } 1 \leq p < +\infty.$

$H^m \equiv H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), H_0^m \equiv H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) \text{ y } H^{-m} \equiv H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega).$

Los $W^{m,p}(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega), W^{-m,p'}(\Omega)$ (resp. $H^m(\Omega), H_0^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)$) son espacios de Banach (resp. Hilbert) para determinadas normas que aparecen de manera totalmente natural. Habitualmente se denominan espacios de Sobolev.

En el caso de funciones con valores vectoriales, el número de componentes será superindicado y el espacio correspondiente se considerará dotado de la norma (ó topología) producto habitual.

5. Espacios de funciones con valores en un espacio de Banach.

Sea B un espacio de Banach y B' su dual.

$L^p(B) \equiv L^p(0, T; B) : \text{ espacio de Banach de las (clases de) funciones } f : [0, T] \mapsto B$
medibles y tales que la función $t \in [0, T] \mapsto \|f(t)\|_B$ (definida *cpd.*) es p -sumable.

$L_{loc}^p(B) \equiv L_{loc}^p(0, T; B) = \{f : f \in L^p(a, b; B), \forall a, b : 0 < a < b < T\}$ (un espacio de Fréchet).

$C^m(B) \equiv C^m([0, T]; B) : \text{ espacio de Banach de las funciones } f : [0, T] \mapsto B \text{ } m \text{ veces}$
diferenciables con continuidad (con respecto a la topología fuerte de B).

$\mathcal{D}(0, T; B) : \text{ espacio vectorial de las funciones } f : [0, T] \mapsto B \text{ de clase } C^\infty \text{ y de soporte}$
compacto contenido en $(0, T)$.

$\mathcal{D}'(0, T; B) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); B) : \text{ espacio de las distribuciones con valores en } B$ (aplicaciones lineales "continuas" de $\mathcal{D}(0, T)$ en B , para la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(0, T)$ y la topología fuerte en B).

$W^{m,p}(B) \equiv W^{m,p}(0, T; B) : \text{ espacio de Banach de las (clases de) funciones de } L^p(0, T; B)$
cuyas derivadas en $\mathcal{D}'(0, T; B)$ de orden $\leq m$ están también en $L^p(0, T; B)$.

$W_{loc}^{m,p}(B) \equiv W_{loc}^{m,p}(0, T; B) = \{f : f \in W^{m,p}(a, b; B), \forall a, b : 0 < a < b < T\}$ (un nuevo espacio de Fréchet).

$W_0^{m,p}(B) \equiv W_0^{m,p}(0, T; B) : \text{ cierre de } \mathcal{D}(0, T; B) \text{ en } W^{m,p}(0, T; B).$

$W^{-m,p'}(B) \equiv W^{-m,p'}(0, T; B') : \text{dual de } W_0^{m,p}(0, T; B), \text{ para } 1 \leq p < +\infty.$

$H^m(B) \equiv H^m(0, T; B) = W^{m,2}(0, T; B), H_0^m(B) \equiv H_0^m(0, T; B) = W_0^{m,2}(0, T; B)$ y

$H^{-m}(B) \equiv H^{-m}(0, T; B') = W^{-m,2}(0, T; B').$

Los $W^{m,p}(0, T; B)$, $W_0^{m,p}(0, T; B)$, $W^{-m,p'}(0, T; B')$ (resp. $H^m(0, T; B)$, $H_0^m(0, T; B)$, $H^{-m}(0, T; B')$ si B es un espacio de Hilbert) son espacios de Banach (resp. de Hilbert) para determinadas normas que se especificarán más adelante. Habitualmente, se denominan espacios de Sobolev con valores vectoriales.

6. Normas y Seminormas.

De forma general, $\|\cdot\|_B$ denotará una norma en el espacio de Banach B . En particular, si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el dominio que ocupa el fluido y Θ otro abierto cualquiera,

$$\|u\|_p : (L^p), \quad \|u\|_{p;\Theta} : (L^p(\Theta))$$

$$\|u\|_{m,p} : (W^{m,p}), \quad \|u\|_{m,p;\Theta} : (W^{m,p}(\Theta))$$

$$\|u\|_m : (H^m), \quad \|u\|_{m;\Theta} : (H^m(\Theta))$$

$$\|u\|_{p,q;Q_T} : (L^p(L^q)), \quad \|u\|_{p,q;Q_T;\Theta} : (L^p(L^q(\Theta))).$$

$$\|u\|_{p;m,q;Q_T} : (L^p(W^{m,q})), \quad \|u\|_{p;m,q;Q_T;\Theta} : (L^p(W^{m,q}(\Theta))).$$

$$\|u\|_{p;m;Q_T} : (L^p(H^m)), \quad \|u\|_{p;m;Q_T;\Theta} : (L^p(H^m(\Theta))).$$

7. Productos Escalares y en el sentido de las Distribuciones.

De forma general, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B',B}$ denotará un producto de dualidad entre B' y B y $(\cdot, \cdot)_H$ un producto escalar en el espacio de Hilbert H . En particular,

$$(u, v) : (L^2), \quad (u, v)_\Theta : (L^2(\Theta)).$$

$$((u, v)) : (H^1), \quad ((u, v))_\Theta : (H^1(\Theta)).$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega : (\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{(0,T)} : (\mathcal{D}'(0, T), \mathcal{D}(0, T)).$$

8. Abreviaturas.

cpd. : "casi por doquier" (usualmente respecto de la medida de Lebesgue).

cf. : confróntese, véase.

s.s. : subsucesión, subsucesiones.

edp. : ecuaciones en derivadas parciales.

sdo. : sistema diferencial ordinario.

Cte. : constante.

resp. : respectivamente.

i.e. : es decir.

indep. : independiente, independientemente.

9. Tipos de Aplicaciones, Inyecciones y Convergencias.

\mapsto : aplicación o función.

\hookrightarrow : inyección algebraica y topológica (inyección continua).

\xrightarrow{c} : inyección compacta.

\xrightarrow{f} : convergencia fuerte.

\xrightarrow{d} : convergencia débil.

$\xrightarrow{*}$: convergencia débil*.

$\xrightarrow{\mathcal{D}'}$: convergencia en el sentido de las distribuciones.

Introducción

0.1 Los Problemas Considerados. Los Objetivos

El objetivo básico de esta Memoria es aportar nuevos resultados teóricos (existencia, unicidad, comportamiento cualitativo de las soluciones) y presentar algunos procedimientos de aproximación numérica para ciertos modelos en derivadas parciales que describen la evolución de flujos viscosos, incompresibles y no homogéneos.

Hasta el momento, los fluidos viscosos e incompresibles han sido estudiados por muchos autores cuando son homogéneos (i.e. poseen densidad constante); ello ha motivado el enorme desarrollo teórico y numérico que hay en torno a las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes. Por el contrario, el estudio del caso general, donde la densidad es variable (y, de hecho, una nueva incógnita del problema) es mucho más reciente.

Principalmente, consideraremos el llamado modelo de Navier-Stokes con densidad variable (cf. §0.1.2), resultante de imponer la ley de conservación de la masa (edp. de tipo hiperbólica), la ley de conservación de la cantidad de movimiento (sdp. de tipo parabólico) y la condición de incompresibilidad del fluido. Un problema reducido, donde se desprecian los términos de transporte ó convectivos para la velocidad, es el llamado modelo de Stokes con densidad variable (cf. §0.1.3), para el que obtendremos mejores resultados que en el caso general. Finalmente, estudiamos también un modelo con difusión de masa (cf. §0.1.4).

El estudio teórico comprenderá los tres modelos anteriores mientras que, en lo que se refiere a la aproximación numérica, describiremos varios esquemas exclusivamente en el marco del modelo de Navier-Stokes con densidad variable.

Vamos a considerar en toda la Memoria flujos tridimensionales (3D); el caso bidimensional (2D) suele ser análogo (incluso menos complicado) y, para él, se obtienen mejores resultados. Por otra parte, hablaremos siempre de fluidos incompresibles por lo que, por comodidad, omitiremos la palabra incompresible en la designación de los distintos problemas.

0.1.1 (NS): El Problema de Navier-Stokes

Las propiedades mecánicas y termodinámicas de un fluido viscoso e incompresible, que ocupa un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, quedan descritas si conocemos su densidad (ρ), campo de velocidades (\mathbf{u}), presión (p) y temperatura (θ); en Mecánica de Fluidos, se admite que éstas son funciones (suficientemente regulares) definidas en $Q_T \equiv (0, T) \times \Omega$. Es bien conocida, cf. por ejemplo [11], la deducción en este caso de las siguientes ecuaciones en Q_T , a partir de las leyes de conservación y de comportamiento usuales en Mecánica de Fluidos:

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (0.1)$$

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot (\mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t]) + \rho \mathbf{f}, \quad (0.2)$$

$$\rho(\theta_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta) = \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \mu F(\nabla \mathbf{u}) \quad (0.3)$$

(F es una cierta expresión polinómica de grado 2), junto con la condición de incompresibilidad del fluido

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (0.4)$$

(la ecuación (0.4) nos dice que el volumen ocupado por un conjunto de partículas que se desplazan a lo largo de las trayectorias no varía con t).

En el caso de densidad constante ($\rho \equiv \rho_0$), se suele suponer que ésta es conocida (puede ser determinada en cualquier momento, con independencia de la evolución del fluido); la edp. (0.1) no aporta ninguna información y, en consecuencia, desaparece del modelo. Si suponemos también que μ es constante e introducimos

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$$

(el coeficiente de viscosidad cinemática), entonces el término $\nabla \cdot (\mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t])$ de (0.2) se reduce a $\nu \Delta \mathbf{u}$. Además, debido a que la ecuación para la temperatura (0.3) está desacoplada de las restantes, se puede eliminar del sistema, quedándonos con

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (0.5)$$

junto con (0.4). Las ecuaciones (0.4) y (0.5) reciben el nombre de ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes. Naturalmente, este sistema debe ser completado con adecuadas condiciones de contorno e iniciales. Por su simplicidad y también porque están bien adaptadas a muchos fenómenos físicos, es frecuente introducir:

- Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas (condición de adherencia ó no deslizamiento).

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \equiv \Sigma_T. \quad (0.6)$$

- Condiciones iniciales sobre el campo de velocidades

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (0.7)$$

Hoy día es enorme la cantidad de trabajos realizados sobre el problema (0.4–0.7) (abreviadamente (NS)). En cuanto al estudio teórico, se pueden considerar pioneros los de Hopf [28], Ladyzhenskaya [35] y Lions [38] (cf. Constantin y Foias [12] y Heywood [27] para un recuento de los resultados conocidos). En cuanto a su tratamiento numérico, se puede enumerar, por ejemplo, los libros de Girault y Raviart [21], Glowinski [22], Pironneau [47], etc...

Se distinguen básicamente dos tipos de soluciones, débiles y fuertes, dependiendo de su regularidad. Lo que marca la diferencia es el sentido en que se verifica (0.5): Un sentido distribucional (solución débil), ó puntual cpd. (solución fuerte). Como característica común, está el tratamiento “esencial” que reciben (0.4) y (0.6); son “introducidas” en el espacio de funciones donde uno busca la ó las soluciones. Además, para fluidos tridimensionales, lo que se sabe demostrar, esencialmente, es que existe al menos una solución débil del problema que es global en tiempo, i.e. está definida en todo el intervalo temporal $(0, T)$, mientras que existe una única solución fuerte local (definida tan sólo para $t \in [0, T_*)$, con $T_* < T$ en general).

0.1.2 (NSDV): El Modelo de Navier-Stokes con Densidad Variable

Cuando, en (0.1–0.3), μ es constante, nos olvidamos de la ecuación (0.3) para la temperatura y obtenemos

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (0.8)$$

junto con (0.1) y (0.4). Si complementamos estas ecuaciones con las mismas condiciones de contorno e iniciales (0.6–0.7) y una condición inicial para ρ ,

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (0.9)$$

estaremos ante un modelo incompresible de Navier-Stokes con densidad variable (ó no homogéneo), en adelante (NSDV). El estudio de este modelo es el principal objetivo de la Memoria. Los casos con condiciones de contorno no homogéneas y/ó viscosidad variable $\mu = \mu(\rho)$ (donde se cambia naturalmente (0.8) por (0.2)), también serán estudiados.

Desde el punto de vista físico, el estudio del sistema anterior resulta interesante, principalmente por dos motivos:

1. Su adaptación a algunas situaciones reales. Un ejemplo puede ser el de la evolución de varios fluidos incompresibles y no miscibles, por ejemplo agua y aceite. El caso de un río con materia en suspensión corresponde a una situación que, con frecuencia, está aceptablemente descrita por este modelo. Piénsese en el interés práctico, por ejemplo en el caso de vertidos contaminantes.
2. Es un problema "límite" de otros sistemas físicos, ó bien una simplificación de éstos, cf. [39]. Por ejemplo, cuando se produce la mezcla de dos fluidos incompresibles y homogéneos, si se supone que el proceso de difusión de masa obedece la ley de Fick (cf. [32] y sus referencias). Demostraciones de la convergencia de las soluciones correspondientes a las del modelo de Navier-Stokes con densidad variable se pueden encontrar en [53] y en la Sección 3.4 de la Memoria.

En el problema (NSDV), vamos a considerar tres tipos de soluciones: débiles, semi-fuertes y fuertes. Lógicamente, la diferencia entra ellas, está en la forma en que se verifican las distintas ecuaciones y condiciones iniciales. De nuevo, (0.4) y (0.6) se tratan de forma "esencial". La Definición de solución débil, véase §1.2, se hace en base a una formulación distribucional, que elimina la presión y "agrupa" ecuaciones y condiciones iniciales. De hecho, las ecuaciones no tienen por qué verificarse puntualmente, ni siquiera cpd. Debido a que la ecuación de transporte (hiperbólica) implica menor regularidad para la solución que la ecuación de movimiento (parabólica), parece indicado introducir el concepto de solución semi-fuerte. Esencialmente, se trata de soluciones débiles que verifican puntualmente (cpd.) (0.8) y, además, la condición inicial (0.7) en un sentido clásico (\mathbf{u} debe ser continua en $t = 0$). Por último, también trabajaremos con soluciones fuertes: Aquellas soluciones semi-fuertes para las que (0.1) se verifica puntualmente cpd. y (0.7) en un sentido clásico.

En esta Memoria son presentados, principalmente, nuevos resultados de existencia de solución débil, existencia y unicidad de solución semi-fuerte y solución fuerte.

0.1.3 (SDV): El Modelo de Stokes con Densidad Variable

Cuando, en el modelo general de Navier-Stokes con densidad variable, despreciamos en (0.8) los términos convectivos

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}),$$

llegamos al modelo de Stokes con densidad variable:

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \rho\mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad (0.10)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (0.11)$$

Notemos que (0.10–0.11) no es un simple problema linealizado de (NSDV) y que la eliminación también de \mathbf{u}_t cambia por fuerza aspectos importantes en la estructura del modelo. Además, la presencia del término $\rho \mathbf{f}$ impide que el sistema esté desacoplado.

Este tipo de aproximación es físicamente razonable cuando el campo de velocidades es suficientemente pequeño (movimientos lentos) ó cuando el coeficiente de viscosidad es grande (cf. la Sección 2.4). En definitiva, para flujos con un número de Reynolds (Re) pequeño. Un ejemplo físicamente relevante es, como antes, el que proporciona un río, esta vez de corriente extremadamente lenta.

Para este modelo, obtendremos en esta Memoria mejores resultados de existencia y unicidad de solución semi-fuerte y solución fuerte.

0.1.4 (DM): Un Modelo con Difusión de Masa

La mezcla de dos fluidos incompresibles, donde se supone que hay un proceso de difusión de masa regulado por la ley de Fick, puede ser modelada utilizando variables “promediadas” auxiliares: campo de velocidad-volumen medio (\mathbf{u}), densidad de masa media (ρ) y presión “modificada” (P). Estas variables verifican un sdp. que es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \rho[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - \mu\Delta\mathbf{u} - \lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\rho + (\nabla\rho \cdot \nabla)\mathbf{u}] \\ & + \frac{\lambda^2}{\rho} \left[(\nabla\rho \cdot \nabla)\nabla\rho - \frac{1}{\rho} |\nabla\rho|^2 \nabla\rho + \Delta\rho \nabla\rho \right] = \rho\mathbf{f} - \nabla P, \end{aligned} \quad (0.12)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho - \lambda\Delta\rho = 0, \quad (0.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (0.14)$$

Se complementan estas ecuaciones con las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad (0.15)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (0.16)$$

El sistema (0.12–0.16) constituye un modelo con difusión de masa, en adelante (DM). Además de la condición de adherencia de las partículas de fluido (debida a la presencia de fuerzas de viscosidad), (0.15) significa que no hay transmisión de masa a través de la frontera (debe ser $\rho \geq \alpha > 0$ en Q_T , para que λ^2/ρ esté bien definido).

Un modelo reducido de (0.12–0.16), especialmente interesante cuando λ es pequeño, es el que resulta de despreciar en las ecuaciones (0.12) los términos que contienen λ^2 . El sistema resultante, donde se cambia (0.12) por

$$\rho[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - \mu\Delta\mathbf{u} - \lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\rho + (\nabla\rho \cdot \nabla)\mathbf{u}] = \rho\mathbf{f} - \nabla P, \quad (0.17)$$

será denominado modelo reducido con difusión de masa (abreviadamente (DMr)); aquí, ya todos los términos tienen sentido bajo la condición más débil $\rho \geq 0$. Para este modelo, vamos a considerar los conceptos de solución débil y solución fuerte. Debido a las propiedades de regularidad inherentes a la ecuación de transporte-difusión (0.13), ésta se va a verificar puntualmente cpd. en los dos casos. Por tanto, la diferencia entre las dos definiciones, estará en qué sentido se asigna a las ecuaciones (0.17) y a sus respectivas condiciones iniciales en (0.16): Un sentido distribucional para la solución débil y un sentido puntual cpd. para la solución fuerte.

La existencia de solución débil para (DMr) y la convergencia de ésta (cuando $\lambda \rightarrow 0$) hacia una solución débil de (NSDV) serán probadas en la Memoria.

0.2 Resultados Teóricos Conocidos

Vamos a recordar brevemente los resultados teóricos conocidos más importantes, hasta donde hemos podido saber, sobre (NSDV), (DM) y (DMr); el problema (SDV) no parece haber sido tratado en la literatura.

0.2.1 Algunos Problemas y Resultados Auxiliares

Para centrarnos en el tema, habrá que hacer una pequeña referencia a resultados sobre

(NS): El problema de Navier-Stokes (0.4–0.7),

(PT): El problema de transporte (0.1), (0.9),

(PTD): El problema de transporte-difusión (0.13), (0.15), (0.16).

Esto es debido a que los problemas que vamos a considerar en la Memoria aparecen tras agrupar algunos de los anteriores. Notemos que, de forma esquemática, podemos decir:

$$(\text{NSDV}) \equiv (\text{NS}) + (\text{PT}),$$

$$(\text{DM}) \equiv \text{problema "similar" a } (\text{NS}) + (\text{PTD}).$$

Navier-Stokes (NS): La bibliografía es muy extensa sobre este problema, cf. los trabajos de Hopf, Ladyzhenskaya, Lions, Témam, etc... “Grosso modo”, los resultados más importantes sobre la existencia y unicidad de solución débil y fuerte, pueden ser enunciados como sigue:

- Existencia de solución débil global en tiempo. Si $u_0 \in H$ y $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$ ($N = 2$ ó 3), existe una solución débil

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad p \in L^2(Q_T), \quad (0.18)$$

$$\mathbf{u} \in C([0, T]; V') \text{ si } N = 3 \text{ y } \mathbf{u} \in C([0, T]; H) \text{ si } N = 2. \quad (0.19)$$

Los espacios H y V contienen de forma implícita a (0.4) y (0.7), cf. §1.1.3.

- Unicidad de solución débil si $N = 2$ (p es única salvo una función aditiva que sólo depende de t).
- Para $N = 3$, se tiene la unicidad de solución en una clase de funciones más regulares que en (0.18). En concreto, si

$$\mathbf{u} \in L^s(0, T; L^r(\Omega)^3) \text{ con } \frac{2}{s} + \frac{3}{r} \leq 1 \text{ y } r > 3.$$

- Existencia (y unicidad) de solución fuerte global si $N = 2$ y local si $N = 3$. En este último caso, si $\mathbf{u}_0 \in V$ y $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, existe $T_* \leq T$, dependiente de la magnitud de los datos, tal que:

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap C([0, T_*]; V), \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, T_*; H). \quad (0.20)$$

Otros muchos resultados sobre regularidad, estabilidad, periodicidad, comportamiento cualitativo, ... de las soluciones pueden ser obtenidos; cf. por ejemplo [12,62,21,26,28,35,38,60,61, ...].

Problema de Transporte (PT): Es un problema de Cauchy de primer orden de tipo hiperbólico. La ecuación (0.1) es la derivada total de la densidad: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Por tanto, al menos en los casos con suficiente regularidad, la densidad se mantiene constante con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias que sigue el fluido. Se tienen resultados de existencia y unicidad de solución débil, cf. §1.1.5, por ejemplo, si $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$. Para llegar a la existencia de solución fuerte, se necesita tener más regularidad sobre \mathbf{u} de la que parece "natural". En esencia si, además de lo anterior, $\nabla \mathbf{u} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$, entonces $\nabla \rho$ y $\rho_t \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$, cf. [36].

Problema de Transporte-Difusión (PTD): Es un problema parabólico (lineal) con condición de contorno de tipo Neumann. Resultados de existencia y unicidad de solución débil y de solución fuerte, entre otras cosas, son bien conocidos, cf. §2.3.2 para algunos de ellos.

0.2.2 Modelo de Navier-Stokes con densidad variable (NSDV)

Vamos a enumerar los distintos resultados en dimensión 3 en espacio, limitándonos en el caso bidimensional a notas puntuales.

A) **Existencia de solución débil y de solución semi-fuerte:** Los primeros resultados sobre este problema son debidos a Kazhikhov [31] y Antonzev y Kazhikhov [2]. Se demuestra que si

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ es un abierto acotado con frontera } \partial\Omega \text{ Lipschitz-continua,} \quad (0.21)$$

$$\mathbf{u}_0 \in H, \quad \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad (0.22)$$

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H), \quad (0.23)$$

$$\rho_0 \geq \alpha > 0 \text{ en } \Omega, \quad (0.24)$$

entonces existe una solución débil global (ρ, \mathbf{u}) con

$$\rho \in L^\infty(Q_T), \quad \mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (0.25)$$

Este resultado fue generalizado por J.Simon en [54], para el caso en que sólomente se exige

$$\rho_0 \geq 0 \text{ en } \Omega, \quad (0.26)$$

obteniéndose en lugar de (0.25), que

$$\rho \in L^\infty(Q_T), \quad \mathbf{u} \in L^2(0, T; V), \quad \rho\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H). \quad (0.27)$$

Notemos el paralelismo entre estos resultados y los relativos a (NS). Sin embargo, aquí no se obtiene continuidad para \mathbf{u} como era el caso de (0.18), ni tampoco para $\rho\mathbf{u}$. En cuanto a ρ , al menos para Ω acotado, se puede ver incluso que $\rho \in C([0, T]; L^p(\Omega))$ para cada $p < +\infty$, cf. §1.1.5. Por otra parte, atendiendo a la suma directa $L^2 = H \oplus \nabla H^1$, cf. [21], llegamos al mismo resultado partiendo de un dato

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (0.28)$$

Posteriormente, J.U.Kim en [33] obtuvo una solución débil más regular para \mathbf{u} , pero local. En concreto,

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T_*; V), \quad (0.29)$$

con $T_* \leq T$. Aquí, se impone mayor regularidad para los datos:

$$\partial\Omega \in C^2, \quad \mathbf{u}_0 \in V, \quad (0.30)$$

$$\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \quad (0.31)$$

y se mantiene la hipótesis (0.26). De nuevo, T_* depende de la magnitud de los datos. Por tanto, éste viene a ser un resultado similar al que se conoce para (NS) (pero ahora

no se tiene regularidad L^2 para u_t , lo que hace que no se pueda demostrar que u es continua).

Recientemente, estos resultados han sido generalizados por J.Simon en [55], donde se prueba la existencia de una solución débil global como en (0.27), con las hipótesis (0.21), (0.22), (0.26), debilitando (0.23) y sustituyéndola por

$$f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (0.32)$$

Se prueba, entre otras cosas, que la solución verifica (0.7) en el siguiente sentido generalizado:

$$\left(\int_{\Omega} \rho u \cdot v \right) \in C[0, T] \quad \text{y} \quad \left(\int_{\Omega} \rho u \cdot v \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 u_0 \cdot v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (0.33)$$

Además, esta solución es más regular localmente, en el sentido de (0.29), si se impone (0.30) y se debilita (0.31) con (0.28). Por último, en las condiciones (0.24), la solución encontrada es semi-fuerte, teniendo u la regularidad de una solución fuerte de (NS), i.e. (0.20).

En lo que se refiere a dominios no acotados, M.Padula en [44,45], demuestra la existencia de una solución débil regular y local (global en dimensión 2), como en (0.29), a costa de imponer que, además,

$$\int_{\Omega} \rho_0(x) < +\infty, \quad (0.34)$$

i.e. que la de masa total del sistema es finita.

Las Demostraciones de los resultados anteriores utilizan el método de compacidad (cf. [38]), junto con una discretización de "semi-Galerkin" (cf. [39]). Las estimaciones sobre las "soluciones aproximadas" reposan en ideas que ya habían sido utilizadas en el marco de (NS), además de una estimación L^∞ para la densidad, que es consecuencia de que (PT) sea resuelto por el método de las características. Para obtener regularidad local, se considera la base especial habitual de V , formada por las autofunciones del problema de Stokes.

B) Existencia y unicidad de solución fuerte: Los resultados que siguen están más detallados en §2.2.1. Ladyzhenskaya y Solonnikov en [36] (véase Teorema 2.5), prueban la existencia y unicidad de solución fuerte local (global en dimensión 2); de hecho, la solución encontrada es muy regular (por ejemplo, $\rho \in C^1$). Se utilizan en la Demostración resultados para distintos problemas auxiliares con regularidad L^q con $q > 3$ y el método de las aproximaciones sucesivas. Resultados similares obtiene H.Okamoto en [43], pero utilizando el marco de los espacios de Hilbert (de orden fraccionario) y la teoría abstracta de las ecuaciones parabólicas. Finalmente, M.Padula en [45] obtiene,

en el caso de dominios no necesariamente acotados, la existencia de solución fuerte local, que será única bajo determinadas condiciones de regularidad; véase el Teorema 2.5. Se impone menos regularidad sobre (ρ_0, \mathbf{u}_0) que en los casos anteriores, a cambio de exigir regularidad de tipo L^2 a la derivada de \mathbf{f} respecto de t .

0.2.3 Modelos con Difusión de Masa, (DM) y (DMr)

Los resultados que siguen están más detallados en la Sección 3.2. Es de destacar que, en ellos, la acotación inferior (0.24) sobre ρ_0 siempre es exigida.

Los resultados sobre el problema (DMr) se deben a Kazhikhov y Smagulov [32]. Se prueba la existencia de una solución débil global y la existencia y unicidad de solución fuerte local, en ambos casos si el coeficiente de difusión λ es pequeño:

$$\lambda < \frac{2\mu}{|\rho_0|_\infty - \alpha}, \quad \text{con } \alpha \text{ dada por (0.24).}$$

En lo que se refiere al problema completo (DM), Beirao da Beiga en [4] obtiene la existencia y unicidad de solución fuerte local, sin imponer restricciones de pequeñez sobre λ . Además, las soluciones son globales para datos pequeños. La Demostración reposa en un argumento de Punto Fijo. Por último, P.Secchi en [53] demuestra la convergencia, cuando $\lambda \rightarrow 0$, de las soluciones fuertes (locales) de (DM) hacia una solución semi-fuerte de (NSDV).

0.3 Principales Aportaciones Originales de Carácter Teórico

0.3.1 (NSDV)

Presentamos en esta Memoria, en primer lugar, un resultado de existencia de solución débil definida en $(0, +\infty)$ y en un abierto Ω general (acotado ó no), sin hipótesis de regularidad sobre su frontera. Se impone que ρ_0 y \mathbf{u}_0 son como en (0.22), con la acotación inferior (0.26) sobre ρ_0 , $\mathbf{f} \in L^1_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3)$ y no se impone la restricción de masa total finita (0.34). Se obtiene una regularidad para la solución "similar" a (0.27), con regularidad global en espacio y de tipo "loc" en tiempo (Teorema 1.12). Además, cuando $\mathbf{f} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, la solución es global hasta el infinito (Corolario 1.13). Por último, un resultado intermedio entre los dos anteriores, donde sólo ρu tiene regularidad hasta el infinito en tiempo, se obtiene, por ejemplo, cuando $\mathbf{f} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ y Ω es acotado en alguna dirección de los ejes coordenados (Corolario 1.14). Las Demostraciones de estos resultados, están basadas en el método de compacidad, usado

conjuntamente con una discretización de semi-Galerkin, con elección de una base de V formada por funciones con soportes compactos.

Por otra parte, se logra probar nuevos resultados de existencia de solución débil cuando hay

- Viscosidad variable (con dependencia continua respecto de la densidad),
- Condiciones de contorno no homogéneas para el campo de velocidades (en vez de (0.6), la condición $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sobre Σ_T).

El primero de estos casos ha sido resuelto utilizando, entre otros, ciertos resultados debidos a R. Di Perna y P.L. Lions (cf. [14]) sobre el problema de transporte (PT). Para el segundo, se introducen ciertas soluciones aproximadas, engendradas por campos de velocidades que se anulan sobre la frontera del dominio. Notemos que la condición homogénea sobre la frontera es esencial para resolver apropiadamente (PT).

Por otra parte, se obtiene un resultado de existencia de solución semi-fuerte global de (NSDV), i.e. definida como solución semi-fuerte en todo $[0, +\infty)$, si los datos son pequeños (ó el coeficiente de viscosidad grande). Además, en ausencia de fuerzas exteriores, demostramos un comportamiento exponencialmente decreciente a cero para el gradiente del campo de velocidades (en norma L^2) cuando $t \rightarrow +\infty$ (Teorema 2.2). La clave de las Demostraciones está en conseguir nuevas estimaciones globales en tiempo.

Por último, se prueba en el Teorema 2.6 la unicidad de solución semi-fuerte si suponemos, esencialmente, que una de tales soluciones es una solución fuerte. Este resultado es considerablemente más general que los que preceden. La Demostración del mismo de nuevo utiliza resultados específicos del problema (PT); cf. §1.1.5.

0.3.2 (SDV)

Se demuestran resultados de existencia de solución débil, solución semi-fuerte y solución fuerte, en los tres casos globales en tiempo. Para ello, se recurre a un método de viscosidad. La regularidad de la solución encontrada depende exclusivamente de la regularidad de los datos. Se presenta también un resultado de unicidad de solución (véanse los Teoremas 2.9 y 2.10). Hay que hacer notar que no se exige $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en ningún caso. Además, para la existencia y unicidad de solución fuerte, se exigen hipótesis más débiles que en (NSDV).

0.3.3 (DMr)

Las aportaciones originales de la Memoria en cuanto al problema con difusión de masa conciernen al modelo reducido (DMr). Se demuestra:

- Existencia de solución débil para λ pequeño (pero sin restricciones para ρ_0 ; tan solo pedimos $\rho_0 \geq 0$; cf. el Teorema 3.5).
- Convergencia de soluciones débiles de (DMr) a soluciones también débiles de (NSDV) (cf. el Teorema 3.6).

Las Demostraciones están basadas, de nuevo, en el método de compacidad usado conjuntamente con una discretización de semi-Galerkin. El segundo resultado, se puede interpretar como una nueva Demostración de la existencia de solución débil de (NSDV) que utiliza un método de viscosidad muy particular.

0.4 Aportaciones Originales sobre la Aproximación Numérica de (NSDV)

Hasta donde hemos podido saber, no hay referencias importantes donde se lleve a cabo un análisis detallado de (NSDV) desde una perspectiva numérica. Nuestra intención en este tema ha sido, tan sólo, comprobar que algunos de los esquemas numéricos utilizados en otras ecuaciones (Navier-Stokes compresible e incompresible, (PT), etc.; cf. [22,47,61] y las referencias allí citadas), pueden ser también válidos en este caso. Presentamos en concreto tres esquemas posibles para aproximar numéricamente (NSDV):

1. Una vez "penalizada" la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ con ayuda de la presión (un problema débilmente compresible) y de un pequeño parámetro $\varepsilon > 0$, las ecuaciones resultantes son discretizadas en tiempo con un esquema totalmente implícito (Euler). El sistema no lineal resultante puede ser aproximado en espacio y, posteriormente, fácilmente resuelto utilizando el algoritmo GMRES (cf. [15]). Aunque se trata de un sistema fuertemente no lineal, las buenas propiedades de GMRES pueden hacer conveniente su uso, cf. [8,9].
2. Introducimos discretizaciones en tiempo implícitas de tipo Euler. Los problemas no lineales resultantes son reformulados en el sentido de los mínimos cuadrados y, a continuación, son resueltos con ayuda de un algoritmo de descenso de tipo Gradiente Conjugado. Al final, todo se reduce a la resolución de un número finito de problemas de Stokes generalizados (ó, más bien, a la resolución de sus aproximaciones en espacio).
3. Cuando ρ experimenta variaciones poco importantes, i.e. $\rho \simeq Cte.$, es razonable utilizar una discretización en tiempo basada en el método de las características

para el tratamiento de los términos convectivos. Nos quedaremos en tal caso, sólo con problemas estacionarios y lineales de tipo Stokes generalizado.

0.5 Resumen de la Memoria

Haremos a continuación una breve descripción de cada uno de los Capítulos de los que consta esta Memoria.

Comenzamos el Capítulo 1 con una Sección de resultados técnicos que vamos a utilizar repetidamente. Merece la pena destacar de entre ellos una versión distribucional del Lema de De Rham (cf. [59]) junto con otra de regularidad (cf. el Apéndice A para la Demostración) y algunos resultados de existencia y unicidad para (PT) (cf. [14]). En la segunda Sección del Capítulo, introducimos el problema (NSDV). Enunciamos un resultado general de existencia de solución débil, junto con otros dos de regularidad global en $(0, +\infty)$. La Demostración de estos resultados se presenta posteriormente, dividida en tres partes (la existencia de solución aproximada está recogida en el Apéndice B). En el resto de los casos de la Memoria que siguen un proceso "similar", se hará referencia a esta Demostración.

A continuación, pasamos a considerar dos nuevas situaciones: Aquélla en la que el coeficiente de viscosidad μ es variable (más precisamente, depende continuamente de ρ) y aquélla en la que \mathbf{u} debe satisfacer condiciones de contorno no homogéneas ($\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sobre Σ_T). En el primer caso, hay que comenzar introduciendo las nuevas ecuaciones a resolver, ya que la ecuación de movimiento han de ser modificada. Posteriormente, un adecuado tratamiento sobre estos nuevos términos será necesario para poder continuar con las estimaciones de las soluciones aproximadas; un análisis distinto sobre su convergencia será efectuado. En el segundo caso, por simplicidad, hemos separado los resultados en dos partes; una primera para datos \mathbf{g} independientes de t , donde la Demostración resulta menos costosa y una segunda parte donde se contempla la situación general. Antes de nada, hay que realizar un adecuado levantamiento de \mathbf{g} para que, mediante un sencillo cambio de variable, podamos pasar a un problema con condiciones de contorno homogéneas. Por el camino y a causa de las no linealidades, aparecen nuevos términos que es necesario acotar.

El Capítulo 2 comienza con diversas consideraciones sobre la existencia de solución semi-fuerte del modelo (NSDV). Después de una descripción de los resultados conocidos más interesantes, nos centramos en obtener soluciones que sean semi-fuertes en todo $(0, +\infty)$ y en analizar un comportamiento cualitativo exponencialmente decreciente de las mismas, en ausencia de fuerzas exteriores.

Seguidamente, atacamos la cuestión de la unicidad de solución semi-fuerte y de

solución fuerte. De nuevo, detallamos los resultados conocidos más interesantes sobre el tema, que tienen la característica común de imponer la existencia de una solución regular. Esto justifica la presentación de un nuevo resultado, en el cual se intenta exigir las hipótesis de regularidad más débiles posibles.

En la última Sección del Capítulo 2, se presenta el modelo de Stokes con densidad variable (SDV). Después de justificar esta introducción, presentamos resultados de existencia y de unicidad de solución. Como las Demostraciones están basadas en la aplicación de un método de viscosidad, se necesita un estudio previo de (PTD).

Comenzamos el Capítulo 3 con una Sección donde se deduce el modelo con difusión de masa a partir de una situación física concreta (mezcla de dos fluidos incompresibles y homogéneos con densidades constantes y distintas), analizando las nuevas variables auxiliares que aparecen. A continuación, se presentan los resultados conocidos más interesantes sobre el modelo, tanto en el caso de (DMr) (para pequeño coeficiente de difusión) como para (DM). Un resultado de existencia de una solución débil global de (DMr), sin restricciones sobre la cota inferior de ρ_0 , será enunciado y demostrado en la Sección siguiente. Para ello, habrán de utilizarse argumentos similares a los necesitados para (NSDV), cambiando ahora (PT) por (PTD) (más regular incluso), pero en cambio apareciendo nuevos términos no lineales en la ecuación de movimiento.

En la última Sección del Capítulo 3, se demuestra la convergencia de las soluciones débiles de (DMr) hacia una solución débil de (NSDV). Para ello, será fundamental acotar con independencia de λ las soluciones de (DMr).

Finalizamos la Memoria con el Capítulo 4, donde describimos algunos posibles esquemas de aproximación numérica para (NSDV), tal como ha quedado dicho en la Sección precedente.

0.6 Algunos Resultados que Quedan Pendientes

En nuestra opinión, queda todavía por realizar mucha tarea en torno a estos modelos. Citaremos algunos de los resultados que merecería la pena probar tras esta Memoria:

- Extensiones de los resultados de existencia y/o unicidad de solución semi-fuerte probados para (NSDV) a los casos de viscosidad variable y de condiciones de contorno no homogéneas.
- Descripción cualitativa del comportamiento de las soluciones semi-fuertes y fuertes, cuando $t \rightarrow +\infty$ (con especial apoyo en el resultado de unicidad de solución semi-fuerte ya obtenido en la Memoria).

- Implementación numérica de los esquemas presentados en el Capítulo 4 y comparación de los resultados.

Por último, mencionemos que un resultado parcial de existencia de solución débil en dominios no acotados constituyó el objetivo de un trabajo de próxima aparición; cf. [17]. Además, los resultados obtenidos en el Capítulo 1 por una parte y en los Capítulos 2 y 3 por otra, aparecerán en sendos trabajos actualmente en preparación, cf. [18,23].

Capítulo 1

Nuevos Resultados sobre Existencia de Solución Débil

1.1 Resultados Técnicos Preliminares

A lo largo de toda la Memoria, utilizaremos un cierto número de conceptos y resultados del Análisis Funcional No Lineal: distribuciones, espacios de Sobolev, espacios de funciones con "divergencia nula", ..., con valores reales, en un Banach, ..., así como sus propiedades: inyecciones continuas y densas, compacidad, carácter reflexivo y separable, dualidad, ... y los distintos tipos de convergencia: fuerte, débil, débil \star y en el sentido de las distribuciones.

En este primer apartado, enumeramos algunos resultados técnicos que vamos a utilizar con frecuencia.

1.1.1 Inyecciones Continuas y Compactas. Productos Continuos

El principal resultado que relaciona los espacios de Sobolev entre sí, conduce a las llamadas inyecciones de Sobolev; éstas se pueden resumir (cf. [1,34]) como sigue:

LEMA 1.1 Sean D un abierto de \mathbb{R}^N y $1 \leq p \leq +\infty$.

(i) **Inyecciones continuas de Sobolev.** Se tienen las siguientes inyecciones continuas:

$$W_0^{1,p}(D) \hookrightarrow L^q(D), \quad \text{para } q : p \leq q \leq p_*, \quad (1.1)$$

donde p_* viene dado por lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1/p_* &= 1/p - 1/N && \text{si } p < N, \\ p_* &\in [p, +\infty) \text{ arbitrario} && \text{si } p = N, \\ p_* &= +\infty && \text{si } p > N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si $p > N$, $W_0^{1,p}(D) \hookrightarrow C_b^0(D)$ y si $p = N = 1$, se alcanza el valor $p_* = +\infty$.

(ii) **Inyecciones continuas de Morrey.** Para $p > N$, se tienen las siguientes inyecciones continuas:

$$W_0^{1,p}(D) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{D}), \quad \text{para } \beta : 0 < \beta \leq \alpha = 1 - N/p. \quad (1.3)$$

(iii) **Inyecciones compactas de Rellich-Kondrachov.** Para D acotado, (1.1) y (1.3) son también inyecciones compactas si $1 \leq q < p_*$ y $0 < \beta < \alpha$ resp. ■

Generalizaciones:

(a) Si ∂D es Lipschitz-continua (véase [21, p. 4] para la definición), las inyecciones anteriores son ciertas cambiando $W_0^{1,p}(D)$ por $W^{1,p}(D)$. Detallando un poco más, en el caso general (con D acotado ó no), una condición suficiente para tener (1.1) es que ∂D

tenga la "propiedad del cono" y para (1.3) que ∂D sea "Lipschitz local fuerte" (véase [1] para las definiciones y el resultado). Si D es acotado, la condición "Lipschitz local fuerte" es equivalente a decir que ∂D es "Lipschitz local" ó Lipschitziana.

(b) Las inyecciones continuas y compactas del Lema anterior, se pueden generalizar por inducción a los espacios de Sobolev con orden de derivabilidad natural mayor que 1 y, gracias a un razonamiento de dualidad, a los de orden entero no negativo. Vamos a utilizar con frecuencia las inyecciones de los espacios L^p en los espacios de Sobolev de orden -1 . En las condiciones del Lema 1.1(i), se verifican las siguientes inyecciones continuas:

$$L^p(D) \hookrightarrow W^{-1,q}(D), \quad \text{para } p \leq q \leq p_* \text{ mby } q > 1, \quad (1.4)$$

siendo también las inyecciones compactas para D acotado y $p \leq q < p_*$.

(c) Especial interés tiene la inyección dada en el Lema 1.1 para $p = N = 1$. Además, si D es un intervalo, se tiene mayor regularidad. Por ejemplo, para $D = (0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, tenemos

$$W^{1,1}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T]) \text{ si } T < +\infty, \quad W^{1,1}(0, +\infty) \hookrightarrow C_b^0([0, +\infty)).$$

Las inyecciones anteriores vuelven a ser ciertas en el caso de $W^{1,1}(0, T; B)$, donde B sea un espacio de Banach. Este resultado suele ser útil para justificar condiciones iniciales en problemas no estacionarios. En tales casos, B es un espacio de funciones que sólo depende de las variables espaciales.

(d) También se tienen inyecciones compactas en algunos dominios no acotados, pero a condición de que las regiones que tienden a ∞ sean "suficientemente pequeñas" (cf. [1]). Una condición necesaria para la compacidad de las inyecciones es la siguiente:

$$\lim_{x \in D, |x| \rightarrow \infty} \text{dist}(x, \partial D) = 0.$$

■

Destacamos a continuación, para $1 \leq p < N$, un aspecto particular de (1.1):

LEMA 1.2 Cuando $1 \leq p < N$, existe $C = C(N, p) > 0$ (independiente del dominio D) tal que:

$$|\varphi|_{p_*, D} \leq C |\nabla \varphi|_{p, D} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D) \quad (1.5)$$

(aquí, naturalmente se tiene que $1/p_* = 1/p - 1/N$). ■

Esto nos permite definir ciertos espacios de Sobolev asociados a dominios no acotados con propiedades "similares" a las que tienen los $W_0^{1,p}$ en el caso de un dominio acotado^a.

^aBásicamente, la desigualdad de Poincaré: $|f|_p \leq C(D, N, p) |\nabla f|_p$

Dado el abierto $D \subset \mathbb{R}^N$ (en particular puede ser no acotado en ninguna dirección de los ejes coordenados)^b, definimos los espacios ([17,38,61]):

$$Z^{1,p}(D) = \{u : \nabla u \in L^p(D)^N \text{ y } u \in L^{p^*}(D)\},^c$$

(espacio de Banach para la norma $\|u\|_{1,p} = |u|_{p^*} + |\nabla u|_p$) y

$$Z_0^{1,p}(D) = \text{cierre de } \mathcal{D}(D) \text{ en } Z^{1,p}.$$

Para $p = 2$, denotaremos $K^1(\Omega) = Z^{1,2}(\Omega)$ y $K_0^1(\Omega) = Z_0^{1,2}(\Omega)$. Gracias a las definiciones anteriores y al Lema 1.2, en $Z_0^{1,p}$ (resp. K_0^1) son normas equivalentes:

$$\|u\|_{1,p} \text{ y } |\nabla u|_p \quad (\text{resp. } \|u\|_{1,2} \text{ y } |\nabla u|_2).$$

Esto último nos permitirá en el caso de dominios no acotados, acotar determinadas funciones en L^{p^*} si tenemos acotadas anteriormente sus primeras parciales en L^p .

■

Debido a que los problemas de edp. que vamos a tratar contienen importantes no linealidades; de hecho productos de orden 2 y 3, resulta conveniente el resultado técnico que sigue.

LEMA 1.3 *Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto.*

(i) *Sea $1 \leq s \leq p \leq +\infty$. Si p_* está dado por (1.2), $1/r = 1/p_* + 1/s$ y $r \geq 1$, entonces $(u, v) \mapsto uv$ es una aplicación bien definida y continua de $W_0^{1,p}(D) \times W_0^{1,s}(D)$ en $W_0^{1,r}(D)$.*

(ii) *Si $6/5 \leq s < 3$ y $1/r = 1/6 + 1/s$, entonces $(u, v) \mapsto uv$ es una aplicación bien definida y continua de $K_0^1(D) \times W_0^{1,s}(D)$ en $W_0^{1,r}(D)$.*

(iii) *Sean $1 \leq s, p \leq +\infty$, $s > 1$ y $1/r + 1/s < 1$. Si, de nuevo, $1/r = 1/p_* + 1/s$ y definimos la distribución μu , en la forma $\langle \mu u, v \rangle = \langle \mu, uv \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(D)$, para cada $u \in W_0^{1,p}(D)$ y cada $\mu \in W^{-1,s}(D)$, entonces $(u, \mu) \mapsto \mu u$ está bien definida y es continua de $W_0^{1,p}(D) \times W^{-1,s}(D)$ en $W^{-1,r}(D)$.*

(iv) *Si $2 < s \leq +\infty$ y $1/r = 1/6 + 1/s$, entonces $(u, \mu) \mapsto \mu u$ está bien definida y es continua de $K_0^1(D) \times W^{-1,s}(D)$ en $W^{-1,r}(D)$. ■*

El Lema anterior es consecuencia de la definición de los espacios de Sobolev $W_0^{1,p}$, $W^{-1,p}$ y K_0^1 , junto con la continuidad de las inyecciones del Lema 1.1. Las principales ideas de la demostración, pueden encontrarse en [58]. Otros casos distintos pueden contemplarse también, pero éstos no se incluyen por simplicidad (además, sólo las situaciones consideradas en el Lema 1.3 serán de utilidad en esta Memoria).

^bDe modo que no se podría asegurar la desigualdad de Poincaré

^c p_* es el exponente asociado a p mediante las inyecciones de Sobolev, dado por (1.2)

1.1.2 Espacios de Nikolskii. Resultado de Compacidad

Enunciaremos diversos resultados de compacidad para espacios de funciones dependientes del tiempo, con valores en un espacio de Banach.

Supongamos que X es un espacio de Banach, $0 < T \leq +\infty$, $f : (0, T) \mapsto X$ está dada y $0 < h < T$. Denotaremos por $\tau_h f$ a la siguiente función:

$$\tau_h f : (-h, T - h) \mapsto X, \quad \tau_h f(t) = f(t + h).$$

Para s, q tales que $0 < s \leq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$, recordamos la definición de espacio de Nikolskii de orden s y exponente q (cf. [34,57]):

$$N^{s,q}(0, T; X) = \left\{ f : f \in L^q(0, T; X), \sup_{0 < h < T} h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; X)} < +\infty \right\}. \quad (1.6)$$

$N^{s,q}(0, T; X)$ es un espacio de Banach para la norma

$$\|f\|_{N^{s,q}(0, T; X)} = \|f\|_{L^q(0, T; X)} + \sup_{0 < h < T} h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; X)}.$$

Obsérvese que, en particular, $N^{s,\infty}(0, T; X)$ es el espacio de las funciones $f : (0, T) \mapsto X$ que son acotadas y Hölder-continuas (de exponente s).

Por otro lado, es importante señalar que los espacios de Nikolskii son espacios de funciones que poseen derivadas "fraccionarias en tiempo". De hecho, se verifican las siguientes inyecciones continuas (cf. [57]):

$$W^{s,q}(0, T; X) \hookrightarrow N^{s,q}(0, T; X) \hookrightarrow W^{s-\varepsilon,q}(0, T; X) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Por tanto, tienen una estrecha relación con los espacios de Sobolev de exponente fraccionario $W^{s,q}$ (cf. [34,37,57]).

En las demostraciones de los resultados de existencia, el resultado de compacidad que aplicaremos es la siguiente generalización del llamado "Lema de Lions" (Teorema 1.5.1 en [38]):

LEMA 1.4 Sean X, B e Y espacios de Banach tales que $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Entonces, si $T > 0$ es finito, se tienen las siguientes inyecciones compactas:

- i) $L^q(0, T; X) \cap \{\phi : \phi_t \in L^1(0, T; Y)\} \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(0, T; B)$ si $1 \leq q \leq +\infty$.
- ii) $L^\infty(0, T; X) \cap \{\phi : \phi_t \in L^r(0, T; Y)\} \overset{c}{\hookrightarrow} C([0, T]; B)$ si $1 < r \leq +\infty$.
- iii) $L^q(0, T; X) \cap N^{s,q}(0, T; Y) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(0, T; B)$ si $0 < s \leq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$.
- iv) Si \mathcal{F} es la intersección de un conjunto acotado de $L^\infty(0, T; X)$ y el conjunto

$$\mathcal{R}(K, C, r) = \left\{ \phi : \|\phi_t\|_Y \leq K + \psi \text{ cpd. en } [0, T], |\psi|_{L^r(0, T)} \leq C \right\},$$

donde $K \in L^1(0, T)$, $1 < r < \infty$ y $C > 0$, entonces \mathcal{F} es relativamente compacto en $C([0, T]; B)$. ■

En la mayoría de los resultados de compacidad utilizados para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes evolutivas (cf. [38,61, etc...]) se impone la condición que X e Y sean reflexivos (en algunas ocasiones, incluso se exige que X , B , e Y sean espacios de Hilbert). Sin embargo, en el enunciado del Lema anterior, basta con que X , B , e Y sean espacios de Banach. Esto es debido a que la Demostración está basada en una caracterización de los conjuntos relativamente compactos en $L^q(0, T; B)$ y $C([0, T]; B)$ que no requiere reflexividad (cf. [34,56]). Por el contrario, no se cuestiona si de una sucesión acotada pueden extraerse subsucesiones débilmente convergentes en el mismo espacio (una propiedad exclusiva de los espacios de Banach reflexivos), que posteriormente convergerán fuertemente en el espacio donde se tenga la inyección de forma compacta.

Para las demostraciones de los apartados (i), (ii) y (iii) del Lema 1.4, véase [56]. El apartado (iv) se demuestra en [55]. Para una demostración más completa del Lema 1.4, véase [58].

1.1.3 Espacios Relacionados con el Operador Divergencia

Si Ω es un abierto^d de \mathbb{R}^3 , consideramos los espacios de Hilbert (cf. [21]):

$$H(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \text{cierre de } \mathcal{D}(\Omega)^3 \text{ en } H(\text{div}; \Omega).$$

$H(\text{div}; \Omega)$ y $H_0(\text{div}; \Omega)$ son realmente espacios de Hilbert para el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div}; \Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Gracias a una generalización del Teorema de la Divergencia, teniendo en cuenta que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ es denso en $H(\text{div}; \Omega)$ (véase [21]), sabemos que, si $\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega)$, puede ser definida la “traza normal” $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, al menos cuando Ω es de frontera Lipschitz-continua.

Introducimos a continuación los espacios de funciones que nos van a permitir un tratamiento de la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y de la condición de contorno homogénea $\mathbf{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$, de forma “esencial” (i.e. incluyéndolas en la definición del espacio de base de la formulación variacional), incluso en el caso de dominios no acotados. Consideramos (cf. [38,61, etc...]):

$$\mathcal{V} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ en } \Omega\}, \quad (1.7)$$

^dDe ahora en adelante preferimos utilizar la letra griega Ω para designar un abierto genérico de \mathbb{R}^3 . Los resultados de las siguientes secciones siempre serán aplicados en el marco del dominio tridimensional que contiene al fluido.

$$H(\Omega) = \overline{V}^{(L^2)^3} (= \overline{V}^{H(\text{div}; \Omega)}), \quad (1.8)$$

$$V(\Omega) = \overline{V}^{(H^1)^3} \quad \text{y} \quad W(\Omega) = \overline{V}^{(K^1)^3}. \quad (1.9)$$

Se tienen las siguientes contenciones:

$$H \text{ (resp. } V, W) \subseteq \{v : v \in H_0(\text{div}; \Omega) \text{ (resp. } H_0^1(\Omega)^3, K_0^1(\Omega)^3), \nabla \cdot v = 0\}.$$

Obsérvese que los espacios $H_0(\text{div}; \Omega)$, $H_0^1(\Omega)^3$ y $K_0^1(\Omega)^3$ contienen, en algún sentido, condiciones de contorno homogéneas. Por ejemplo, sabemos que si $\partial\Omega$ es Lipschitz-continua, se tienen los siguientes resultados que permiten caracterizar V y H :

$$V \text{ (resp. } W) = \{v : v \in H^1(\Omega)^3 \text{ (resp. } (K^1)^3), \nabla \cdot v = 0, v|_{\Gamma} = 0\}, \quad (1.10)$$

$$H = \{v : v \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot v = 0, (v \cdot n)|_{\Gamma} = 0\}. \quad (1.11)$$

Aquí, $v|_{\Gamma}$ (resp. $(v \cdot n)|_{\Gamma}$) es la traza (resp. la traza normal) de v sobre $\partial\Omega$; $v|_{\Gamma}$ (resp. $(v \cdot n)|_{\Gamma}$) tiene sentido en $H^{1/2}(\Gamma)$ (resp. en $H^{-1/2}(\Gamma)$) si $v \in V$ ó W (resp. $v \in H$). Las afirmaciones que preceden, al menos para H y V , están demostradas en [38]. El caso de W es similar al de V .

Finalmente, señalaremos que en el caso bidimensional ($N = 2$), se puede introducir $W(\Omega)$ como sigue:

$$W(\Omega) = \overline{V}^{|\nabla v|^2}.$$

Esto se debe a que $((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx$ es un producto escalar en \mathcal{V} , cf. [35, p. 17–18]. En cambio, existe una diferencia notable en $N = 2$ y $N = 3$ en cuanto al comportamiento “en el infinito”. En efecto, cuando Ω es no acotado y $N = 3$, las funciones de $W(\Omega)$ tienden a cero cuando $|x| \rightarrow +\infty$, $x \in \Omega$, gracias al Lema 1.2. Sin embargo, en el caso bidimensional esto no es cierto en general. Por ejemplo, para “dominios exteriores”, las funciones regulares que son constantes para $|x|$ suficientemente grande, pertenecen a $W(\Omega)$ (cf. [35]).

1.1.4 Primitivas de Distribuciones. Existencia y Regularidad

Una generalización del Lema de De Rham en versión distribucional (cf. [50,61]), al caso de distribuciones de $\mathcal{D}'(\Omega; B)$ (definidas en Ω y con valores en un espacio de Banach B), ha sido demostrada por J.Simon [59], con un argumento (explícito) basado en la representación de distribuciones por primeras derivadas. A su vez, este razonamiento ha sido ampliado recientemente por el mismo autor (Curso en la Universidad de Sevilla, 1992), al caso en que $B = \mathcal{D}'(0, T)$, considerado como un espacio vectorial dotado de un

conjunto no numerable de seminormas: Dada $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, le está asociada la seminorma $\|\cdot\|_\psi$, definida por

$$\|F\|_\psi = |\langle F, \psi \rangle| \quad \forall F \in \mathcal{D}'(0, T).$$

Por otra parte, mencionemos que no es difícil probar que

$$\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{D}'(0, T)) \equiv \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$$

(espacios definidos a partir de la topología límite inductivo habitual en $\mathcal{D}(0, T)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$ resp.), teniendo en cuenta las identificaciones

$$\langle \langle R, \phi \rangle_\Omega, \psi \rangle_{(0, T)} = \langle \langle R, \psi \rangle_{(0, T)}, \phi \rangle_\Omega = \langle R, \psi \phi \rangle_{(0, T) \times \Omega}$$

y que las combinaciones lineales finitas de $\mathcal{D}(0, T) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ son densas en $\mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$.

LEMA 1.5 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $0 < T \leq +\infty$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)^3)$ tal que

$$\langle \mathbf{g}, \varphi \rangle_\Omega = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Entonces, existe $p \in \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$. ■

Cuando Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz-continua, utilizando el isomorfismo

$$\nabla : L_0^2(\Omega) \longmapsto V^\perp$$

(cf. [21, Corolario 2.4, p. 24]), donde

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

$$V^\perp = \{ S \in H^{-1}(\Omega)^3 : \langle S, \mathbf{v} \rangle_\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in V \},$$

se puede probar (véase el Apéndice B) el siguiente resultado de regularidad:

LEMA 1.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera Lipschitz-continua, $0 < T \leq +\infty$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)^3)$ tal que

$$\langle \mathbf{g}, \varphi \rangle_\Omega = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

(i) Si $\mathbf{g} \in \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, entonces existe $p \in \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$.

(ii) Si $\mathbf{g} \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ con $1 \leq p \leq +\infty$, entonces existe $p \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$.

(iii) Si $\mathbf{g} \in W^{-1,p}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ donde $1 < p \leq +\infty$, entonces existe una distribución $p \in W^{-1,p}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$. ■

1.1.5 El Problema de Transporte

La diferencia esencial entre las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes homogéneas y no homogéneas, recae naturalmente en la introducción en estas últimas de la densidad como una función incógnita adicional. Como ya hemos indicado en la Introducción, esto lleva a la incorporación de la ecuación de continuidad y la condición inicial sobre ρ , como un problema de transporte (hiperbólico) para la densidad (si fijamos la velocidad), lo que “modifica” el carácter parabólico de las ecuaciones de equilibrio de momentos.

Interesa por tanto conocer algunos resultados sobre problemas de transporte tales como el que sigue:

$$\begin{cases} \text{Dadas } \mathbf{u} \text{ y } \rho_0, \text{ hallar } \rho \text{ tal que} \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } Q_T, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Es bien conocido que este problema puede ser resuelto, bajo determinadas condiciones sobre los datos, por el método de las características (cf. [13,24,29]). Sin embargo, determinadas propiedades de regularidad tanto de ρ_0 y \mathbf{u} , así como de sus derivadas, son necesarias para poder obtener existencia y unicidad de solución; cf. [36, Lema 1.3, p. 45], donde se resuelve a su vez el sdo. de las “curvas características”

$$X'(s) = \mathbf{u}(s, X(s)), \quad X(t) = \mathbf{x}, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in Q_T,$$

mediante un razonamiento de aproximaciones sucesivas. Por ejemplo, hipótesis de regularidad que conducen a la existencia y unicidad de solución de (1.12) son las siguientes:

$$\nabla \mathbf{u} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega)) \quad \text{y} \quad \rho_0 \in W^{1, \infty}(\Omega). \quad (1.13)$$

Tanto en el caso de soluciones débiles como en el de soluciones semi-fuertes de las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable (cf. §0.1.2 y §0.2.2), las hipótesis de regularidad sobre \mathbf{u} y ρ_0 son más débiles. Lo anterior explica la necesidad de introducir soluciones fuertes con mayores hipótesis de regularidad de las que parecen “naturales” (cf. [36,43]).

De todas formas, el método de las características es usado para obtener la existencia de solución débil del problema (1.12); véase la demostración del Teorema 1.12 (Apéndice B). Básicamente, se trata de regularizar los datos \mathbf{u} y ρ_0 , considerar las (únicas) soluciones “regulares” dadas por el método de las características y pasar al límite (en L^∞ débil*); véase [14, Proposición II.1] para el problema más general siguiente:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + c\rho = g \text{ en } Q_{T; \mathbb{R}^N} \\ \rho|_{t=0} = \rho_0 \text{ sobre } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1.14)$$

(aquí, c y $g : Q_{T;\mathbb{R}^N} \mapsto \mathbb{R}$ son otros datos). En [14] se estudia (1.14) como problema auxiliar, definiendo además el concepto de “solución renormalizada” de (1.14), con el objeto de aplicar los resultados a sdp. de primer orden.

Se demuestran en [14, §II.1 y §II.2], dos resultados que utilizaremos en nuestro estudio; uno sobre aproximación por regularización al problema (1.14) y el otro sobre existencia y unicidad de solución. Las hipótesis son más débiles que las de (1.13) y se pueden adaptar al caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una abierto arbitrario.

APROXIMACIÓN POR REGULARIZACIÓN

DEFINICIÓN 1.7 *Dados T y p , con $0 < T \leq +\infty$ y $1 \leq p \leq +\infty$, se dice que una función $\rho \in L^\infty(0, T; L^p_{loc}(\mathbb{R}^N))$ es solución débil de (1.14) si se verifica la igualdad:*

$$\begin{cases} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho [\psi_t + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) - c \mathbf{u} \psi] = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \psi(0, \mathbf{x}) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} g \psi \\ \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T) \times \mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1.15)$$

■

Obsérvese que (1.15) tiene sentido, por ejemplo, para

$$\rho_0 \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \mathbf{u} \text{ y } c - \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^1(0, T; L^p'_{loc}(\mathbb{R}^N))^J$$

y $g \in L^1(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

Veamos que, dada una solución débil ρ de (1.14), adecuadas aproximaciones de ρ , obtenidas regularizando por convolución respecto de \mathbf{x} , son soluciones de (1.14) con “pequeños” términos de error en el segundo miembro, que convergen fuertemente a cero. Para ello, deberemos tener cierta regularidad local (en espacio) de las derivadas primeras de \mathbf{u} .

LEMA 1.8 *Si $\rho \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^N))$ es una solución débil de (1.14) para datos*

$$\begin{aligned} g \in L^1(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)), \quad c \in L^1(0, T; L^p'_{loc}(\mathbb{R}^N)), \\ \rho_0 \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \mathbf{u} \in L^1(0, T; W^{1,p'}_{loc}(\mathbb{R}^N)). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Entonces, si $\rho_\varepsilon = \rho \star \zeta_\varepsilon$ y $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es una sucesión regularizante usual (respecto de la variable \mathbf{x}), ρ_ε es solución de

$$\begin{cases} \rho_{\varepsilon t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_\varepsilon + c \rho_\varepsilon = g + r_\varepsilon \text{ en } Q_{T;\mathbb{R}^N}, \\ \rho_\varepsilon|_{t=0} = \rho_{0\varepsilon} \equiv \rho_0 \star \zeta_\varepsilon \text{ en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.17)$$

donde

$$r_\varepsilon \xrightarrow{f} 0 \text{ en } L^1(0, T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)). \quad \blacksquare \quad (1.18)$$

^JRecuérdese que, en esta Memoria, p' denota el exponente conjugado de p .

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

LEMA 1.9 Si $g \in L^1(0, T; L^p(\mathbb{R}^N))$, c y $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, ρ_0 y \mathbf{u} como en (1.16) y

$$\frac{\mathbf{u}}{1 + |\mathbf{x}|} \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^N)) + L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad (1.19)$$

entonces existe una única función $\rho \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^N))$ solución débil de (1.14). Además, si $p < +\infty$,

$$\rho \in C([0, T]; L^p(\mathbb{R}^N)) \quad (1.20)$$

y, para cada $t \in [0, T]^g$,

$$\frac{d}{dt} |\rho|_{p; \mathbb{R}^N}^p + \int_{\mathbb{R}^N} (pc - \nabla \cdot \mathbf{u}) |\rho|^p dx = p \int_{\mathbb{R}^N} g |\rho|^{p-1} \text{sgn}(\rho) dx. \quad \blacksquare \quad (1.21)$$

Nota: Teniendo en cuenta (1.17–1.18) y (1.20), para $p < +\infty$ es fácil ver que la solución débil ρ dada por el Lema precedente, también verifica para cada $t \in [0, T]$ las igualdades

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \rho [\psi_t + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) - c \mathbf{u} \psi] + \int_{\mathbb{R}^N} \rho(t, \mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} g \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \mathbb{R}^N). \quad \blacksquare \end{cases} \quad (1.22)$$

La existencia de solución puede ser demostrada con hipótesis más débiles (cf. [14, Proposición II.1]). Sin embargo, el resultado realmente interesante es la unicidad, ya que ésta no se puede demostrar de la manera usual, suponiendo que ρ_1 y ρ_2 son dos soluciones, restando la edp. que verifica ρ_2 de la que verifica ρ_1 y multiplicando esta diferencia por $\rho_1 - \rho_2$. Esto se debe, naturalmente, a que ρ_1 y ρ_2 no son suficientemente regulares.

La demostración de la unicidad, cf. [14, Teorema II.2], está basada en comprobar que ciertas funciones $\beta(\rho)$ también verifican la ecuación de (1.14) y, posteriormente, elegir como funciones “test”, ciertas aproximaciones de la función constante e igual a 1, definida en \mathbb{R}^N . Con un argumento similar al anterior, también se puede probar (1.21). Por último, gracias a la ecuación de (1.14) $\rho \in C([0, T]; W^{-1,p}(\mathbb{R}^N))$, luego también es continua débil en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por tanto, si $1 < p < +\infty$, (1.20) se deducirá de (1.21) por ser $L^p(\mathbb{R}^N)$ un espacio uniformemente convexo; recuérdese que, en dichos espacios, la continuidad débil y en norma implican continuidad (fuerte), cf. [10]. El caso $p = 1$ es un poco más elaborado. Las afirmaciones precedentes se pueden ver en [14, Corolario II.2], cuando $g \equiv 0$.

^gNaturalmente, para $T = +\infty$ se cambia $[0, T]$ por $[0, T)$.

APLICACIÓN AL PROBLEMA REDUCIDO DEFINIDO EN Ω

Si consideramos el problema (1.12) y prolongamos \mathbf{u} y ρ por cero de Ω a todo \mathbb{R}^3 , no es difícil deducir el siguiente:

COROLARIO 1.9 Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^3 y $p \geq 2$. Si $\rho_0 \in L^p(\Omega)$ y $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W(\Omega))$ verificando (1.19) (una vez cambiado \mathbb{R}^N por Ω), entonces existe una única función $\rho \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ solución débil de (1.12); es decir, ρ satisface lo siguiente:

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \rho[\psi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi] = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(\mathbf{x})\psi(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega).$$

Además, si $p < +\infty$, $\rho \in C([0, T]; L^p(\Omega))$ y

$$|\rho(t)|_p = |\rho_0|_p \quad \forall t \in [0, T]. \quad \blacksquare \quad (1.23)$$

Notas:

(a) El Corolario anterior continúa siendo cierto cuando en (1.12) consideramos un segundo miembro $g \in L^1(0, T; L^p(\Omega))$ (con el cambio natural en (1.25)). Sólo cambia (1.23), ya que, a partir de (1.21), ahora tendremos:

$$\frac{d}{dt} |\rho|_p^p = p \int_{\Omega} g |\rho|^{p-1} \text{sgn}(\rho) \, d\mathbf{x}. \quad (1.24)$$

(b) También, cuando $p < +\infty$, se verifica (1.22) cambiando \mathbb{R}^N por Ω . Por ejemplo, para $g = 0$, se tiene:

$$\begin{cases} -\int_0^t \int_{\Omega} \rho[\psi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi] + \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x})\psi(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x})\psi(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega). \quad \blacksquare \end{cases} \quad (1.25)$$

1.2 Existencia de Solución Global en Tiempo para Ω General

Se aborda en esta Sección la existencia de solución débil global en tiempo en un dominio Ω general (acotado ó no). Tras un planteamiento del problema, se enuncia y demuestra el resultado principal, para posteriormente mejorarlo en algunos casos particulares.

1.2.1 Planteamiento del Problema

El objetivo principal de la sección consiste en obtener un resultado de existencia de solución débil del problema de Navier-Stokes con densidad variable en el "cilindro" $Q_\infty = (0, +\infty) \times \Omega$, donde Ω es un abierto cualquiera de \mathbb{R}^3 (sin condiciones de regularidad sobre su frontera Γ).

El problema que vamos a estudiar (cf. §0.1.2) está compuesto por:

- Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, incompresible y no homogéneo, dentro de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cualquiera y a partir de un tiempo inicial $t = 0$. Su formulación conservativa, obtenida como consecuencia de las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento y de la hipótesis de incompresibilidad, es la siguiente:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.28)$$

- Condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas sobre el campo de velocidades (la condición de no deslizamiento):

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_\infty. \quad (1.29)$$

- Condiciones iniciales para la densidad y el momento lineal:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.30)$$

$$(\rho \mathbf{u})|_{t=0} = \rho_0 \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.31)$$

En (1.26–1.31), las incógnitas son ρ , \mathbf{u} y p (densidad del fluido, campo de velocidades y presión del fluido resp.) dependientes de $(t, \mathbf{x}) \in Q_\infty$, mientras que son datos conocidos

“a priori” $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ (la función de densidad de un campo de fuerzas exteriores al sistema), ρ_0 y \mathbf{u}_0 (la densidad y el campo de velocidades iniciales resp.) y $\mu > 0$ (el coeficiente de viscosidad dinámica que, en principio, se supondrá constante). Por último, se imponen condiciones “físicamente naturales” sobre la densidad, como es que $\rho_0 \geq 0$ en Ω .

Tras un sencillo cálculo, utilizando (1.28) en (1.27) y (1.27–1.28) en (1.26), el sistema (1.26–1.31) se puede re-escribir en la forma “no conservativa” siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (1.33)$$

junto con la condición de incompresibilidad (1.28) y las condiciones iniciales y de contorno (1.29–1.31).

Evidentemente, cuando $\rho \equiv cte.$, el problema considerado se reduce al llamado problema incompresible (no estacionario) de Navier-Stokes (en 3 dimensiones).

Diversos resultados sobre existencia de solución débil han sido ya obtenidos para el problema (1.26–1.31), siempre en el caso de un intervalo temporal finito $(0, T)$. En dominios acotados de frontera regular, la existencia de solución de un modelo “semi-variacional”, donde uno sustituye (1.26) y (1.31) por una formulación variacional “eliminando” la presión, fue tratada por Kazhikhov [31] y Kazhikhov y Antonzev [2] (véase [39] para un resumen), con una densidad inicial “separada” de cero (i.e. suponiendo que $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en Ω). Posteriormente, estos resultados fueron generalizados por J.Simon [54] al caso general en que $\rho_0 \geq 0$ en Ω . Recientemente, este mismo autor ha probado en [55] la existencia de una solución global del modelo completo, incluyendo la presión, pero donde la solución verifica la condición inicial (1.31) en un sentido “débil” (véase (1.39) más adelante). A su vez, bajo adecuadas hipótesis de regularidad suplementarias sobre los datos, la solución obtenida es semi-fuerte (véase §2.1.1 para la definición) para tiempo pequeño, i.e. en $[0, T_*]$, para algún T_* suficientemente pequeño.

En lo que se refiere a dominios no acotados, M.Padula en [45] demuestra, entre otras cosas, la existencia de una solución semi-fuerte local en tiempo, que será global (en $(0, T)$ para T finito), si los datos son suficientemente pequeños. Dicho resultado necesita ciertas hipótesis excesivamente restrictivas, una de las más significativas es la siguiente:

$$\int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$$

i.e., la masa total del sistema debe ser finita.

En esta sección presentamos un resultado de existencia de solución débil del problema (1.26–1.31) totalmente global, i.e. en el intervalo de tiempo $(0, +\infty)$ y válido para

dominios Ω generales, acotados o no. Además, contemplaremos la situación general, con $\rho_0 \geq 0$, bajo hipótesis menos restrictivas que en [45]. En los casos particulares donde, o bien el segundo miembro f posee regularidad global en tiempo, o bien Ω es acotado (eventualmente, con frontera Lipschitz-continua), o bien $\rho_0 \geq \alpha > 0$, se obtendrán soluciones más regulares.

La presentación del resultado principal de esta sección (Teorema 1.12) con estas características tiene una doble motivación:

1. Poder analizar la existencia de solución débil global en tiempo sin imponer condiciones sobre el dominio Ω que ocupa el fluido. Especial interés tiene el caso en que Ω es no acotado y sólo se impone $\rho_0 \geq 0$ en Ω ; en esta situación, las hipótesis $\rho_0 \geq 0$ y $\rho_0 \geq \alpha > 0$ se corresponden con situaciones físicas que son claramente distintas.
2. Poder extender posteriormente el razonamiento, al menos cuando Ω es acotado. Por ejemplo, deduciremos que la solución débil obtenida en esta sección, bajo hipótesis de regularidad adicionales sobre los datos $(\Omega, f, \rho_0, \mathbf{u}_0)$ y con $\rho_0 \geq \alpha > 0$, es también una solución semi-fuerte local en tiempo, incluso global si, además, los datos son suficientemente pequeños (cf. §2.1).

El plan general que vamos a desarrollar en la demostración es el siguiente:

1. Considerar un recubrimiento $\{\Omega_R\}$ de Ω constituido por una sucesión creciente de subdominios acotados, con frontera al menos Lipschitziana.
2. Considerar una "base especial" de V , formada por funciones regulares con soporte compacto.
3. Construir una familia de soluciones aproximadas al problema (a partir de una semi-discretización de Galerkin en $(0, +\infty) \times \Omega_R$) y, posteriormente, acotar estas aproximaciones convenientemente, independientemente de R .
4. Extraer una s.s. convergente (en un sentido adecuado que será precisado más adelante) y probar que el límite es una solución de (1.26–1.31).

1.2.2 El Resultado Principal. Algunos Casos Particulares

En primer lugar, recordamos la definición de solución débil de (1.26–1.31). Al igual que en el caso del problema incompresible y homogéneo de Navier-Stokes, se trata de plantear una formulación variacional “equivalente”, eliminando la presión. En el “camino de retorno” a la formulación completa, es preciso “recuperar” p . Para ello, haremos uso de los resultados, tipo De Rham, presentados en §1.1.4.

DEFINICIÓN 1.10 Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^3 y $0 < T \leq +\infty$. Si $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\rho_0 \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^3$ y $\mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, diremos que el par (ρ, \mathbf{u}) , con

$$\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad (1.34)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; W(\Omega)), \quad (1.35)$$

$$\rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (1.36)$$

es una solución débil de (1.26–1.31) en Q_T si

$$\begin{cases} \int \int_{Q_T} (-\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_t + [-\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u}] : \nabla \varphi - \rho \mathbf{f} \cdot \varphi) dx dt \\ = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(0, \mathbf{x}) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \Omega)^3, \nabla \cdot \varphi = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} - \int \int_{Q_\infty} (\rho \psi_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \psi) dx dt = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) dx \\ \forall \psi \in \mathcal{D}([0, +\infty) \times \Omega). \end{cases} \quad (1.38)$$

Si $T = +\infty$, permitiremos que \mathbf{f} y (ρ, \mathbf{u}) tengan regularidad local en tiempo (con respecto al extremo $+\infty$). En concreto, podrá tenerse

$$\mathbf{f} \in L^1_{loc}([0, +\infty); L^2(\Omega)^3),$$

$$\rho \in L^\infty([0, +\infty); L^\infty(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in L^2_{loc}([0, +\infty); W(\Omega)), \quad \rho \mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3). \quad \blacksquare$$

Por comodidad, en toda la Memoria cuando hablemos de regularidad local en tiempo, ésta se refiere exclusivamente al extremo superior.

Notas:

(a) (1.26) y (1.31) (resp. (1.27) y (1.30)) se verifican en el sentido de (1.37) (resp. (1.38)), mientras que (1.28–1.29) se reduce aquí a lo siguiente (cf. §1.1.3):

$$\mathbf{u}(t) \in W(\Omega) \quad \text{para } t \text{ cpd. en } (0, +\infty).$$

Cuando $\partial\Omega$ es Lipschitz-continua, podemos decir que (1.29) se verifica en el sentido de la traza (véase en §1.1.3 la caracterización de W en este caso).

(b) Gracias al Lema 1.5 es fácil comprobar que si (ρ, \mathbf{u}) es una solución débil, entonces existe $p \in \mathcal{D}'(Q_T)$ tal que la terna (ρ, \mathbf{u}, p) verifica las ecuaciones (1.26) en el sentido de las distribuciones y, también en el sentido del espacio $W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ (basta para ello, considerar (1.34–1.36) y razonar como en §1.2.4). Por tanto

$$\nabla p \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Además, si Ω es acotado de frontera regular, podemos elegir $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ sin más que aplicar el apartado (iii) del Lema 1.6. Por último, se puede deducir a partir de (1.37) que, las condiciones iniciales sobre $\rho \mathbf{u}$ se verifican al el siguiente sentido débil:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \in C([0, T]) \quad \text{y} \quad \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega); \quad (1.39)$$

obsérvese para ello que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} ([\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mu \nabla \mathbf{u}] : \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \in L^1(0, T),$$

por lo que, realmente, $\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es una función absolutamente continua en $[0, T]$ (cf. Generalización (c) del Lema 1.1). Recíprocamente, si existen (ρ, \mathbf{u}, p) con la regularidad precedente y tales que se da (1.26) y (1.39), entonces (ρ, \mathbf{u}) verifica (1.37).

(c) En particular, (1.38) implica que se verifica la ecuación (1.27) en $\mathcal{D}'(Q_T)$ (y, debido a (1.34–1.36), también en el sentido de $L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega))$ y de $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$). En consecuencia, por ejemplo $\rho \in C([0, T]; W^{-1,6}(\Omega))$ y se verifica la condición inicial (1.30) en este sentido. Recíprocamente, (1.27) y (1.30) implican (1.38).

(d) Obsérvese que para (ρ, \mathbf{u}) con la regularidad dada por (1.34–1.36), tiene perfecto sentido las igualdades (1.37–1.38); a partir de (1.34–1.35), sabemos que $\rho \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^6(\Omega)^3)$, lo cual junto con (1.36) implica que $\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \in L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3})$.

■

Enunciamos seguidamente el resultado principal de esta Sección:

TEOREMA 1.11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto. Si $\mathbf{u}_0 \in H(\Omega)$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω y $\mathbf{f} \in L^1_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3)$, entonces existe una solución débil (ρ, \mathbf{u}) en Q_∞ del problema de Navier-Stokes con densidad variable (1.26–1.31). Además,*

$$\rho \in L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega)) \cap C([0, +\infty); W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)), \quad (1.40)$$

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho(x, t) \leq \sup_{\Omega} \rho_0 \quad \text{cpd. en } Q_\infty, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{u} \in L^2_{loc}(0, +\infty; W(\Omega)), \quad (1.42)$$

$$\rho \mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \cap N^{1/4,2}_{loc}(0, +\infty; W^{-1,3}(\Omega)^3), \quad (1.43)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \in C[0, +\infty) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (1.44)$$

y existe $p \in \mathcal{D}'(Q_{\infty})$ tal que

$$\nabla p \in W_{loc}^{-1, \infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \quad (1.45)$$

y la terna (ρ, \mathbf{u}, p) verifica

(1.26) en $W_{loc}^{-1, \infty}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega))^3$,

(1.27) en $L_{loc}^{\infty}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega))$ y en $L_{loc}^2(0, +\infty; W^{-1,6}(\Omega))$,

(1.28) y (1.29) en el sentido del espacio $W(\Omega)$,

(1.30) en $W_{loc}^{-1, \infty}(\Omega)$ y

(1.31) en el sentido débil de (1.39), para cada $T > 0$ finito. Además, también se tiene que

$$|\rho^{1/2} \mathbf{u}(t)|_{L^2} \in C[0, +\infty) \text{ y } |\rho^{1/2} \mathbf{u}(0)|_{L^2} = |\rho_0^{1/2} \mathbf{u}_0|_{L^2}. \quad \blacksquare \quad (1.46)$$

Notas:

(a) En el caso particular en que $\rho_0 \geq \alpha > 0$, se tiene además:

$$\mathbf{u} \in L_{loc}^2(0, +\infty; V(\Omega)) \cap L_{loc}^{\infty}(0, +\infty; H(\Omega)) \cap N_{loc}^{1/4, 2}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3).$$

Que \mathbf{u} es una función de $L_{loc}^2(0, +\infty; V(\Omega))$ y de $L_{loc}^{\infty}(0, +\infty; H(\Omega))$ se deduce fácilmente de (1.42) y de (1.43); ahora $1/\rho \in L^{\infty}(Q_{\infty})$. Sin embargo, que $\mathbf{u} \in N_{loc}^{1/4, 2}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ se verá, como un caso particular, en la Demostración del Teorema. En este caso, no haría falta introducir los espacios de Sobolev (asociados a dominios no acotados) $K^1(\Omega)$, $K_0^1(\Omega)$ y $W(\Omega)$.

(b) Se puede comprobar que, si (ρ, \mathbf{u}, p) es una solución proporcionada por el Teorema precedente, también verifica las ecuaciones no conservativas (1.32–1.33), al menos en el sentido de las distribuciones. De todas formas, esto se cumple sólo “a posteriori”, ya que las estimaciones que vamos a conseguir para las soluciones aproximadas en la Demostración del Teorema, no permiten tomar límites directamente en las ecuaciones no conservativas.

(c) Si, en el Teorema 1.12, suponemos además que $\rho_0 \in L^p(\Omega)$ para algún $p : 2 \leq p < +\infty$, teniendo en cuenta el Corolario 1.9, deducimos que

$$\rho \in C([0, +\infty); L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [p, +\infty).$$

(d) La condición inicial (1.31) está formulada sobre $\rho \mathbf{u}$ y se verifica en un sentido débil (el de (1.39)). Esto obedece a que vamos a encontrar más regularidad para $\rho \mathbf{u}$

que para \mathbf{u} . Se puede demostrar (cf. [57, Corolario 28]) que, si $T > 0$, $s > \frac{1}{q}$ y E es un espacio de Banach, entonces

$$N^{s,q}(0, T; E) \hookrightarrow C([0, T]; E).$$

Por tanto, $\rho\mathbf{u}$ podría ser continua de $[0, T]$ con valores en $W^{-1,3}(\Omega)^3$ si tuviéramos que

$$\rho\mathbf{u} \in N^{(1/2)+\varepsilon,2}(0, T; W^{-1,3}(\Omega)^3), \quad \text{para algún } \varepsilon > 0.$$

Pero el Teorema 1.12 tan sólo dice que $\rho\mathbf{u} \in N^{1/4,2}(0, T; W^{-1,3}(\Omega)^3)$. De todas formas, (1.39) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\rho\mathbf{u} : [0, +\infty) \mapsto V' \quad \text{es continua débil y en } t = 0 \text{ vale } \rho_0\mathbf{u}_0.$$

■

Enunciamos a continuación un resultado paralelo al anterior, donde se afirma además que la solución tiene regularidad global respecto al tiempo si \mathbf{f} la tiene.

COROLARIO 1.12 *En las condiciones del Teorema 1.12, si además se tiene que $\mathbf{f} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, entonces*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; W(\Omega)), \quad (1.47)$$

$$\rho\mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3). \quad (1.48)$$

Por tanto, se verifican (1.37) y (1.38) cualesquiera que sean φ en $W^{1,1}(0, +\infty; V(\Omega))$ y ψ en $W^{1,1}(0, +\infty; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; K^1(\Omega))$ resp. ■

Nota: (1.47) implica en particular que

$$|\nabla\mathbf{u}(t)|_2 \xrightarrow{t} 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Por otra parte, (1.48) significa que $|\rho\mathbf{u}(t)|_2$ “no explota” cuando $t \rightarrow +\infty$. Además, si $\rho_0 \geq \alpha > 0$, tendremos que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$.

■

Finalmente, obtenemos un resultado “intermedio” entre los dos anteriores.

COROLARIO 1.13 *En las condiciones del Teorema 1.12, si Ω es acotado en alguna dirección de los ejes coordenados y*

$$\int_t^{t+1} |\mathbf{f}(s)|_2^2 ds \leq C \quad (1.49)$$

para una constante C indep. de t , entonces también se verifica (1.48). ■

Nótese que, para que se cumpla (1.49), bastaría que $\mathbf{f} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$.

Idea de las Demostraciones

Haremos, en las tres secciones siguientes, la demostración detallada del Teorema 1.12 — dividida en dos secciones — y veremos en una tercera sección, de forma esquemática, cómo pueden ser demostradas las afirmaciones que se refieren a los casos particulares considerados.

Dichas demostraciones se basan en un argumento de compacidad sobre una discretización de “semi-Galerkin”; la definición de solución aproximada se hace usando las ecuaciones en forma no conservativa (1.32–1.33) en dimensión infinita para la densidad, junto con una discretización de Galerkin para el campo de velocidades.

Dicha definición será global con respecto al tiempo y, en lo referente a las variables espaciales, se utiliza una “base adecuada de V ” de funciones regulares con soporte compacto, contenidos en una sucesión creciente de subdominios $\{\Omega_R\}_{R>0}$ de Ω , acotados y de frontera Lipschitziana que recubren todo Ω .

Para demostrar la existencia de soluciones aproximadas, introducimos una “linealización” sobre dominios acotados con respecto al espacio y al tiempo. Obtenemos así las llamadas “soluciones aproximadas linealizadas”. Determinadas estimaciones sobre éstas permiten aplicar el Teorema de Schauder del Punto Fijo para obtener la existencia de soluciones aproximadas y que podremos extender adecuadamente a todo Q_∞ .

Haremos tres tipos de estimaciones “a priori” sobre las soluciones aproximadas, que serán “locales” con respecto al tiempo si $f \in L^1_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ (en el Teorema 1.12), “globales” si $f \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ (en el Corolario 1.13) e incluso, estimaciones “intermedias” a las anteriores si $f \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ y Ω acotado en alguna dirección de los ejes coordenados (en el Corolario 1.14). Acotaremos las funciones, sus derivadas (con respecto al espacio y al tiempo) y ciertas “derivadas fraccionarias en tiempo” usando adecuados espacios de Nikolskii (cf. §1.1.2). En cuanto al espacio, las estimaciones serán siempre globales, i.e. independientes de R ; para ello, hará falta utilizar espacios de Sobolev adecuados asociados a dominios no acotados, véase §1.1.1 y §1.1.3.

Posteriormente, un proceso de paso al límite sobre las ecuaciones aproximadas, escritas esta vez en forma conservativa, nos llevará a una solución del problema. Se usarán resultados de compacidad en los cilindros acotados $Q_{T;\Omega_R}$ (cf. §1.1.2), haciendo luego T y $R \nearrow +\infty$.

A las ecuaciones (1.26) se llega aplicando el Lema de De Rham Generalizado (versión distribucional; cf. el Lema 1.5). Por último, se deducen las condiciones iniciales y algunas propiedades adicionales de las soluciones encontradas.

1.2.3 Demostración del Resultado Principal (I): Construcción y Primeras Propiedades de las Soluciones Aproximadas

Dado el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sea

$$\begin{aligned} & \{\Omega_R\}_{R>0} \text{ una familia de abiertos acotados,} \\ & \text{de frontera Lipschitziana y tales que} \\ & \Omega_R \subset \Omega_S \text{ si } R < S \text{ y } \bigcup_{R>0} \Omega_R = \Omega. \end{aligned} \tag{1.50}$$

DEFINICIÓN Y EXISTENCIA DE SOLUCION APROXIMADA

Haremos una definición de solución aproximada en un sentido clásico, basada en la elección de una “base especial” de V y un proceso de regularización sobre los datos del problema.

A) Elección de una “base especial de V ”. Sea (\mathbf{v}^m) una sucesión de funciones con las siguientes propiedades:

1. Cada $(\mathbf{v}^m) \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$ y es de soporte compacto,
2. (\mathbf{v}^m) es ortonormal en $L^2(\Omega)^3$,
3. Las combinaciones lineales finitas construídas con las \mathbf{v}^m son densas en V .

Una forma de justificar la existencia de una sucesión de estas características es la siguiente. Sea $(\mathbf{u}^m)_m$ una sucesión densa en V . Para cada m , existe $(\mathbf{w}_j^m)_j \subset \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{w}_j^m \xrightarrow{f} \mathbf{u}^m$ en V . Tras una reenumeración adecuada, podemos escribir el conjunto

$$\{\mathbf{w}_j^m : j, m \geq 1\}$$

como una sucesión $(\mathbf{z}^l)_l$. El proceso habitual de ortonormalización de Gram-Schmidt en $L^2(\Omega)^3$ conduce entonces a la existencia de (\mathbf{v}^m) .

Dado que las \mathbf{v}^m tienen soporte compacto, podemos construir también una s.s. de índices $R = R(m) \in \mathbb{N}$, crecientes respecto de m , con $R(m) \geq m$ y $\text{Sop}(\mathbf{v}^m) \subset \Omega_{R(m)}$ para cada m . Por tanto, si llamamos $V^m = \langle \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m \rangle$ (subespacio generado por $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\}$), tendremos

$$\text{Sop}(V^m) \subset \Omega_{R(m)}, \tag{1.51}$$

$$" V^m \xrightarrow{f} V "$$

es decir, para cada $\mathbf{v} \in V$, existe $\mathbf{z}^m \in V^m$ tal que $\mathbf{z}^m \xrightarrow{f} \mathbf{v}$ en V .

Por cuestiones de comodidad en la notación, a menudo pondremos sólo R para referirnos a $R(m)$, sin hacer constar explícitamente esta dependencia.

B) Regularización de f . Como $f \in L^1_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3)$, podemos introducir una sucesión de funciones "regulares" asociadas a f , (f^m) , con

$$(f^m) \subset C([0, \infty); L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3), \quad (1.53)$$

$$f^m \xrightarrow{f} f \quad \text{en } L^1_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3) \quad (1.54)$$

y

$$|f^m(t)|_2 \leq K_1(t), \quad |f^m(t)|_{6/5} \leq K_2(t) \quad \text{cpd. en } (0, T), \quad (1.55)$$

donde K_1 y $K_2 \in L^1_{loc}(0, \infty)$; basta definir el producto de convolución de f (prolongada por cero para $t < 0$) con una sucesión regularizante respecto de la variable t .

C) Regularización de los datos iniciales. Sean (u_0^m) y (ρ_0^m) dos sucesiones con las propiedades siguientes:

$$u_0^m \in V^m, \quad u_0^m \xrightarrow{f} u_0 \quad \text{en } H(\Omega) \quad (1.56)$$

y

$$\rho_0^m \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \begin{cases} \rho_0^m \xrightarrow{*} \rho_0 \text{ en } L^\infty(\Omega), \\ \rho_0^m \xrightarrow{f} \rho_0 \text{ en } L^q(\Omega), \quad \forall q < +\infty, \\ \frac{1}{m} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_0^m \leq \frac{1}{m} + \sup_{\Omega} \rho_0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.57)$$

Para conseguir una sucesión en las condiciones de (1.56) bastará tomar

$$u_0^m = P_{|V^m} u_0 \quad (\text{i.e., } u_0^m \in V^m \text{ y } (u_0^m, v)_{L^2} = (u_0, v)_{L^2} \quad \forall v \in V^m).$$

Por otra parte, para construir las ρ_0^m como en (1.57), supondremos que ρ_0 es prolongada por

$$\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_0(x) dx$$

fuera de Ω y definiremos posteriormente ρ_0^m a partir de la igualdad

$$\rho_0^m = \frac{1}{m} + (\zeta_{1/m} \star \rho_0),$$

donde $\zeta_{1/m}$ es una sucesión regularizante (respecto de x) y \star denota, como es habitual, el producto de convolución.

D) Definición de solución aproximada. Para cada m , diremos que el par (ρ^m, u^m) es una m -ésima solución aproximada si

$$\rho^m \in C^1(\bar{Q}), \quad u^m \in C^1([0, T]; V^m) \quad (1.58)$$

y, además,

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m = 0 \text{ en } Q_\infty, \quad \rho^m|_{t=0} = \rho_0^m \text{ en } \Omega, \quad (1.59)$$

$$\begin{cases} \int_\Omega \rho^m \left[\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m \right] \cdot \mathbf{v} + \mu \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, dx \\ \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad \mathbf{u}^m|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (1.60)$$

Notas :

(a) Como V^m es un subespacio de dimensión finita de $C^1(\overline{\Omega})^3$, las ecuaciones aproximadas anteriores tienen un sentido clásico. Obsérvese que (1.60) es, de hecho, un problema de Cauchy para sdo. (de dimensión m), mientras que en (1.59) continúa estando presente una edp. de primer orden. Se ha optado por esta manera de aproximar (1.59–1.60) debido a que, considerando \mathbf{u}^m como dato, el problema de Cauchy (1.59) es de fácil resolución por el método de las características (cf. [36]). A esta forma de plantear las ecuaciones aproximadas se le suele llamar una discretización de “semi-Galerkin”.

(b) El problema (1.59–1.60) puede ser escrito en la forma conservativa equivalente:

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m) = 0 \text{ en } Q_\infty, \quad \rho^m|_{t=0} = \rho_0^m \text{ en } \Omega, \quad (1.61)$$

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + [\mu \nabla \mathbf{u}^m - \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m] : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, dx \\ \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad \mathbf{u}^m|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (1.62)$$

■

E) Existencia de soluciones aproximadas. Fijado m , veamos que existe una m -ésima solución aproximada (ρ^m, \mathbf{u}^m) . Para ello, nos basaremos en el siguiente

LEMA 1.14 Sean $m \in \mathbb{N}$, $0 < T < +\infty$, $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera Lipschitziana y $Q_{T,\Theta} = (0, T) \times \Theta$. Si $\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\Theta)^3$ de funciones $C^1(\overline{\Theta})^3$ que se anulan sobre $\partial\Theta$, $\rho_0^m \in C^1(\overline{\Theta})$ verifica $\inf \rho_0^m > 0$, $\mathbf{u}_0^m \in V^m$, $\mathbf{f}^m \in C[0, T]; L^2(\Theta)^3$ y ponemos $V^m = \langle \mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m \rangle$, entonces existe una única m -ésima solución aproximada (ρ^m, \mathbf{u}^m) en $Q_{T,\Theta}$ que además verifica:

$$0 < \inf \rho_0^m \leq \rho^m \leq \sup \rho_0^m \text{ en } Q_{T,\Theta} \quad \blacksquare \quad (1.63)$$

Nota : Por supuesto, una m -ésima solución aproximada en $\overline{Q}_{T,\Theta}$ es un par (ρ^m, \mathbf{u}^m) que verifica (1.58–1.60) con Q_∞ , $[0, +\infty)$ y Ω cambiados por $Q_{T,\Theta}$, $[0, T]$ y Θ resp.

■

Suponiendo demostrado el Lema 1.15 (véase el Apéndice B), dados m y $(t, \mathbf{x}) \in Q_\infty$, definimos

$$(\rho^m, \mathbf{u}^m)(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} (\rho_T^m, \mathbf{u}_T^m)(t, \mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{R(m)}, \\ (\rho_0^m(\mathbf{x}), 0) & \text{si no,} \end{cases} \quad (1.64)$$

donde $(\rho_T^m, \mathbf{u}_T^m)$ es la m -ésima solución aproximada en $Q_{T; \Omega_{R(m)}}$ dada por el Lema 1.15 y $T \geq t$ es arbitrario. Gracias a la unicidad de solución aproximada, en la definición precedente no hay ninguna ambigüedad.

Es fácil comprobar que el par (ρ^m, \mathbf{u}^m) , definido por (1.64), es una m -ésima solución aproximada en Q_∞ .

ESTIMACIONES "A PRIORI" DE LAS SOLUCIONES APROXIMADAS

El objetivo de este apartado consiste, en términos generales, en "acotar independientemente de m " (y lógicamente también de $R(m)$). En consecuencia, cuando digamos que una familia de funciones está acotada en un determinado espacio, nos estaremos refiriendo a que existe una constante independiente de m (y de R) que acota las normas correspondientes.

A) Estimaciones de las funciones: Sea (ρ^m, \mathbf{u}^m) una m -ésima solución aproximada para cada m . Gracias a (1.63) y a la elección de ρ_0^m hecha en (1.57), tendremos:

$$\rho^m \text{ está acotada en } L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega)). \quad (1.65)$$

En particular, $\rho^m \leq \sup \rho_0 + 1 \equiv M$ en Q_∞ . Además, si $\rho_0 \geq \alpha > 0$, también se tiene que

$$\rho^m \geq \alpha > 0 \text{ en } Q_\infty. \quad (1.66)$$

Por otra parte, a partir de (1.60) con $\mathbf{v} = \mathbf{u}^m(t) \in V^m$ para cada t en $[0, +\infty)$, la ecuación de continuidad (1.61) y el hecho de que $\mathbf{u}^m = 0$ sobre $\partial\Omega_R = \Gamma_R$, no es difícil deducir la siguiente "igualdad de energía":

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \mu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}^m|^2 = \int_\Omega \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{f}^m \quad (1.67)$$

para cada $t \in (0, +\infty)$. Teniendo en cuenta (1.55) y (1.65), obtenemos que

$$\int_\Omega \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{f}^m dx \leq M^{1/2} |\mathbf{f}^m|_2 |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|_2 \leq \frac{1}{2} M K_1 + \frac{1}{2} K_1 \int_\Omega \rho^m |\mathbf{u}^m|^2$$

($K_1 \in L^1_{loc}(0, +\infty)$). Luego, en virtud del Lema de Gronwall en $(0, T)$ (con $T > 0$ finito pero arbitrario) y de la elección hecha de datos iniciales en (1.56–1.57), resulta que

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \text{ y } \rho^m \mathbf{u}^m \text{ están acotadas en } L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3). \quad (1.68)$$

Integrando (1.67) en $(0, T)$ y teniendo en cuenta (1.55–1.57) y (1.68), se obtiene que

$$\nabla \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^9), \quad (1.69)$$

de donde

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L_{loc}^2(0, +\infty; W(\Omega)) \quad (1.70)$$

y

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \text{ y } \rho^m \mathbf{u}^m \text{ están acotadas en } L_{loc}^2(0, +\infty; L^6(\Omega)^3) \quad (1.71)$$

(debido a la definición de $W(\Omega)$ y a las inyecciones del Lema 1.1).

A partir de (1.68) y (1.71), mediante un razonamiento usual de tipo interpolación en los espacios L^p (véase [58, p. 46]), llegamos a la estimación "intermedia"

$$(\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L_{loc}^{8/3}(0, +\infty; L^4(\Omega)^3),$$

donde el exponente $1/8$ de ρ^m es óptimo, i.e. el menor posible. En particular, $(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m$ también está acotada en $L_{loc}^{8/3}(0, +\infty; L^4(\Omega)^3)$, lo cual lleva fácilmente a que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L_{loc}^{4/3}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3), \quad (1.72)$$

A continuación, deduciremos nuevas estimaciones, esta vez sobre las derivadas con respecto al tiempo, que usaremos en el marco del Lema 1.4 para obtener compacidad. En los dos apartados que siguen, C_T denotará a distintas constantes con estas características.

B) Estimaciones sobre las derivadas respecto de t : En primer lugar, observemos que la ecuación (1.61) y las estimaciones conseguidas para $\rho^m \mathbf{u}^m$ en (1.68) y (1.71), implican:

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)). \quad (1.73)$$

Por otra parte, gracias a (1.62), podemos afirmar que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, dx \right| \leq (|\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m|_2 + \mu |\nabla \mathbf{u}^m|_2 + |\rho^m|_\infty |\mathbf{f}^m|_{6/5}) \|\mathbf{v}\|_W$$

y, debido a (1.55), (1.69) y (1.72), resulta que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, dx \right| \leq (MK_2 + \psi_m) \|\nabla \mathbf{v}\|_W \quad \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad (1.74)$$

donde $K_2 \in L^1(0, T)$ y (ψ_m) es un sucesión acotada en $L^{4/3}(0, T)$.

C) Estimaciones de tipo derivada fraccionaria en tiempo: Veamos que, para cada $T > 0$,

$$\rho^m \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } N^{1/4,2}(0, T; W^{-1,3}(\Omega)^3). \quad (1.75)$$

Para demostrar (1.75), basta probar que existe una Cte. $C_T > 0$ (indep. de m) tal que

$$\|\tau_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega)^3)} \leq C_T h^{1/4} \quad \forall h : 0 < h < T. \quad (1.76)$$

Esto puede conseguirse con un argumento similar al que presenta J.Simon (véase [57, Proposición 8]), modificando algunas estimaciones (independientes de m) para que éstas sean, además, independientes del dominio; en caso contrario dependerían de R y recuérdese que $R = R(m)$. Consideramos cuatro etapas en el proceso; la esencia de las tres primeras se debe a Antonzev y Kazhikhov [2,31] (pensadas para el caso particular en que $\rho_0 \geq \alpha > 0$) y en la cuarta etapa se recoge una variante introducida por J.Simon [57] (para el caso general $\rho_0 \geq 0$).

Etapas 1 .- Veamos que existe una constante $C_T > 0$ tal que si $0 < h < T$, entonces

$$I_1 \equiv \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \right) dt \leq C_T h^{1/2}.$$

Fijado $\mathbf{v} \in V^m$, gracias a (1.74), obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot \mathbf{v} &= \int_t^{t+h} \left(\frac{d}{ds} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m(s) \cdot \mathbf{v} \right) ds \\ &\leq \left(\int_t^{t+h} g_m(s) ds \right) \|\mathbf{v}\|_W, \end{aligned}$$

donde $g_m = MK_2 + \psi_m$. En particular, (g_m) es una sucesión acotada en $L^1(0, T)$ (independientemente de m , pero con dependencia de T).

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t) \in V^m$, integrando respecto de t en $(0, T-h)$ y aplicando el Teorema de Fubini, obtenemos que

$$I_1 \leq \int_0^T g_m(s) \left(\int_{(s-h)^+}^{s^*} \|\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)\|_W dt \right) ds,$$

donde

$$s^* = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ s & \text{si } 0 \leq s \leq T-h \\ T-h & \text{si } s \geq T-h. \end{cases}$$

Finalmente, como $s^* - (s-h)^+ \leq h$, en cualquiera de los casos,

$$I_1 \leq \|\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)\|_W \left(\int_0^T g_m(s) ds \right) h^{1/2}$$

y, gracias a (1.70), se tiene la estimación deseada.

Etapas 2 .- Veamos ahora que existe $C_T > 0$ tal que

$$I_2 \equiv \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \right) dt \leq C_T h^{3/4}.$$

Dados $t \in [0, T - h]$ y $w \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ con $\text{Sop}(w) \subset \Omega_{R(m)}$, es claro que

$$\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] w \, dx = \int_t^{t+h} \left(\int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m)(s) \cdot \nabla w \, dx \right) ds.$$

Si aplicamos dos veces la desigualdad de Hölder, con exponentes 3 y 3/2 y 4 y 4/3, se obtiene:

$$|I_1(t)| \leq \int_t^{t+h} |\rho^m \mathbf{u}^m|_3 |\nabla w|_{3/2} \, ds \leq |\nabla w|_{3/2} |\rho^m \mathbf{u}^m|_{4;3;Q_T} h^{3/4}.$$

No es difícil acotar $|\rho^m \mathbf{u}^m|_{4;3;Q_T}$ con un argumento de tipo interpolatorio, en términos de $|\rho^m|_{\infty}$, $|\mathbf{u}^m|_{2;6;Q_T}$ y $|\rho^m \mathbf{u}^m|_{\infty;2;Q_T}$. Por otra parte, es posible elegir

$$w = \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \quad \forall t \in (0, T - h)$$

(basta aplicar el apartado (ii) del Lema 1.3). Además,

$$\begin{aligned} |\nabla w|_{3/2} &\leq |\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2 |\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)|_6 + |\mathbf{u}^m(t)|_6 |\nabla [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)]|_2 \\ &\leq 2 \|\mathbf{u}^m(t)\|_W \|\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)\|_W. \end{aligned}$$

Por tanto, integrando $I_2(t)$ en $(0, T - h)$, se llega a la estimación deseada.

Etapa 3 .- Se observa que

$$I_1 - I_2 = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m(t+h) |\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)|^2 \right) dt \leq C_T h^{1/2},$$

para cada h que verifique $0 < h < \min\{1, T\}$. En consecuencia, gracias a la estimación L^{∞} de ρ^m ,

$$|\tau_h \rho^m (\tau_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m)|_{L^2(0, T-h; L^2)} \leq C_T h^{1/2}. \quad (1.77)$$

Etapa 4 .- Intentemos finalmente acotar $[\tau_h \rho^m - \rho^m] \mathbf{u}^m$. Obsérvese que, para cada $t \in (0, T - h)$, se tiene la igualdad

$$\rho^m(t+h) - \rho^m(t) = - \int_t^{t+h} \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m)(s) \, ds \quad \text{en } W^{-1,6}(\Omega).$$

Por tanto, gracias a (1.71),

$$\|\rho^m(t+h) - \rho^m(t)\|_{L^{\infty}(0, T-h; W^{-1,6})} \leq C_T h^{1/2}.$$

Por otra parte, gracias al apartado (iv) del Lema 1.3, la aplicación producto de $K_0^1(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega)$ en $W^{-1,3}(\Omega)$ está bien definida y es continua. Luego

$$\|(\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3})} \leq C_T h^{1/2}.$$

Con esta última desigualdad y (1.77), podemos deducir claramente (1.76) (y (1.75)), teniendo en cuenta (de nuevo) que $L^2(\Omega)$ se inyecta de forma continua en $W^{-1,3}(\Omega)$.

1.2.4 Demostración del Resultado Principal (II): Compacidad, Proceso de Paso al Límite y Conclusiones

A) **Compacidad:** En este subapartado vamos a aplicar el Lema 1.4 a las sucesiones

$$\rho^m, \quad \rho^m \mathbf{u}^m, \quad \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2.$$

Aquí, X , B e Y serán espacios dependientes de las variables espaciales. Como se debe tener $X \hookrightarrow B$, nos veremos obligados a considerar abiertos acotados contenidos en Ω ; recuérdense las hipótesis necesarias para la compacidad de las inyecciones de Sobolev (cf. el Lema 1.1, apartado (iii)). Por tanto, fijaremos $T > 0$ y el abierto $\omega \subset \Omega$ acotado y consideraremos las soluciones aproximadas restringidas al dominio $Q_{T;\omega} = (0, T) \times \omega$.

En primer lugar, las estimaciones obtenidas para ρ^m y $\frac{\partial \rho^m}{\partial t}$ en (1.65) y (1.73) nos permiten aplicar el apartado (ii) del Lema 1.4 con $X = L^\infty(\omega)$, $B = W^{-1,\infty}(\omega)$ e $Y = H^{-1}(\omega)$ para deducir que

$$\rho^m \in \text{compacto de } C^0([0, T]; W^{-1,\infty}(\omega)). \quad (1.78)$$

Con un razonamiento similar, aplicando ahora el apartado (iii) del mismo Lema con $X = L^6(\omega)^3$, $B = W^{-1,\infty}(\omega)^3$ e $Y = W^{-1,3}(\omega)^3$, teniendo en cuenta las estimaciones de $\rho^m \mathbf{u}^m$ dadas por (1.71) y (1.75), obtenemos:

$$\rho^m \mathbf{u}^m \in \text{compacto de } L^2(0, T; W^{-1,\infty}(\omega)^3). \quad (1.79)$$

Finalmente, aplicando el apartado (iv) del Lema 1.4 con $X = B = Y = \mathbb{R}$, se deduce de (1.68) y (1.74) que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m \in \text{compacto de } C[0, T], \\ \forall (\mathbf{v}^m) \text{ con } \mathbf{v}^m \in V^m, \quad \|\mathbf{v}^m\|_V \leq C. \end{cases} \quad (1.80)$$

También se tendrá que

$$\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \in \text{compacto de } C[0, T]. \quad (1.81)$$

En efecto, gracias a (1.68), $\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2$ está acotada en $L^\infty(0, T)$. Por otra parte, (1.55), (1.67) y (1.68) implican que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2$ está acotada por una función de $L^1(0, T)$ (que depende de T). Luego, el apartado (iv) del Lema 1.4 nos conduce a (1.81).

B) **Extracción de subsucesiones convergentes:** Dado que en este apartado deberemos extraer varias s.s. de una sucesión dada, conservaremos en lo posible el superíndice m para denotar todas ellas.

Teniendo en cuenta las estimaciones obtenidas anteriormente y las propiedades de compacidad (1.78–1.79), se pueden extraer subsucesiones de (ρ^m) , (\mathbf{u}^m) , $(\rho^m \mathbf{u}^m)$ y $(\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m)$ tales que, para algunas funciones límites $\rho \in L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega))$ y $\mathbf{u} \in L^2_{loc}(0, +\infty; W(\Omega))$, se tiene:

$$\begin{cases} \rho^m \xrightarrow{f} \rho & \text{en } C^0([0, T]; W^{-1, \infty}(\omega)) \quad \forall \omega \subset \Omega \text{ acotado, } \quad \forall T > 0, \\ \rho^m \xrightarrow{*} \rho & \text{en } L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega)), \end{cases} \quad (1.82)$$

$$\mathbf{u}^m \xrightarrow{d} \mathbf{u} \text{ en } L^2_{loc}(0, +\infty; W(\Omega)) \quad (1.83)$$

$$\begin{cases} \rho^m \mathbf{u}^m \xrightarrow{d} \rho \mathbf{u} & \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^6(\Omega)^3), \\ \rho^m \mathbf{u}^m \xrightarrow{*} \rho \mathbf{u} & \text{en } L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3), \\ \rho^m \mathbf{u}^m \xrightarrow{f} \rho \mathbf{u} & \text{en } L^2(0, T; W^{-1, \infty}(\omega)^3) \quad \forall \omega \subset \Omega \text{ acotado, } \quad \forall T > 0, \end{cases} \quad (1.84)$$

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \xrightarrow{d} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \text{ en } L^{4/3}_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^9). \quad (1.85)$$

Obsérvese que, para demostrar que las funciones límites de (1.84) y (1.85) son resp. $\rho \mathbf{u}$ y $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ (y no otras), hay que utilizar que la aplicación producto, definida de $W(\omega) \times W^{-1, \infty}(\omega)$ en $W^{-1, 6}(\omega)$, es continua cualquiera que sea el abierto $\omega \subset \Omega$ acotado (cf. el apartado (iv) del Lema 1.3).

C) Conclusiones: Las propiedades de convergencia anteriores serán suficientes para probar que ρ y \mathbf{u} , junto con una distribución p que vamos a construir posteriormente, son las soluciones anunciadas en el Teorema.

Según ya sabemos,

$$\mathbf{u} \in L^2_{loc}(0, +\infty; W),$$

$$\rho \in L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega)) \cap C([0, +\infty); W^{-1, \infty}_{loc}(\Omega))$$

y

$$\rho \mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3).$$

Probaremos seguidamente que se verifican las ecuaciones (1.26–1.27), posteriormente las condiciones iniciales (1.30–1.31) y, por último, deduciremos otras propiedades de ρ , \mathbf{u} y p .

Ecuación de Movimiento: Se trata de tomar límites cuando $m \nearrow +\infty$ (luego también $R(m) \nearrow +\infty$) en (1.62). Esto se hará de forma escalonada: Primero, para m' y $\mathbf{v} \in V^{m'}$ fijados, razonaremos con $m \geq m'$, obteniendo la convergencia de cada sumando de (1.62); posteriormente, mediante un argumento de densidad “standard”, se deducirá que la ecuación límite se verifica para toda $\mathbf{v} \in V$.

Sea entonces $m' \geq 1$. Observemos en primer lugar que, debido a (1.84), $\rho^m \mathbf{u}^m \xrightarrow{\mathcal{D}'} \rho \mathbf{u}$ en $\mathcal{D}'(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$; por tanto,

$$\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, +\infty; L^2(\Omega)^3).$$

Así, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, +\infty)$ y, en particular, para cada $\mathbf{v} \in V^{m'}$,

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(0, +\infty)}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(0, +\infty)}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega}.$$

Debido a la regularidad de las soluciones aproximadas, los términos de la izquierda son los siguientes:

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^T \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \varphi dt \right) \cdot \mathbf{v} = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \right) \varphi dt.$$

Por otra parte, (véase §1.1.4), tenemos que

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(0, +\infty)}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} = \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega}, \varphi \right\rangle_{(0, +\infty)}.$$

Por tanto, la convergencia anterior significa que para cada $\mathbf{v} \in V^{m'}$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} dx \xrightarrow{\mathcal{D}'} \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, +\infty).$$

En segundo lugar, en virtud de (1.82) y de la convergencia fuerte de la sucesión \mathbf{f}^m hacia la función \mathbf{f} en $L^1_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, obtenemos que

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \xrightarrow{d} \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{en } L^1_{loc}(0, +\infty).$$

Por otra parte, utilizando (1.84–1.85), resulta que

$$\int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m) : \nabla \mathbf{v} \xrightarrow{d} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = -\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{en } L^1_{loc}(0, +\infty)$$

y

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{v} \xrightarrow{d} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = -\langle \mu \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty),$$

para cada $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Luego, tomando límites en (1.62), dado que las convergencias anteriores se verifican en $\mathcal{D}'(0, +\infty)$, resulta que

$$\left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{f}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, +\infty) \quad (1.86)$$

cualquiera que sea $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Razonando ahora por densidad, dejando crecer m' a ∞ , se deduce que la igualdad anterior también es cierta para cada $\mathbf{v} \in V$.

Nótese que las propiedades de regularidad que ya conocemos para $\rho\mathbf{u}$, $\rho\mathbf{u}\mathbf{u}$ y \mathbf{u} , implican

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} &\in W_{loc}^{-1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3), \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) &\in L_{loc}^{4/3}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)^3), \\ \Delta \mathbf{u} &\in L_{loc}^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)^3).\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \in W_{loc}^{-1,\infty}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)^3),$$

teniendo en cuenta que $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ y que, $L_{loc}^p(0, +\infty; (H^{-1})^3)$ se inyecta de forma continua en $W_{loc}^{-1,\infty}(0, +\infty; (H^{-1})^3)$ para cada $p \in [1, +\infty]$.

Por último, aplicando el Lema Generalizado de De Rham (Lema 1.5), se deduce la existencia de una distribución p con la propiedad siguiente:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} = -\nabla p \quad \text{en } W_{loc}^{-1,\infty}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Ecuación de Continuidad. Tomaremos a continuación límites en (1.61). Es fácil deducir, gracias a (1.82–1.83), que

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad \text{en } \mathcal{D}'(Q_\infty).$$

Luego, evidentemente, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ en $\mathcal{D}'(Q_\infty)$. Además, por la regularidad obtenida para ρ y $\rho \mathbf{u}$, también se tiene la igualdad anterior en el espacio

$$W_{loc}^{-1,\infty}(0, +\infty; L^\infty(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, +\infty; W^{-1,6}(\Omega)).$$

Condiciones Iniciales. Gracias a (1.82), $\rho^m(0) \xrightarrow{\mathbf{f}} \rho(0)$ en $W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)$. Por otra parte, las condiciones iniciales impuestas sobre ρ^m en (1.61) y las propiedades de convergencia de ρ_0^m dadas por (1.57) llevan a la igualdad $\rho(0) = \rho_0$, i.e. (1.30).

Para probar la condición inicial en sentido débil $\rho \mathbf{u}$ (1.39), fijemos una función $\mathbf{v} \in V$ y consideremos una sucesión (\mathbf{v}^m) tal que

$$\mathbf{v}^m \in V^m, \quad \mathbf{v}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{v} \quad \text{en } V. \quad (1.87)$$

Dado $T > 0$, gracias a (1.84) y (1.87), es claro que

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m \xrightarrow{*} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{en } L^\infty(0, T).$$

Por otra parte, debido a (1.80), la convergencia anterior también ha de tenerse en $C[0, T]$ en sentido fuerte y, en particular, $\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in C[0, T]$. Particularizando en $t = 0$, obtenemos

$$\left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m \right) (0) \xrightarrow{f} \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Analizando la sucesión anterior y gracias a las condiciones iniciales impuestas sobre ρ^m y \mathbf{u}^m en (1.56 – 1.57),

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m \right) (0) &= \int_{\Omega} \rho^m(0) \mathbf{u}^m(0) \cdot \mathbf{v}^m \\ &= \int_{\Omega} \rho_0^m \mathbf{u}_0^m \cdot \mathbf{v}^m \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

por lo que $(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}$.

Para demostrar (1.46) se argumenta como antes, teniendo en cuenta ahora (1.81) y que

$$\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \xrightarrow{d} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 \quad \text{en } L^1(0, T),$$

debido a (1.83–1.84).

Otras propiedades de ρ y \mathbf{u} . Gracias a (1.82), las estimaciones que tenemos sobre ρ^m y ρ_0^m implican:

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho \leq \sup_{\Omega} \rho_0 \quad \text{cpd. en } Q_{\infty}.$$

En lo que se refiere a la regularidad de tipo derivada fraccionaria en tiempo de $\rho \mathbf{u}$, se puede demostrar, de forma análoga a como se hace para $\rho^m \mathbf{u}^m$, que

$$\rho \mathbf{u} \in N_{loc}^{1/4, 2}(0, +\infty; W^{-1, 3}(\Omega)^3).$$

Por razones similares, en el caso particular en que $\rho_0 \geq \alpha > 0$, se llega a que

$$\mathbf{u} \in N_{loc}^{1/4, 2}(0, +\infty, L^2(\Omega)^3),$$

con lo cual queda demostrado el Teorema 1.12.

1.2.5 Esquema de las Demostraciones de los Casos Particulares

En ambos casos, tanto en el Corolario 1.13 como 1.14, vamos a mejorar las estimaciones “a priori”, de forma que podamos conseguir más regularidad para la solución; el resto sería similar a la Demostración que precede del Teorema 1.12.

A) Corolario 1.13.

Como ahora $f \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega))$, gracias al proceso de regularización de f , tendremos que f^m verifica (1.55) para $K_1 \in L^1(0, +\infty)$. Por tanto, a partir de (1.67) ahora podremos conseguir:

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \quad \text{y} \quad \rho^m \mathbf{u}^m \quad \text{están acotadas en } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3). \quad (1.88)$$

Integrando (1.67) en $(0, T)$ con $T > 0$ arbitrario,

$$|\nabla \mathbf{u}^m|_{2; Q_T}^2 \leq \int_{\Omega} \rho_0^m |\mathbf{u}_0^m|^2 dx + M^{1/2} |f^m|_{1; 2; Q_T} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|_{\infty; 2; Q_T} \leq M |\mathbf{u}_0|_2^2 + CM^{1/2} K_1,$$

que es una cota independiente de T . Por tanto,

$$\nabla \mathbf{u}^m \quad \text{está acotada en } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^9)$$

y

$$\mathbf{u}^m \quad \text{está acotada en } L^2(0, +\infty; W(\Omega)). \quad (1.89)$$

Por último, en el proceso de Paso al Límite, se obtendrá (1.47) y (1.48) a partir de (1.88) y (1.89) resp.

B) Corolario 1.14.

Se impone que Ω sea acotado en alguna dirección de los ejes coordenados para poder aplicar la desigualdad de Poincaré:

$$|\mathbf{v}|_2 \leq P(\Omega) |\nabla \mathbf{v}|_2.$$

La identidad de energía (1.67) implica ahora:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \frac{\mu}{MP(\Omega)} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{\mu}{MP(\Omega)} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2 P(\Omega)}{\mu} |f^m|_2^2.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \frac{\mu}{MP(\Omega)} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \leq \frac{M^2 P(\Omega)}{\mu} |f^m|_2^2. \quad (1.90)$$

Dado $t > 0$, si integramos (1.90) en $(t, t+1)$, con $g(t) = \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2$, tendremos

$$g'(t) + C(\Omega)g(t) \leq \frac{M}{C(\Omega)} \int_t^{t+1} |f^m|_2^2 ds.$$

Por tanto, gracias a la hipótesis (1.49) y al Lema de Gronwall, para cada $t \geq 0$,

$$g(t) \leq \int_0^1 \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + C \leq C', \quad (1.91)$$

puesto que, según ya sabemos, $\rho^m \mathbf{u}^m$ está acotada en $L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$.

Volviendo de nuevo a (1.90), obtenemos en particular que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \leq C \|\mathbf{f}^m\|_2^2.$$

Integrando en (t, s) para $s \in (t, t+1)$,

$$\int_{\Omega} \rho^m(s) |\mathbf{u}^m(s)|^2 \leq \int_{\Omega} \rho^m(t) |\mathbf{u}^m(t)|^2 + C \int_t^{t+1} \|\mathbf{f}^m\|_2^2$$

e integrando ahora para $t \in (s-1, s)$,

$$\int_{\Omega} \rho^m(s) |\mathbf{u}^m(s)|^2 \leq \int_{s-1}^s \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + C.$$

Por tanto, gracias a (1.91), llegamos a (1.88) y, en consecuencia, a (1.48).

1.3 El Caso de Coeficiente de Viscosidad Variable.

Se demuestra un resultado de existencia de solución débil global en tiempo en un abierto Ω acotado, para el problema de Navier-Stokes con densidad variable, donde también se supone que el coeficiente de viscosidad dinámica depende continuamente de la densidad, i.e. $\mu = \mu(\rho)$.

1.3.1 Planteamiento del Problema. Definición de Solución Débil

Partimos de las ecuaciones, definidas en Q_∞ , que se deducen de la ley de conservación de la masa y la cantidad de movimiento para un fluido viscoso (cf. [11]):

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \tau, \quad (1.92)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.93)$$

donde,

$$\tau = -p Id + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t - \frac{2}{3} \{ \nabla \cdot \mathbf{u} \} Id \right).$$

Si, además, imponemos que el fluido sea incompresible, i.e.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.94)$$

y que μ es una función dependiente de la densidad, $\mu = \mu(\rho)$, llamando $\nabla_s \mathbf{u}$ al tensor $\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t$ (gradiente simetrizado del campo de velocidades), obtenemos que (1.92) se convierte en

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (1.95)$$

El sistema resultante (1.93–1.95) será complementado con las habituales condiciones de contorno (homogéneas para el campo de velocidades) e iniciales:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_\infty, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (\rho \mathbf{u})|_{t=0} = \rho_0 \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.96)$$

Llegamos así a (1.93–1.96), que constituye la formulación conservativa del problema incompresible de Navier-Stokes con densidad variable y viscosidad variable. La correspondiente formulación no conservativa está configurada por

$$\begin{aligned} \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= 0, \\ \rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla p &= \rho \mathbf{f}, \end{aligned}$$

junto con (1.94) y (1.96).

Impondremos que se verifican las siguientes condiciones físicamente razonables:

$$\rho_0 \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \mu : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+.$$

La definición de solución débil del sistema (1.93-1.96) será naturalmente similar a la que se introdujo en el caso μ constante (cf. Definición 1.11), sin más que cambiar en (1.37)

$$\int \int_{Q_T} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi \, dx \, dt \quad \text{por} \quad \int \int_{Q_T} \mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u} : \nabla \varphi \, dx \, dt. \quad (1.97)$$

1.3.2 Existencia de Solución Débil

Vamos a obtener resultados similares a los de §1.2.2 siendo μ una función continua y estrictamente positiva. Lo englobamos en el siguiente:

TEOREMA 1.15 *En las hipótesis del Teorema 1.12, si Ω es acotado y, además,*

$$\mu \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), \quad \mu(s) \geq \beta > 0 \quad \forall s \geq 0, \quad (1.98)$$

entonces existe al menos una solución débil (ρ, \mathbf{u}) en Q_∞ del problema de Navier-Stokes con densidad y viscosidad variables (1.93-1.96). También, (ρ, \mathbf{u}) verifica (1.40-1.44) y existe $p \in \mathcal{D}'(Q_\infty)$ tal que se tiene (1.45) y la terna (ρ, \mathbf{u}, p) verifica (1.93-1.96) en el sentido del Teorema 1.12. Además, para cada $p \in [1, +\infty)$, se tiene que

$$\rho \in C_b([0, +\infty); L^p(\Omega)). \quad (1.99)$$

Por último, los Corolarios 1.13 y 1.14 continúan siendo ciertos. ■

Demostración:

El procedimiento es similar al caso en que es μ constante. Ahora bien, la introducción del término que se indica en (1.97), hace necesario varios cambios en los procesos de estimaciones "a priori" y de paso al límite. La hipótesis de acotación inferior de μ (1.98) se aplicará en las estimaciones, mientras que la hipótesis de Ω acotado es impuesta para poder aplicar el Corolario 1.9; (1.23) lleva a la convergencia de ρ^m a ρ cpd., donde ρ^m (junto con \mathbf{u}^m) denota la m -ésima solución aproximada. Con esta convergencia y la continuidad de μ , deduciremos la convergencia del nuevo término dado en (1.97).

ESTIMACIONES "A PRIORI" DE LAS SOLUCIONES APROXIMADAS

Se tiene que

$$\rho^m \leq M \quad \text{en } \Omega, \quad (1.100)$$

$$|\rho^m(t)|_p = |\rho_0^m(t)|_p \quad \forall t \geq 0. \quad (1.101)$$

De (1.98) y (1.100), tendremos

$$0 < \beta \leq \mu(\rho^m) \leq M' \quad \text{en } Q_\infty. \quad (1.102)$$

Por otra parte, ahora llegamos a la siguiente igualdad de energía:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \int_\Omega \mu(\rho^m) \nabla_s \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{u}^m = \int_\Omega \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{u}^m.$$

Analizamos el segundo sumando de la izquierda:

$$\nabla_s \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{u}^m = |\nabla \mathbf{u}^m|^2 + u_{x_j}^{m_i} u_{x_i}^{m_j} = 2(u_{x_i}^{m_i})^2 + \sum_{i < j} (u_{x_j}^{m_i} + u_{x_i}^{m_j})^2 \geq 0$$

(se utiliza el criterio de suma de índices repetidos); por tanto, teniendo en cuenta (1.102), resulta que

$$\int_\Omega \mu(\rho^m) \nabla_s \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{u}^m \geq \beta \left(|\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 + \int_\Omega u_{x_j}^{m_i} u_{x_i}^{m_j} \right).$$

Integrando por partes, como $\nabla \cdot \mathbf{u}^m = 0$ y $\mathbf{u}^m|_{\Sigma_\infty} = 0$, se anula el segundo sumando de la derecha.

En consecuencia, reagrupando los cálculos anteriores, llegaremos a lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \beta |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 \leq \int_\Omega \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{u}^m.$$

A partir de aquí, basta razonar de forma similar a como se hizo en §1.2.3 para completar el procedimiento de estimaciones "a priori".

PASO AL LIMITE

Teniendo en cuenta lo que se dice en §1.2.4, basta demostrar la convergencia del nuevo término que aparecerá en las ecuaciones aproximadas. En concreto, fijado $\mathbf{v} \in V^{m'}$, hay que conseguir que

$$\int_\Omega \mu(\rho^m) \nabla_s \mathbf{u}^m : \nabla \mathbf{v} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \int_\Omega \mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T). \quad (1.103)$$

Como $\mu(\rho^m) \nabla_s \mathbf{u}^m$ está acotada en $L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^9)$, podemos extraer una s.s. (que llamamos igual) que converge débilmente en este espacio:

$$\mu(\rho^m) \nabla_s \mathbf{u}^m \xrightarrow{d} \chi \quad \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^9). \quad (1.104)$$

Por tanto, (1.103) queda demostrado si comprobamos que $\chi = \mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u}$. En principio, sólo tenemos (cf. §1.2.4) que

$$\nabla_s \mathbf{u}^m \xrightarrow{d} \nabla_s \mathbf{u} \quad \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^9), \quad (1.105)$$

$$\rho^m \xrightarrow{*} \rho \quad \text{en } L^\infty(0, +\infty; L^p(\Omega)) \quad \forall p \in [1, +\infty) \quad (1.106)$$

(esto último es consecuencia de (1.101) y las propiedades de ρ_0^m). Ahora bien, con el mismo argumento que cuando μ es constante, tenemos que (ρ, \mathbf{u}) es solución débil del problema de transporte

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{en } Q_\infty, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega.$$

Por tanto, podemos aplicar el Corolario 1.9 para deducir que

$$\rho \in C_b([0, +\infty); L^p(\Omega)) \quad \text{y} \quad |\rho(t)|_p = |\rho_0|_p \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

para cada $p < +\infty$. Por otra parte, como $\rho_0^m \xrightarrow{f} \rho_0$ en L^p para $p < +\infty$, a partir de (1.101) tendremos que

$$|\rho^m(t)|_p \rightarrow |\rho_0|_p (= |\rho(t)|_p) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Esto último, junto a (1.106), implica que, por ejemplo,

$$\rho^m \xrightarrow{f} \rho \quad \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega))$$

(en espacios uniformemente convexos como es $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ para cada $T < +\infty$, la convergencia débil y en norma implican la convergencia fuerte, cf. [10]), de donde, en particular

$$\rho^m(t, \mathbf{x}) \rightarrow \rho(t, \mathbf{x}) \quad \text{cpd. } (t, \mathbf{x}) \in Q_\infty.$$

En consecuencia, gracias a la continuidad de μ , si aplicamos el Teorema de la Convergencia Dominada, tendremos que

$$\mu(\rho^m) \xrightarrow{f} \mu(\rho) \quad \text{en } L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)). \quad (1.107)$$

Por último, (1.105) y (1.107), junto con (1.104), nos conducen a la igualdad

$$\chi = \mu(\rho) \nabla_s \mathbf{u}.$$

■

1.4 El Caso de Condiciones de Contorno No Homogéneas

Aquí, demostraremos un resultado de existencia de solución débil, global en tiempo con Ω acotado y de frontera suficientemente regular cuando, sobre las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable, imponemos para el campo de velocidades condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas. En primera instancia, supondremos que el dato en el contorno es independiente del tiempo para, posteriormente, considerar el caso general.

1.4.1 Planteamiento del Problema

Consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable (1.26–1.28) en el cilindro $Q_T = (0, T) \times \Omega$, complementadas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet generales

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad (1.108)$$

y las condiciones iniciales habituales (1.30–1.31). Aquí, por simplicidad, $T < +\infty$ (los argumentos que siguen pueden adaptarse sin excesivos problemas al caso en que la solución se busca en Q_∞ ; basta razonar como en la Sección 1.2). Ahora bien, una hipótesis esencial en este caso es que Ω sea un abierto acotado de frontera regular; por ejemplo $\partial\Omega \in W^{2,\infty}$ en el sentido de [42]. Ello se debe a que deberemos realizar un levantamiento regular con divergencia nula del dato \mathbf{g} .

Las condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas (1.108) resultan interesantes en diversas situaciones físicas, por ejemplo aquéllas donde se han introducido fronteras artificiales. Esto ocurre cuando se estudia el comportamiento de fluidos no homogéneos alrededor de un obstáculo, en un canal, etc...

Como el problema es no estacionario, el dato de contorno, la función \mathbf{g} , depende en general de la variable t . Sin embargo, por una parte debido a que en muchas situaciones físicas se puede considerar que este dato es independiente del tiempo y, por otra, por simplicidad en la exposición, supondremos en primer lugar que \mathbf{g} no depende de t ; el caso general (i.e. $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$) será considerado posteriormente, en la Sección 1.4.5.

En el caso particular en que la densidad ρ es constante, o sea, para el problema incompresible de Navier-Stokes habitual, condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas han sido ya consideradas, al menos en el caso estacionario (cf. [35,38,61, etc...]) usando razonamientos similares, que parecen tener una no muy difícil extensión al caso evolutivo. El argumento que conduce a la existencia de solución, está basado en la elección de un adecuado levantamiento \mathbf{a} , con divergencia nula, del dato frontera.

Esto hace que se pueda “controlar” el nuevo término no lineal que aparece

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} u^i a_{x_i}^j u^j,$$

gracias a una importante propiedad de simetría de éste:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{u}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{a}).$$

En el caso de las ecuaciones con densidad variable, el correspondiente término no lineal es

$$b(\rho \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho u^i a_{x_i}^j u^j$$

y no está en las condiciones anteriores. En consecuencia, el tratamiento de este término deberá hacerse de forma diferente.

También en el marco de flujos con densidad variable pero compresibles, los problemas con condiciones de contorno no homogéneas, junto con la condición adicional físicamente razonable

$$\rho|_{\Sigma_T^-} = \rho^- \quad (\text{donde } \Sigma_T^- = \Sigma_T \cap \{(t, \mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\})$$

han sido estudiados en el caso barotrópico ($p = p(\rho)$) por Fiszon y Zajaczkowski y Lukaszewicz en [19] y [40] resp. y en el caso general no barotrópico por Valli y Zajaczkowski en [64]. Se obtienen algunos resultados imponiendo condiciones adicionales sobre \mathbf{g} , como por ejemplo que Σ_T^- y Σ_T^+ sean independientes de t , que Σ_T^- sea una superficie cerrada, etc... En los resultados presentados en esta memoria no se impondrán hipótesis de este tipo.

La exposición de esta Sección está organizada de la siguiente manera. En primer lugar, detallaremos las posibles hipótesis sobre el dominio Ω y el dato frontera \mathbf{g} (de momento, independiente del tiempo) para poder obtener un levantamiento con divergencia nula suficientemente regular. Seguidamente, mediante un usual cambio de variable, pasaremos el problema con condiciones de contorno no homogéneas a un problema equivalente con dato frontera homogéneo. Esto permitirá enunciar el resultado principal (existencia de solución débil). A continuación, desarrollaremos la demostración de dicho resultado para finalizar resolviendo el problema cuando \mathbf{g} depende de t .

1.4.2 Levantamiento del Dato en el Contorno (Independiente del Tiempo)

Sobre el dominio Ω que ocupa el fluido, supondremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ es un abierto conexo y acotado, } \partial\Omega \in C^2; \\ \text{ó bien, simplemente conexo con } \partial\Omega \equiv \Gamma, \\ \text{ó bien, múltiplemente conexo, con } \partial\Omega \equiv \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_p, \end{aligned} \quad (1.109)$$

donde Γ_0 es la frontera exterior y las Γ_i , $1 \leq i \leq p$, son las distintas fronteras interiores.

En cuanto al dato frontera \mathbf{g} , consideraremos en un principio que se trata de una función $\mathbf{g} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. En §1.4.5, analizaremos el caso general en que \mathbf{g} puede depender de t .

Sobre \mathbf{g} imponemos las siguientes hipótesis de regularidad y compatibilidad:

$$\mathbf{g} \in H^{3/2}(\partial\Omega), \quad (1.110)$$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_i} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 & \text{para } 0 \leq i \leq p, \text{ si } \Omega \text{ es múltiplemente conexo,} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, & \text{si } \Omega \text{ es simplemente conexo.} \end{cases} \quad (1.111)$$

Dado \mathbf{g} en estas condiciones, consideramos el levantamiento \mathbf{a} de \mathbf{g} dado por el único campo de velocidades solución (junto con q) del problema de Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{a} + \nabla q = 0, & \nabla \cdot \mathbf{a} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{a} = \mathbf{g} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.112)$$

Gracias a (1.109–1.111), los resultados sobre soluciones fuertes de (1.112) (cf. [35, p. 78]) implican:

$$\mathbf{a} \in H^2(\Omega)^3, \quad \nabla q \in L^2(\Omega) \quad (1.113)$$

y

$$\|\mathbf{a}\|_{H^2} + \|\nabla q\|_{L^2} \leq C \|\mathbf{g}\|_{H^{3/2}(\Gamma)}. \quad (1.114)$$

Teniendo en cuenta la equivalencia entre funciones con divergencia nula y en forma rotacional, [21, Corolario 3.3, p. 47], como, en particular, $\mathbf{a} \in H^1(\Omega)^3$ y $\partial\Omega \in C^{1,1}$, se tiene que existe una función potencial de \mathbf{a} con divergencia nula. Más precisamente,

$$\exists \mathbf{b} \in H^2(\Omega)^3 \text{ tal que } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b} \text{ y } \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.115)$$

Nota: La hipótesis $\partial\Omega \in C^2$ se puede debilitar y sustituir por $\partial\Omega \in W^{2,\infty}$, teniendo en cuenta que para la regularidad H^2 de \mathbf{a} es suficiente con que sea $\partial\Omega \in W^{2,\infty}$ (cf. [6]). Por otra parte, (1.115) se puede obtener con otro orden de regularidad mayor ($\mathbf{b} \in H^3$), pero a condición de tener $\partial\Omega \in C^{2,1}$. En realidad, para todo lo que sigue, será suficiente con que $\mathbf{b} \in H^2$, de donde sólo hay que imponer $\partial\Omega \in C^{1,1} \equiv W^{2,\infty}$. ■

1.4.3 El Resultado Principal

Gracias a lo que precede, sabemos que el problema a resolver, en su forma no conservativa, es el siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \text{ en } Q_T, \quad (1.116)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } Q_T, \quad (1.117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } Q_T, \quad (1.118)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \text{ sobre } \Sigma_T, \quad (1.119)$$

$$\rho |_{t=0} = \rho_0 \text{ en } \Omega, \quad (1.120)$$

$$(\rho \mathbf{u}) |_{t=0} = \rho_0 \mathbf{u}_0 \text{ en } \Omega. \quad (1.121)$$

Haciendo el cambio de variables $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{a}$ y llamando luego \mathbf{u} a \mathbf{v} , (1.116–1.121) se convierte en el siguiente problema, que ya posee condiciones de contorno homogéneas:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{a}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{a} \text{ en } Q_T, \quad (1.122)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{a}) \cdot \nabla \rho = 0 \text{ en } Q_T, \quad (1.123)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \quad (1.124)$$

$$(\rho \mathbf{u}) |_{t=0} = \rho_0 \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ en } \Omega, \quad (1.125)$$

junto con (1.118) y (1.120) que no varían. Aquí, $\mathbf{F} = \mathbf{f} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}$ y $\bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{a}$.

Imponiendo la hipótesis de compatibilidad:

$$\bar{\mathbf{u}}_0 \in H, \text{ i.e. } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \text{ y } (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) |_{\Sigma_T} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) |_{\Sigma_T}$$

(recuérdese la caracterización de H dada por (1.11) cuando $\partial\Omega$ es regular), vamos a obtener una solución débil global en tiempo (en $(0, T)$) del problema anterior, pero en su forma conservativa siguiente:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{a} \text{ en } Q_T, \quad (1.126)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{u} + \mathbf{a})) = 0 \text{ en } Q_T, \quad (1.127)$$

junto con (1.118), (1.124), (1.120) y (1.125).

Enunciamos el resultado principal de esta sección:

TEOREMA 1.16 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ como en (1.109), \mathbf{a} y \mathbf{b} como en (1.113–1.115) y $0 < T < +\infty$. Si $\bar{\mathbf{u}}_0 \in H$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω y $\mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, entonces existe al menos una solución débil (ρ, \mathbf{u}) del problema anterior. Además,

$$\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in L^2(0, T; V),$$

$$\rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap N^{1/4, 2}(0, T; W^{-1, 3}(\Omega)^3),$$

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho(x, t) \leq \sup_{\Omega} \rho_0 \quad \text{cpd. en } Q_T$$

y existe una distribución $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que se tiene:

$$(1.126) \text{ en } W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega))^3,$$

$$(1.127) \text{ en } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ y en } L^2(0, T; W^{-1, 6}(\Omega)),$$

$$(1.118) \text{ y } (1.124) \text{ en el sentido del espacio } V,$$

$$(1.120) \text{ en } W^{-1, \infty}(\Omega) \text{ y}$$

$$(1.125) \text{ en el siguiente sentido débil:}$$

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Por último, $|\rho^{1/2} \mathbf{u}(t)|_2 \in C[0, T]$ y $|\rho^{1/2} \mathbf{u}(0)|_2 = |\rho_0^{1/2} \bar{\mathbf{u}}_0|_2$. ■

1.4.4 Demostración del Resultado Principal

El argumento reposa (de nuevo) sobre una discretización de semi-Galerkin con un paso al límite por compacidad. En comparación con el caso de condiciones de contorno homogéneas (particularizado para Ω acotado y en $(0, T)$ con T finito), la demostración contiene algunas diferencias y/ó complementos:

- La elección de una base especial de V (y H) de funciones regulares y con soporte compacto (similar a como se hace en el caso general en que Ω es no acotado).
- Un proceso de truncamiento y regularización de \mathbf{a} , en los términos necesarios para poder aplicar el método de las características a la ecuación de continuidad aproximada.
- Las acotaciones y el paso al límite en los nuevos términos que aparecen en las ecuaciones.

A) Regularización de \mathbf{F} : Como $\mathbf{F} = \mathbf{f} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, podemos introducir una sucesión de funciones regulares (\mathbf{F}^m) , con

$$\mathbf{F}^m \in C([0, T]; L^2(\Omega)^3), \quad \mathbf{F}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{F} \text{ en } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (1.128)$$

Tomando una s.s. si fuera preciso, se obtiene:

$$|\mathbf{F}^m(t)|_2 \leq K(t) \quad \text{cpd. } t \in (0, T), \quad \text{para alguna } K \in L^1(0, T). \quad (1.129)$$

B) Truncamiento y regularización de \mathbf{a} : Consideramos una s.s. (\mathbf{a}^m) de funciones regulares con divergencia nula que se anulan sobre $\partial\Omega$ y "aproximan" a \mathbf{a} . Para ello, sea \mathbf{b} como en (1.115) y prolongado por cero a todo \mathbb{R}^3 y pongamos

$$\mathbf{a}^m = \nabla \times \mathbf{b}^m \quad \text{con} \quad \mathbf{b}^m = \zeta_{1/2m} \star (\chi_{\Omega_{1/m}} \mathbf{b}), \quad (1.130)$$

donde (ζ_h) es (de nuevo) una sucesión regularizante usual y $\chi_{\Omega_{1/m}}$ es la función característica de

$$\Omega_{1/m} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > 1/m\}.$$

Si consideramos ahora la función \mathbf{a}^m restringida a Ω , obtenemos

$$\mathbf{a}^m \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \nabla \cdot \mathbf{a}^m = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^m = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (1.131)$$

Además, $\mathbf{a}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{a}$ en $H^1_{\text{loc}}(\Omega)^3$. Más concretamente, fijado $n \in \mathbb{N}$, para cada $m \geq n$ se tiene que $\mathbf{b}^m = \zeta_{1/2m} \star \mathbf{b}$ en $\Omega_{2/n}$ (para n suficientemente grande). Por tanto, dado que $\mathbf{b} \in H^2(\Omega)^3$, gracias a las propiedades del producto de convolución, obtenemos:

$$\mathbf{b}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{b} \quad \text{en } H^2(\Omega_{2/n})^3 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{b}^m\|_{H^2(\Omega_{2/n})^3} \leq \|\mathbf{b}\|_{H^2(\Omega)^3} \quad \forall m \geq n.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{a}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{a} \quad \text{en } H^1(\Omega_{2/n})^3 \quad \forall n, \quad (1.132)$$

y, para cada $m \geq n$,

$$\|\mathbf{a}^m\|_{H^1(\Omega_{2/n})^3} \leq C \|\mathbf{b}^m\|_{H^2(\Omega_{2/n})^3} \leq C \|\mathbf{b}\|_{H^2(\Omega)^3}. \quad (1.133)$$

En particular, $\|\mathbf{a}^m\|_{H^1(\Omega_{2/m})^3}$ está acotada, indep. de m .

C) Elección de una "base especial" de V : Consideramos una sucesión de funciones (\mathbf{v}^m) que sea una base de V y cumpla las mismas propiedades que se exigen en §1.2.3. Como las \mathbf{v}^m tienen soporte compacto, podemos considerar una s.s. de índices $m' = m'(m) \in \mathbb{N}$, crecientes respecto de m , con $m'(m) \geq m$ y $\text{Sop}(\mathbf{v}^m) \subset \Omega_{2/m'(m)}$. Por tanto, poniendo

$$V^m = \langle \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m \rangle \quad \text{para cada } m, \quad (1.134)$$

tendremos de nuevo

$$\text{Sop}(V^m) \subset \Omega_{2/m'(m)}, \quad (1.135)$$

$$" V^m \xrightarrow{\mathbf{f}} V ". \quad (1.136)$$

Por cuestiones de comodidad en la notación, pondremos sólo m' para referirnos a $m'(m)$, sin hacer constar explícitamente la dependencia respecto de m .

D) Definición de solución aproximada: Para cada m , diremos que el par (ρ^m, \mathbf{u}^m) es una m -ésima solución aproximada si $\rho^m \in C^1(\bar{Q})$, $\mathbf{u}^m \in C^1([0, T]; V^m)$

y

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + (\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'}) \cdot \nabla \rho^m = 0 \text{ en } Q_T, \quad \rho^m|_{t=0} = \rho_0^m \text{ en } \Omega, \quad (1.137)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho^m \left[\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t} + ((\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'}) \cdot \nabla) \mathbf{u}^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{a} - \rho^m \mathbf{F}^m \right] \cdot \mathbf{v} \\ + \mu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^m + \nabla \mathbf{a}) : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad \mathbf{u}^m|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (1.138)$$

Aquí,

$$\rho_0^m \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \begin{cases} \rho_0^m \xrightarrow{f} \rho_0 \text{ en } \begin{cases} L^\infty(\Omega) - \text{débil}^*, \\ L^q(\Omega) - \text{fuerte}, \quad \forall q < +\infty, \end{cases} \\ \frac{1}{m} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_0^m \leq \frac{1}{m} + \sup_{\Omega} \rho_0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (1.139)$$

y

$$\mathbf{u}_0^m \in V^m, \quad \mathbf{u}_0^m \xrightarrow{f} \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ en } H. \quad (1.140)$$

Debido a la construcción de \mathbf{a}^m y V^m , tenemos que:

- (1.137) es una ecuación de convección (regular) para ρ^m , con campo de velocidades $(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^m)$ de divergencia nula y homogéneo sobre Σ_T ; (1.137) puede ser resuelta por el método de las características habitual.
- Las integrales que aparecen en (1.138) se pueden cambiar por integrales sobre $\Omega_{2/m'(m)}$; en este abierto tenemos que $\|\mathbf{a}^{m'}\|_{H^1(\Omega_{2/m'})} \leq C$ con C independiente de m' (y m).

El problema equivalente a (1.137–1.138), en forma conservativa, es:

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m (\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})) = 0 \text{ en } Q_T, \quad \rho^m|_{t=0} = \rho_0^m \text{ en } \Omega, \quad (1.141)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m (\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'}) \mathbf{u}^m) + \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{a} - \rho^m \mathbf{F}^m \right] \cdot \mathbf{v} \\ + \mu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^m + \nabla \mathbf{a}) : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad \mathbf{u}^m|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (1.142)$$

E) Existencia de soluciones aproximadas: El proceso es similar al llevado a cabo en el caso de condiciones de contorno homogéneas, Apéndice B. Es decir,

- Definición de soluciones aproximadas linealizadas (a partir de (1.137–1.138)).

- Estimaciones “a priori” de dichas soluciones aproximadas linealizadas.
- Prueba de la existencia de soluciones aproximadas, como resultado de aplicar el Teorema del Punto Fijo de Schauder.

El punto esencialmente distinto concierne a las estimaciones “a priori”, debido a los nuevos términos que aparecen en (1.137–1.138).

F) Estimaciones a priori de las soluciones aproximadas: Se trata de conseguir estimaciones independientes de m , y por tanto también de m' . Denotaremos por $C, C_1, C_2 \dots$, distintas constantes independientes de m .

Gracias a la resolución de la ecuación de continuidad por el método de las características, ρ^m es constante a lo largo de las trayectorias de las partículas (trayectorias que no entran ni salen de Ω). De donde, debido a la elección hecha de ρ_0^m en (1.139), tendremos:

$$\frac{1}{m} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho^m \leq \frac{1}{m} + \sup_{\Omega} \rho_0 \leq 1 + \sup_{\Omega} \rho_0 \equiv M. \quad (1.143)$$

Por tanto,

$$\rho^m \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)). \quad (1.144)$$

Dado $t \in [0, T]$, a partir de (1.138) y (1.141) obtenemos fácilmente:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^m \frac{|\mathbf{u}^m|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho^m (\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'}) \frac{|\mathbf{u}^m|^2}{2} \right) + \mu |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \right] \\ &= \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{u}^m - \mu \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{u}^m - (\rho^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^m]. \end{aligned}$$

Como $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\dots) = 0$, las siguientes estimaciones en los términos del segundo miembro

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{F}^m \cdot \mathbf{u}^m \leq M^{1/2} K(t) \left(\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \right)^{1/2}, \\ & -\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{u}^m \leq \mu |\nabla \mathbf{a}|_2^2 + \frac{\mu}{4} |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2, \\ & - \int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^m \leq \frac{C}{\mu} |\nabla \mathbf{a}|_3^2 \left(\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \right) + \frac{\mu}{4} |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2, \end{aligned}$$

conducen a la “desigualdad de energía”

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \\ & \leq M^{1/2} K(t) \left(\int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 \right)^{1/2} + C_1 \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + C_2 \\ & \leq \left(\frac{1}{2} K(t) + C_1 \right) \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 + \frac{M}{2} K(t) + C_2, \end{aligned} \quad (1.145)$$

con $C_i = C_i(\mu, \mathbf{a})$ para $i = 1, 2$ y K es la función positiva de $L^1(0, T)$ dada en (1.129).

A partir de aquí, con razonamientos similares a los hechos en §1.2.3, tendremos:

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \text{ y } \rho^m \mathbf{u}^m \text{ están acotadas en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (1.146)$$

$$\nabla \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^9) \text{ y } \mathbf{u}^m \text{ en } L^2(0, T; V), \quad (1.147)$$

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \text{ y } \rho^m \mathbf{u}^m \text{ están acotadas en } L^2(0, T; L^6(\Omega)^3), \quad (1.148)$$

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^9). \quad (1.149)$$

Como pretendemos pasar al límite en las ecuaciones conservativas (1.141–1.142), hará falta estimar adecuadamente los términos con $\mathbf{a}^{m'}$ que aparecen en dicho sistema, como son $\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})$ y $\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})\mathbf{u}^m$. En particular, teniendo en cuenta (1.133), resulta que

$$\mathbf{a}^{m'(m)} \text{ está acotada en } H_{\text{loc}}^1(\Omega)^3, \quad (1.150)$$

luego

$$\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'}) \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L_{\text{loc}}^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; L_{\text{loc}}^6(\Omega)^3), \quad (1.151)$$

$$\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^{4/3}(0, T; L_{\text{loc}}^2(\Omega)^9). \quad (1.152)$$

G) Estimaciones de las derivadas: Gracias a (1.141) y (1.151), se tiene

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_{\text{loc}}^{-1,6}(\Omega)). \quad (1.153)$$

Por otra parte y como paso previo a las estimaciones de tipo derivada fraccionaria en tiempo de $\rho^m \mathbf{u}^m$, veamos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \right| \leq (G + \psi_m) |\nabla \mathbf{v}|_2 \cdot \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad (1.154)$$

donde $G \in L^1(0, T)$ es una función dada y ψ_m es una sucesión acotada en $L^{4/3}(0, T)$. En efecto, debido a (1.142) (donde podemos considerar que las integrales son sobre $\Omega_{2/m'}$), se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \right| \\ & \leq (|\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})\mathbf{u}^m|_{2; \Omega_{2/m'}} + \mu |\nabla(\mathbf{u}^m + \mathbf{a})|_2 + CM |\mathbf{F}^m|_2) |\nabla \mathbf{v}|_2 \\ & + \left| \int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \right|, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (1.154); para ello basta utilizar, en el primer término de la derecha (1.152), (1.147) y (1.129) resp. y, para el segundo, la desigualdad de Hölder con exponentes 2,3,6 junto a la inyección continua $H_0^1 \hookrightarrow L^6$.

Para la obtención de estimaciones de tipo derivada fraccionaria en tiempo de $\rho^m \mathbf{u}^m$, se razona como en el caso con condiciones de contorno homogéneas, pero ahora utilizando en algunas ocasiones las estimaciones locales obtenidas.

Etapa 1.- Teniendo en cuenta (1.154), de forma similar al caso en que las condiciones de contorno son homogéneas, se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que, cuando $0 < h < T$,

$$I_1 \equiv \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \right) dt \leq C h^{1/2}.$$

Etapa 2.- Veamos que existe $C > 0$ tal que, si $0 < h < T$, entonces

$$I_2 \equiv \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \right) dt \leq C h^{1/2}.$$

Para $w \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ con $\text{Sop}(w) \subset \Omega_{2/m'}$, debido a la ecuación de continuidad se tiene:

$$\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] w \, dx = \int_t^{t+h} \left(\int_{\Omega_{2/m'}} \rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})(s) \cdot \nabla w \right) ds.$$

A partir de aquí, gracias a (1.151) y para $w = \mathbf{u}^m(t) \cdot (\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t))$, se obtiene la estimación deseada, razonando como en el caso de condiciones de contorno homogéneas.

Etapa 3.- Haciendo $I_1 - I_2$, obtenemos que existe una Cte. $C > 0$ tal que, si $0 < h < T$, entonces

$$|\tau_h \rho^m(\tau_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m)|_{L^2(0, T-h; L^2(\Omega)^3)} \leq C h^{1/4}. \quad (1.155)$$

Etapa 4.- Razonando como en el caso de condiciones de contorno homogéneas, teniendo ahora en cuenta la ecuación (1.141) y la estimación (1.151), resulta que

$$\begin{aligned} & \|\tau_h \rho^m - \rho^m\|_{L^\infty(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega_{2/m'}))} \\ & \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_t^{t+h} |\rho^m(\mathbf{u}^m + \mathbf{a}^{m'})(s)|_{6; \Omega_{2/m'}} ds \right\} \leq C h^{1/2}. \end{aligned}$$

De donde, como $\mathbf{u}^m(t) \in V^m$, gracias a la continuidad de la aplicación producto de $H_0^1 \times W^{-1,6}$ en $W^{-1,3}$, se obtiene la desigualdad

$$\|(\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_{2/m'}))} \leq C h^{1/2}$$

que, junto con (1.155), implica que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \text{ está acotada en } N^{1/4,2}(0, T; W_{\text{loc}}^{-1,3}(\Omega)^3). \quad (1.156)$$

H) Paso al límite por compacidad y final de la demostración: A partir de aquí, se puede acabar la demostración de forma similar a como se hizo en el caso de condiciones de contorno homogéneas.

■
Nota: Reconsiderando algunas estimaciones de la demostración anterior, el Teorema continúa siendo válido cambiando la hipótesis $\mathbf{a} \in H^2(\Omega)^3$ por una más débil:

$$\mathbf{a} \in W^{1,3}(\Omega)^3.$$

1.4.5 Dato en el Contorno Dependiente del Tiempo.

En este apartado, vamos a extender el resultado anterior (Teorema 1.16) al caso general en el que el dato de contorno también depende del tiempo: $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ para $(t, \mathbf{x}) \in \Sigma_T$.

TEOREMA 1.17 *Supongamos $\Omega, \rho_0, \bar{\mathbf{u}}_0$ y \mathbf{f} en las mismas condiciones del Teorema 1.16. Supongamos, además, que \mathbf{g} admite un levantamiento \mathbf{a} y una función potencial \mathbf{b} con las propiedades*

$$\mathbf{a} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \mathbf{a}|_{\Sigma_T} = \mathbf{g}, \quad (1.157)$$

$$\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \quad \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b} \quad \text{en } Q_T. \quad (1.158)$$

Entonces existe una solución (débil) (ρ, \mathbf{u}, p) del problema considerado en el Teorema 1.16, para

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{a}(0)$$

con idénticas propiedades.

■
Nota: Al igual que el Teorema 1.16, el Teorema 1.17 también es cierto para

$$\mathbf{a} \in L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$$

en vez de $\mathbf{a} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$.

■
Resumen de la demostración del Teorema 1.17: Es paralela a la demostración del Teorema 1.16, con la diferencia de que \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{a}^m y \mathbf{b}^m dependen también de t , lo que provoca algunos cambios.

El problema a resolver es el considerado en el apartado anterior, pero ahora con

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{a}(0).$$

Gracias a (1.157), $\mathbf{F} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ y $\mathbf{a}(0)$ tiene sentido en L^2 . Considerando \mathbf{b} de nuevo prolongada por cero fuera de Q_T y $(\zeta_h)_{h>0}$ una sucesión regularizante usual, ahora en las variables (t, \mathbf{x}) , si definimos \mathbf{a}^m como en (1.130), tendremos:

$$\mathbf{a}^m \in C^\infty(\bar{Q}), \quad \nabla \cdot \mathbf{a}^m = 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in Q_T \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^m|_{\Sigma_T} = 0. \quad (1.159)$$

Además, teniendo en cuenta (1.158),

$$\mathbf{a}^m \xrightarrow{f} \mathbf{a} \quad \text{en} \quad L^2(0, T; H^1_{loc}(\Omega)^3), \quad (1.160)$$

$$\|\mathbf{a}^m\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_{2/m})^3)} \quad \text{está acotado (indep. de } m). \quad (1.161)$$

Para la "base especial" de V y la definición de $m'(m)$, razonamos como en §1.4.4. Definiremos las soluciones aproximadas como en (1.137–1.138) ó (1.141–1.142), pero cambiando los términos donde interviene \mathbf{a} por una sucesión de funciones regulares (\mathbf{a}_m) tal que

$$\mathbf{a}_m \in C([0, T]; H^2(\Omega)^3) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_m \xrightarrow{f} \mathbf{a} \quad \text{en} \quad L^2(0, T; H^2(\Omega)^3). \quad (1.162)$$

Además, tomando una s.s. si fuera preciso, se tiene

$$\|\mathbf{a}_m(t)\|_{H^2(\Omega)^3} \leq R(t) \quad \text{cpd.} \quad (1.163)$$

para una función $R \in L^2(0, T)$ dada. En consecuencia, los nuevos términos de (1.137–1.138) y (1.141–1.142),

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{a}_m : \nabla \mathbf{v}$$

son funciones continuas en $[0, T]$, para cada $\mathbf{v} \in V^m$. Por tanto, las soluciones aproximadas (ρ^m, \mathbf{u}^m) están bien definidas

$$C^1(\bar{Q}) \times C^1([0, T]; V^m).$$

Gracias a (1.161.b) y (1.163), el proceso de estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas se puede hacer. Finalmente, mediante un proceso de paso al límite, teniendo en cuenta (1.160) y (1.162), se obtiene una solución débil (ρ, \mathbf{u}, p) .

■

Nota: Caso de que sólo se tuviera $\mathbf{a} \in L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$, todo sería igual salvo en lo que se refiere (1.162–1.163), donde ahora tendríamos $\mathbf{a}_m \in C([0, T]; W^{1,3}(\Omega)^3)$,

$$\mathbf{a}_m \xrightarrow{f} \mathbf{a} \text{ en } L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3) \text{ y } \|\mathbf{a}_m(t)\|_{W^{1,3}} \leq R(t) \text{ cpd.,}$$

con $R \in L^2(0, T)$.

■

Para terminar con este apartado, presentamos la construcción de un levantamiento \mathbf{a} de \mathbf{g} , que está en las hipótesis (1.157–1.158) del Teorema 1.17.

PROPOSICIÓN 1.18 *Supongamos que Ω es como en (1.109). Si \mathbf{g} verifica*

$$\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma)^3), \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Gamma)^3) \quad (1.164)$$

y, además,

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_i} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p, \text{ si } \Omega \text{ es múltiplemente conexo,} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, \text{ si } \Omega \text{ es simplemente conexo.} \end{cases} \quad (1.165)$$

para t cpd. en $(0, T)$, entonces existen \mathbf{a} y \mathbf{b} que cumplen (1.157–1.158).

Demostración: Introduzcamos el operador

$$A : \mathbf{h} \in H^{1/2}(\Gamma)^3 \mapsto A\mathbf{h} = \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3,$$

definido de acuerdo con lo siguiente:

$$A\mathbf{h} = \mathbf{u} \iff \begin{cases} \mathbf{u} \in H_h^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3 : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{h}\}, \\ (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w})_{L^2} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V. \end{cases} \quad (1.166)$$

Introduzcamos también el operador

$$B : \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mapsto B\mathbf{v} = \left(-\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{n}} + q\mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)^3,$$

donde (\mathbf{z}, q) es la única solución fuerte del problema

$$\begin{cases} \mathbf{z} \in H^2(\Omega)^3 \cap V, \quad q \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \, dx = 0, \\ -\Delta \mathbf{z} + \nabla q = \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \mathbf{z}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (1.167)$$

Claramente, A es un operador lineal y continuo de $H^{1/2}(\Gamma)^3$ en $H^1(\Omega)^3$. También se tiene que B coincide con la restricción a $L^2(\Omega)^3$ del operador A^* (adjunto de A).

Gracias a los resultados sobre existencia y unicidad de solución débil y solución fuerte del problema de Stokes, se tiene que

$$A \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma)^3, H^1(\Omega)^3), \quad A|_{H^{3/2}(\Gamma)^3} \in \mathcal{L}(H^{3/2}(\Gamma)^3, H^2(\Omega)^3)$$

y

$$B \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^3, L^2(\Gamma)^3).$$

Además, a partir de (1.166) y (1.167) se deduce que

$$(Ah, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^3} = (\mathbf{h}, B\mathbf{v})_{L^2(\Gamma)^3} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \forall \mathbf{h} \in H^{1/2}(\Gamma)^3. \quad (1.168)$$

Sea $\mathbf{a}(t) = Ag(t)$ para t cpd. en $(0, T)$. Obviamente, $\mathbf{a} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$. Para ver que $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, basta comprobar que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \mathbf{v} \right)_{L^2(\Omega)^3} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, B\mathbf{v} \right)_{L^2(\Gamma)^3} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \quad (1.169)$$

por ejemplo en $\mathcal{D}'(0, T)$. Pero sabemos que existe $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \in \mathcal{D}'(0, T; H^2(\Omega)^3)$, definida en la forma

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(0, T)} = - \int_0^T \mathbf{a}(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^T Ag(t) \varphi'(t) dt \quad \text{en } H^2(\Omega)^3$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$. En particular, para cada $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$, gracias a (1.168) y a que $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Gamma)^3)$, tendremos

$$\begin{aligned} \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(0, T)}, \mathbf{v} \right)_{L^2(\Omega)^3} &= \left(A \left\{ - \int_0^T \mathbf{g}(t) \varphi'(t) dt \right\}, \mathbf{v} \right)_{L^2(\Omega)^3} \\ &= \left(- \int_0^T \mathbf{g}(t) \varphi'(t) dt, B\mathbf{v} \right)_{L^2(\Gamma)^3} = \left(\int_0^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}(t) \varphi(t) dt, B\mathbf{v} \right)_{L^2(\Gamma)^3}, \end{aligned}$$

de donde se llega a (1.169). Por tanto, \mathbf{a} verifica (1.157).

Para terminar, veamos la existencia de \mathbf{b} en $L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$ y tal que $\nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Como $\mathbf{a}|_{\Gamma} = \mathbf{g}$, (1.165) significa que para t cpd. en $(0, T)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq p, \text{ si } \Omega \text{ es múltiplemente conexo,} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= 0, \quad \text{si } \Omega \text{ es simplemente conexo.} \end{aligned}$$

Además, $\nabla \cdot \mathbf{a}(t) = 0$. Por tanto, estamos en condiciones de afirmar que, para t cpd. en $[0, T]$, existe $\mathbf{b}(t) \in H^2(\Omega)^3$ tal que $\mathbf{a}(t) = \nabla \times \mathbf{b}(t)$ y $\nabla \cdot \mathbf{b}(t) = 0$ (cf. [21, p. 47]). Supongamos que $\mathbf{b}(t)$ es construida (de forma única) con un argumento similar al realizado en

[21] (mediante transformada de Fourier, llevando a cabo previamente un levantamiento con divergencia nula a todo \mathbb{R}^3 para el que se usan ahora ciertos problemas de Stokes auxiliares), se consigue demostrar

$$\|\mathbf{b}(t)\|_{H^2} \leq C \|\mathbf{a}(t)\|_{H^1};$$

véase el Apéndice C para un esquema de la Demostración. A partir de aquí, es inmediato demostrar que esta función potencial \mathbf{b} construida verifica (1.158).

■

Capítulo 2

Nuevos Resultados sobre Soluciones Semi-fuertes y Fuertes

2.1 Solución Semi-Fuerte Global en Tiempo. Decrecimiento Exponencial

Partiendo de los resultados de existencia de solución débil global en tiempo particularizados al caso de un dominio Ω acotado de frontera regular y bajo hipótesis complementarias de regularidad sobre los datos, vamos a obtener una solución débil (global), que será también, en un entorno de $t = 0$, solución semi-fuerte. Para ello, se considera una base especial de V (formada por las autofunciones del problema de Stokes) y se mejoran las estimaciones "a priori".

Si los datos del problema son suficientemente pequeños (ó el coeficiente de viscosidad μ es suficientemente grande), dicha solución será también global en tiempo, i.e. estará definida (como solución semi-fuerte) en todo $(0, +\infty)$.

Finalmente, en ausencia de fuerzas exteriores, un comportamiento exponencialmente decreciente a cero será deducido para el gradiente del campo de velocidades (en norma L^2) cuando $t \rightarrow +\infty$.

2.1.1 El Resultado Principal

La existencia de solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes no homogéneas, con un campo de velocidades más regular que el considerado en el Capítulo 1, pero local en tiempo (definido en $[0, T_*)$ para algún T_*), está demostrada por J.U.Kim en [33]. Se llega a que

$$L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap \mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V).$$

Para ello, se imponen ciertas hipótesis de regularidad adicionales sobre los datos, aunque se mantiene la condición $\rho_0 \geq 0$ en Ω . Posteriormente, J.Simon en [55] mejora este resultado, obteniendo una solución débil (ρ, \mathbf{u}) definida en $(0, T)$ para $T : 0 < T < +\infty$ fijo, que localmente tiene una regularidad análoga a la anterior, pero además verifica el modelo completo (incluyendo la presión) y las condiciones iniciales en un sentido clásico; ρ y \mathbf{u} son continuas en $t = 0$, con valores en espacios adecuados. Por último, si $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en Ω , se encuentra que esta solución es semi-fuerte en $[0, T_*)$ (cf. la Definición 2.1). Por otra parte, M.Padula en [45] extiende los resultados de existencia de solución débil y localmente regular, al caso de dominios exteriores.

En todos los casos anteriores, el hecho de que sólo se obtengan soluciones regulares localmente se debe a la presencia de términos no lineales en las ecuaciones de momentos. Cuando uno quiere realizar mejores estimaciones, se encuentra con inecuaciones diferenciales (véase (2.20) más adelante), donde los términos que queremos estimar son de "menor orden" que los del segundo miembro. Esto hace que las estimaciones sólo

se consigan en $(0, T_*)$ para algún $T_* > 0$. T_* es aquí un “tiempo de explosión”, un parámetro dependiente de la magnitud de los datos del problema; “grosso modo”, T_* será más grande cuanto más pequeño sean los datos pero, desgraciadamente, T_* es finito.

Nuestro objetivo en esta Sección será extender algunos de los resultados anteriores. Encontraremos una solución semi-fuerte local en tiempo que es global (en $(0, +\infty)$) para datos pequeños. Veremos también que, cuando $\mathbf{f} = 0$, $|\nabla \mathbf{u}(t)|_2$ decrece exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

Veamos en primer lugar la definición de solución semi-fuerte.

DEFINICIÓN 2.1 Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^3 y $0 < T \leq +\infty$. Si $\mathbf{u}_0 \in V$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, diremos que una terna (ρ, \mathbf{u}, p) con

$$\rho \in L^\infty(Q_T), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T; V), \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, T; H), \quad (2.2)$$

$$\nabla p \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \quad (2.3)$$

es solución semi-fuerte del problema de Navier-Stokes con densidad variable en Q_T , si se verifica las edp.

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

cpd. en Q_T , la edp.

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.6)$$

en el sentido de las distribuciones sobre Q_T , la condición de contorno

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T \quad (2.7)$$

en el sentido del espacio V cpd. en $(0, T)$ y las condiciones iniciales

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.8)$$

en $W^{-1, \infty}(\Omega)$ y H , resp. Si $T = +\infty$, permitiremos que \mathbf{f} y (ρ, \mathbf{u}, p) tengan regularidad local en tiempo en $+\infty$, en el sentido ya indicado en la Definición 1.11 del Capítulo 1.

■

Notas:

(a) Teniendo en cuenta la siguiente desigualdad de interpolación (cf. [45, p. 585]):

$$|\nabla \mathbf{u}|_p \leq C |\nabla \mathbf{u}|_2^{1-\lambda} (|D^2 \mathbf{u}|_2 + \alpha |\nabla \mathbf{u}|_2)^\lambda \quad \forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap V(\Omega)$$

(con $2 \leq p \leq 6$, $\lambda = 3(p-2)/2p$ y $\alpha = 0$ si Ω es acotado ó $\alpha = 1$ si Ω es exterior), se puede probar, a partir de (2.1-2.2), que

$$\rho_t \in L^{4-\varepsilon}(0, T_*; W^{-1,\infty}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{"pequeño"}.$$

Obviamente, esto último y (2.1) implican:

$$\rho \in C([0, T]; W^{-1,\infty}(\Omega)).$$

Por otra parte, es claro a partir de (2.2), que $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$ y, además,

$\mathbf{u} : [0, T] \mapsto V$ es una función bien definida $\forall t \in [0, T]$ y débilmente continua

(cf. [61, Lema 1,4, p. 263]). Por tanto, las igualdades de (2.8) tienen sentido donde se ha dicho. Por último, si Ω es acotado, también se tiene que $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ (cf. [37]).

(b) Gracias a (2.1-2.3), la ecuación de movimiento (2.4) se verifica, además de cpd., en el sentido del espacio $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Cuando $\partial\Omega$ es Lipschitz-continua, podemos decir que las condiciones de contorno (2.7) se verifican en el sentido de la traza (véase en §1.1.3 la caracterización de V en este caso). Finalmente, si además Ω es acotado, podemos elegir $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ sin más que aplicar el apartado (ii) del Lema 1.6.

■

Enunciamos seguidamente el resultado principal de esta Sección:

TEOREMA 2.2 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega \in W^{2,\infty}$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en Ω , $\mathbf{u}_0 \in V$ y $\mathbf{f} \in L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$.

(a) Existe al menos una solución débil (ρ, \mathbf{u}, p) de (2.4-2.8), que también es solución semi-fuerte en Q_{T_*} , para algún $T_* = T_*(\rho_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{f}, \Omega) > 0$. En particular,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap C([0, T_*]; V), \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, T_*; H), \\ \rho_t &\in L^\infty(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)) \cap L^{4-\varepsilon}(0, T_*; W^{-1,\infty}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ p &\in L^2(0, T_*; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

(b) Si además $\mathbf{f} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$,

$$|\nabla \mathbf{u}_0|_2^4 < \frac{1}{C_1(\Omega)} \frac{\mu^4}{M^3} \quad \text{y} \quad |\mathbf{f}|_{\infty;2;Q_\infty}^2 < \frac{1}{C_2(\Omega)} \frac{\mu^4}{M^2}, \quad (2.9)$$

para determinadas constantes C_1, C_2 (que dependen de Ω y son crecientes respecto de $|\Omega|$) y $M = 1 + \sup \rho_0$, entonces la solución semi-fuerte precedente es global en $(0, +\infty)$. Más concretamente, se tiene

$$\mathbf{u} \in L^2_{loc}(0, +\infty; H^2(\Omega)^3) \cap C_b^0([0, +\infty); V), \quad \mathbf{u}_t \in L^2_{loc}(0, +\infty; H), \quad (2.10)$$

$$\rho_t \in L^\infty(0, +\infty; W^{-1,6}(\Omega)) \cap L_{loc}^{4-\varepsilon}(0, +\infty; W^{-1,\infty}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.11)$$

$$p \in L_{loc}^2(0, +\infty; H^1(\Omega)). \quad (2.12)$$

(c) Si además $\mathbf{f} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, entonces

$$\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; H^2(\Omega)^3) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, +\infty; H). \quad (2.13)$$

(d) Por último, cuando $\mathbf{f} = 0$, existe $C > 0$ tal que

$$|\nabla \mathbf{u}(t)|_2^2 \leq e^{-Ct} |\nabla \mathbf{u}_0|_2^2 \quad \forall t > 0. \quad (2.14)$$

■

Nota: Imponiendo tan sólo que $\rho_0 \geq 0$ y que $1/\rho_0 \in L^{6/5}(\Omega)$, con las mismas técnicas de la demostración que sigue y razonando como en [55, Teorema 14, (i)–(ii)] para el tratamiento de las condiciones iniciales, se puede probar un resultado “paralelo” al anterior, pero donde se obtiene una solución menos regular. En este caso, no es posible asegurar que (2.4) se verifique puntualmente (y, en consecuencia, tan sólo se trata de una solución débil). ■

2.1.2 Demostración del Resultado Principal

El apartado (a) del Teorema 2.2 está demostrado en [55, Teorema 14, (iii)], mientras que (b), (c) y (d) son aportaciones originales de esta Memoria y serán probados a continuación.

Para ello, nos basaremos en los resultados de la Sección 1.2 y en ciertas estimaciones en todo $(0, +\infty)$ que pueden ser obtenidas imponiendo (2.9). Estimaciones similares han sido aplicadas por Beirao Da Veiga en [4] en el caso de un modelo con difusión de masa (véase el Teorema 3.4, §3.2).

Debido a la falta de regularidad en las soluciones, todos los razonamientos deberán hacerse para las soluciones aproximadas, extendiendo luego las conclusiones a las soluciones límites cuando sea posible.

(b) Partimos de las demostraciones hechas en §1.2.3 y consideramos las soluciones aproximadas (definidas en sentido clásico). En este caso, la base de V elegida no tiene por qué ser de soporte compacto, ya que estamos en un dominio acotado de frontera regular.

De hecho, fijamos como base de V la constituida por las autofunciones del problema de Stokes:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m, \dots\} &\subset H^2(\Omega)^3 \cap C^1(\bar{\Omega}), \text{ base de } V, \\ &\text{ortonormal en } H \text{ y ortogonal en } V, \\ (\nabla \mathbf{w}^m, \nabla \mathbf{v}) &= \lambda_m(\mathbf{w}^m, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

donde $\lambda_m \nearrow +\infty$ (los λ_m son los autovalores asociados).

Fijada la base de V , consideramos unas sucesiones regulares (\mathbf{u}_0^m) , (ρ_0^m) y (\mathbf{f}^m) , asociadas a \mathbf{u}_0 , ρ_0 y \mathbf{f} resp., como en §1.2.3. Debido, por una parte, a que $\mathbf{f} \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ y, por otra, a que la base de V es ortonormal en H y ortogonal en V , sabemos que

$$|\mathbf{f}^m(t)|_2 \leq |\mathbf{f}|_{\infty; 2; Q_\infty} \quad \text{y} \quad |\nabla \mathbf{u}_0^m|_2^2 \leq |\nabla \mathbf{u}_0|_2^2 \quad \forall m. \quad (2.15)$$

Las estimaciones "a priori" que ya conocemos sobre las soluciones aproximadas nos dicen:

$$\rho^m \text{ está acotada en } L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega)), \quad (2.16)$$

$$(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \text{ y } \rho^m \mathbf{u}^m \text{ están acotadas en } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L_{loc}^2(0, +\infty; V). \quad (2.18)$$

Además, como $\rho_0 \geq \alpha > 0$, también $\rho^m \geq \alpha > 0$. Por tanto, (2.17) implica que

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^2(0, +\infty; L^6(\Omega)^3). \quad (2.19)$$

Introduciendo en las ecuaciones aproximadas las funciones test

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^m - \varepsilon P \Delta \mathbf{u}^m \in V^m,$$

donde P es la proyección de L^2 sobre H , se puede elegir $\varepsilon > 0$ adecuadamente para llegar a la siguiente inecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}_t^m|^2 + \mu \frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 + \frac{\mu^2}{4M} |\Delta \mathbf{u}^m|_2^2 \\ \leq 3M \int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^2 |\nabla \mathbf{u}^m|^2 + 3M |\mathbf{f}^m|_2^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En lo que sigue y hasta el final de la demostración, denotaremos con C, C', C'' etc... distintas constantes dependientes de Ω (y crecientes respecto de $|\Omega|$). Hacemos las siguientes estimaciones en el primer sumando de la derecha de (2.20):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^2 |\nabla \mathbf{u}^m|^2 &\leq |\mathbf{u}^m|_6^2 |\nabla \mathbf{u}^m|_2 |\nabla \mathbf{u}^m|_6 \\ &\leq C |\nabla \mathbf{u}^m|_2^3 |\Delta \mathbf{u}^m|_2^2 \leq \frac{\mu^2}{8M} |\Delta \mathbf{u}^m|_2^2 + C \frac{M}{\mu^2} |\nabla \mathbf{u}^m|_2^6 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si sustituimos en (2.20), teniendo en cuenta que $\frac{1}{C'} |\nabla \mathbf{u}|_2^2 \leq |\Delta \mathbf{u}|_2^2$ para cada $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 \leq - \left[\frac{1}{C'} \frac{\mu^2}{M} - C \frac{M}{\mu^2} (|\nabla \mathbf{u}^m|_2^2)^2 \right] |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 + 3M |\mathbf{f}^m|_2^2 \quad (2.22)$$

De donde, gracias a (2.15) y a (2.9), para C_1 y C_2 apropiadas constantes dependientes de C y C' ,

$$C \frac{M}{\mu^2} (|\nabla \mathbf{u}_0^m|_2^2)^2 < \frac{1}{2C'} \frac{\mu^2}{M},$$

$$3M |\mathbf{f}^m(t)|_2^2 < \frac{1}{2C'} \frac{\mu^2}{M} \left(\frac{1}{2CC'} \frac{\mu^2}{M} \right)^{1/2},$$

por lo que llegamos fácilmente a que

$$C \frac{M}{\mu^2} (|\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2)^2 \leq \frac{1}{2C'} \frac{\mu^2}{M} \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

En efecto, esta desigualdad se verifica para $t = 0$ y si para algún $t_* > 0$ se tuviera que $C \frac{M}{\mu^2} (|\nabla \mathbf{u}^m(t_*)|_2^2)^2 = \frac{1}{2C'} \frac{\mu^2}{M}$, entonces necesariamente $\frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{u}^m(t_*)|_2^2 < 0$. La consecuencia es que

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^\infty(0, +\infty; V). \quad (2.23)$$

Integrando (2.20) en $(0, t)$ para cada $t \in (0, +\infty)$ y razonando como en (2.21), resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \int_{Q_t} \rho^m |\mathbf{u}_t^m|^2 \, dx \, dt + \mu |\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2 + \frac{1}{C} \frac{\mu^2}{M} |\Delta \mathbf{u}^m|_{2; Q_t}^2 \\ & \leq \mu |\nabla \mathbf{u}_0^m|_2^2 + C' \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^m|_2^2 |\nabla \mathbf{u}^m|_2 |\Delta \mathbf{u}^m|_2 + 3M |\mathbf{f}^m|_{2; Q_t}^2 \end{aligned}$$

Ahora, (2.15), el hecho de que sea $\rho^m \geq \alpha > 0$ y la desigualdad de Hölder implican

$$\begin{aligned} & \alpha |\mathbf{u}_t^m|_{2; Q_t}^2 + \mu |\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2 + \frac{1}{C} \frac{\mu^2}{M} |\Delta \mathbf{u}^m|_{2; Q_t}^2 \\ & \leq \mu |\nabla \mathbf{u}_0^m|_2^2 + C'' |\nabla \mathbf{u}^m|_{\infty; 2; Q_t}^4 |\nabla \mathbf{u}^m|_{2; 2; Q_t}^2 + 3Mt^2 |\mathbf{f}|_{\infty; 2; Q_\infty}^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por tanto, debido a (2.18) y (2.23), tendremos:

$$\mathbf{u}_t^m \text{ está acotada en } L_{loc}^2(0, +\infty; H), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L_{loc}^2(0, +\infty; H^2(\Omega)^3); \quad (2.26)$$

esta última estimación es consecuencia de que

$$\exists C > 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{H^2} \leq C |\Delta \mathbf{u}|_2 \quad \forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3.$$

A partir de (2.16), (2.23), (2.26) y de la ecuación de transporte para ρ^m , obtenemos que

$$\rho_t^m \text{ está acotada en } L^\infty(0, +\infty; W^{-1,6}) \cap L_{loc}^{4-\varepsilon}(0, +\infty; W^{-1,\infty}) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

A partir de las estimaciones ya obtenidas y mediante un proceso de paso al límite, podemos deducir que las funciones límites (ρ, \mathbf{u}) (que ya eran soluciones débiles del problema) tienen la regularidad expresada por (2.10–2.12), de donde queda demostrado (b); para obtener la presión se aplica el apartado (ii) del Lema 1.6.

(c) Como ahora $\mathbf{f} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, las funciones regulares (\mathbf{f}^m) pueden ser elegidas de forma que

$$\mathbf{f}^m \xrightarrow{f} \mathbf{f} \text{ en } L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \text{ y en } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^3). \quad (2.27)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la demostración del Corolario 1.13, observamos que

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^2(0, +\infty; V). \quad (2.28)$$

Por tanto, no es difícil comprobar, a partir de (2.27–2.28) y de (2.23), que

$$\mathbf{u}^m \text{ está acotada en } L^2(0, +\infty; H^2(\Omega)^3),$$

$$\mathbf{u}_t^m \text{ está acotada en } L^2(0, +\infty; H).$$

Obviamente, gracias a estas dos estimaciones, se tiene que el campo de velocidades límite \mathbf{u} verifica (2.13).

(d) Si ahora $\mathbf{f} = 0$, también puede elegirse cada $\mathbf{f}^m = 0$. Gracias a (2.9), la inecuación diferencial (2.22) se convierte ahora en:

$$\frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2 \leq -C |\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2$$

para $C = -\frac{1}{2C'} \frac{\mu^2}{M}$. Como consecuencia del Lema de Gronwall y (2.15),

$$|\nabla \mathbf{u}^m(t)|_2^2 \leq e^{-Ct} |\nabla \mathbf{u}_0^m|_2^2 \leq e^{-Ct} |\nabla \mathbf{u}_0|_2^2$$

Por tanto, se tiene (2.14) y queda demostrado el Teorema.

2.2 Unicidad de Solución Semi-Fuerte

La unicidad de solución del problema de Navier-Stokes con densidad variable ha sido probada para el caso de soluciones fuertes con propiedades de regularidad bastantes restrictivas. En primer lugar, vamos a enumerar dichos resultados. Posteriormente, se probará un resultado de unicidad bajo hipótesis más generales que en los resultados ya existentes. Más precisamente, veremos que si existe una solución fuerte entonces todas las posibles soluciones semi-fuertes (asociadas a los mismos datos) coinciden necesariamente con aquélla. El argumento de la demostración está basado fundamentalmente en los resultados sobre el problema de transporte considerado en §1.1.5.

2.2.1 Algunos Resultados Conocidos sobre Existencia y Unicidad de Solución Fuerte

DEFINICIÓN 2.3 *En las condiciones de la Definición 2.1, diremos que una solución semi-fuerte (ρ, \mathbf{u}, p) , con*

$$\rho \in L^\infty(0, T; W^{-1, \infty}(\Omega)), \quad \rho_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega)),$$

es también solución fuerte del problema de Navier-Stokes con densidad variable en Q_T si se verifican (2.4-2.6) cpd. en Q_T , (2.7) en el sentido de la traza sobre $\partial\Omega$ cpd. en $(0, T)$ y las condiciones iniciales (2.8) en $L^\infty(\Omega)$ ty V resp. Si $T = +\infty$, permitiremos que \mathbf{f} y (ρ, \mathbf{u}, p) tengan regularidad local en tiempo. Por ejemplo, permitiremos que ρ verifique

$$\rho \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; W^{-1, \infty}(\Omega)), \quad \rho_t \in L_{loc}^2(0, +\infty; L^\infty(\Omega))$$

■
En lo que sigue, cuando escribamos T nos estaremos refiriendo, a menos que se indique lo contrario, a un tiempo positivo y finito: $T \in (0, +\infty)$

Los primeros resultados sobre soluciones fuertes son debidos a Ladyshenskaya y Solonnikov. En [36], se prueba la existencia y unicidad de una solución fuerte en el caso de un abierto, acotado y de frontera regular (por ejemplo C^2) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ó 3 . Dicha solución es global en tiempo si $N = 2$ y, en principio, tan sólo local si $N = 3$. Se utiliza en la Demostración la resolución de distintos problemas auxiliares, con solución L^q para algún $q > N$, utilizando el método de las aproximaciones sucesivas. Para $N = 3$, el resultado principal puede ser enunciado como sigue:

TEOREMA 2.4 Sean $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera C^2 y $q > 3$. Si

$$\mathbf{f} \in L^q(Q_T),$$

$$\mathbf{u}_0 \in W_0^{2-2/q, q}(\Omega) \text{ es tal que } \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0 \text{ y } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \text{ en } \Omega,$$

$$\rho_0 \in C^1(\bar{Q}) \text{ es tal que } 0 < M_1 \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq M_2 \text{ y } |\nabla \rho_0(\mathbf{x})| \leq M_3 \text{ en } \Omega,$$

entonces existe $T_* \leq T$, tal que, en Q_{T_*} , existe una solución fuerte (ρ, \mathbf{u}, p) de (2.4-2.8).

Además,

$$\rho \in C^1(\bar{Q}_{T_*}),$$

$$\mathbf{u}, D_x \mathbf{u}, D_x^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t \in L^q(Q_{T_*}),$$

$$p, \nabla_x p \in L^q(Q_{T_*}) \text{ y } \int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \text{ cpd. en } (0, T).$$

Por último, la solución encontrada es única.

■

Naturalmente, la unicidad de (ρ, \mathbf{u}, p) debe entenderse salvo una constante aditiva para p (eventualmente dependiente de t). En general, $T_* < T$; lógicamente, T_* depende del orden de magnitud de los datos del problema.

Posteriormente, H.Okamoto en [43] obtiene resultados similares en el caso $\mathbf{f} = 0$, pero con Demostraciones realizada en un marco hilbertiano y basada en la teoría abstracta de ecuaciones parabólicas. Es importante señalar que, en [43], no se impone tanta regularidad sobre ρ_0 . En concreto, las hipótesis sobre ρ_0 son:

$$\rho_0 \in W^{1, \infty}(\Omega) \text{ y } 0 < M_1 \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq M_2 \text{ en } \Omega,$$

obteniéndose así, naturalmente, que la solución verifica $\rho \in W^{1, \infty}(Q_{T_*})$. Además, también se prueba, cuando $N = 3$, que la solución fuerte es global en $[0, +\infty)$, si los datos son suficientemente pequeños.

Recientemente, M.Padula ([45]) ha demostrado un resultado de existencia de solución semi-fuerte local (global si $N = 2$) que, bajo ciertas condiciones de regularidad, ésta es de hecho una solución "fuerte" (en un sentido algo distinto que en la Definición 2.3). En esencia, se impone menos regularidad para \mathbf{u}_0 que en [36,43], a cambio de exigir regularidad L^2 a la derivada de \mathbf{f} respecto de t . Además, también se prueba que la solución obtenida es única si posee mejores propiedades de regularidad. De nuevo, enunciaremos el resultado cuando $N = 3$ (cf. [45, Teorema 6.1]):

TEOREMA 2.5 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto de frontera C^2 y $T > 0$. Si

$$\mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \mathbf{f}_t \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3),$$

$$\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega) \cap W(\Omega),$$

$\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ es tal que $\int_G \rho_0(\mathbf{x}) dx > 0 \quad \forall G \subset \Omega$ medible con $|G| > 0$, entonces existe $T_* \leq T$, tal que, en Q_{T_*} , existe una solución "fuerte"^a (ρ, \mathbf{u}, p) de (2.4-2.8) con

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty(0, T_*; W^{1,\infty}(\Omega) \cap L^1(\Omega)), \quad \rho \geq 0, \\ \mathbf{u} &\in L^2(0, T_*; W \cap W^{1,\infty}(\Omega)^3), \quad D_x^2 \mathbf{u} \in L^2(Q_{T_*}) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, T_*; W). \end{aligned}$$

Por último, si existen constantes m, M y M_1 tales que

$$0 < m \leq \rho_0(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^k < M \quad \text{y} \quad |\nabla \rho_0(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{x}|^\alpha < M_1 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.29)$$

donde $4\alpha > 3k$, entonces la solución encontrada es única y ρ verifica acotaciones similares a (2.29), cpd. en $(0, T)$.

■
Básicamente, para la Demostración de este resultado se derivan las ecuaciones (aproximadas) con respecto a t y se busca una desigualdad de energía para \mathbf{u}_t . A partir de aquí, se obtienen acotaciones para $D_x^2 \mathbf{u}$ en $L^2(Q_{T_*})$ y para \mathbf{u} en $L^2(0, T_*; W^{2,p}(\Omega)^3)$ con $p > 3$, lo cual lleva, entre otras cosas, a que $\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; W^{1,\infty}(\Omega)^3)$.

Como se puede comprobar, hay sensibles diferencias entre las propiedades de regularidad obtenidas en el Teorema 2.4 y en el Teorema 2.5. Sin embargo, en ambos casos se tiene

$$\nabla \mathbf{u} \in L^1(0, T_*; L^\infty),$$

condición que parece ineludible a la hora de obtener regularidad L^p para las primeras derivadas de ρ . Esto es, de hecho, lo que marca la diferencia entre una solución semi-fuerte y una solución fuerte.

2.2.2 Sobre la Unicidad de Solución Semi-Fuerte

La unicidad de solución semi-fuerte es, en esencia, una cuestión abierta. La situación es similar a la que se plantea cuando se busca unicidad de solución débil del problema de Navier-Stokes (homogéneo). A un nivel inmediatamente inferior de dificultad, parece conveniente plantear la cuestión siguiente: Dadas dos soluciones asociadas a los mismos datos, ¿qué hipótesis "mínimas" de regularidad hay que imponer sobre ellas — ó sólo sobre una de ellas — para que necesariamente coincidan ?.

^aSerá una solución que no se corresponde exactamente con la Definición 2.3 cuando Ω es no acotado, ya que no verifica $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)$ y $\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; H)$.

En este sentido, M. Padula demuestra en [45, Teorema 4.1] que si $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ y (ρ, \mathbf{u}, p) son soluciones semi-fuertes asociadas a los mismos datos, éstos verifican

$$\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^3), \quad \rho_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega) \quad \text{tal que cumple (2.29)}$$

y, además,

$$\rho_t \in L^2(Q_T), \quad \nabla \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega)^3), \quad \nabla \mathbf{u}_t \in L^2(Q_T),$$

entonces necesariamente $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ y (ρ, \mathbf{u}, p) coinciden.

No es difícil probar que, en estas condiciones y al menos para Ω acotado (cf. [36]), que $\nabla \rho \in L^\infty(Q_T)$, de donde (ρ, \mathbf{u}, p) es, de hecho, una solución fuerte.

En este apartado, vamos a obtener un resultado de unicidad que mejora al precedente. Sobre la solución (ρ, \mathbf{u}, p) vamos a imponer las condiciones adicionales

$$\nabla \rho \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3) \quad (2.31)$$

y pediremos además que los datos cumplen lo siguiente:

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3), \quad (2.32)$$

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega). \quad (2.33)$$

Por simplicidad, nos vamos a limitar al caso de un intervalo temporal finito $(0, T)$ y a un abierto Ω acotado. Así, (2.33) se reduce lógicamente a la condición usual $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$.

TEOREMA 2.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular (por ejemplo $W^{2,\infty}$), $T > 0$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, \mathbf{f} como en (2.32) y $\mathbf{u}_0 \in V$. Si $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ y (ρ, \mathbf{u}, p) son dos soluciones semi-fuertes de (2.4-2.8) en Q_T y (ρ, \mathbf{u}, p) verifica además (2.30-2.31), entonces se tiene que $\rho = \bar{\rho}$, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ y $\nabla p = \nabla \bar{p}$.

Demostración: Sean

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \quad \eta = \rho - \bar{\rho}, \quad q = p - \bar{p}.$$

Restando las ecuaciones que verifican cada una de las soluciones, en las nuevas variables (η, \mathbf{v}, q) las ecuaciones resultantes se pueden escribir de la siguiente forma:^b

$$\begin{cases} \bar{\rho}[\mathbf{v}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}] - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla q \\ = \eta[\mathbf{f} - \mathbf{u}_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}] \quad \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \end{cases} \quad (2.34)$$

^bHay otras posibles formas, pero ésta es la que más nos interesa

$$\eta_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \eta = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad \text{en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (2.35)$$

$$\eta|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}|_{t=0} = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.36)$$

Una característica fundamental del sistema anterior, es que en (2.35), el segundo miembro $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^3(\Omega))$; para comprobarlo, basta recordar la regularidad propia de las soluciones semi-fuertes, dada en el Teorema 2.2 y la hipótesis (2.30) adicional. Por tanto, se verifican las hipótesis del Corolario 1.9, (1.24) es cierto para $p = 2$ y $g = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ y, en consecuencia,

$$\frac{d}{dt} |\eta|_2^2 = -2 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \eta \, dx. \quad (2.37)$$

Por otra parte, si multiplicamos (2.34) escalarmente por \mathbf{v} e integramos en Ω , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla |\mathbf{v}|^2 \right) + \mu |\nabla \mathbf{v}|_2^2 \\ & = - \int_{\Omega} \bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \eta \mathbf{v} \cdot [\mathbf{f} - \mathbf{u}_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ahora bien, (1.25) aplicado al problema de Transporte (homogéneo) que verifican $\bar{\rho}$ y $\bar{\mathbf{u}}$, significa:

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_{\Omega} \bar{\rho} [\psi_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \psi] + \int_{\Omega} \bar{\rho}(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) \, dx \\ = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) \, dx \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \bar{\Omega}). \end{cases} \quad (2.39)$$

Un argumento "standard" de densidad (basada en la regularidad de $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$), lleva a que también se cumple (2.39) para cada $\psi \in W^{1,1}(0, T; L^2) \cap L^1(0, T; H^1)$. Por tanto, podemos tomar en (2.39) $\psi = |\mathbf{v}|^2$, lo que nos conduce a la siguiente igualdad para cada $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \bar{\rho} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|^2 + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla |\mathbf{v}|^2 = \int_{\Omega} \bar{\rho}(t, \mathbf{x}) |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2 \, dx.$$

Esto último, junto con (2.38) integrado en $(0, t)$, implica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) (t) + \mu \int_0^t |\nabla \mathbf{v}|_2^2 \\ & = - \int_0^t \int_{\Omega} \bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_0^t \int_{\Omega} \eta \mathbf{v} \cdot [\mathbf{f} - \mathbf{u}_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Sumando lo anterior y (2.37), una vez que ha sido integrado en $(0, t)$, resulta que

$$\begin{cases} \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) (t) + \left(\int_{\Omega} |\eta|^2 \right) (t) + \mu \int_0^t |\nabla \mathbf{v}|_2^2 \\ = - \int_0^t \int_{\Omega} \bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_0^t \int_{\Omega} \eta \mathbf{v} \cdot [\mathbf{f} - \mathbf{u}_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \\ - 2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \eta. \end{cases} \quad (2.40)$$

Acotando superiormente el término de la derecha, para lo que usamos la desigualdad de Hölder, llegamos a que

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) (t) + \left(\int_{\Omega} |\eta|^2 \right) (t) + \frac{\mu}{2} \int_0^t |\nabla \mathbf{v}|_2^2 \\ & \leq C_1 \int_0^t |\nabla \mathbf{u}|_3^2 \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) + C_2 \int_0^t \{ |\mathbf{f}|_3^2 + |\mathbf{u}_t|_3^2 + |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|_3^2 + |\nabla \rho|_3^2 \} \left(\int_{\Omega} |\eta|^2 \right) \\ & \equiv C_1 \int_0^t G_1 \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) + C_2 \int_0^t G_2 \left(\int_{\Omega} |\eta|^2 \right) \leq C \int_0^t G \left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 + \int_{\Omega} |\eta|^2 \right) \end{aligned}$$

donde G_1 , G_2 y $G \in L^1(0, T)$; para comprobar este hecho, basta tener en cuenta las propiedades de regularidad de ρ y \mathbf{u} , en particular (2.30) y (2.31). En consecuencia, el Lema de Gronwall (en versión integral) y el hecho de que η y \mathbf{v} se anulan para $t = 0$, implican

$$\left(\int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 \right) (t) + \left(\int_{\Omega} |\eta|^2 \right) (t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Esto prueba que η y \mathbf{v} (y también ∇q) se anulan.

■
Notas:

(a) La condición $\rho_0 \geq \alpha > 0$ impuesta en el Teorema 2.2 (que implica a su vez $\rho \geq \alpha > 0$), sólo se aplica en el resultado anterior de unicidad al final para, a partir de $\int_0^t \int_{\Omega} \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 = 0$, deducir que $\mathbf{v} \equiv 0$. Ahora bien, esta conclusión sigue siendo válida con sólo imponer

$$\bar{\rho} > 0 \quad (\text{ó } \rho > 0) \quad \text{cpd. en } Q_T.$$

(b) En el caso $T = +\infty$, se obtiene un resultado análogo (bastaría con tener regularidad local en tiempo en las soluciones). Cuando el abierto Ω es no acotado, además de $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, hay que imponer que $\rho_0 \in L^2(\Omega)$ y que \mathbf{u} verifique (1.19), para que se puedan aplicar los resultados de §1.1.5 sobre el problema de transporte.

(c) No es estrictamente necesario exigir en el enunciado del Teorema que (ρ, \mathbf{u}, p) sea una solución fuerte. No obstante, se observa que las hipótesis implican, entre otras cosas, que $\rho_t \in L^2(Q_T)$ y que (2.6) se verifica cpd. en Q_T .

■

2.3 El Modelo de Stokes con Densidad Variable

Llevaremos a cabo en esta Sección el estudio de un modelo reducido: El problema de Stokes con densidad variable. En un primer apartado, deducimos las ecuaciones del modelo, describiendo brevemente algunas situaciones físicas a las que éste se adapta correctamente. Se demuestran resultados de existencia de solución global en tiempo (utilizando un método de viscosidad artificial) y de unicidad de solución.

2.3.1 Deducción del Modelo. Justificación Física

En esta Sección vamos a estudiar algunas cuestiones teóricas sobre una variante del problema (2.4–2.8). Esta reducción consiste en despreciar los términos convectivos de la ecuación de movimiento (2.4)

$$\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}),$$

frente a los términos difusivos

$$-\mu \Delta \mathbf{u}.$$

Llegamos así, al correspondiente problema: Dados \mathbf{f} , ρ_0 y $\mu > 0$ (constante), hallar (ρ, \mathbf{u}, p) tal que

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad (2.41)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.42)$$

A causa de la simplificación que precede, no tiene sentido una condición inicial para el campo de velocidades. En (2.41–2.42), naturalmente, \mathbf{f} , ρ_0 y μ son datos (como ya sabemos, una función de densidad para la resultante de los esfuerzos exteriores, una densidad inicial y el coeficiente de viscosidad dinámica), mientras que ρ , \mathbf{u} y p son las incógnitas (densidad, velocidad y presión del fluido resp.). Conviene hacer notar que, aunque haya desaparecido la derivada de \mathbf{u} con respecto al tiempo, \mathbf{u} no es en general independiente de t .

Desde el punto de vista matemático, (2.41–2.42) es un sdp. compuesto por:

- El problema de Stokes (2.41), donde hay un segundo miembro dependiente de la densidad (desconocida) y donde la variable tiempo actúa como parámetro.
- El problema de Transporte (2.42).

Merece la pena destacar, dos características importantes de (2.41–2.42):

1. Aunque se desprecia el término no lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, el problema sigue siendo no lineal, debido a la presencia del término $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ en (2.42). Naturalmente, esto hace que la situación sea distinta de la que representa el problema de Stokes habitual (con densidad constante).
2. Como también se ha eliminado el término de \mathbf{u}_t , pasamos de un sistema parabólico-hiperbólico a otro elíptico-hiperbólico.

En el caso compresible, algunos problemas con reducciones similares son estudiados en [7,48].

La justificación física de la introducción del problema reducido (2.41–2.42), puede ser conseguida de dos formas distintas:

1. Imponiendo que $\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \simeq 0$. Sabemos que

$$\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = (\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = (\rho \mathbf{u})_t + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}),$$

de donde,

$$\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt},$$

i.e. la derivada del momento lineal a través de las trayectorias que describe el fluido (ó derivada convectiva). En consecuencia, el sistema (2.41–2.42) puede tener interés en el caso de un fluido incompresible con densidad variable, cuyo momento lineal experimente variaciones de escasa importancia a lo largo de las trayectorias.

2. Realizando un análisis dimensional del término a despreciar $\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ frente al término difusivo $-\mu \Delta \mathbf{u}$. Si fijamos unas unidades características

$$R, U, L \quad \text{para} \quad \rho, \mathbf{u}, \mathbf{x} \quad \text{resp.,}$$

tendremos que el cociente de los órdenes de magnitud de $\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ y $\mu \Delta \mathbf{u}$ es

$$\frac{[\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})]}{[\mu \Delta \mathbf{u}]} = \frac{R \left(\frac{U}{L/U} + U \frac{U}{L} \right)}{\mu U / L^2} = \frac{LU}{\mu / R} = \frac{LU}{\nu} = Re,$$

el número de Reynolds del problema. Podemos deducir que la simplificación está dimensionalmente justificada en aquellas situaciones en las que el número de Reynolds es pequeño. En definitiva, al igual que ocurre cuando ρ es constante, el sistema reducido está bien adaptado a flujos donde las fuerzas de viscosidad predominen frente a las fuerzas convectivas.

El estudio dimensional precedente también es válido cuando la viscosidad μ es variable. Bastaría fijar una unidad característica para la viscosidad, por ejemplo νR .

Al igual que ocurre para el caso general, se pueden dividir en el caso del problema (2.4–2.8), podemos hablar aquí de soluciones de (2.41–2.42) de tres tipos: soluciones débiles, semi-fuertes y fuertes.

Por simplicidad, en el resto de esta Sección nos centraremos en el problema (2.41–2.42) planteado en Q_T , donde $T > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado.

2.3.2 Existencia de Solución Semi-Fuerte Global en Tiempo

Presentamos en este apartado resultados de existencia de solución débil y de solución semi-fuerte globales. Naturalmente, en el caso correspondiente a la solución débil los datos son menos regulares.

En lo que sigue, supondremos (a menos que se indique lo contrario) que $\partial\Omega \in W^{2,\infty}$ y

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad \rho_0 \geq 0 \text{ cpd. en } \Omega, \quad \mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Demostremos que, en estas condiciones, existe una solución semi-fuerte (ρ, \mathbf{u}, p) del problema de Stokes con densidad variable (2.41–2.42). También probaremos que existe una solución débil en condiciones menos regulares. Es fácil darse cuenta de qué es lo que llamaremos aquí soluciones débiles, semi-fuertes y fuertes. Obviamente, una solución débil (resp. semi-fuerte ó fuerte) es una terna (ρ, \mathbf{u}, p) que satisface las mismas propiedades de regularidad que una solución débil de (2.4–2.8) (resp. semi-fuerte ó fuerte), así como las edp. y condiciones iniciales y de contorno de (2.41–2.42) en el mismo sentido.

Utilizaremos un método de viscosidad artificial: Fijado $\varepsilon > 0$, consideramos el sistema “perturbado” siguiente: Dados \mathbf{g} y η_0 , hallar (η, \mathbf{v}, q) tal que

$$-\Delta \mathbf{v} + \nabla q = \eta \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } Q_T, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \quad (2.43)$$

$$\eta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = \varepsilon \Delta \eta \text{ en } Q_T, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0 \text{ en } \Omega \text{ y } \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T. \quad (2.44)$$

Se trata de ver que “(2.43–2.44) \rightarrow (2.41–2.42)” cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. para cada $\varepsilon > 0$, con $\mathbf{g} = \mathbf{f}_\varepsilon$ y $\eta_0 = \eta_{0\varepsilon}$ adecuadas aproximaciones de \mathbf{f} y ρ_0 resp., probaremos la existencia de solución (fuerte) de (2.43–2.44) $(\eta, \mathbf{v}, q) = (\eta_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ y, posteriormente, obtendremos una solución (semi-fuerte) de (2.41–2.42) como terna límite, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PERTURBADO

Vamos a probar la existencia (y eventualmente unicidad) de solución del problema perturbado con un argumento de tipo punto fijo. Para ello, definimos los operadores resolventes de los dos problemas (lineales) que resultan tras la linealización de (2.43–2.44).

A) Operador resolvente de los problemas de Stokes:

Dada $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, sea $S(\mathbf{g}) = (\mathbf{v}, q)$ la única solución (fuerte) del problema de Stokes:

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V), & q \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)), \\ -\mu \Delta \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{g} & \text{en } L^2(0, T; L^2), \end{cases}$$

(aquí, recordamos que $L_0^2(\Omega) = \{q : q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) = 0\}$). Gracias a la regularidad del problema de Stokes (cf. [6]), tenemos que

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \|(\mathbf{v}, q)\|_{L^2(H^2) \times L^2(H^1)} \leq C \|\mathbf{g}\|_{L^2(L^2)},$$

es decir $S \in \mathcal{L}(L^2(0, T; L^2(\Omega)^3); L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V) \times L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)))$.

Nota: Si sólo se tiene $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ y Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitziana, también está bien definido $S(\mathbf{g}) = (\mathbf{v}, q)$ como la única solución (débil) del problema de Stokes. Más precisamente, \mathbf{v} está dada por

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in L^2(0, T; V), \\ \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad t \text{ cpd. en } (0, T), \end{cases}$$

y $q \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ está dada por el Lema de De Rham aplicado a la distribución $\mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v}$; cf. §1.1.4. Además, es fácil comprobar

$$S \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3); L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; L_0^2(\Omega))).$$

B) Operador resolvente del problema parabólico (de transporte-difusión) para η : Dados

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; V), \quad \eta_0 \in H^1(\Omega),$$

sea $R(\eta_0, \mathbf{v}) = \eta$ la única solución del problema parabólico:

$$\begin{cases} \eta \in L^2(0, T; H_N^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), & \eta_t \in L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^3(\Omega)), \\ \eta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta - \varepsilon \Delta \eta = 0 & \text{cpd. en } Q_T, \quad \eta|_{t=0} = \eta_0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Aquí,

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ \eta \in H^2(\Omega) : \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \eta_0(\mathbf{x}) \right\}.$$

Obviamente,

$$H_N^2(\Omega) = C_0 + H_{N_0}^2(\Omega),$$

donde $H_{N_0}^2(\Omega)$ está dada por

$$H_{N_0}^2(\Omega) = \left\{ \eta \in H^2(\Omega) : \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

No es difícil probar que $H_{N_0}^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^2(\Omega)$, i.e. un nuevo espacio de Hilbert para la norma $\|\cdot\|_2$. Además, sobre $H_{N_0}^2(\Omega)$, la seminorma

$$\eta \mapsto |\Delta \eta|_2$$

es, de hecho, una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ (cf. [35,38,61] para ésta y otras propiedades de $H_{N_0}^2(\Omega)$).

Recordemos que en virtud del Principio del Máximo Débil, se verifican las dos propiedades siguientes:

1. Si $\eta_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ entonces $\eta = R(\eta_0, \mathbf{v}) \in L^\infty(Q_T)$ y además

$$|\eta|_{\infty; \infty; Q_T} \leq |\eta_0|_{\infty} \quad (2.45)$$

cualquiera que sea $\mathbf{v} \in L^2(0, T; V)$. De hecho, podemos afirmar algo más: Para cada $p \in [1, +\infty]$,

$$|\eta|_{\infty; p; Q_T} \leq |\eta_0|_p \quad (2.46)$$

2. Si $\eta_0 \geq 0$ cpd. en Ω , entonces $\eta \geq 0$ cpd. en Q_T .

En lo que sigue, será de utilidad introducir el espacio

$$X = \{ \eta : \eta \in L^2(0, T; H_N^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^1(\Omega)), \eta_t \in L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^3(\Omega)) \}.$$

X es un espacio de Banach para la norma producto habitual

$$\|\eta\|_X = \|\eta\|_{L^2(H^2)} + \|\eta\|_{C(H^1)} + \|\eta_t\|_{L^2(L^{3/2})} + \|\eta_t\|_{L^1(L^3)}.$$

LEMA 2.7 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $W^{2,\infty}$, $T > 0$ y $\varepsilon > 0$. Si

$$\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \eta_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \eta_0 \geq 0 \text{ en } \Omega,$$

entonces existe una terna que verifica:

$$\eta \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T), \quad \int_{\Omega} \eta(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} \eta_0(\mathbf{x}) \text{ cpd. en } (0, T),$$

$$\eta_t \in L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^3(\Omega)),$$

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V), \quad q \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{cpd. en } (0, T),$$

los problemas de Stokes (2.43) (donde la variable t actúa como parámetro) y el problema de transporte-difusión (2.44). Además, si $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3)$, entonces (η, \mathbf{v}, q) es la única solución de (2.43–2.44).

■

COROLARIO 2.8 El Lema 2.7 continúa siendo válido si suprimimos la hipótesis $\eta_0 \in L^\infty(\Omega)$, a costa de que sea $\mathbf{g} \in L^2(L^3(\Omega)^3)$. En este caso, naturalmente, no se tiene (2.45), pero sí (2.46) para $p \in [1, 6]$.

■

Demostración del Lema 2.7: Como se ha dicho, utilizaremos un argumento de punto fijo. Se trata de un argumento “similar” al ya utilizado para demostrar la existencia de solución m -aproximada en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable, cf. el Apéndice B.

Dada $\bar{\eta} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$, se tiene que $\bar{\eta}\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega)^3)$ y, por tanto, también $\bar{\eta}\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. En consecuencia, tiene sentido hablar de

$$S(\bar{\eta}\mathbf{g}) = (\mathbf{v}, q) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; L_0^2(\Omega)).$$

A su vez, podemos considerar $R(\eta_0, \mathbf{v}) = \eta$. De acuerdo con lo que precede, tenemos que $\eta \in X$; sabemos, por otra parte, gracias al apartado (ii) del Lema 1.4, que X se inyecta de forma compacta en $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$. Hemos conseguido por tanto definir una aplicación

$$\bar{\eta} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)) \longmapsto \mathcal{F}\bar{\eta} \in X \xrightarrow{c} L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$$

tal que resolver (2.43–2.44) equivale, esencialmente, a encontrar un punto fijo de \mathcal{F} . Obsérvese que, cualquiera que sea $\bar{\eta}$,

$$\mathcal{F}\bar{\eta} \geq 0, \quad |\mathcal{F}\bar{\eta}|_{\infty;4;Q_T} \leq |\eta_0|_4 \equiv R.$$

Por tanto, \mathcal{F} toma valores en la bola B_R de centro el origen y radio R . \mathcal{F} es continua y compacta. En efecto, sean las $\bar{\eta}_n$ y $\bar{\eta}$ tales que

$$\bar{\eta}_n \xrightarrow{f} \bar{\eta} \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^4(\Omega)).$$

Entonces, se tiene que, por ejemplo, $\bar{\eta}_n\mathbf{g} \xrightarrow{f} \bar{\eta}\mathbf{g}$ en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ y las correspondientes funciones \mathbf{v}_n y \mathbf{v} (soluciones de problemas de Stokes adecuados) verifican

$$\mathbf{v}_n \xrightarrow{f} \mathbf{v} \quad \text{en } L^2(0, T; V).$$

Es fácil de comprobar que, las correspondientes $\mathcal{F}\bar{\eta}_n$ también convergen fuertemente en $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ hacia $\mathcal{F}\bar{\eta}$. Esto prueba la continuidad de \mathcal{F} .

Por otra parte, si $(\bar{\eta}_n)$ es una sucesión acotada de $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$, es claro que las correspondientes \mathbf{v} están uniformemente acotadas en X , de donde $(\mathcal{F}\bar{\eta}_n)$ es relativamente compacta en $L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$. En consecuencia, \mathcal{F} es también compacta.

Gracias al Teorema de Schauder del Punto Fijo, existe $\eta \in B_R$ tal que $\mathcal{F}\eta = \eta$. Si $(\mathbf{v}, q) = S(\eta \mathbf{g})$, entonces (η, \mathbf{v}, q) es una solución de (2.43–2.44) con las propiedades que se indican en el enunciado del Lema.

Obsérvese que, en las condiciones del Corolario 2.8, se puede hacer una Demostración similar a la precedente. Para ello, basta redefinir la aplicación \mathcal{F} , esta vez en el espacio de Banach $L^\infty(0, T; L^6(\Omega))$ (si $\eta \in L^\infty(0, T; L^6(\Omega))$, entonces $\eta \mathbf{g} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ y se pueden introducir $S(\bar{\eta} \mathbf{g}) = (\mathbf{v}, q)$ y $\mathcal{F}\bar{\eta} = R(\eta_0, \mathbf{v})$ análogamente a como se hizo antes).

Veamos, para terminar con la Demostración, que la solución es única, a condición de que sea $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3)$. Sean (η, \mathbf{v}, q) y $(\bar{\eta}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{q})$ dos soluciones asociadas a los mismos datos y pongamos

$$\rho = \eta - \bar{\eta}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}, \quad p = q - \bar{q}.$$

Entonces,

$$-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } Q_T, \quad (2.47)$$

$$\rho_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \varepsilon \Delta \rho = -\mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\eta} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad \rho|_{t=0} = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.49)$$

Con un razonamiento "standard", llegamos a que:

$$\frac{d}{dt} |\rho|_2^2 + \mu |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + \varepsilon |\nabla \rho|_2^2 \leq \int_\Omega \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\eta} \rho \equiv I_1 + I_2.$$

Teniendo en cuenta las desigualdades

$$|I_1| \leq \frac{\mu}{4} |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + C_\mu |\mathbf{g}|_3^2 |\rho|_2^2, \quad |I_2| \leq \frac{\mu}{4} |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + C'_\mu |\nabla \bar{\eta}|_3^2 |\rho|_2^2,$$

llegamos a que

$$\frac{d}{dt} |\rho|_2^2 + \mu |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + \varepsilon |\nabla \rho|_2^2 \leq (C_\mu |\mathbf{g}|_3^2 + C'_\mu |\nabla \bar{\eta}|_3^2) |\rho|_2^2$$

y, en virtud del Lema de Gronwall,

$$|\rho(t)|_2^2 \leq C |\rho(0)|_2^2 = 0.$$

Finalmente, la unicidad de solución del problema de Stokes conduce a que u y ∇p también se anulan.

■

Nota: Hay otras formas posibles de probar la existencia de solución de (2.43–2.44). Por ejemplo, se pueden llevar a cabo:

1. Una discretización de Galerkin combinada con el método de compacidad. En las ecuaciones aproximadas, aparecerán:
 - Un sdo. de primer orden, cuya solución es una aproximación de η .
 - Una familia de sistemas lineales (no diferenciales) con soluciones únicas, que proporcionan una aproximación de u .

De todas formas, para demostrar la existencia de estas soluciones aproximadas, hay que aplicar un argumento de punto fijo.

2. La Demostración de la existencia y unicidad de solución de (2.43–2.44) para ε suficientemente grande como consecuencia del Teorema de Banach del Punto Fijo y, posteriormente, la existencia para $\varepsilon > 0$ arbitrario gracias a la Teoría del Grado de Leray-Schauder (cf. [7,48] para resultados similares en el caso compresible). También en esta ocasión, sería más largo y laborioso que el razonamiento que hemos presentado.

ESTIMACIONES DE $(\eta_\varepsilon, v_\varepsilon, q_\varepsilon)$ INDEPENDIENTES DE ε

Como nuestro objetivo final es tomar límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, vamos a considerar a continuación, para cada $\varepsilon > 0$, una solución de (2.43–2.44), construida como en el apartado anterior, denotando explícitamente esta dependencia. Sea por tanto

$$(\eta, v, q) \equiv (\eta_\varepsilon, v_\varepsilon, q_\varepsilon)$$

la solución encontrada asociada a los datos

$$\eta_0 = \rho_{0\varepsilon} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho_{0\varepsilon} \xrightarrow{*} \rho_0 & \text{en } L^\infty(\Omega), \\ \rho_{0\varepsilon} \xrightarrow{f} \rho_0 & \text{en } L^q(\Omega) \quad \forall q < +\infty, \\ 0 \leq \rho_{0\varepsilon} \leq |\rho_0|_\infty & \text{cpd. en } \Omega, \end{cases} \quad (2.50)$$

$$g = f_\varepsilon \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3), \quad \text{con} \quad f_\varepsilon \xrightarrow{f} f \quad \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (2.51)$$

Sabemos que

$$\eta_\varepsilon \in X \cap L^\infty(Q_T), \quad v_\varepsilon \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V), \quad q_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)). \quad (2.52)$$

También es fácil de deducir que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\eta_\varepsilon|_2^2 + \varepsilon |\nabla \eta_\varepsilon|_2^2 = 0,$$

de donde, teniendo en cuenta (2.50), obtenemos que

$$\eta_\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.53)$$

Además,

$$\sqrt{\varepsilon} \nabla \eta_\varepsilon \text{ está acotada en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \quad (\text{y } \sqrt{\varepsilon} \Delta \eta_\varepsilon \text{ en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))). \quad (2.54)$$

Por otra parte, el Principio del Máximo Débil nos lleva a que

$$0 \leq \eta_\varepsilon \leq |\rho_0|_\infty,$$

en particular,

$$\eta_\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(Q_T) \quad (2.55)$$

y, por tanto, $\eta_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon$ está acotada en $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, de donde, gracias a que el problema de Stokes está bien planteado, deducimos las siguientes estimaciones:

$$\mathbf{v}_\varepsilon \text{ está acotada en } L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V), \quad (2.56)$$

$$q_\varepsilon \text{ está acotada en } L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)). \quad (2.57)$$

Finalmente, observamos que

$$\eta_{\varepsilon t} + \nabla \cdot (\eta_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} \nabla \cdot (\sqrt{\varepsilon} \nabla \eta_\varepsilon) = 0 \quad \text{en } Q_T;$$

luego (2.54), (2.55) y (2.56) implican:

$$\eta_{\varepsilon t} \text{ está acotada en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.58)$$

Por tanto, gracias a (2.55), (2.58) y el apartado (ii) del Lema 1.4, resulta:

$$\eta_\varepsilon \in \text{compacto de } C([0, T]; W^{-1, \infty}(\Omega)). \quad (2.59)$$

Notas:

(a) Cambio en las hipótesis de regularidad para los datos de (2.41–2.42). Si suponemos

$$\rho_0 \in L^2(\Omega), \quad \mathbf{f} \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega)^3), \quad (2.60)$$

también podemos obtener, con adecuadas aproximaciones $\rho_{0\epsilon}$ y \mathbf{f}_ϵ , acotaciones suficientes para poder pasar al límite y conseguir una solución de (2.41–2.42). En concreto, conseguiremos: conseguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_\epsilon \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ (2.56), (2.57) \text{ y } (2.58), \\ \eta_\epsilon \in \text{compacto de } C([0, T]; H^{-1}(\Omega)). \end{array} \right. \quad (2.61)$$

(b) *Hipótesis para la Demostración de existencia de solución débil de (2.41–2.42).*
Si tan sólo imponemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ es un abierto acotado de } \mathbb{R}^3, \quad \partial\Omega \in W^{1,\infty}, \\ \rho_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathbf{f} \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3), \end{array} \right. \quad (2.62)$$

procediendo análogamente, podremos conseguir acotaciones suficientes para pasar al límite y obtener una sean solución débil de (2.41–2.42). Más precisamente, llegaremos a lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_\epsilon \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \mathbf{v}_\epsilon \text{ está acotada en } L^2(0, T; V), \\ q_\epsilon \text{ está acotada en } L^2(0, T; L_0^2(\Omega)), \\ \eta_{\epsilon t} \text{ está acotada en } L^2(0, T; W^{-1,3/2}(\Omega)), \\ \eta_\epsilon \in \text{compacto de } C([0, T]; H^{-1}(\Omega)). \end{array} \right. \quad (2.63)$$

■

PASO AL LÍMITE Y CONCLUSIONES

Gracias a las acotaciones y resultados de compacidad (2.53–2.59), podremos asegurar que existe una s.s. (que llamaremos igual) y una terna (ρ, \mathbf{u}, p) , tales que:

$$\begin{aligned} \eta_\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{en } L^\infty(L^\infty) \quad \text{y} \quad \eta_\epsilon \overset{\mathbf{f}}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{en } L^2(H^{-1}), \\ \mathbf{v}_\epsilon &\overset{\mathbf{d}}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \text{en } L^2(H^2 \cap V), \\ q_\epsilon &\overset{\mathbf{d}}{\rightharpoonup} p \quad \text{en } L^2(H^1 \cap L_0^2), \\ \eta_\epsilon \mathbf{v}_\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho \mathbf{u} \quad \text{en } L^2(L^\infty), \\ \epsilon \Delta \eta_\epsilon &\overset{\mathbf{d}}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{en } L^2(H^{-1}). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Con razonamientos similares a los realizados en el caso general, cf. §1.2.4, puede probarse que las convergencias anteriores son suficientes para poder pasar al límite en (2.43–2.44). En consecuencia, (ρ, \mathbf{u}, p) es una solución semi-fuerte de (2.41–2.42); gracias

a la regularidad obtenida para la solución límite, uno se da cuenta de que el problema de Stokes se verifica en forma fuerte (en $L^2(Q_T)$), mientras que la ecuación de transporte sólo en un sentido dual (el de $L^2(0, T; W^{-1, \infty}(\Omega))$).

Nota: Merece la pena destacar, que se puede pasar al límite directamente en la ecuación de transporte no conservativa (2.42), i.e. vamos a tener que

$$\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon \xrightarrow{d} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (2.65)$$

al menos en el sentido de las distribuciones. En efecto, por una parte, a partir de (2.55), tenemos que

$$\nabla \eta_\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; W^{-1, \infty}(\Omega)^3),$$

y, por otra, gracias a (2.58),

$$(\nabla \eta_\varepsilon)_t = \nabla(\eta_{\varepsilon t}) \text{ está acotada en } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)^3).$$

Por tanto, teniendo en cuenta la inyección compacta de $W^{-1, \infty}$ en $W^{-2, \infty}$ y el apartado (ii) del Lema 1.4, obtenemos

$$\nabla \eta_\varepsilon \xrightarrow{f} \nabla \rho \text{ en } C([0, T]; W^{-2, \infty}(\Omega)^3).$$

De lo anterior y (2.64), se deduce (2.65).

■

Llegamos así al siguiente resultado:

TEOREMA 2.9 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega \in W^{2, \infty}$ y sea $T > 0$. Si $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω y $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, entonces existe al menos una solución semi-fuerte (ρ, \mathbf{u}, p) del problema de Stokes con densidad variable (2.41-2.42) en Q_T . Además,*

$$0 \leq \rho \leq \sup_{\Omega} \rho_0 \text{ cpd. en } Q_T. \quad (2.66)$$

■

Notas:

(a) Recordando (2.60) y (2.61), llegamos a un nuevo resultado de existencia de solución: Si $\partial\Omega \in W^{1, \infty}$, se tiene (2.60) y $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω , entonces existe al menos una terna (ρ, \mathbf{u}, p) que cumple todas las propiedades de una solución semi-fuerte salvo la pertenencia a $L^\infty(Q_T)$ de ρ . Ahora sólo puede asegurarse que $\rho \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y verifica (2.66).

(b) Por otra parte, si sólo se tiene que (2.62) y $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω , existe (ρ, \mathbf{u}, p) con todas las propiedades de una solución débil salvo, de nuevo, el carácter L^∞ de ρ . Una vez más, $\rho \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y verifica (2.66).

(C) Gracias al Corolario 1.10, en las condiciones del Teorema, se tiene que

$$\rho \in C([0, T]; L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

■

2.3.3 Existencia de Solución Fuerte Global en Tiempo. Unicidad de Solución Semi-Fuerte

Veamos en este apartado dos resultados sobre soluciones fuertes y semi-fuertes:

1. Para datos algo más regulares que los considerados anteriormente, existe una solución fuerte global del problema de Stokes con densidad variable. Veremos que, en comparación con lo que ocurre para el problema de Navier-Stokes con densidad variable, el aumento de regularidad es más "natural", más parecido a como ocurre en el caso con densidad constante.
2. Si existe una solución semi-fuerte algo más regular, ésta es única. El razonamiento combina lo que ya se ha hecho en §2.2 con resultados obtenidos para el problema perturbado (2.43–2.44).

TEOREMA 2.10 (a) *En las condiciones del Teorema 2.9, si además*

$$f \in L^1(0, T; L^p(\Omega)^3) \quad \text{para algún } p > 3, \quad (2.67)$$

$$\rho_0 \in H^1(\Omega), \quad (2.68)$$

entonces la solución encontrada (ρ, \mathbf{u}, p) verifica:

$$\rho \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \rho_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\mathbf{u} \in L^1(0, T; W^{2,p}(\Omega)^3), \quad p \in L^1(0, T; W^{1,p}(\Omega)).$$

En particular, las edp. de (2.41–2.42) se verifican cpd. en Q_T .

(b) Si, además, $f \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3)$ y existe una solución con las propiedades precedentes del apartado (a) tal que $\nabla \rho \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3)$, entonces ésta es única.

■

No es difícil probar que, en las condiciones del apartado (a) precedente, si además $\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, entonces $\rho \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ (cf. [36]). Por tanto, se deduce fácilmente el siguiente:

COROLARIO 2.11 *En las condiciones del Teorema 2.9, si además se tiene*

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^3(\Omega)^3) \cap L^1(0, T; L^p(\Omega)^3) \quad \text{para algún } p > 3,$$

$$\rho_0 \in W^{1, \infty}(\Omega),$$

entonces existe una única solución fuerte de (2.41–2.42) en Q_T . Esta solución verifica además

$$\mathbf{u} \in L^1(0, T; W^{2, p}(\Omega)^3), \quad p \in L^1(0, T; W^{1, p}(\Omega)).$$

■

Resumen de la Demostración del Teorema 2.10: Nos limitaremos a indicar cómo se prueba el apartado (a) (el apartado (b) es un fácil ejercicio, teniendo en cuenta las demostraciones de unicidad ya realizadas para el problema general de Navier-Stokes con densidad variable y el problema perturbado de Stokes con densidad variable).

(a) Consideramos de nuevo el método de viscosidad artificial y los diferentes problemas perturbados (2.43–2.44). Se trata de obtener mejores estimaciones sobre $(\eta_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ (indep. de ε), que nos lleven a la conclusión del Teorema.

Gracias a (2.67–2.68), podremos suponer que, en (2.51) y (2.50),

$$\mathbf{f}_\varepsilon \text{ está acotada en } L^1(0, T; L^p(\Omega)^3) \quad (2.69)$$

y

$$\eta_{0\varepsilon} \text{ está acotada en } H^1(\Omega). \quad (2.70)$$

De (2.69), junto con (2.55) y la regularidad L^p del problema de Stokes, podemos deducir que

$$\mathbf{v}_\varepsilon \text{ está acotada en } L^1(0, T; W^{2, p}(\Omega)^3) \quad \text{y} \quad q_\varepsilon \text{ en } L^1(0, T; W^{1, p}(\Omega)).$$

En particular,

$$\nabla \mathbf{v}_\varepsilon \text{ está acotada en } L^1(0, T; L^\infty(\Omega)^{3 \times 3}). \quad (2.71)$$

Se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \eta_\varepsilon|_2^2 + \varepsilon |\Delta \eta_\varepsilon|_2^2 &= - \int_\Omega \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon \Delta \eta_\varepsilon \, dx \\ &= \int_\Omega [(\nabla \eta_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}_\varepsilon] \cdot \nabla \eta_\varepsilon \, dx \leq C \|\nabla \mathbf{v}_\varepsilon\|_\infty |\nabla \eta_\varepsilon|_2^2 \end{aligned}$$

de donde, gracias a (2.70–2.71),

$$\nabla \eta_\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3),$$

$\sqrt{\varepsilon}\Delta\eta_\varepsilon$ está acotada en $L^2(Q_T)$

y

$\eta_{\varepsilon t}$ está acotada en $L^2(Q_T)$.

Las estimaciones precedentes hacen que las funciones límites (ρ, \mathbf{u}, p) tengan la regularidad deseada. ■

Capítulo 3

El Problema con Difusión de Masa

Planteamos en este Capítulo el estudio teórico de un modelo con difusión de masa, bien adaptado a algunas situaciones físicas (cf. §3.1) y para el cual el problema de Navier-Stokes con densidad variable constituye una aproximación (cf. [53] y §3.4).

Se trata de modelar el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible formado por dos distintas componentes (homogéneas cada una de ellas), considerando un efecto de difusión que obedece a la ley de Fick (cf. [32] y las referencias allí dadas).

El modelo resultante es un sistema en unas nuevas variables, “densidad media, velocidad media y presión modificada” (ρ, u, P) ; aparece, entre otros, un término de difusión en la ecuación de continuidad, lo cual marcará la diferencia fundamental con el modelo de Navier-Stokes con densidad variable.

En la literatura existente, son objeto de estudio, por una parte, el modelo completo y, por otra, un modelo reducido, válido cuando el coeficiente de difusión es pequeño (cf. (3.4)), que aparece al despreciar los términos de difusión de mayor orden. En ambos modelos, la densidad siempre se supone acotada inferiormente por una constante estrictamente positiva. Los resultados conocidos, que detallamos en la Sección 3.2, llevan a

(a) La existencia de solución débil global para el modelo reducido cuando el coeficiente de difusión es pequeño.

(b) La existencia y unicidad de solución fuerte local en tiempo, para el modelo completo, que es global si los datos son pequeños (o bien el cociente difusión/viscosidad es pequeño).

(c) La “convergencia” de las soluciones fuertes a soluciones semi-fuertes de las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable cuando el coeficiente de difusión tiende a cero.

Conviene señalar que el concepto de solución débil del modelo reducido que mane-

jamos aquí (tomado de [32]) no es el análogo del utilizado en los Capítulos precedentes (cf. la Definición 3.1).

En las Secciones 3.1 y 3.2 se generalizan los resultados de (a) y (c). Por una parte, se prueba un resultado análogo al de (a) sin restricciones para la acotación inferior de la densidad inicial; por otra, se obtiene el análogo de (c) para las soluciones débiles del problema reducido.

3.1 Deducción del Modelo

En esta Sección, explicamos brevemente cómo se deduce el modelo con difusión de masa y cuál es el significado de las nuevas variables que aparecen en las ecuaciones. Para más detalles, cf. por ejemplo [32] y las referencias allí dadas.

Consideramos el movimiento de un fluido viscoso formado por dos componentes, por ejemplo, agua y agua salada, dentro de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ó 3) y durante un intervalo de tiempo $(0, T)$. Sean ρ_1, ρ_2 , las densidades características (constantes positivas) de cada una de las dos componentes de la mezcla y \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 sus velocidades. Denotamos $c = c(t, \mathbf{x})$, $d = d(t, \mathbf{x})$, las concentraciones de masa y de volumen resp. de la primera componente. En principio, c y d son incógnitas.

Definimos la densidad media de la mezcla como

$$\rho = d\rho_1 + (1 - d)\rho_2, \quad (3.1)$$

gracias a la relación masa-volumen-densidad, tendremos

$$\frac{c}{d} = \frac{\rho_1}{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{1 - c}{1 - d} = \frac{\rho_2}{\rho}. \quad (3.2)$$

Por otra parte, introducimos dos nuevas variables asociadas a la mezcla:

$$\mathbf{w} = c\mathbf{v}_1 + (1 - c)\mathbf{v}_2 : \text{velocidad-masa media} \quad (3.3)$$

y

$$\mathbf{u} = d\mathbf{v}_1 + (1 - d)\mathbf{v}_2 : \text{velocidad-volumen medio.} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta (3.2), se puede escribir

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\rho} [d\rho_1\mathbf{v}_1 + (1 - d)\rho_2\mathbf{v}_2], \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} [d\rho\mathbf{v}_1 + (1 - d)\rho\mathbf{v}_2].$$

Por tanto, podemos entender estas dos nuevas variables como sigue:

$\mathbf{w} \equiv$ velocidad media obtenida promediando los momentos lineales $\rho_1\mathbf{v}_1, \rho_2\mathbf{v}_2$

$\mathbf{u} \equiv$ velocidad media obtenida promediando las velocidades $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, una vez fijada la densidad media

En consecuencia, por lo que respecta al momento lineal, tendremos que

$\rho\mathbf{w} \equiv$ momento lineal medio

$\rho\mathbf{u} \equiv$ "momento lineal" obtenido a partir de la densidad media

Las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, nos llevan a las siguientes edp. en Q_T :

$$\rho[\mathbf{w}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}] - \mu \Delta \mathbf{w} - (\mu + \mu') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p, \quad (3.5)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0; \quad (3.6)$$

a éstas unimos la condición de incompresibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Aquí, \mathbf{f} (la función de densidad para la resultante de fuerzas exteriores) μ y μ' (los coeficientes de viscosidad, que se suponen constantes y necesariamente verifican $\mu > 0$, $3\mu' + 2\mu \geq 0$) son datos y p (la presión de la mezcla) es una nueva incógnita.

Por otra parte, suponemos que los efectos de difusión obedecen a la ley de Fick, que se enuncia como

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\rho} \nabla \rho, \quad \text{donde } \lambda > 0 \text{ es el coeficiente de difusión.} \quad (3.7)$$

(Una posible lectura de esta ley es la que sigue. La igualdad (3.7) se puede escribir también

$$\rho \mathbf{u} - \rho \mathbf{w} = \lambda \nabla \rho,$$

i.e. la diferencia entre los momentos lineales definidos anteriormente es proporcional a la variación de la densidad media; tiene, en consecuencia, una dirección perpendicular a las superficies de isovalores para la densidad).

La ley de difusión de Fick nos permite "eliminar" \mathbf{w} de las ecuaciones (3.5–3.6). Uno consigue, después de algunos cálculos, llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \rho[\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \mu \Delta \mathbf{u} - \lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho + (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u}] \\ & + \frac{\lambda^2}{\rho} \left[(\nabla \rho \cdot \nabla) \nabla \rho - \frac{1}{\rho} |\nabla \rho|^2 \nabla \rho + \Delta \rho \nabla \rho \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla P, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \lambda \Delta \rho = 0, \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.10)$$

Aquí,

$$P = p + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \lambda^2 \Delta \rho + \lambda(2\mu + \mu') \Delta \lg \rho$$

y se llama, por motivos obvios, presión modificada.

Al sistema (3.8–3.10) se le añaden unas condiciones suplementarias adecuadas:

- Las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T. \quad (3.11)$$

Naturalmente, $\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma$ donde $\Gamma = \partial\Omega$ es la frontera de Ω y \mathbf{n} es el vector normal exterior a dicha frontera. Las condiciones (3.11) significan que Γ es una pared impenetrable donde se adhieren las partículas de fluido y que, además, no existe flujo de masa a través de ella.

Es interesante hacer notar que la segunda condición de (3.11) podría ser cambiada por otra de tipo Dirichlet, al menos en aquella parte de Σ_T donde la densidad sea conocida.

- Condiciones iniciales para la densidad y para el campo de velocidades (ó para el momento lineal):

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.12)$$

y

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad (\text{ó bien } \rho\mathbf{u}|_{t=0} = \rho_0\mathbf{u}_0) \quad \text{en } \Omega. \quad (3.13)$$

Llegamos así al sistema "cerrado" (3.8–3.13). Una vez hallados ρ , \mathbf{u} y P , se calcularán las concentraciones de masa y de volumen de cada componente.

Cuando λ es pequeño, tiene validez un modelo reducido, en el que se desprecian los términos de (3.8) que multiplican a λ^2 , i.e. se cambia (3.8) por

$$\rho[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - \mu\Delta\mathbf{u} - \lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\rho + (\nabla\rho \cdot \nabla)\mathbf{u}] = \rho\mathbf{f} - \nabla P. \quad (3.14)$$

Mediante cálculos simples, podemos conseguir una formulación equivalente a (3.9–3.14) en forma conservativa:

$$(\rho\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u} - \lambda[\nabla\rho \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla\rho]) - \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} - \nabla p, \quad (3.15)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) - \lambda\Delta\rho = 0, \quad (3.16)$$

junto con (3.10–3.13). Es precisamente esta escritura del problema la que nos permite definir el concepto de solución débil.

3.2 Solución Débil y Solución Fuerte. Algunos Resultados Conocidos

Por simplicidad, vamos a suponer en todo el Capítulo, que el abierto Ω que ocupa el fluido es acotado y de frontera regular y que el intervalo temporal de observación es $(0, T)$ con $T > 0$ finito.

Consideramos el espacio afín

$$H_N^k(\Omega) = \left\{ \rho \in H^k(\Omega) : \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \right\}$$

(cf. [35,38,61] para ver sus propiedades). Obviamente,

$$H_N^k(\Omega) = C_0 + H_{N,0}^k(\Omega),$$

donde C_0 es la función Cte.

$$C_0(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x})$$

y $H_{N,0}^k(\Omega)$ es el espacio

$$H_{N,0}^k(\Omega) = \left\{ \rho \in H^k(\Omega) : \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

(recordemos que $H_N^2(\Omega)$ y $H_{N,0}^2(\Omega)$ fueron ya mencionados en §2.3.2). No es difícil probar que $H_{N,0}^k(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^k(\Omega)$ y, por tanto, un nuevo espacio de Hilbert para la norma $\|\cdot\|_k$. Además, las normas siguientes son equivalentes:

$$\|\rho\|_2 \text{ y } |\Delta\rho|_2 \text{ en } H_{N,0}^2(\Omega),$$

$$\|\rho\|_3 \text{ y } |\nabla(\Delta\rho)|_2 \text{ en } H_{N,0}^3(\Omega).$$

DEFINICIÓN 3.1 Dadas $\rho_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in H$ y $\mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, se dice que el par (ρ, \mathbf{u}) , con

$$\begin{cases} \rho \in L^2(0, T; H_N^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \text{ cpd. en } (0, T), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V), \quad \rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (3.18)$$

es una solución débil de (3.9–3.14) en Q_T si se verifica:

(3.9) cpd. en Q_T ,

(3.10) y (3.11) en el sentido de la pertenencia cpd. en $(0, T)$ a $H_N^2(\Omega)$ y V de ρ y \mathbf{u} resp.,

(3.12) en $H^1(\Omega)$,

(3.13) y (3.15) en el siguiente sentido "débil":

$$\begin{cases} \int \int_{Q_T} -\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_t - \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u} - \lambda [\nabla \rho \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla \rho]\} : \nabla \varphi + \int \int_{Q_T} \rho \mathbf{f} \cdot \varphi \\ = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, +\infty) \times \Omega)^3 \text{ con } \nabla \cdot \varphi = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

■

Nota: Debido a la presencia del término de difusión $-\lambda \Delta \rho$ en (3.9), cabe esperar que ρ sea más regular que en el caso del problema de Navier-Stokes con densidad variable; de hecho, se verifica la ecuación (3.9) cpd. en Q_T . Por otra parte, gracias a (3.17) y a la ecuación (3.9), $\rho \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ y, además,

$$\rho : [0, T] \mapsto H^1(\Omega) \text{ es continua débil}$$

(cf. [61]), por lo que tiene sentido la condición inicial (3.12) en $H^1(\Omega)$. Al igual que para el caso del problema de Navier-Stokes con densidad variable (recuérdese que estamos en el caso de Ω acotado de frontera regular), ahora (3.19) es equivalente a que exista una distribución $P \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tales que, se verifica (3.15) en $W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ y las condiciones iniciales (3.13) en el siguiente sentido débil:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in C([0, T]) \quad \text{y} \quad \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.20)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (3.17) y (3.18), la regularidad de los sumandos de (3.19) implica que también se verifica (3.19) para cada $\varphi \in W^{1,1}(0, T; V)$ tal que $\varphi(T) = 0$.

■

DEFINICIÓN 3.2 Dadas $\rho_0 \in H^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in V$ y $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, se dice que una solución débil (ρ, \mathbf{u}, P) , con,

$$\rho \in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap C([0, T]; H^2(\Omega)), \quad \rho_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3 \cap V) \cap C([0, T]; H^1(\Omega)^3), \quad \mathbf{u}_t \in L^2(0, T; H), \quad (3.22)$$

$$P \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.23)$$

es una solución fuerte de (3.8–3.13) en Q_T si se verifican las edp. (3.8–3.10) cpd. en Q_T , las condiciones de contorno en el sentido de la Definición 3.1 y las condiciones iniciales (3.12) y (3.13) en el sentido de $H^2(\Omega)$ y V resp.

■

Enunciamos a continuación, los principales resultados conocidos sobre estos modelos. En ellos, se impone la condición (físicamente natural):

$$\rho_0 \geq \alpha > 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.24)$$

La existencia de solución débil (global) y solución fuerte (local) del problema reducido y también la unicidad de solución fuerte, es probada por Kazhikhov y Smagulov en [32]:

TEOREMA 3.3 (a) Si $u_0 \in H$, $\rho_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ verifica (3.24), $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ y, además,

$$\lambda < \frac{2\mu}{R - \alpha}, \quad \text{donde } R = \|\rho_0\|_\infty, \quad (3.25)$$

entonces existe al menos una solución débil del problema reducido con difusión de masa (3.9–3.16) en Q_T .

(b) En las condiciones del apartado (a), si

$$u_0 \in V, \quad \rho_0 \in H^2(\Omega) \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{y} \quad f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3),$$

entonces existe $T_* \in (0, T]$ y una única solución fuerte en Q_{T_*} .

■

Un primer resultado de existencia local del problema completo, pero con $\mu = 0$ (fluido no viscoso), es probado por Beirao da Veiga, Serapioni y Valli en [5], sin imponer la restricción (3.25). Además, P. Secchi en [52] obtiene un resultado similar, con $\mu > 0$ y $\Omega = \mathbb{R}^3$. En ambos casos, las Demostraciones de los resultados se basan en un argumento de punto fijo y utilizan problemas intermedios conseguidos al calcular el rotacional y la divergencia de los distintos términos en las edp. Posteriormente, Beirao da Veiga en [4], de nuevo sin imponer (3.25), demuestra el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución fuerte local, que es global si los datos son “pequeños”. Se prueba también en esta referencia que, si $f = 0$, el par (ρ, u) decrece exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$ hacia $(\bar{\rho}, 0)$, donde

$$\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_0(x) dx. \quad (3.26)$$

TEOREMA 3.4 En las condiciones del apartado (b) del Teorema 3.3 pero con $\lambda > 0$ arbitrario, existen $T_* \in (0, T]$ y una única solución fuerte local de (3.8–3.13) en $(0, T_*)$. Además, si $f \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$, existen constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ que dependen a lo más de Ω, μ, λ y $\bar{\rho}$ tales que, si

$$\|u_0\|_V + \|\rho_0 - \bar{\rho}\|_2 \leq k_1 \quad \text{y} \quad \|f\|_{\infty; 2; Q_\infty} \leq k_2,$$

entonces la solución está bien definida en todo $[0, +\infty)$ y

$$\|u(t)\|_V \quad y \quad \|\rho(t) - \bar{\rho}\|_2 \leq k_3 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

En tal caso, si $f = 0$, entonces existe $k_4 > 0$ también dependiente de Ω, μ, λ y $\bar{\rho}$ tal que

$$\|u(t)\|_V + \|\rho(t) - \bar{\rho}\|_2 \leq (\|u_0\|_V + \|\rho_0 - \bar{\rho}\|_2) e^{-k_4 t} \quad \forall t \geq 0.$$

■

Indiquemos por último que, en el marco de un fluido bidimensional, P. Secchi demuestra en [53] la existencia de solución fuerte (única), que está definida en $[0, +\infty)$ si λ/μ es pequeño. Por otra parte, tanto en éste como en el caso tridimensional, P. Secchi demuestra la “convergencia” en algún $(0, T_*)$ de la solución fuerte de (3.8–3.13) hacia una solución semi-fuerte del problema de Navier-Stokes con densidad variable (véase la Definición 2.1) cuando $\lambda \rightarrow 0$.

En las dos Secciones siguientes vamos a demostrar, por una parte, la existencia de solución débil global del problema reducido (3.9–3.16) y, por otra, la convergencia (en un cierto sentido) de estas soluciones, cuando λ tiende a 0, hacia una solución débil del problema de Navier-Stokes con densidad variable (véase la Definición 1.1). Ambos resultados se van a demostrar sin imponer la condición (3.24), tan sólo exigiendo a ρ_0 que sea $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω .

3.3 Existencia de Solución Débil sin Restricciones para la Densidad Inicial

Presentaremos en esta Sección un resultado de existencia de solución débil, global en tiempo, del problema reducido con difusión de masa (3.9–3.14) sin imponer la restricción (3.24) sobre la densidad inicial.

El resultado principal de esta Sección es el siguiente

TEOREMA 3.5 Sean

$$\mathbf{u}_0 \in H, \quad \rho_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (3.27)$$

Supongamos que $\rho_0 \geq 0$ cpd. en Ω y que

$$\lambda < \frac{\mu}{R}, \quad \text{donde } R = |\rho_0|_\infty, \quad (3.28)$$

Entonces existe al menos una solución débil (ρ, \mathbf{u}) del problema reducido con difusión de masa (3.9–3.16) en Q_T (en el sentido de la Definición 3.1). Además, existe una distribución

$$P \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

tal que la terna (ρ, \mathbf{u}, P) verifica (3.15) en $W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. También se tiene (3.13) en el sentido débil de (3.20) y, además,

$$|\rho^{1/2} \mathbf{u}(t)|_2 \in C([0, T]) \quad \text{y} \quad |\rho^{1/2} \mathbf{u}(0)|_2 = |\rho_0^{1/2} \mathbf{u}_0(t)|_2.$$

■

Notas:

(a) En el caso particular en que $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en Ω , podremos obtener directamente las ecuaciones de momentos no conservativas (3.14) al pasar al límite en una sucesión de soluciones aproximadas que vamos a construir en la Demostración; recordemos que esto no era posible en el marco del problema de Navier-Stokes con densidad variable.

(b) El razonamiento se puede extender al caso $T = +\infty$ de manera similar a como se ha hecho en §1.2. En cambio, el caso en que Ω es no acotado no parece tener tratamiento análogo, ya que en el transcurso de la Demostración vamos a utilizar, por ejemplo, la equivalencia de normas en $H_{N,0}^2(\Omega)$, que no es cierta en general para Ω no acotado.

■

Demostración del Teorema 3.5: Será parecida a la realizada en §1.2.3 y §1.2.4 (ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable). De todas formas, el problema que ahora nos ocupa, presenta dos grandes diferencias con el considerado en la Sección 1.2:

1. La aparición del término $-\lambda\Delta\rho$ en (3.9), que hace que vayamos a tener mayor regularidad para ρ . De hecho, pasamos de un sistema hiperbólico-parabólico a otro parabólico-parabólico.

2. El término adicional

$$-\lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\rho + (\nabla\rho \cdot \nabla)\mathbf{u}]$$

presente en (3.14) (y (3.15)), lo que significa la introducción de nuevas no linealidades.

A la vista de lo anterior, el Teorema 3.5 nos viene a decir que la presencia del término $-\lambda\Delta\rho$ sirve para "controlar" adecuadamente los nuevos términos no lineales de (3.14). En cualquier caso, seguiremos obteniendo (y utilizando) acotaciones L^∞ para ρ , aplicando el Principio del Máximo a la ecuación de transporte-difusión (3.9).

La principal aportación de esta Memoria en relación con (3.9-3.14) está en extender el Teorema 3.3(a) al caso en que sólo se impone que $\rho_0 \geq 0$ en Ω . Sin embargo, dado que en [32] sólo se enuncia el resultado y se hacen algunas indicaciones sobre su Demostración, vamos a detallar seguidamente los puntos más importantes de la misma.

De nuevo, las diferencias esenciales con la Sección 1.2, están localizadas en el procedimiento de estimaciones "a priori" y en el paso al límite en los nuevos términos. Se considera una discretización de semi-Galerkin para definir las soluciones aproximadas (ρ^m, \mathbf{u}^m) , cuya existencia queda establecida de manera similar a como se hace en la Sección 1.2, cf. el Apéndice B. Se puede pensar, por ejemplo, en obtener un Punto Fijo $\mathbf{u}^m \in W^{1,1}(0, T; V^m)$ (V^m como en §1.2.3) usando las propiedades del problema de transporte-difusión constituido por (3.9) y (3.12); de esta manera no habría que regularizar \mathbf{f} ni ρ_0 . Por otra parte, la unicidad de solución aproximada es fácil de deducir con argumentos "standard" (cf. [63], donde se demuestra la unicidad de solución fuerte).

Describamos a continuación el procedimiento de estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas. Por cuestiones de comodidad en la notación, suprimiremos el índice m siempre que no haya ambigüedad. Supongamos que (ρ, \mathbf{u}) , con

$$\rho \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T), \quad \int_\Omega \rho(t, \mathbf{x}) = \int_\Omega \rho_0(\mathbf{x}) \quad \text{cpd. en } \Omega$$

y

$$\mathbf{u} \in W^{1,1}(0, T; V^m)$$

es la m -ésima solución aproximada asociada a los datos $(\rho_0 + 1/m, \mathbf{u}_0^m, \mathbf{f})$; aquí, suponemos que (\mathbf{u}_0^m) es una sucesión construida como en §1.2.3. Se tiene, por tanto, que

$$\begin{cases} \int_\Omega \{\rho[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f}] - \lambda[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\rho + (\nabla\rho \cdot \nabla)\mathbf{u}]\} \cdot \mathbf{v} \\ + \mu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^m \quad \text{cpd. en } (0, T), \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \lambda \Delta \rho = 0 \quad \text{cpd. en } Q_T, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 + 1/m \quad \text{en } \Omega, \quad (3.30)$$

Naturalmente, (ρ, \mathbf{u}) también verifica la forma conservativa correspondiente:

$$\int_{\Omega} \{(\rho \mathbf{u})_t - \rho \mathbf{f}\} \cdot \mathbf{v} + \{-\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u} + \lambda[\nabla \rho \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla \rho]\} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^m, \quad (3.31)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \lambda \Delta \rho = 0. \quad (3.32)$$

A) Primeras Estimaciones para ρ : Multiplicando (3.30) por $\rho(t)$ para cada t (cpd. en $(0, T)$) e integrando en Ω , es fácil obtener la identidad de energía para ρ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\rho|_2^2 + \lambda |\nabla \rho|_2^2 = 0 \quad \text{cpd. en } (0, T).$$

Por tanto,

$$\rho \in \text{acotado de } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.33)$$

Por otra parte, sabemos que

$$\frac{1}{m} \leq \rho \leq R + \frac{1}{m} \quad \text{cpd. en } Q_T;$$

luego también

$$\rho \in \text{acotado de } L^\infty(Q_T). \quad (3.34)$$

B) Estimaciones de \mathbf{u} : Un procedimiento similar al de §1.2.3, usando ahora (3.29) y (3.32), conduce a la siguiente identidad de energía para \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \mu |\nabla \mathbf{u}|_2^2 \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \lambda [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho] \cdot \mathbf{u} + \lambda [(\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} - \lambda \frac{1}{2} \nabla \rho \cdot \nabla (|\mathbf{u}|^2) \right) \\ &= \int_{\Omega} (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \lambda [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho] \cdot \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho] \cdot \mathbf{u} = - \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \nabla \rho = \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t. \quad (3.35)$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 + \mu |\nabla \mathbf{u}|_2^2 - \lambda \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

Si probamos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I \equiv \mu |\nabla \mathbf{u}|_2^2 - \lambda \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t \geq \beta |\nabla \mathbf{u}|_2^2, \quad (3.36)$$

obtendremos la desigualdad de energía "habitual"

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 + \beta |\nabla \mathbf{u}|_2^2 \leq \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad \text{cpd. en } (0, T). \quad (3.37)$$

En este punto, es donde vamos a utilizar la hipótesis adicional (3.28). En efecto, sea $m_0 = m_0(\lambda, R)$ tal que $\lambda(R + 1/m) < \mu$ para cada $m \geq m_0$. Si ponemos

$$\mu_1 = \lambda(R + 1/m) < \mu \quad \text{y} \quad \beta = \mu - \mu_1 > 0,$$

tendremos que, para cada $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} I &\geq \beta |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + \frac{\mu_1}{R + 1/m} \int_{\Omega} \rho |\nabla \mathbf{u}|^2 - \lambda \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t \\ &= \beta |\nabla \mathbf{u}|_2^2 + \lambda \int_{\Omega} \rho \{ |\nabla \mathbf{u}|^2 - \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t \}. \end{aligned}$$

A partir de aquí, se tiene fácilmente (3.36), ya que

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 - \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}^t = u_{x_j}^i u_{x_j}^i - u_{x_j}^i u_{x_i}^j = \sum_{i < j} (u_{x_j}^i - u_{x_i}^j)^2 \geq 0.$$

Por un razonamiento similar al de §1.2.3, a partir de (3.37) podemos conseguir que

$$\rho^{1/2} \mathbf{u} \text{ y } \rho \mathbf{u} \in \text{acotado de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (3.38)$$

$$\mathbf{u} \in \text{acotado de } L^2(0, T; V) \quad (3.39)$$

y

$$\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \in \text{acotado de } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3}). \quad (3.40)$$

C) Nuevas Estimaciones de ρ : Probemos a continuación estimaciones de segundo orden (en lo que se refiere a las derivadas parciales respecto de las \mathbf{x}^i) y de primer orden (en cuanto a la derivada respecto de t). Multiplicando (3.30) por $-\Delta \rho(t)$ e integrando en Ω , obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \rho|_2^2 + \lambda |\Delta \rho|_2^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \Delta \rho \, dx \equiv J \quad \text{cpd. en } (0, T).$$

Haciendo algunas integraciones por partes en el término de la derecha (las integrales sobre la frontera se anulan debido a que $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0$ y $\mathbf{u} = 0$ sobre Σ_T), resulta:

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \cdot \nabla \rho \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho \cdot \nabla \rho. \end{aligned}$$

Dado que el último sumando es

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla(|\nabla\rho|^2) = 0,$$

tendremos

$$J \leq C \int_{\Omega} |\nabla\rho|^2 |\nabla\mathbf{u}| \leq C |\nabla\rho|_4^2 |\nabla\mathbf{u}|_2.$$

Utilizando la desigualdad de interpolación (cf. [37])

$$|\nabla\rho|_4^2 \leq C |\Delta\rho|_2 |\rho|_{\infty},$$

llegamos en consecuencia a que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla\rho|_2^2 + \lambda |\Delta\rho|_2^2 \leq CR |\Delta\rho|_2 |\nabla\mathbf{u}|_2 \quad \text{cpd. en } (0, T).$$

Dado que $\rho_0 \in H^1(\Omega)$, aplicando el Lema de Gronwall y la equivalencia de normas en $H_{N,0}^2(\Omega)$, deducimos que

$$\rho \in \text{acotado de } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.41)$$

Finalmente, gracias a (3.30) y a las estimaciones precedentes:

$$\rho_t \in \text{acotado de } L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^3(\Omega)). \quad (3.42)$$

D) Estimaciones de Tipo Derivada Fraccionaria de $\rho\mathbf{u}$: Con las acotaciones conseguidas hasta ahora, se podrá pasar al límite en (3.32) y en todos los términos de (3.31) salvo $\rho\mathbf{u}\mathbf{u}$; para éste hace falta probar que $\rho\mathbf{u}$ se mueve en un compacto de algún espacio L^q (cf. §1.2.4). Esto será consecuencia de ciertas estimaciones de tipo derivada fraccionaria en tiempo que usan los espacios de Nikolskii (cf. §1.1.2).

El razonamiento es similar al realizado en §1.2.3, por lo que previamente acotaremos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{para cada } \mathbf{v} \in V^m.$$

Teniendo en cuenta (3.31), resulta que

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right| \leq (|\rho\mathbf{u}\mathbf{u} - \lambda(\nabla\rho \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla\rho) - \mu\nabla\mathbf{u}|_2 + R|\mathbf{f}|_2) \|\mathbf{v}\|_V$$

de donde, gracias a (3.39), (3.40) y (3.41),

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right| \leq g(t) \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V^m \quad (3.43)$$

siendo g la suma del m -ésimo término de una sucesión acotada en $L^{4/3}(0, T)$ y una función de $L^1(0, T)$.

En las tres primeras etapas de las estimaciones fraccionarias, hay poca variación con respecto a lo que se hace en §1.2.3. Para la Etapa 1 se aplica (3.43) y para la Etapa 2 se considera la ecuación de transporte-difusión. Por tanto, existe $C > 0$ tal que si $0 < h < T$, entonces:

$$\|\tau_h \rho(\tau_h \mathbf{u} - \mathbf{u})\|_{L^2(0, T-h; L^2)} \leq C h^{1/4}. \quad (3.44)$$

Etapa 4: Conseguimos una estimación similar a (3.44) para $(\tau_h \rho - \rho)\mathbf{u}$. Se tiene

$$(\tau_h \rho - \rho)(t) = \int_t^{t+h} \rho_t(s) ds.$$

Por tanto, como debido a (3.42) podemos obtener fácilmente que ρ_t está acotada en $L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega))$, tendremos:

$$|(\tau_h \rho - \rho)(t)|_2 \leq \int_t^{t+h} |\rho_t(s)|_2 ds \leq C h^{1/4},$$

i.e.

$$\|\tau_h \rho - \rho\|_{L^\infty(0, T-h; L^2)} \leq C h^{1/4}.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta (3.39),

$$\|(\tau_h \rho - \rho)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T-h; L^{3/2})} \leq C h^{1/4}. \quad (3.45)$$

Finalmente, (3.44) y (3.45) llevan claramente a que

$$\rho \mathbf{u} \in \text{acotado de } N^{1/4, 2}(0, T; L^{3/2}(\Omega)^3). \quad (3.46)$$

Por otra parte, a partir de (3.39) y (3.41) se deduce que

$$\rho \mathbf{u} \in \text{acotado de } L^2(0, T; W_0^{1, 3/2-\varepsilon}(\Omega)^3) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Las dos estimaciones anteriores y el apartado (iii) del Lema 1.4 implican:

$$\rho \mathbf{u} \in \text{compacto de } L^2(0, T; L^r(\Omega)^3) \quad \forall r < 3 \quad (3.47)$$

(además, como $\rho \mathbf{u}$ está acotado en $L^2(0, T; L^6(\Omega)^3)$, se cumple fácilmente (3.47) para cada $r < 6$).

E) Paso al Límite: Para la mayoría de los términos involucrados, el proceso es similar al de §1.2.4. Sólo detallaremos el paso al límite en el nuevo término

$$\nabla \cdot (\nabla \rho \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla \rho) \quad (3.48)$$

que aparece en (3.31). Obviamente, a partir de (3.42), resulta que

$$(\nabla\rho)_t \in \text{acotado de } L^2(0, T; W^{-1,3/2}(\Omega)^3),$$

que junto con (3.41), implica:

$$\nabla\rho \in \text{compacto de } L^2(0, T; L^q(\Omega)^3) \quad \forall q < 6.$$

Por tanto, la convergencia de los términos $\nabla\rho \otimes \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \otimes \nabla\rho$, débil en $L^1(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3})$ se deduce fácilmente (y, también en $L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3})$, ya que los términos anteriores están acotados en este espacio). En consecuencia, se tiene convergencia débil de (3.48) en $L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$.

Obsérvese que este razonamiento también es válido para deducir la convergencia del término $\mathbf{u} \cdot \nabla\rho$, por lo que se consigue la ecuación de transporte-difusión no conservativa directamente, tomando límites en las soluciones aproximadas.

El resto de las conclusiones del Teorema 3.5 se puede obtener de forma similar a como se hace en el Teorema 1.12.

■

3.4 El Comportamiento de la Solución Débil cuando $\lambda \rightarrow 0$

Ya sabemos, cf. [53], que las soluciones fuertes del problema completo de difusión de masa (3.8–3.13) convergen, en un cierto sentido, hacia soluciones semi-fuertes de las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable.

Nuestro objetivo en esta Sección es obtener un resultado análogo en el caso de soluciones débiles del problema reducido con difusión de masa (3.9–3.14).

Este resultado también puede ser observado como una nueva Demostración de la existencia de solución débil para el problema de Navier-Stokes con densidad variable (ya demostrado en §1.2 en un caso general). Ahora, utilizamos un método de viscosidad artificial eligiendo un problema perturbado muy peculiar, con origen en el modelado de algunos fenómenos físicos, cf. 3.1. En el desarrollo de esta Memoria, ya hemos empleado el método de viscosidad artificial con otros propósitos; recuérdese el tratamiento dado al problema de Stokes con densidad variable en la Sección 2.4

Se trata, “grosso modo”, de

1. Considerar para cada $\lambda > 0$ “pequeño” una solución débil $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda, P^\lambda)$ del problema reducido de difusión de masa.
2. Obtener “buenas” acotaciones de $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$ (independientes de λ), para lo que razonaremos como en la Demostración del Teorema 3.5.
3. Tomar límites cuando $\lambda \rightarrow 0$, al menos sobre una s.s. y probar que $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda) \rightarrow (\rho, \mathbf{u})$ en un cierto sentido que especificaremos, siendo (ρ, \mathbf{u}) , junto con una cierta p , una solución débil del problema de Navier-Stokes con densidad variable.

Nótese que en el Teorema 3.3, no tenemos asegurada la unicidad de solución débil de (3.9–3.14), por lo que, para cada λ , habrá que fijar una solución. Por otra parte, como tampoco tenemos unicidad para el problema “límite” (cf. la Sección 2.2 para más detalles sobre esta cuestión), no podemos asegurar que sea la sucesión completa $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$ la que converja, sino tan sólo una s.s.. Desde luego, cualquier s.s. que converja lo hará hacia una solución débil.

Por último, como habrá que imponer que se verifican las hipótesis del Teorema 3.5, la Demostración que sigue es válida sólo cuando Ω es un acotado; recuérdese que una posible extensión a un dominio no acotado no es en absoluto evidente.

TEOREMA 3.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y $T > 0$,

$$\mathbf{u}_0 \in H, \quad \rho_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{con} \quad \rho_0 \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (3.49)$$

Para cada $\lambda \in (0, \mu/R)$ (donde $R = |\rho_0|_\infty$), sea $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda, P^\lambda)$ una solución débil del problema reducido con difusión de masa (3.9–3.14) en Q_T (proporcionada por el Teorema 3.5). Existe entonces una s.s. $\{(\rho^{\lambda'}, \mathbf{u}^{\lambda'}, P^{\lambda'})\}$ y una terna (ρ, \mathbf{u}, p) , tales que

$$\rho^\lambda \xrightarrow{*} \rho \text{ en } L^\infty(Q_T) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}^\lambda \xrightarrow{d} \mathbf{u} \text{ en } L^2(0, T; V)$$

cuando $\lambda' \rightarrow 0$ y (ρ, \mathbf{u}, p) es una solución débil del problema de Navier-Stokes con densidad variable en Q_T . Además, cualquier s.s. de $\{(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda, P^\lambda)\}$ que converja en el sentido precedente lo hace hacia una solución.

Demostración: Teniendo en cuenta (3.49), para cada λ tal que $0 < \lambda < \mu/R$, consideramos una solución débil

$$(\rho, \mathbf{u}, P) \equiv (\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda, P^\lambda)$$

del problema reducido de difusión de masa (3.9–3.13), construida como en el Teorema 3.5 y asociada a los datos $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0^\lambda, \rho_0)$, donde las \mathbf{u}_0^λ verifican:

$$\mathbf{u}_0^\lambda \in V, \quad \mathbf{u}_0^\lambda \xrightarrow{f} \mathbf{u}_0 \text{ en } H \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0. \quad (3.50)$$

En primer lugar, observemos que

$$0 \leq \rho^\lambda \leq R \text{ cpd. en } Q_T;$$

en particular,

$$\rho^\lambda \text{ está acotada en } L^\infty(Q_T). \quad (3.51)$$

También, gracias a las propiedades de la ecuación de transporte-difusión (3.9), sabemos que

$$|\rho^\lambda|_{\infty;2} \leq C \quad \text{y} \quad \sqrt{\lambda} |\nabla \rho^\lambda|_{2;2} \leq C,$$

donde las ctes. C dependen tan sólo de $|\rho_0|_\infty$. Por tanto,

$$\sqrt{\lambda} \nabla \rho^\lambda \text{ está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Como ya sabemos, para obtener mejores estimaciones de ρ^λ , tenemos que conseguir previamente acotaciones para \mathbf{u}^λ . Como no podemos razonar directamente sobre las $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$, acudiremos a las soluciones aproximadas $(\rho^{m\lambda}, \mathbf{u}^{m\lambda})$ de las $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$. Posteriormente, las acotaciones conseguidas sobre $(\rho^{m\lambda}, \mathbf{u}^{m\lambda})$, deducidas con razonamientos similares a los de la Demostración del Teorema 3.5, se podrán “traspasar” a $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$ teniendo en cuenta la compatibilidad de los límites (débil, débil* y fuerte) con respecto a las acotaciones.

Gracias a (3.37–3.40), tenemos acotadas las normas

$$|(\rho^{m\lambda})^{1/2} \mathbf{u}^{m\lambda}|_{\infty;2}, \quad \|\mathbf{u}^{m\lambda}\|_{L^2(V)} \quad \text{y} \quad |\rho^{m\lambda} \mathbf{u}^{m\lambda} \mathbf{u}^{m\lambda}|_{4/3;2}$$

por constantes dependientes sólo de $|\mathbf{f}|_{1;2}$, $|\rho_0|_{\infty}$ y $|\mathbf{u}_0^\lambda|_2$. Por tanto, teniendo en cuenta (3.50),

$$(\rho^\lambda)^{1/2} \mathbf{u}^\lambda \quad \text{y} \quad \rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \quad \text{están acotadas en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (3.52)$$

$$\mathbf{u}^\lambda \quad \text{está acotada en } L^2(0, T; V), \quad (3.53)$$

$$\rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \mathbf{u}^\lambda \quad \text{está acotada en } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3}). \quad (3.54)$$

Para obtener mejores estimaciones sobre ρ^λ , partimos de las siguientes desigualdades (ya obtenidas en la Demostración del Teorema 3.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \rho^{m\lambda}|_2^2 + \lambda |\Delta \rho^{m\lambda}|_2^2 &\leq C R |\Delta \rho^{m\lambda}|_2 |\nabla \mathbf{u}^{m\lambda}|_2 \\ &\leq \frac{\lambda}{2} |\Delta \rho^{m\lambda}|_2^2 + \frac{C}{\lambda} |\nabla \mathbf{u}^{m\lambda}|_2^2, \end{aligned}$$

donde C es independiente de λ . Resulta entonces que

$$\lambda \frac{d}{dt} |\nabla \rho^{m\lambda}|_2^2 + \lambda^2 |\Delta \rho^{m\lambda}|_2^2 \leq C |\nabla \mathbf{u}^{m\lambda}|_2^2$$

y, gracias a (3.53) y el Lema de Gronwall,

$$\sqrt{\lambda} |\nabla \rho^{m\lambda}|_{\infty;2} \leq C \quad \text{y} \quad \lambda |\Delta \rho^{m\lambda}|_{2;2} \leq C$$

donde ahora la cte. C puede depender de $|\nabla \rho_0|_2$. En consecuencia,

$$\sqrt{\lambda} \nabla \rho^\lambda \quad \text{está acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (3.55)$$

$$\lambda \Delta \rho^\lambda \quad \text{está acotada en } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.56)$$

Por tanto, gracias a la equivalencia de normas en $H_{N,0}^2(\Omega)$, es inmediato que

$$\lambda \rho^\lambda \quad \text{está acotada en } L^2(0, T; H^2(\Omega)). \quad (3.57)$$

A partir de (3.55) y (3.57) vamos a obtener, mediante un argumento de interpolación, la acotación siguiente:

$$\lambda^{3/4} \nabla \rho^\lambda \quad \text{está acotada en } L^4(0, T; L^3(\Omega)^3). \quad (3.58)$$

En efecto, como $\frac{1}{3} = \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{6}$,

$$\lambda^{3/4} |\nabla \rho^\lambda|_3 \leq \lambda^{1/4} |\nabla \rho^\lambda|_2^{1/2} \lambda^{1/2} |\nabla \rho^\lambda|_6^{1/2} \leq C |\sqrt{\lambda} \nabla \rho^\lambda|_2^{1/2} \|\lambda \rho^\lambda\|_{H^2}^{1/2},$$

de donde tendremos (3.58) fácilmente. Escribamos ahora la ecuación de transporte-difusión como sigue:

$$\rho_t^\lambda = -\nabla \cdot (\rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda) + \lambda \Delta \rho^\lambda.$$

A partir de (3.51), (3.53) y (3.56), deduciremos que

$$\rho_t^\lambda \text{ está acotada en } L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)). \quad (3.59)$$

Esta acotación es suficiente para que, junto a (3.51), implique

$$\rho^\lambda \in \text{compacto de } C([0, T]; W^{-1,\infty}) \quad (3.60)$$

después de aplicar el apartado (ii) del Lema 1.4.

Por otra parte, a partir de la ecuación de movimiento que verifica $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$, se tiene que, para cada $\mathbf{v} \in V$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} ([\rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \mathbf{u}^\lambda - \lambda(\nabla \rho^\lambda \otimes \mathbf{u}^\lambda + \mathbf{u}^\lambda \otimes \nabla \rho^\lambda) - \mu \nabla \mathbf{u}^\lambda] \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho^\lambda \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$$

al menos en $\mathcal{D}'(0, T)$. De donde, gracias a (3.51), (3.53), (3.54) y (3.58), se deduce que

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{v} \right| \leq (K + g^\lambda) \|\mathbf{v}\|_V, \quad (3.61)$$

donde $K \in L^1(0, T)$ y (g^λ) es una sucesión acotada en $L^{4/3}(0, T)$. Nótese que

$$\lambda^{3/4}(\nabla \rho^\lambda \otimes \mathbf{u}^\lambda + \mathbf{u}^\lambda \otimes \nabla \rho^\lambda) \text{ está acotada en } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3}). \quad (3.62)$$

Para obtener estimaciones de tipo derivada fraccionaria en tiempo de $(\rho^\lambda, \mathbf{u}^\lambda)$, podemos razonar con las ecuaciones "continuas", sin necesidad de recurrir a las soluciones aproximadas (al igual que en el caso sin difusión, cf. Teorema 1.12 y [55, Proposición 8]). De nuevo, las tres primeras etapas son similares a las de §1.2.3, donde ahora se utiliza (3.61), obteniéndose que

$$\|\tau_h \rho^\lambda (\tau_h \mathbf{u}^\lambda - \mathbf{u}^\lambda)\|_{L^2(0, T-h; L^2)} \leq C h^{1/4}. \quad (3.63)$$

En lo que se refiere a la cuarta etapa, no podemos razonar como en la Demostración del Teorema 3.5, ya que no se tiene (3.42) para ρ_t^λ . En cambio, sí puede uno proceder como en el caso sin difusión, cf. §1.2.3. Se obtiene, gracias a (3.59),

$$\|\tau_h \rho^\lambda - \rho^\lambda\|_{L^\infty(0, T-h; W^{-1,6})} \leq C h^{1/4},$$

de donde, gracias a (3.53),

$$\|(\tau_h \rho^\lambda - \rho^\lambda) \mathbf{u}^\lambda\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3})} \leq C h^{1/4}. \quad (3.64)$$

Por tanto, de (3.63) y (3.64), se consigue

$$\rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \text{ está acotada en } N^{1/4,2}(0, T; W^{-1,3}(\Omega)^3);$$

en consecuencia,

$$\rho^\lambda \mathbf{u}^\lambda \in \text{compacto de } L^2(0, T; W^{-1,\infty}(\Omega)^3). \quad (3.65)$$

Gracias a las acotaciones (3.51–3.54) a (3.60) y a (3.65), vamos a poder extraer una s.s. con propiedades de convergencia similares a las del caso sin difusión, cf. §1.2.4. Además, debido a (3.55) y a (3.62)

$$-\lambda \Delta \rho^\lambda = -\sqrt{\lambda} \nabla \cdot (\sqrt{\lambda} \nabla \rho^\lambda) \xrightarrow{\mathbf{f}} 0 \text{ en } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

$$\lambda (\nabla \rho^\lambda \otimes \mathbf{u}^\lambda + \mathbf{u}^\lambda \otimes \nabla \rho^\lambda) \xrightarrow{\mathbf{f}} 0 \text{ en } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^{3 \times 3}).$$

Llegados a este punto, no es difícil terminar la Demostración (el proceso de paso al límite cuando $\lambda \rightarrow 0$ es análogo al que se presenta en la Demostración del Teorema 1.12).

Capítulo 4

Descripción de Algunos Procedimientos de Aproximación Numérica

Planteamos en este Capítulo algunos posibles esquemas de aproximación numérica para las ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable.

Comprobaremos que es posible atacar el problema de la aproximación numérica de estas ecuaciones con técnicas ya utilizadas en otras ocasiones: Los problemas compresible e incompresible de Navier-Stokes, problemas de transporte y de transporte-difusión, etc...

Por supuesto, los procedimientos de aproximación numérica que se detallan en el Capítulo no son los únicos posibles; sólo vamos a tratar de dar un primer paso, describiendo algunos esquemas cuya implementación numérica será el objetivo de futuros trabajos.

4.1 Distintas Formulaciones del Problema

Recordemos que la formulación usual no conservativa del problema de Navier-Stokes con densidad variable es la siguiente:

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} - \nabla p, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0, \quad (4.3)$$

ecuaciones definidas en Q_T , junto con las condiciones de contorno e iniciales:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \quad (4.4)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (4.5)$$

En principio, este modelo presenta las dificultades que ya tenemos en las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, en cuanto a su tratamiento teórico y numérico:

- La ecuación de incompresibilidad (4.2) liga algunas de las derivadas parciales de las componentes de \mathbf{u} entre sí, lo que hace que las ecuaciones constituyan un sistema “acoplado”.
- Se trata de un problema no lineal.
- Para pequeños valores de μ , la ó las soluciones son inestables: Hay transición al régimen turbulento, generación de capas límites, ...

Insistamos en que el sistema (4.1–4.5) tiene otras particularidades. Principalmente,

- Se trata de un sistema fuertemente no lineal ya que, además de aparecer el término no lineal clásico de las ecuaciones de Navier-Stokes, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, tenemos las no linealidades producidas por la nueva variable densidad (ρ) y la ecuación de transporte (4.3).
- (4.1) y (4.3) son ecuaciones de características distintas,
 - (4.1) es un sistema de segundo orden de tipo parabólico.
 - (4.3) en una edp. de primer orden para ρ de tipo hiperbólico.

Llamaremos al sistema (4.1–4.5) formulación (ρ, \mathbf{u}, p) del problema. Además de (4.1–4.5), vamos a considerar una formulación “equivalente” y otra “aproximada” al problema, que serán más adecuadas para algunos procedimientos de aproximación numérica.

Con carácter general para todo lo que sigue, vamos a suponer que estamos en hipótesis de regularidad suficiente para que todas las operaciones que vamos a efectuar tengan sentido. Consideraremos el caso en que $\rho_0 \geq \alpha > 0$ en Ω y, por tanto, también $\rho \geq \alpha > 0$ en Q_T . Esto hace que podamos dividir por ρ sin problemas cuando haga falta. De hecho, podremos introducir el cambio a variable logarítmica

$$\sigma = \log \rho,$$

obteniéndose el problema siguiente, que llamaremos formulación (σ, \mathbf{u}, p) :

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu e^{-\sigma} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} - e^{-\sigma} \nabla p, \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.7)$$

$$\sigma_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma = 0, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \quad (4.9)$$

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_0 \equiv \log \rho_0 \text{ y } \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ en } \Omega. \quad (4.10)$$

Es importante reseñar que este modelo en las variables σ , \mathbf{u} y p ya no posee una formulación débil que permita eliminar la presión. Sin embargo, están “despejados” los sumandos

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \text{ y } \sigma_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma;$$

expresiones bien adaptadas para aplicar métodos basados en la determinación de curvas características (cf.[46]) por tratarse de las “derivadas totales” de \mathbf{u} y σ , resp.

Por último, vamos a considerar un problema cuyas soluciones pretendemos que aproximen a las de (4.1–4.5). Para ello, la idea consiste en “penalizar” la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ con ayuda de la presión. Esto hará que estemos ante un modelo “débilmente compresible”. En consecuencia, por una parte, el término de difusión de la ecuación de movimiento cambia ligeramente y, por otra, necesitaremos una condición inicial para la presión. El modelo, que llamaremos formulación (ρ, \mathbf{u}, p) penalizada, queda como sigue:

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})Id \right) + \rho \mathbf{f}, \quad (4.11)$$

$$p_t + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.12)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (4.13)$$

junto con (4.4–4.5) y una condición inicial para la presión:

$$p|_{t=0} = p_0 \text{ en } \Omega. \quad (4.14)$$

4.2 Los Procedimientos de Discretización en Tiempo

Los métodos de discretización van a ser planteados a dos niveles. En un primer paso, introducimos esquemas de aproximación en tiempo; como consecuencia de ello, quedarán por resolver problemas estacionarios (donde t no aparece como variable independiente) que se discretizan con ayuda del método de los elementos finitos.

En lo que se refiere a la discretización en tiempo, ésta va a ser conseguida de dos formas distintas:

- Con la incorporación de esquemas implícitos en diferencias. Dentro de los posibles tipos (Euler, Crank-Nicholson, Gear, etc...), vamos a elegir, por simplicidad, el método de Euler.
- Con el uso del método de las características, lo que viene sugerido por las derivadas totales que aparecen en las ecuaciones.

4.2.1 Esquema de Euler Implícito en Diferencias Finitas

Fijado un paso de tiempo Δt , denotamos $(\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n)$ una aproximación de la terna (ρ, \mathbf{u}, p) en el tiempo $t = n\Delta t$. Una etapa de la discretización en tiempo consiste en hallar ρ^{n+1} , \mathbf{u}^{n+1} y p^{n+1} a partir de las aproximaciones anteriores $\rho^0, \mathbf{u}^0, p^0, \dots, \rho^n, \mathbf{u}^n, p^n$, resolviendo un problema estacionario. Recordemos que, en el caso del esquema de Euler implícito aplicado a la formulación (ρ, \mathbf{u}, p) , este problema es el siguiente:

$$\rho^{n+1} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \right) - \mu \Delta \mathbf{u}^{n+1} = \rho^{n+1} \mathbf{f}^{n+1} - \nabla p^{n+1}, \quad (4.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0 \quad (4.17)$$

junto con la condición de contorno (4.4) sobre \mathbf{u}^{n+1} . Aquí, por supuesto \mathbf{f}^{n+1} es una aproximación de $\mathbf{f}((n+1)\Delta t, \cdot)$.

Aplicando el mismo esquema a la formulación (ρ, \mathbf{u}, p) penalizada (4.10–4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} & \rho^{n+1} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \right) + \nabla p^{n+1} \\ & - \mu \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \mathbf{u}^{n+1t} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) Id \right) = \rho^{n+1} \mathbf{f}^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \rho^{n+1} = 0, \quad (4.20)$$

de nuevo junto con la condición (4.4).

Las ecuaciones estacionarias van a ser resueltas de forma muy distinta:

- (4.15–4.17) será reformulado en el sentido de los mínimos cuadrados. Realmente, deberíamos decir que va a ser “aproximado” en el sentido de los mínimos cuadrados, puesto que la edp. (4.17) va a ser cambiada, con la introducción de un término difusivo $\lambda \Delta \rho^{n+1}$ para $\lambda > 0$ adecuado. Como se sabe, esta formulación debe llevar consigo una definición de estado. Aquí, hemos optado por introducir éste a través de la solución de un problema generalizado de Stokes y de un problema de Poisson.
- Dado que, en (4.18–4.20), el papel que juegan las variables es más simétrico, parece razonable que, tras una discretización en espacio vía elementos finitos, intentemos la resolución del problema no lineal resultante por un método iterado de Newton aproximado, para el que se podrá utilizar el algoritmo GMRES (cf. [8,9]).

4.2.2 El Método de las Características

En el contexto que nos ocupa, vamos a utilizar el método de las características cuando, de alguna manera, sepamos que las variaciones experimentadas por ρ no son excesivamente importantes (i.e. cuando, en este sentido, el problema considerado está próximo al problema incompresible de Navier-Stokes habitual). Sabemos que

$$\frac{d}{d\tau} [f(\tau, X(\tau; t, \mathbf{x}))]_{\tau=t} = (f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f)(t, \mathbf{x}),$$

donde $X(\cdot; t, \mathbf{x})$ es la trayectoria (ó curva característica) que pasa por \mathbf{x} en el instante t , solución del sdo.

$$\frac{dX}{ds}(s) = \mathbf{u}(s, X(s)), \quad X(t) = \mathbf{x}.$$

En consecuencia, la parte convectiva de la ecuación de movimiento (4.6) y de la ecuación de transporte (4.8) se pueden escribir como derivadas (móviles) con respecto al tiempo. Esto sugiere aproximar de la forma siguiente:

$$f_t + \mathbf{u} \nabla f \simeq \frac{f^{n+1} - f^n \circ X^n}{\Delta t}.$$

Aquí, f^n es la aproximación de f en el tiempo $t^n = n\Delta t$ (que se supone previamente obtenida) y X^n es la función que a cada $\mathbf{x} \in \Omega$ le asocia el valor $X(t^n; t^{n+1}, \mathbf{x})$.

Vamos a aproximar así las derivadas convectivas que aparecen en (4.6) y (4.8) de la formulación (σ, \mathbf{u}, p) ; para ello re-escribimos éstas, junto con la condición de incompresibilidad (4.7), en

$$\begin{aligned}\sigma_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma &= 0, \\ \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\mu}{\bar{\rho}} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p \\ &= \mathbf{f} - \mu \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - e^{-\sigma} \right) \Delta \mathbf{u} + \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - e^{-\sigma} \right) \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

Aquí, $\bar{\rho}$ es un valor medio de la densidad, por ejemplo

$$\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Admitiendo, como hemos advertido, que las variaciones de ρ no son excesivamente importantes, parece adecuado aplicar el método de las características a las ecuaciones anteriores, no dejando en el segundo miembro ninguna función desconocida aparte de σ^{n+1} . En la n -ésima etapa, tendremos que resolver el problema siguiente:

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n \circ X^n, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \frac{\mu}{\bar{\rho}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p^{n+1} \\ = \mathbf{f}^{n+1} - \mu \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - e^{-\sigma} \right) \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - e^{-\sigma} \right) \nabla p^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^n \circ X^n,\end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (4.23)$$

junto con la condición de contorno (4.4). Llegamos así a un problema lineal. A partir de (4.21) se obtiene σ^{n+1} de manera explícita (hay que integrar en $[t^n, t^{n+1}]$ un sdo.), quedando luego por resolver el problema de Stokes generalizado constituido por (4.22-4.23) y (4.4) (para una descripción del tratamiento de los términos

$$\sigma^n \circ X^n, \quad \mathbf{u}^n \circ X^n,$$

cf. [46,47]).

4.3 Reformulación en el Sentido de los Mínimos Cuadrados del Problema No Lineal en (ρ, \mathbf{u}, p) . Algoritmo de Descenso de Tipo Gradiente Conjugado

Como ya hemos dicho, vamos a reformular el problema (4.15–4.17) en el sentido de los mínimos cuadrados. Por comodidad en la notación, omitimos el superíndice n , utilizado para denotar la etapa de tiempo. Para $\alpha = 1/\Delta t$, el problema (4.15–4.17) queda como sigue:

$$\begin{aligned}\alpha\rho\mathbf{u} + (\rho\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \rho(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{v}) \equiv \rho\mathbf{h}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \alpha\rho + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho &= \alpha\eta \equiv g.\end{aligned}$$

Vamos a suponer que $\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}}$ sobre Γ es un dato conocido. Por ejemplo, $\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre Γ quiere decir que las curvas de isovalores para la densidad cortan perpendicularmente a Γ . Partiendo del conocimiento de $\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}}$ sobre Γ , nos será posible introducir un término de la forma $\lambda\Delta\rho$ en la tercera edp. del problema. De acuerdo con lo que se vió en el Capítulo 4 (cf. la Sección 4.4), cabe esperar que, si λ es pequeño, la solución del nuevo problema sea “parecida” a la que deberíamos obtener.

Fijaremos entonces $\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre Γ (el razonamiento que sigue es análogo cuando $\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}}$ toma otro valor no homogéneo) y formulamos el siguiente problema de mínimos:

$$\begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, \rho) \in V(\Omega) \times H_N^1(\Omega) \text{ tal que} \\ J(\mathbf{u}, \rho) \leq J(\mathbf{v}, \eta) \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in V \times H_N^1, \end{cases} \quad (4.24)$$

donde

$$J(\mathbf{v}, \eta) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\rho}|y_1|_2^2 + \mu|\nabla y_1|_2^2 + \alpha|y_2|_2^2 + \lambda|\nabla y_1|_2^2)$$

y las funciones

$$y_1 = y_1(\mathbf{v}, \eta) \in V(\Omega) \quad \text{e} \quad y_2 = y_2(\mathbf{v}, \eta) \in H^1(\Omega)$$

son soluciones de los problemas siguientes:

$$\begin{cases} \alpha\bar{\rho}y_1 - \mu\Delta y_1 + \nabla p = \eta\mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} + \nabla q - \eta\mathbf{h} + (\eta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \\ \nabla \cdot y_1 = 0, \\ y_1 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (4.25)$$

y

$$\begin{cases} \alpha y_2 - \mu \Delta y_2 = \alpha \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta - g, \\ \frac{\partial y_2}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.26)$$

Nótese que (4.25) es un problema de Stokes generalizado y (4.26) es un problema de Poisson con condición de contorno de tipo Neumann. La formulación débil de los problemas anteriores es la siguiente:

$$\begin{cases} \alpha \bar{p}(\mathbf{y}_1, \varphi) + \mu(\nabla \mathbf{y}_1, \nabla \varphi) \\ = (\eta(\mathbf{v} - \mathbf{h} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}), \varphi) + \mu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V, \mathbf{y}_1 \in V \end{cases} \quad (4.27)$$

y

$$\begin{cases} \alpha(y_2, \psi) + \lambda(\nabla y_2, \nabla \psi) \\ = (\alpha \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta - g, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), y_2 \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.28)$$

Para resolver el problema (4.24), utilizaremos el algoritmo de Gradiente Conjugado de Polak-Ribière (cf. [49]; véase también [22] y [46] para su aplicación a otros problemas análogos). Sabemos que, para este algoritmo, se tienen buenas referencias en el marco de problemas similares. Superindicaremos con m las sucesivas etapas del proceso de minimización.

Suponiendo que estamos interesados en calcular la $(m + 1)$ -ésima aproximación en tiempo, llevaremos a cabo lo siguiente:

A) INICIALIZACIÓN DEL ALGORITMO: Tomamos

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^n \in V, \quad \eta^0 = \rho^n \in H_N^1.$$

Seguidamente, se calculan $\mathbf{g}_v^0 \in V$ y $g_\eta^0 \in H_N^1$, soluciones de:

$$\alpha \bar{p}(\mathbf{g}_v^0, \varphi) + \mu(\nabla \mathbf{g}_v^0, \nabla \varphi) = \langle J'_v(\mathbf{v}^0, \eta^0), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V, \quad (4.29)$$

$$\alpha(g_\eta^0, \psi) + \lambda(\nabla g_\eta^0, \nabla \psi) = \langle J'_\eta(\mathbf{v}^0, \eta^0), \psi \rangle \quad \forall \psi \in H_N^1, \quad (4.30)$$

y tomamos $(z_v^0, z_\eta^0) = (\mathbf{g}_v^0, g_\eta^0)$. Naturalmente, en (4.29) y (4.30), J'_v y J'_η designan las derivadas parciales de J respecto de \mathbf{v} y η .

B) m -ÉSIMA ETAPA: Dados $m \geq 0$ y los

$$\mathbf{v}^m, \eta^m, \mathbf{g}_v^m, g_\eta^m, z_v^m, z_\eta^m$$

(estamos suponiendo que $\nabla J(\mathbf{v}^m, \eta^m) \neq 0$; en caso contrario se detiene el proceso), calculamos

$$\mathbf{v}^{m+1}, \eta^{m+1}, \mathbf{g}_v^{m+1}, g_\eta^{m+1}, z_v^{m+1}, z_\eta^{m+1}$$

de la siguiente forma:

a) **Descenso en la dirección (z_v^m, z_η^m) :**

$$(\mathbf{v}^{m+1}, \eta^{m+1}) = (\mathbf{v}^m, \eta^m) - r_m(z_v^m, z_\eta^m) \quad (4.31)$$

donde r_m es solución del problema en una variable:

$$J((\mathbf{v}^m, \eta^m) - r_m(z_v^m, z_\eta^m)) \leq J((\mathbf{v}^m, \eta^m) - r(z_v^m, z_\eta^m)), \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, r_m \in \mathbb{R}_+. \quad (4.32)$$

b) **Cálculo de una nueva dirección de descenso:** Calculamos $(\mathbf{g}_v^{m+1}, g_\eta^{m+1})$ resolviendo los problemas:

$$\alpha \bar{\rho}(\mathbf{g}_v^{m+1}, \varphi) + \mu(\nabla \mathbf{g}_v^{m+1}, \nabla \varphi) = \langle J'_v(\mathbf{v}^{m+1}, \eta^{m+1}), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V, \mathbf{g}_v^{m+1} \in V, \quad (4.33)$$

$$\alpha(g_\eta^{m+1}, \psi) + \lambda(\nabla g_\eta^{m+1}, \nabla \psi) = \langle J'_\eta(\mathbf{v}^{m+1}, \eta^{m+1}), \psi \rangle \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), g_\eta^{m+1} \in H^1(\Omega). \quad (4.34)$$

A continuación, se calcula el escalar

$$\gamma_m = \frac{\alpha \bar{\rho} |\mathbf{g}_v^{m+1} - \mathbf{g}_v^m|_2^2 + \mu |\nabla(\mathbf{g}_v^{m+1} - \mathbf{g}_v^m)|_2^2 + \alpha |g_\eta^{m+1} - g_\eta^m|_2^2 + \lambda |\nabla(g_\eta^{m+1} - g_\eta^m)|_2^2}{\alpha \bar{\rho} |\mathbf{g}_v^m|_2^2 + \mu |\nabla \mathbf{g}_v^m|_2^2 + \alpha |g_\eta^m|_2^2 + \lambda |\nabla g_\eta^m|_2^2}.$$

Finalmente, la nueva dirección de descenso está dada por

$$(z_v^{m+1}, z_\eta^{m+1}) = (\mathbf{g}_v^{m+1}, g_\eta^{m+1}) - \gamma_m(z_v^m, z_\eta^m). \quad (4.35)$$

Notemos que la resolución del problema unidimensional (4.32) se puede llevar a cabo mediante un método de dicotomía. Cada vez que calculemos un valor

$$J((\mathbf{v}^m, \eta^m) - r(z_v^m, z_\eta^m)),$$

habrá que resolver un problema de Stokes generalizado (4.25) y un problema de Poisson (4.26). Como es habitual en este contexto, el cálculo de $(\mathbf{g}_v^{m+1}, g_\eta^{m+1})$ a partir de $(\mathbf{v}^{m+1}, \eta^{m+1})$, exige la resolución de problemas del mismo tipo. En efecto, es cierto que,

$$\begin{cases} \langle J'_v(\mathbf{v}, \eta), \delta \mathbf{v} \rangle = (\eta \delta \mathbf{v}, \mathbf{y}_1) + \mu(\nabla \delta \mathbf{v}, \nabla \mathbf{y}_1) \\ \quad + ((\eta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + (\eta \delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{y}_1) + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla \eta, \mathbf{y}_2), \end{cases}$$

y

$$\langle J'_\eta(\mathbf{v}, \eta), \delta \eta \rangle = (\delta \eta (\mathbf{v} - \mathbf{h} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}), \mathbf{y}_1) + \alpha (\delta \eta + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \eta, \mathbf{y}_2)$$

donde el par $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ es la solución de (4.25–4.26).

4.4 Algunos Procedimientos de Discretización en Espacio. Resolución Efectiva

El procedimiento de discretización en tiempo presentado en la Sección 4.2, concierne a tres problemas diferentes. Omitiendo de nuevo el índice n en lo posible, estos problemas poseen las formulaciones débiles que pasamos a describir:

A) En el caso del problema (4.18–4.20),

“Hallar $(\rho, \mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega) \equiv X$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(\rho \mathbf{u} - \rho \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{u}) \\ + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) Id, \nabla \mathbf{v} \right) = (\rho \mathbf{f}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\alpha(p - \hat{p}, q) + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad (4.37)$$

$$\alpha(\rho - \hat{\rho}, \eta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, \eta) = 0, \quad (4.38)$$

para cada $(\eta, \mathbf{v}, q) \in X$ ”.

B) Tanto para (4.15–4.17) (reformulado en el sentido de los mínimos cuadrados) como para (4.21–4.23), ya hemos visto que lo más significativo es el problema de Stokes generalizado:

“Hallar $\mathbf{u} \in V$ tal que

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad (4.39)$$

para cada $\mathbf{v} \in V$ (aquí $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$).”

■

Para la aproximación numérica del problema (4.36–4.38), se podría pensar en elegir una base de elementos finitos $P_1 - P_1 \text{iso} P_2 - P_0$. En tal caso, el espacio X quedaría aproximado por $X_h = H_h^1(\Omega) \times H_{0h}^1(\Omega)^3 \times L_{0h}^2(\Omega)$, con

$$H_h^1(\Omega) = \{\rho_h \in H^1(\Omega) : \rho_h \in C^0(\bar{\Omega}), \rho_{h|K} \in P_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4.40)$$

$$H_{0h}^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{u}_h \in H_0^1(\Omega)^3 : \mathbf{u}_h \in C^0(\bar{\Omega})^3, \mathbf{u}_{h|K} \in P_1(K)^3 \forall K \in \mathcal{T}_{h/2}\}, \quad (4.41)$$

$$L_{0h}^2(\Omega) = \{p_h \in L^2(\Omega) : p_{h|K} \in P_0(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (4.42)$$

Aquí, K denota un tetraedro arbitrario tanto de la malla (regular en el sentido habitual) \mathcal{T}_h como $\mathcal{T}_{h/2}$ (por ejemplo, cf. [46] para la notación).

Debido a los buenos resultados que proporciona para problemas análogos (cf. [8,9]), parece también adecuado una discretización $P_1 - P_1 \text{iso} P_2 - P_1$. En este caso, X sería aproximado por $Y_h = H_h^1(\Omega) \times H_{0h}^1(\Omega)^3 \times H_h^1(\Omega)$.

En ambos casos, restringiéndonos a bases apropiadas de los subespacios de dimensión finita X_h (ó Y_h) y razonando de la manera habitual, todo se reduce a resolver un sistema no lineal de ecuaciones (cuya dimensión coincide con la de X_h ó Y_h), que se puede escribir como sigue:

“Hallar $(\rho_h, \mathbf{u}_h, p_h) \in X_h$ (ó Y_h) tal que

$$F_h(\rho_h, \mathbf{u}_h, p_h) = 0.” \quad (4.43)$$

Para resolver (4.43), bastará ahora seguir razonando como en [9] (método de Newton aproximado via GMRES).

■

En lo que se refiere al tratamiento numérico del problema de Stokes generalizado en dimensión tres (4.39), es enorme la cantidad de posibilidades (cf. por ejemplo [22,46,61] y las referencias allí dadas). Nos contentaremos aquí con mencionar la forma en que pueden ser aplicados dos métodos de aproximación:

1. Recurriendo a una formulación mixta, con discretización en espacio P_1 burbuja- P_1 (para la velocidad y presión resp.) y, posteriormente al método de Uzawa.
2. Usando una formulación no mixta, que debe utilizar una base de elementos finitos con divergencia nula (cf. F.Hecht, *A Non-Conforming P^1 Basis with Free Divergence in \mathbb{R}^3* , RAIRO serie analyse numerique, 1983). En este caso, una vez aproximado el campo de velocidades, queda pendiente el cálculo de una aproximación de la presión.

Apéndice A

Demostración del Lema 1.6 (Una Versión del Lema de De Rham)

Recordamos el resultado cuya Demostración detallamos en este Apéndice:

LEMA 1.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera Lipschitz-continua, $0 < T \leq +\infty$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{D}'(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)^3)$ tal que

$$\langle \mathbf{g}, \varphi \rangle_{\Omega} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.1})$$

(i) Si $\mathbf{g} \in \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, entonces existe $p \in \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$.

(ii) Si $\mathbf{g} \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ con $1 \leq p \leq +\infty$, entonces existe $p \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$.

(iii) Si $\mathbf{g} \in W^{-1,p}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, donde $1 < p \leq +\infty$, entonces existe una distribución $p \in W^{-1,p}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\nabla p = \mathbf{g}$.

Como ya se ha indicado, probaremos el Lema 1.6 utilizando el isomorfismo ∇ de $L_0^2(\Omega)$ en V^\perp , válido para Ω es un abierto acotado conexo de frontera Lipschitz-continua (cf. [21, Corolario 2.4, p. 24]). En primer lugar, ampliamos el resultado para abiertos no necesariamente conexos.

COROLARIO Si Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz-continua, entonces existe una aplicación

$$L : \mathbf{f} \in V^\perp \longmapsto q \in L_0^2(\Omega) \quad \text{lineal continua, tal que } \nabla q = \mathbf{f}.$$

Demostración: Bastará razonar con la familia $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ de componentes conexas de Ω . Así, dado $\mathbf{f} \in V^\perp$, obviamente $\mathbf{f}|_{\Omega_i} \in V(\Omega_i)^\perp$. Si construimos q poniendo en cada Ω_i , $q|_{\Omega_i} = \nabla_i^{-1}(\mathbf{f}|_{\Omega_i})$, tendremos claramente que

$$q \in L_0^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla q = \mathbf{f}.$$

L es lineal gracias a la linealidad de cada $L_i : f_{|\Omega_i} \mapsto q_{|\Omega_i}$, mientras que la continuidad de L es consecuencia de la siguiente propiedad:

$$\text{Si } f \in H^{-1}(\Omega) \text{ (resp. } L^2(\Omega)), \text{ entonces } \|f\|_{H^{-1}(\text{resp. } L^2)}^2 = \sum_{i \in I} \|f_{|\Omega_i}\|_{H^{-1}(\text{resp. } L^2)}^2$$

(la suma precedente es una serie generalizada).

■

Con la ayuda de la aplicación L , vamos a demostrar el Lema 1.6 punto por punto.

(i) Debido a la regularidad de \mathbf{g} , (A.1) implica que

$$\langle \mathbf{g}, \psi \rangle_{(0,T)} \in V^1 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T),$$

por lo que la aplicación

$$q : \psi \in \mathcal{D}(0,T) \mapsto L\langle \mathbf{g}, \psi \rangle_{(0,T)} \in L_0^2(\Omega),$$

demuestra el apartado (i) del Lema, teniendo en cuenta las propiedades de L .

(ii) Definimos ahora q razonando para t cpd. en $(0,T)$. En concreto, ponemos

$$q(t) = L(\mathbf{g}(t)) \in L_0^2(\Omega) \quad \text{para } t \text{ cpd. en } (0,T).$$

De nuevo, es fácil comprobar que esta función q verifica (ii).

(iii) En este caso, necesitaremos relacionar las aplicaciones que actúan sobre funciones dependientes de t con las que lo hacen sobre funciones dependientes de (t, \mathbf{x}) .

LEMA Si Ω está en las hipótesis del Lema 1.6, entonces se dan los siguientes isomorfismos:

$$F : W^{-1,p}(0,T; H^{-1}(\Omega)^3) \cong \mathcal{L}(W_0^{1,p'}(0,T); H^{-1}(\Omega)^3),$$

$$G : W^{-1,p}(0,T; L^2(\Omega)) \cong \mathcal{L}(W_0^{1,p'}(0,T); L^2(\Omega)),$$

para $1 < p \leq +\infty$. ■

Admitiendo este resultado, basta definir $q = G^{-1}Q$, siendo

$$Q : \psi \in W_0^{1,p'}(0,T) \mapsto L\langle F\mathbf{g}, \psi \rangle_{(0,T)} \in L^2(\Omega);$$

de nuevo, demostrar que esta q verifica el Lema 1.6 (iii) es una simple comprobación.

■

Demostración del Lema: Demostremos por ejemplo, que se da el primero de los isomorfismos. De forma “natural”, definiremos

$$F : \mathbf{h} \in W^{-1,p}(0,T; H^{-1}(\Omega)^3) \mapsto F\mathbf{h} \in \mathcal{L}(W_0^{1,p'}(0,T); H^{-1}(\Omega)^3),$$

poniendo

$$\langle (F\mathbf{h}, \psi)_{(0,T)}, \varphi \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{h}, \psi\varphi \rangle_{Q_T} \quad \forall \psi \in W_0^{1,p'}(0,T), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Entonces,

- $F\mathbf{h}$ está bien definido, gracias a que

$$\|\psi\varphi\|_{W_0^{1,p'}(H_0^1)} = \|\psi\|_{W_0^{1,p'}} \|\varphi\|_{H_0^1}.$$

- F está bien definida, es lineal y continua, lo cual se deduce de las desigualdades

$$\|F\mathbf{h}\|_{\mathcal{L}} \leq \|\mathbf{h}\|_{W^{-1,p}(H^{-1})} \quad \forall \mathbf{h} \in W^{-1,p}(0,T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

- F es sobreyectiva. En efecto, dado $\mathbf{g} \in \mathcal{L}(W_0^{1,p'}(0,T); H^{-1}(\Omega)^3)$, si definimos \mathbf{h} poniendo

$$\langle \mathbf{h}, \psi\varphi \rangle_{Q_T} = \langle (\mathbf{g}, \psi)_{(0,T)}, \varphi \rangle_{\Omega} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^3,$$

se tiene que $\mathbf{h} \in W^{-1,p}(0,T; H^{-1}(\Omega)^3)$ (obsérvese que \mathbf{h} está bien definido gracias a la densidad del subespacio de las combinaciones lineales finitas de $\mathcal{D}(0,T) \times \mathcal{D}(\Omega)^3$ en $\mathcal{D}(Q_T)^3$, cf. [51]) y además, naturalmente, $F\mathbf{h} = \mathbf{g}$.

- F es inyectiva. Si $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ son tales que $F\mathbf{h}_1 = F\mathbf{h}_2$, en particular \mathbf{h}_1 y \mathbf{h}_2 coinciden sobre $\mathcal{D}(0,T) \times \mathcal{D}(\Omega)^3$. Por tanto, con un argumento de densidad, igual que anteriormente, tendremos que $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$.

Las propiedades anteriores y el Teorema de Banach de la aplicación abierta (cf. [10]) implican que F es un isomorfismo.

Apéndice B

Demostración del Lema 1.15 (Existencia de Solución m -Aproximada)

Recordamos el resultado cuya Demostración detallamos en este Apéndice.

LEMA 1.15 Sean $m \in \mathbb{N}$, $0 < T < +\infty$, $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera Lipschitziana y $Q_{T;\Theta} = (0, T) \times \Theta$. Si $\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\Theta)^3$ de funciones $C^1(\bar{\Theta})^3$ que se anulan sobre $\partial\Theta$, $\rho_0^m \in C^1(\bar{\Theta})$ verifica $\inf \rho_0^m > 0$, $\mathbf{u}_0^m \in V^m$, $\mathbf{f}^m \in C([0, T]; L^2(\Theta)^3)$ y ponemos $V^m = \langle \mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m \rangle$, entonces existe una única m -ésima solución aproximada (ρ^m, \mathbf{u}^m) en $Q_{T;\Theta}$ que además verifica:

$$0 < \beta \equiv \inf \rho_0^m \leq \rho^m \leq \gamma \equiv \sup \rho_0^m \quad \text{en } Q_{T;\Theta} \quad (\text{B.1})$$

Como nos encontramos en la m -ésima etapa del proceso de aproximación, por comodidad, omitiremos en la medida de lo posible el superíndice m . Realizaremos la Demostración en varias etapas.

A) Linealización del problema aproximado: Dado $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$, resolvemos primero el problema lineal: Hallar $\rho \in C^1(\bar{Q}_{T;\Theta})$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0 & \text{en } Q_{T;\Theta}, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0^m & \text{en } \Theta. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Posteriormente, conocidos $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$ y $\rho \in C^1(\bar{Q}_{T;\Theta})$, resolvemos el siguiente

problema (también lineal) : Hallar $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V^m)$ tal que

$$\begin{cases} \int_{\Theta} \left\{ \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\rho \mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho \mathbf{f}^m \right) \cdot \mathbf{v} + \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \right\} dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^m, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m \quad \text{en } \Theta. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Por razones obvias, un par (ρ, \mathbf{u}) que sea solución de (B.2–B.3), se dirá que es una m -ésima solución aproximada “linealizada”.

B) Existencia de solución aproximada linealizada: Las propiedades del problema (B.2) y de su solución son bien conocidas. Enunciaremos dos resultados al respecto (cf. [33]):

LEMA (Existencia y unicidad de solución de (B.2)). Sean $\mathbf{w} \in C([0, T]; C^1(\bar{\Theta})^3)$ y $\rho_0^m \in C^1(\bar{\Theta})^3$ tales que:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \text{en } Q, \quad \mathbf{w} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Theta \times [0, T],$$

$$0 < \beta \leq \rho_0^m \leq \gamma \quad \text{en } \bar{\Theta}.$$

Entonces existe una única función ρ solución de (B.2) que, además, verifica:

$$0 < \beta \leq \rho \leq \gamma \quad \text{en } \bar{\Theta} \times [0, T].$$

■ **LEMA (Continuidad respecto de \mathbf{w} de la solución de (B.2)).** Supongamos que \mathbf{w} y las \mathbf{w}_n están en las condiciones del Lema 2.1 y que $\mathbf{w}_n \xrightarrow{f} \mathbf{w}$ en $C([0, T]; C^1(\bar{\Theta})^3)$. Si, para cada n , ρ_n es la solución del respectivo problema (B.2) cambiando \mathbf{w} por \mathbf{w}_n , entonces $\rho_n \xrightarrow{f} \rho$ en $C([0, T]; C(\bar{\Theta}))$.

■ Gracias al primer Lema, sabemos que (B.2) admite una única solución $\rho \in C^1(\bar{Q}_{T,\Theta})$, para la cual se tiene :

$$\beta \leq \rho(t, \mathbf{x}) \leq \gamma \quad \text{en } Q_{T,\Theta}. \quad (\text{B.4})$$

Para encontrar una solución \mathbf{u} de (B.3), pongamos:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \mathbf{w}^j(\mathbf{x}). \quad (\text{B.5})$$

Llevando (B.5) a (B.3) (escrito para $\mathbf{v} = \mathbf{w}^j : j = 1, 2, \dots, m$), llegamos a la conclusión de que \mathbf{u} es solución de (B.3) si y solo si $\{\phi_j\}_{j=1}^m \in C^1([0, T])^m$ y verifica el problema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) \frac{d\phi_j}{dt} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) \phi_j + d_i(t) = 0 \quad \text{en } (0, T), \quad 1 \leq i \leq m, \\ \{\phi_j(0)\}_{j=1}^m \equiv \text{componentes de } \mathbf{u}_0^m, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

donde los coeficientes son:

$$a_{ij} = \int_{\Theta} \rho w^j \cdot w^i dx \in C^1([0, T]),$$

$$b_{ij} = \int_{\Theta} \left\{ ((\rho w \cdot \nabla) w^j) \cdot w^i + \mu \nabla w^j : \nabla w^i \right\} dx \in C([0, T]),$$

$$d_i = - \int_{\Theta} \rho f^m \cdot w^i dx \in C([0, T]).$$

Además, la matriz $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m$ es simétrica y definida positiva (uniformemente en $t \in [0, T]$) ya que teniendo en cuenta (B.4) y que $\{w^i\}$ es un sistema ortonormal en H , se cumplen las desigualdades

$$\sum_{ij} a_{ij}(t) \xi_i \xi_j = \int_{\Theta} \rho(t, x) \left(\sum_{i=1}^m \xi_i w^i(x) \right)^2 dx \geq \beta \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

En particular, la matriz A es invertible y, por tanto, (B.6) admite la escritura equivalente

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = -A^{-1}B\phi - A^{-1}D & \text{en } (0, T), \\ \phi(0) & \text{dado en } \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

donde ϕ designa el vector columna de los ϕ_j . En consecuencia, la teoría clásica de ecuaciones diferenciales es aplicable; ello conduce a la existencia y unicidad de solución de (B.3). Obsérvese además que la solución u de (B.3) depende continuamente de ρ y de w . En concreto, si w y las w_n están en las condiciones de los Lemas anteriores y llamamos (ρ, u) y (ρ_n, u_n) a las correspondientes soluciones aproximadas linealizadas, se tiene que $u_n \xrightarrow{f} u$ en $C^1([0, T]; V^m)$.

C) Estimaciones de las soluciones aproximadas linealizadas: Sea (ρ, u) una solución aproximada linealizada relativa a la función w dada en $C([0, T]; V^m)$. El objetivo de esta etapa es obtener estimaciones de u independientes (ó dependientes en su defecto) de w . Obviamente, se llega a la igualdad de energía:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Theta} \rho |u|^2 + \mu \int_{\Theta} |\nabla u|^2 = \int_{\Theta} \rho f^m \cdot u, \quad (\text{B.8})$$

de donde, gracias al Lema de Gronwall,

$$\left(\int_{\Theta} \rho |u|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Theta} \rho_0^m |u_0^m|^2 \right)^{1/2} + \int_0^T \left(\int_{\Theta} \rho |f^m|^2 \right)^{1/2} dt \quad \text{en } [0, T]. \quad (\text{B.9})$$

En consecuencia, (B.4) y las propiedades de ρ_0^m , u_0^m y f^m , implican que

$$u \text{ está acotada en } C([0, T]; L^2(\Theta)^3) \quad (\text{indep. de } w). \quad (\text{B.10})$$

De (B.10), utilizando la expresión (B.5) de \mathbf{u} (recuérdese que $\{\mathbf{w}^i\}$ es ortonormal en H), se obtiene:

$$\sum_{j=1}^m |\phi_j(t)|^2 = \int_{\Theta} |\mathbf{u}|^2 dx \leq Cte. \quad \forall t \in [0, T];$$

por tanto, las ϕ_j están acotadas en $C([0, T])$. Esto implica, por una parte, que

$$\mathbf{u} \text{ está acotada en } C([0, T]; V^m) \quad (\text{indep. de } \mathbf{w}). \quad (\text{B.11})$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (B.6) y la regularidad de los coeficientes que ahí aparecen, si \mathbf{w} está en un acotado de $C([0, T]; V^m)$, entonces

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{d\phi_j}{dt} \text{ está acotada en } C([0, T]) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m.$$

Al ser $\{a_{ij}\}$ simétrica y uniformemente definida positiva (respecto de t), se deduce de lo anterior que

$$\frac{d\phi_j}{dt} \text{ está acotada en } C([0, T]) \quad \text{para } 1 \leq j \leq m,$$

lo que equivale, gracias a (B.5), a que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \text{ está acotada en } C([0, T]; V^m).$$

Uniéndolo esta estimación y (B.11), obtenemos que, para \mathbf{w} acotada en $C([0, T]; V^m)$,

$$\mathbf{u} \text{ está acotada en } C^1([0, T]; V^m).$$

D) Existencia de Solución Aproximada. Aplicación del Teorema de Schauder del Punto Fijo: Hasta el momento, sabemos que, dado $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$, existe una única función $\rho \in C^1(\bar{\Theta})$ solución de (B.2), que verifica $\beta \leq \rho \leq \gamma$ en Θ . Además, conocidas \mathbf{w} y ρ , existe una única función $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V^m)$ solución de (B.3), acotada en $C([0, T]; V^m)$ (indep. de \mathbf{w}) y acotada en $C^1([0, T]; V^m)$ si \mathbf{w} lo está en $C([0, T]; V^m)$.

Por tanto, existen dos Ctes. $C, C_1 > 0$ tales que $\|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; V^m)} \leq C$ para cada $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$ y $\|\mathbf{u}\|_{C^1([0, T]; V^m)} \leq C_1$ si $\|\mathbf{w}\|_{C([0, T]; V^m)} \leq C$. Llamando B a la bola cerrada de radio C en $C([0, T]; V^m)$ y B_1 a la de radio C_1 en $C^1([0, T]; V^m)$, tenemos definida una aplicación

$$\mathbf{w} \in B \subset C([0, T]; V^m) \longmapsto \mathbf{u} \in B_1 \subset C^1([0, T]; V^m),$$

que, de acuerdo con lo que se vió anteriormente, es continua. Como gracias al Teorema de Ascoli-Arzelá, B_1 se inyecta en $C([0, T]; V^m)$ de forma compacta, tenemos bien definida la aplicación $\mathbf{w} \longmapsto \mathbf{u}$ de la bola B en sí misma y resulta que ésta es continua y

compacta. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Schauder y deducir la existencia de un punto fijo. Llamando $\mathbf{u}^m \in B$ a dicho punto fijo y ρ^m a la correspondiente solución de (B.2), resulta que $\{\rho^m, \mathbf{u}^m\}$ es una m -ésima solución aproximada que, además, verifica (B.1).

La unicidad de solución aproximada es fácil de probar, debido a su regularidad, cf. la Sección 2.2.

■

Notas:

(a) Un análisis detallado de los pasos anteriores prueban que, si consideramos una definición de las ecuaciones aproximadas con \mathbf{f} (en vez de las funciones regularizadas \mathbf{f}^m), se puede demostrar la existencia de una solución aproximada un poco menos regular ($\rho^m \in C^1(\bar{\Theta})$ y $\mathbf{u}^m \in W^{1,1}(0, T; V^m)$, tal que se tiene (B.1)). Las diferencias en el procedimiento son, esencialmente, las siguientes:

— Al resolver el problema (B.3) para hallar \mathbf{u} en $W^{1,1}(0, T; V^m)$, nos queda un sistema diferencial como en (B.6), donde $d_i \in L^1(0, T)$. No obstante, la teoría generalizada de ecuaciones diferenciales (cf. [3, p. 121]), nos dice que existe una única $\phi \in W^{1,1}(0, T)$ solución de (B.7) que, además, depende continuamente de los datos.

— Las estimaciones de \mathbf{u} (solución aproximada linealizada) se consiguen en el espacio $C([0, T]; V^m)$ (indep. de \mathbf{w}) y en $W^{1,1}(0, T; V^m)$ si \mathbf{w} está acotada en $C([0, T]; V^m)$.

— Aunque la aplicación donde se tiene el punto fijo se considera, al igual que antes, en $C([0, T]; V^m)$, ahora la compacidad de dicha aplicación se obtiene del Lema 1.4 (ii) para X, B e Y igual a V^m .

(b) Toda Demostración basada en un argumento de punto fijo sugiere un esquema de aproximaciones sucesivas. En nuestro caso, partiendo de una determinada discretización en tiempo (por ejemplo Euler-retrogrado) asociado a un paso Δt , dadas las familias H_h, V_h de subespacios (de dimensión finita) de $H^1(\Theta)^3$ y V resp., el esquema quedará como sigue:

1. Tomar ρ_h^0, \mathbf{u}_h^0 como funciones “interpoladas” de ρ_0, \mathbf{u}_0 en H_h y V_h resp.
2. Después, para cada $n \geq 0$, conocidos $\rho_h^n \in H_h$ y $\mathbf{u}_h^n \in V_h$, se define ρ_h^{n+1} como sigue:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n), w_h \right) + (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \rho_h^{n+1}, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in H_h, \rho_h^{n+1} \in H_h.$$

Ahora, conocidos ρ_h^{n+1} y \mathbf{u}_h^n , se define \mathbf{u}_h^{n+1} como sigue:

$$\left(\rho_h^{n+1} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h \right) + (\rho_h^{n+1} (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)$$

$$+ \mu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) = (\rho_h^{n+1} \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{u}_h^{n+1} \in V_h$$

(aquí, $\mathbf{f}^{n+1} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{f}(t, \cdot) dt \in L^2(\Theta)^3$).

Así, tenemos definidas ρ_h^{n+1} y \mathbf{u}_h^{n+1} y es razonable esperar que se trate de aproximaciones de $\rho((n+1)\Delta t, \cdot)$ y $\mathbf{u}((n+1)\Delta t, \cdot)$ resp., cuando h es pequeño.

Apéndice C

Existencia y Regularidad de un Rotacional

Recordamos el resultado cuya Demostración pretendemos en este Apéndice:

LEMA Sea Ω como en (1.109). Si

$$\mathbf{a} \in H^1(\Omega)^3, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1 \leq i \leq p), \quad (\text{C.1})$$

entonces podemos elegir $\mathbf{b} \in H^2(\Omega)^3$ de forma única tal que

$$\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Además, existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{b}\|_{H^2} \leq C \|\mathbf{a}\|_{H^1}. \quad (\text{C.2})$$

Demostración: Esta sigue los mismos pasos que el Teorema 3.1 de [21]; sólo cambiaremos la forma de prolongar la función \mathbf{a} a todo \mathbb{R}^3 y algunas estimaciones posteriores, con el objeto de conseguir (C.2).

Sea Θ un abierto acotado, de frontera regular y simplemente conexo, tal que $\bar{\Omega} \subset \Theta$. Llamaremos Ω_i ($1 \leq i \leq p$) a la componente conexa de $\Theta - \bar{\Omega}$ cuya frontera es Γ_i ; y llamaremos Ω_0 a la componente conexa obtenida en el exterior de Γ_0 . Prolongamos \mathbf{a} en un principio al abierto Θ , planteando los siguientes problemas de Stokes:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{w}_0 \in H^1(\Omega_0)^3, \nabla \cdot \mathbf{w}_0 = 0, \mathbf{w}_0|_{\Gamma_0} = \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{w}_0|_{\partial\Theta} = 0 \text{ tal que} \\ (\nabla \mathbf{w}_0, \nabla \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{w}_i \in H^1(\Omega_i)^3, \nabla \cdot \mathbf{w}_i = 0, \mathbf{w}_i|_{\Gamma_i} = \mathbf{a} \text{ tal que} \\ (\nabla \mathbf{w}_i, \nabla \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V. \end{cases}$$

Estos problemas están bien definidos gracias a (C.1).

Definimos seguidamente la función $\tilde{\mathbf{a}}$, poniendo

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{cases} \mathbf{w}_i & \text{en } \Omega_i, 0 \leq i \leq p, \\ \mathbf{a} & \text{en } \Omega, \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Tenemos entonces $\tilde{\mathbf{a}} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$, $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0$ y $\text{Sop}(\tilde{\mathbf{a}}) \subset \bar{\Theta}$. Además,

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)^3} \leq C \|\mathbf{a}\|_{H^1(\Omega)^3},$$

con C indep. de \mathbf{a} .

A partir de aquí, se puede terminar la Demostración de forma parecida a como se hace en el Teorema 3.1 de [21].

Bibliografía

- [1] R.A.ADAMS – *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975.
- [2] S.A.ANTONZEV, A.V.KAZHIKHOV – *Mathematical Study of Flows of Non-Homogeneous Fluids*, Lectures at the University of Novosibirsk, U.S.S.R., 1973 (In Russian).
- [3] ALEKSEEV, TIKHOMIROV, FOMIN – *Optimal Control*, Plenum Publishing Corporation, New York 1987.
- [4] H.BEIRAO DA VEIGA – *Diffusion on Viscous Fluids. Existence and Asymptotic Properties of Solutions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 10, (1983), p. 341–355.
- [5] H.BEIRAO DA VEIGA, R.SERAPIONI, A.VALLI – *On the Motion of Nonhomogeneous Fluids in Presence of Diffusion*, J. Math. Anal. Appl. 85, 1982, p. 179–191.
- [6] J.A.BELLO – *Tesis*, Universidad de Sevilla, aparecerá.
- [7] C.BERNARDI, O.PIRONNEAU – *On the Shallow Water Equations at Low Reynolds Number*, Laboratoire d'Analyse Numérique Université P. et M. Curie, R90001.
- [8] S.BOIVIN – *A Numerical Method for Solving the Compressible Navier–Stokes Equations*, Impact of Computing in Science and Engineering, Academic Press Boston, 1, 1989.
- [9] S.BOIVIN – *A Finite Element to Solve the Compressible Navier–Stokes Equations in 3D with Mesh Enrichment Procedure*, INRIA, Rapport de Recherche 1116, Rocquencourt 1989.
- [10] H.BREZIS – *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, Paris 1983.
- [11] A.J.CHORIN, J.E.MARSDEN – *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York 1979.
- [12] P.CONSTANTIN, C.FOIAS – *Navier–Stokes Equations*, The Univ. of Chicago Press, 1988.
- [13] R.COURANT, D.HILBERT – *Methods of Mathematical Physics. Volume II: Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York 1962.
- [14] R.J.DIPERNA, P.L.LIONS – *Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces*, Invent. Math. 98, (1989), p. 511–547.

- [15] L.DUTTO – *Application de L'Algotihme GMRES a la Resolution des Equations de Navier–Stokes Compressible. Etude de Divers Preconditionnements*, Rapports de Recherche 1234, INRIA, Rapport de Recherche 1116, Rocquencourt 1990.
- [16] E.FERNÁNDEZ CARA, F.GUILLÉN – *The Existence of Incompressible, Nonconstant Density, Navier-Stokes 3D Flows in Unbounded Domains*, International Conference on Differential Equations (Equadiff), Barcelona 1991 (to appear).
- [17] E.FERNÁNDEZCARA, F.GUILLÉN – *The Existence of Nonhomogeneous, Viscous and Incompressible Flow in Unbounded Domains*, Comm. PDE (to appear).
- [18] E.FERNÁNDEZ CARA, F.GUILLÉN – Aparecerá
- [19] W.FISZDON, W.M.ZAJACZKOWSKI – *Existence and Uniqueness of Solutions of the Inicial Boundary Value Problem for the Flow of a Barotropic Viscous Fluid, Global in Time*, Arch. Mech. 35, 1983, p. 517–532.
- [20] D.GILBARG, N.S.TRUDINGER – *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd. Edition, Springer–Verlag, Berlin 1983.
- [21] V.GIRAULT, P.A.RAVIART – *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Spriger–Verlag, Berlin 1986.
- [22] R.GLOWINSKI – *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New York 1984.
- [23] F.GUILLÉN – Aparecerá.
- [24] P.HARTMAN – *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York 1964.
- [25] J.HEYWOOD – *A Uniqueness Theorem for Nonstationary Navier–Stokes Flow Past an Obstacle*, Ann. Sc. Norm. Pisa 6, (1979), p. 427–445.
- [26] J.HEYWOOD *The Navier–Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions*, Indiana Univ. Math. J. 29, (1980), p. 639–681.
- [27] J.HEYWOOD – *Open Problems in the Theory of Navier-Stokes Equations*, In The Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Methods, Lecture Notes in Math. No. 1431, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [28] HOPF – *Über Die Anfangswertanfrage für Die Hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr. 4, (1950), p. 213–231.

- [29] F. JOHN – *Partial Differential Equations*, 4th Edition, Spriger-Verlag, New York 1982.
- [30] V.I. JUDOVIC – *A Two Dimensional Problem of Unsteady Flow of an Ideal Incompressible Fluid Across a Given Domain*, Amer. Math. Soc. Trans. (2) 57, 1966, p. 277–304.
- [31] A.V. KAZHIKHOV – *Resolution of Boundary Value Problems for Non-Homogeneous Viscous Fluids*, Dokl. Akad. Nauk., 216 (1974), p. 1008–1010.
- [32] A.V. KAZHIKHOV, S. SMAGULOV – *The Correctness of Boundary-Value Problems in a Diffusion Model of a Nonhomogeneous Liquid*, Soviet Phys. Dokl., 22, (1977), p. 249–250.
- [33] J.U. KIM – *Weak Solutions of an Initial Boundary Value Problem for an Incompressible Viscous Fluid with Nonnegative Density*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 18, No. 1, 1987, p. 89–96.
- [34] A. KUFNER ET AL. – *Function Spaces*, Proceedings of the Academy of Sciences, Prague 1977.
- [35] O.A. LADYZHENSKAYA – *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2nd. Edition, Gordon & Breach, New York 1969.
- [36] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV – *Unique Solvability of an Initial and Boundary Value Problem for Viscous Incompressible Nonhomogeneous fluids*, J. Soviet. Math., 9 (1978), p. 697–749.
- [37] J.L. LIONS, E. MAGENES – *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol. 1, , Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1966.
- [38] J.L. LIONS – *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1969.
- [39] J.L. LIONS – *On Some Problems Connected with Navier-Stokes Equations*, in *Nonlinear Evolution Equations*, Ed. M.G. Grandall, Academic Press, New York 1978.
- [40] G. LUKASZEWICZ – *An Existence Theorem for Compressible Viscous and Heat Conducting Fluids*, Math. Meth. Appl. Sci. 6, 1984, p. 234–247.
- [41] G. LUKASZEWICZ – *On Non-Stationary Flows of Incompressible Asymmetric Fluids*, Math. Meth. Appl. Sci. 13, 1990, p. 219–232.

- [42] J.NECAS – *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris 1967.
- [43] H.OKAMOTO – *On the Equation of Nonstationary Stratified Fluid Motion: Uniqueness and Existence of Solutions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math., **30** (1984), p. 615–643.
- [44] M.PADULA – *An Existence Theorem for Non-Homogeneous Incompressible Fluids*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (4), **31** (1982), p. 119–124.
- [45] M.PADULA – *On the Existence and Uniqueness of Non-Homogeneous Motions in Exterior Domains*, Math. Z., **203** (1990), p. 581–604.
- [46] O.PIRONNEAU – *Méthodes des Éléments Finis pour les Fluides*, Masson, Paris 1988.
- [47] O.PIRONNEAU – *On the Transport-Difussion Algorithm and its Applications to the Navier-Stokes Equations*, Numer. Math., **38** (1982), p. 304–332.
- [48] O.PIRONNEAU, J.RAPPAZ – *Numerical Analysis, for Compressible Viscous Isentropic Stationary Flows*, Impact of Computing in Science and Engineering, **1**, 1989, p.109–137.
- [49] E.POLAK – *Computational Methods in Optimization*, Academic Press, New York 1991.
- [50] G.DE RHAM – *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris 1960.
- [51] L.SCHWARTZ – *Theorie des Distributions*, Hermann, Paris 1973.
- [52] P.SECCHI – *On the Initial Value Problem for the Equations of Motion of Viscous Incompressible Fluids in the Presence of Diffusion*, Bolletino U.M.I. **6** 1-B (1982), p. 1117–1130.
- [53] P.SECCHI – *On the Motion of Viscous Fluids in the Presence of Difussion*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 19, No. 1, (1988), p. 22–31.
- [54] J.SIMON – *Ecoulement d'un Fluide Non Homogène avec une Densité Initiale s'annulant*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, **15** (1978), p. 1009-1012.
- [55] J.SIMON – *Non-Homogeneous Viscous Incompressible Fluids : Existence of Velocity, Density and Pressure*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 21, No. 5 (1990), p. 1093–1117.

- [56] J.SIMON – *Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$* , Annali Mat. Pura Appl., Serie IV, Vol. 146 (1987), p. 65–96.
- [57] J.SIMON – *Sobolev, Besov and Nikolskii Fractional Spaces: Imbeddings and Comparisons for Vector Valued Spaces on an Interval*, Annali Mat. Pura Appl., Serie IV, 1989.
- [58] J.SIMON – *Existencia de Solución del Problema de Navier-Stokes con Densidad Variable*, Lectures at the University of Sevilla, 1989.
- [59] J.SIMON – *Distributions à Valeurs dans un Banach*, à paraître.
- [60] L.TARTAR – *Topics in Non Linear Analysis*, Publ. Math. d'Orsay, Paris 1978.
- [61] R.TÉMAM – *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1977.
- [62] R.TÉMAM – *Infinite- Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York 1988.
- [63] A.VALLI – *Periodic and Stationary for Compressible Navier–Stokes Equations via a Stability Method*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, (1983), p. 607–647.
- [64] A.VALLI, W.M. ZAJACZKOWSKI – *Navier–Stokes Equations for Compressible Fluids: Global Existence and Qualitative Properties of the Solutions in the General Case*, Comm. Math. Phys. T. 103, 1986, p. 259–296.
- [65] E.ZEIDLER – *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol. IV, Spriger-Verlag, Berlin 1990.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal teológico por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. Francisco M. Guillén González

sobre Nuevos resultados sobre el Problema de Navier-Stokes
con densidad variable y algunas variantes: existencia, unicidad,
otros resultados técnicos y aproximación numérica
a los que se le otorga el título de Apto Cum Laude

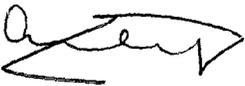
Sevilla, 25 de Septiembre

1992

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,



El Presidente

El Secretario,

El Doctorado,

