

ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA FRICCIÓN EN UNA GRIETA INCLINADA EN EL INTERIOR DE UN TUBO SOMETIDO A COMPRESIÓN

E. Graciani, V. Mantič, F. París

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales. Escuela Superior de Ingenieros
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla
E-mail: graciani@esi.us.es, mantic@esi.us.es, paris@esi.us.es

RESUMEN

En este artículo se presenta el análisis, mediante el Método de los Elementos de Contorno, de una grieta con simetría axial en el interior de un tubo sometido a compresión axial, centrada en el espesor y orientada formando un ángulo cualquiera con la dirección radial del tubo. En primer lugar, se considera una configuración en la que la longitud de la grieta es pequeña frente al espesor y el radio interior del tubo, comprobándose que la solución es análoga a la de una grieta cerrada en un medio infinito, en deformación plana, sometida a un estado uniforme de compresión y cortadura lejos de la fisura. El estudio se completa analizando grietas de longitud apreciable en comparación con el espesor del tubo, para las cuales se presentan los resultados numéricos obtenidos para el factor de intensificación de tensiones en función de la orientación y longitud de la grieta y del coeficiente de fricción.

ABSTRACT

In this paper a numerical stress analysis, using the Boundary Element Method, of an axisymmetric centred slant crack inside an axially compressed tube is presented. The case in which the crack length is small in comparison with the tube thickness and inner radius is studied firstly, showing that the elastic solution is analogue to the one corresponding to a closed crack in an infinite media subjected to a plane strain state of uniform normal and tangential far field stresses. The analysis is completed with the study of cracks with a significant length in comparison with the tube thickness. Numerical results obtained for the stress intensity factor, as a function of the crack size and orientation and the friction coefficient, are presented for these cracks.

PALABRAS CLAVE: Grieta cerrada, fricción, Método de los Elementos de Contorno.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo de soldaduras en ángulo es una técnica ampliamente extendida para la unión de tramos de tuberías. La posible aparición de defectos en el cordón de soldadura (en la zona afectada térmicamente) hace que estas uniones constituyan un posible punto de aparición de grietas, las cuales pueden llevar a la rotura de la tubería.

El análisis de grietas que se propagan por el interior de tuberías bien en modo I puro o bien en modo mixto, es decir grietas abiertas, está ampliamente referenciado en la bibliografía (ver por ejemplo [1-2]). Sin embargo, es más difícil encontrar resultados correspondientes a grietas que crecen en modo II puro, es decir grietas cerradas, no sólo en problemas con simetría axial sino también en los casos más ampliamente estudiados de tensión y deformación plana.

En la mayoría de los casos, los análisis de grietas cerradas se llevan a cabo despreciando el efecto de la fricción entre las caras de la grieta, siendo muy escasos los estudios que incluyen el efecto de la fricción. A

modo de ejemplo, en [3] puede encontrarse el análisis, despreciando el efecto de la fricción, de una grieta en deformación plana con condiciones de contorno análogas a la grieta objeto del presente estudio y en [4] se aborda, empleando el Método de los Elementos Finitos, el análisis de una grieta inclinada en el centro de una placa sometida a un estado plano de compresión, teniendo en cuenta la fricción entre las caras de la grieta.

En el presente artículo se presenta el análisis mediante el Método de los Elementos de Contorno de una grieta con simetría axial inclinada en el interior de un tubo sometido a compresión axial. La grieta está centrada en el espesor y orientada formando un ángulo cualquiera con la dirección radial del tubo.

Esta situación es interesante, en primer lugar, porque grietas de este tipo son susceptibles de aparecer en las soldaduras anteriormente mencionadas, y, aunque la grieta no haya progresado completamente en dirección circumferencial, el estado de tensiones en los vértices de una sección radial de la fisura debe ser muy similar al de la grieta objeto del presente estudio.

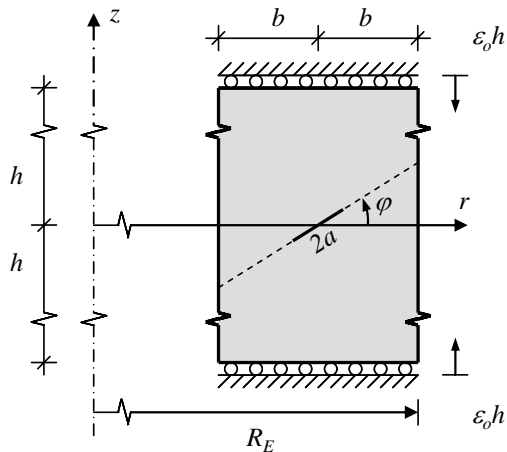


Figura 1. Grieta centrada en el interior de un tubo sometido a compresión e inclinada un ángulo φ .

En segundo lugar, tal y como se mostrará en el artículo, para grietas pequeñas, la solución elástica en el entorno de los vértices de la grieta objeto del presente estudio coincide con la solución elástica de una grieta en deformación plana, en el interior de un medio infinito, sometida a un estado de compresión y cortadura constantes. Este hecho, permite comprobar la precisión de los resultados obtenidos numéricamente.

Dado que en el análisis del estado tensional es preciso tener en cuenta el contacto entre las caras de la grieta y las tensiones singulares que aparecen en el entorno del vértice de la misma, el estudio numérico se ha llevado a cabo empleando una herramienta basada en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para problemas de contacto con simetría axial [5]. El uso de dicho algoritmo ha permitido la obtención de soluciones suaves y precisas del estado tensional a distancias extremadamente próximas al vértice de la grieta empleando discretizaciones muy sencillas.

2. DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS NUMÉRICO

En la Figura 1 se muestra un esquema de la geometría y condiciones de contorno del análisis realizado. Las dimensiones empleadas han sido: $b = 5$ cm, $R_E / b = 10$ y $h / b = 12$. Las características elásticas del material empleado han sido: $E = 2.1 \cdot 10^6$ Kg/cm² y $\nu = 0.3$. La longitud de la grieta a y su orientación φ se han variado progresivamente.

Como se observa en la Figura 1 las condiciones de contorno corresponden a un acortamiento uniforme del tubo aplicado en los extremos del mismo.

El análisis numérico mediante el MEC se ha realizado empleando la técnica clásica de colocación de la ecuación integral de los desplazamientos en los nodos de la discretización del contorno del problema [6]. Por tanto, para realizar el análisis se ha dividido, de forma ficticia, la sección radial del sólido por la recta que

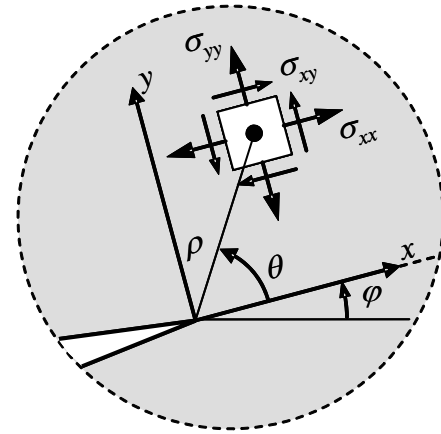


Figura 2. Sistema local de referencia empleado para el cálculo de K_{II} .

contiene a la grieta. Por una parte, esta división evita que las ecuaciones de colocación correspondientes a ambas caras de la grieta sean redundantes y, por otra, dado que las variables primarias del análisis numérico mediante el MEC son los desplazamientos y las componentes intrínsecas del vector tensión en los nodos del contorno, permite obtener directamente el estado tensional por delante del fondo de grieta como resultado del análisis.

Para el análisis numérico se ha discretizado el contorno de los dos subdominios empleando elementos lineales continuos. Cada subdominio se ha dividido en seis tramos rectos (los tres lados exteriores, la cara de la grieta y las interfases a ambos lados de la misma) y se ha empleado una discretización tal que la longitud máxima de los elementos de cada tramo sea la décima parte de la longitud del tramo, que los elementos que llegan a cada esquina sean de igual longitud y que los elementos más pequeños, situados a ambos lados de los vértices de las grietas, tengan una longitud de 10^{-6} cm. En las zonas en que es preciso variar la longitud de los elementos se ha mantenido una relación de 2:3 entre las longitudes de elementos consecutivos.

3. SOLUCIÓN ASINTÓTICA EN EL ENTORNO DEL VÉRTICE DE LA GRIETA

Para la descripción de la solución elástica en el entorno del vértice de la fisura se emplea habitualmente el sistema local de referencia mostrado en la Figura 2. De esta forma, para puntos suficientemente próximos al vértice de la grieta, es decir si $\rho \rightarrow 0$, las componentes del vector tensión por delante del fondo de grieta pueden definirse como:

$$\sigma_{yy}(\rho, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}}, \quad \sigma_{xy}(\rho, 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}}, \quad (1)$$

donde K_I y K_{II} son los factores de intensificación de tensiones correspondientes, respectivamente, a los modos de fractura I y II.

Análogamente, las componentes de los desplazamientos relativos entre las caras de la grieta:

$$\Delta u_i(\rho) = u_i(\rho, \pi) - u_i(\rho, -\pi), \quad (2)$$

siendo $i = x, y$, pueden escribirse como:

$$\Delta u_y(\rho) = \frac{8K_I}{E'} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}, \quad \Delta u_x(\rho) = \frac{8K_{II}}{E'} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}, \quad (3)$$

siendo $E' = E/(1-\nu^2)$.

En todos los casos resueltos en el presente estudio se ha observado que la grieta permanece cerrada en su totalidad, produciéndose, o no, el deslizamiento entre sus caras en función de los valores del ángulo φ que forma la grieta con la dirección radial del tubo y del coeficiente de fricción μ .

Por consiguiente, en los análisis numéricos, se ha obtenido en todos los casos un factor de intensificación de tensiones en modo I nulo, es decir, $K_I = 0$. Para el cálculo numérico del factor de intensificación de tensiones en modo II se ha empleado la expresión (3), con lo cual K_{II} viene definido por el límite:

$$K_{II} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} \Delta u_x(\rho) \right]. \quad (4)$$

4. RESULTADOS PARA GRIETAS PEQUEÑAS

En primer lugar, se va a plantear el análisis de una grieta cuya longitud es mucho menor que el espesor del tubo. En estas condiciones, dado que las caras libres del tubo están lejos de los vértices de la fisura, la solución elástica en el entorno de los mismos debe ser semejante al de una grieta en el interior de un medio infinito sometida al mismo estado de cargas en la zona lejana a la fisura. Dado que el radio interior del tubo es grande en comparación con el espesor, puede considerarse también que la solución del problema con simetría axial debe ser similar a la de un problema en deformación plana con idéntico estado de cargas en la zona lejana a la fisura [7]. Este problema, mostrado en la Figura 3, tiene la solución analítica en deformación plana que se describe a continuación [8].

Como la grieta está inclinada respecto de la dirección de compresión, el estado tensional en la zona lejana a la fisura expresado en el sistema local de referencia de la Figura 3, se corresponde con un estado de compresión uniforme al que se superpone un estado de tensión tangencial uniforme, dados ambos por:

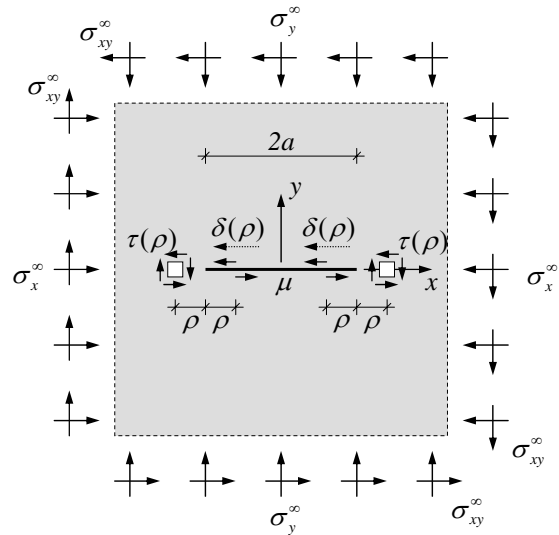


Figura 3. Grieta en medio infinito sometida a un campo lejano de compresión y cortadura constantes.

$$\sigma_y^\infty = \varepsilon_o E \cos^2(\varphi), \quad \sigma_{xy}^\infty = \varepsilon_o E \cos(\varphi)\sin(\varphi), \quad (5)$$

siendo $\varepsilon_o > 0$ el acortamiento unitario del tubo, definido según la referencia mostrada en la Figura 1. En las expresiones (5) el sentido positivo de las tensiones σ_y^∞ y σ_{xy}^∞ es el indicado en la Figura 3.

Si $\mu < \sigma_{xy}^\infty / \sigma_y^\infty$, todos los puntos de las caras de la grieta están deslizando y la solución en el entorno de la fisura es la de una grieta que crece en modo II puro

$$\tau(\rho) = \frac{K_{II}^{DP}}{\sqrt{2\pi\rho}}, \quad \delta(\rho) = \frac{8K_{II}^{DP}}{E} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}, \quad \text{con } \rho \rightarrow 0, \quad (6)$$

siendo $K_{II}^{DP} = (\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty)\sqrt{\pi a}$, por tanto, $K_{II}^{DP} \geq 0$.

Por contra, si $\mu > \sigma_{xy}^\infty / \sigma_y^\infty$, todos los puntos de las caras de la grieta están en adhesión y la solución es la de una placa a compresión (con los ejes de referencia girados)

$$\tau(\rho) = \sigma_{xy}^\infty, \quad \delta(\rho) = 0, \quad (7)$$

lo que corresponde a $K_{II}^{DP} = 0$.

Por tanto, la solución del presente caso, en el que la longitud de grieta adoptada ha sido $a = 0.02 b$, permite chequear la exactitud de los resultados numéricos. Por comodidad, en la presentación de los resultados se muestra el factor de intensificación de tensiones de una forma adimensional definido como:

$$\underline{K}_{II} = \frac{K_{II}}{\varepsilon_o E \sqrt{\pi a}}. \quad (8)$$

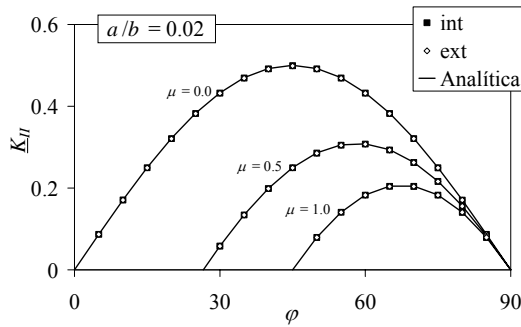


Figura 4. Evolución de \underline{K}_{II} con φ en una grieta pequeña. Resultados analíticos y numéricos.

A la vista de las expresiones (5-8), es inmediato deducir que el factor de intensificación de tensiones, en forma adimensional, depende únicamente del coeficiente de fricción y de la orientación de la grieta, de forma que

$$\underline{K}_{II}^{DP} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0^\circ \leq \varphi \leq \varphi_\mu \\ \cos^2(\varphi)[\tan(\varphi) - \mu] & , \text{ si } \varphi_\mu \leq \varphi \leq 90^\circ \end{cases} \quad (9)$$

siendo $\varphi_\mu = \arctan(\mu)$.

En la Figura 4 se muestran los resultados numéricos obtenidos para \underline{K}_{II} , a partir de la solución elástica en el entorno de ambos vértices (interior y exterior) de la grieta, en función de la orientación de la grieta para tres valores característicos del coeficiente de fricción. Para evidenciar la precisión de dichos resultados se incluye en la representación la solución analítica del problema análogo en deformación plana mostrada en (9).

Como puede comprobarse, \underline{K}_{II} es siempre nulo para el ángulo crítico en el que comienzan a deslizar las caras de la fisura, $\varphi_\mu = \arctan(\mu)$, y para una grieta orientada en dirección vertical. Entre estas dos orientaciones límite, la evolución es aproximadamente senoidal presentando un valor máximo en la bisectriz de ambas, lo cual puede deducirse de (9) teniendo en cuenta que:

$$\cos^2(\varphi)[\tan(\varphi) - \mu] = \frac{\text{sen}(\varphi - \varphi_\mu) \cos(\varphi)}{\cos(\varphi_\mu)} \quad (10)$$

La máxima diferencia entre los resultados numéricos y analíticos mostrados en la Figura 4 es inferior al 0.3%, lo cual demuestra, por un lado, que efectivamente los problemas axisimétrico y en deformación plana, llevados al límite, tienen la misma solución y, por otro, que la solución numérica obtenida es muy precisa.

Para mostrar con mayor claridad la evolución de \underline{K}_{II} en función del coeficiente de fricción, se muestran en la Figura 5 los resultados numéricos y analíticos obtenidos variando el coeficiente de fricción para tres valores característicos de la orientación de la grieta.

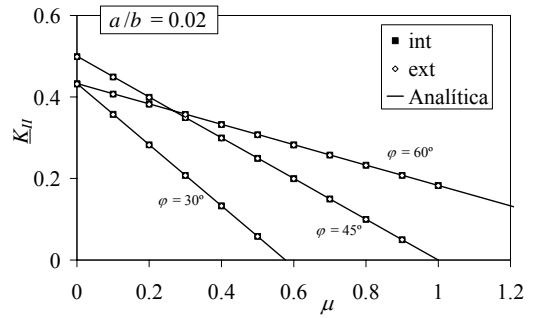


Figura 5. Evolución de \underline{K}_{II} con μ en una grieta pequeña. Resultados analíticos y numéricos.

Como puede observarse, para cualquier orientación, \underline{K}_{II} decrece linealmente con el coeficiente de fricción hasta alcanzar un valor nulo en el coeficiente de fricción crítico $\mu_\varphi = \tan(\varphi)$, siendo más acusada la pendiente cuanto menor es el ángulo de orientación de la grieta como puede deducirse de la expresión (9).

5. RESULTADOS PARA GRIETAS GRANDES

Cuando la longitud de la grieta no es despreciable frente al espesor del tubo, la cercanía de los bordes libres hace que la solución sea diferente a la de una grieta en medio infinito. En aras de una mayor claridad en la presentación de la solución correspondiente a estos casos, se muestran en primer lugar los resultados obtenidos para \underline{K}_{II} despreciando el efecto de la fricción entre las caras de la grieta ($\mu = 0$) y, posteriormente, se estudia el efecto que tiene el coeficiente de fricción en el valor de \underline{K}_{II} .

5.1. Despreciando la fricción en las caras de la grieta

En la Figura 6 se muestran los resultados numéricos obtenidos para \underline{K}_{II} , en ambos vértices y despreciando el efecto de la fricción, en función de la orientación de la grieta para dos valores característicos de la longitud de la grieta. Con objeto de interpretar con mayor claridad los resultados, se ha incluido en la representación la solución analítica del problema análogo en deformación plana obtenida haciendo $\mu = 0$ en (9).

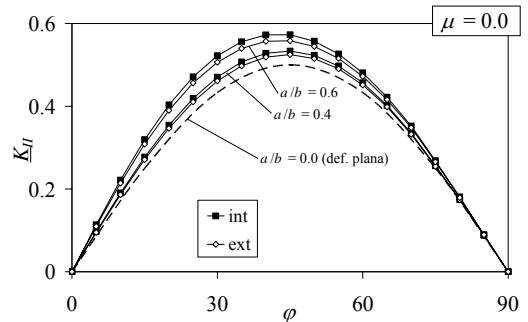


Figura 6. Evolución de \underline{K}_{II} con φ en grietas grandes. Resultados numéricos para $\mu = 0$.

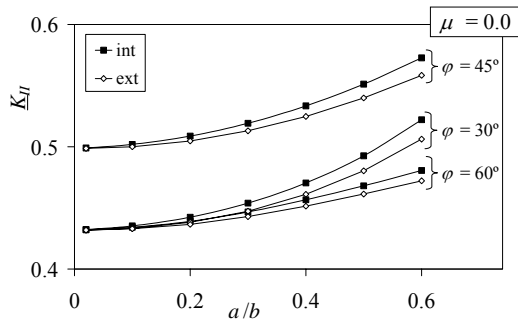


Figura 7. Evolución de K_{II} con a/b . Resultados numéricos para $\mu = 0$.

Como puede observarse, al aumentar la longitud relativa de la grieta, a/b , aumenta el valor de K_{II} y se pierde ligeramente la simetría que existía en la dependencia de K_{II} con la orientación de la grieta. Por otra parte, al aumentar a/b , los valores de K_{II} correspondientes al vértice interior de la grieta se hacen ligeramente mayores que los del vértice exterior.

Esta diferencia entre las soluciones de ambos vértices no es de extrañar dado que, aunque la grieta esté centrada en el espesor, la cara interior del tubo tiene un radio inferior al de la cara exterior del tubo, lo cual origina que el efecto de la proximidad al borde libre sea ligeramente diferente en ambos casos.

Por claridad, en la Figura 7 se muestran los resultados numéricos obtenidos para K_{II} , en ambos vértices y despreciando el efecto de la fricción, en función de la longitud de la grieta para tres valores característicos de la orientación de la grieta.

En esta figura se observa con nitidez que K_{II} aumenta con a/b en todos los casos y que este aumento es proporcionalmente mayor cuanto menor es el ángulo que define la orientación de la grieta.

5.2. Efecto de la fricción en las caras de la grieta

Por último, en este apartado se pone de manifiesto el efecto que tiene la fricción en el valor del factor de intensificación de tensiones K_{II} en grietas de longitud apreciable frente al espesor del tubo.

Para ello, en las Figuras 8(a), 9(a) y 10(a) se muestran los resultados numéricos obtenidos para K_{II} en función del coeficiente de fricción para tres valores típicos de la longitud de la grieta. Dado que la solución en ambos vértices de la grieta es muy similar, y con el objeto de conseguir una mejor visualización de los resultados, se muestran en la figura únicamente los correspondientes al vértice exterior de la grieta.

Como puede observarse, el comportamiento para grietas de longitud apreciable es similar al mostrado en la Figura 5 para grietas pequeñas, es decir, para cualquier orientación, K_{II} decrece con el coeficiente de fricción

hasta alcanzar un valor nulo en el coeficiente de fricción crítico $\mu_\phi = \tan(\phi)$. Sin embargo, aunque no se aprecia con mucha claridad, los resultados de las Figuras 8(a), 9(a) y 10(a) ponen de manifiesto que el descenso de K_{II} para grietas de longitud apreciable se desvía ligeramente del comportamiento lineal.

Este hecho se puede observar con mayor claridad en las Figuras 8(b), 9(b) y 10(b), en las cuales se muestra la diferencia entre los resultados numéricos obtenidos para K_{II} , en ambos vértices, y el comportamiento lineal definido por la ecuación:

$$\underline{K}_{II,lin} = \underline{K}_{II}^{\mu=0} (\mu_\phi - \mu) / \mu_\phi. \quad (11)$$

Como puede comprobarse, los valores de K_{II} están siempre ligeramente por encima del comportamiento lineal, siendo la diferencia más acusada, por un lado, en el centro del intervalo $0 < \mu < \mu_\phi$ y, por otro, cuanto mayor es la longitud de la grieta.

6. CONCLUSIONES

En el presente estudio se ha caracterizado el factor de intensificación de tensiones correspondiente a una grieta con simetría axial, centrada en el interior de un tubo sometido a compresión axial y orientada formando un ángulo cualquiera con la dirección radial del tubo.

El análisis se ha llevado a cabo mediante una herramienta numérica basada en el Método de los Elementos de Contorno, diseñada para el análisis de problemas de contacto con simetría axial.

La elevada precisión de los resultados obtenidos se ha puesto de manifiesto estudiando grietas de longitud muy pequeña en comparación con la longitud del tubo y comparando los resultados obtenidos con la solución analítica de un problema análogo, encontrándose unas diferencias porcentuales máximas de un 0.3% entre los resultados correspondientes a ambos problemas.

Por último, se ha mostrado el efecto que tienen en el factor de intensificación de tensiones el coeficiente de fricción, la orientación de la grieta y su longitud.

Puede concluirse que, para unos valores fijos del coeficiente de fricción y la longitud de la grieta, el factor de intensificación de tensiones es nulo para ángulos menores de un valor crítico $\phi_\mu = \arctan(\mu)$, y, a partir de éste varía (de forma aproximadamente senoidal) hasta anularse nuevamente cuando la grieta es vertical. Manteniendo constantes el resto de variables, el aumento del coeficiente de fricción provoca un descenso del factor de intensificación de tensiones (prácticamente lineal en todos los casos) hasta anularse para un coeficiente de fricción crítico $\mu_\phi = \tan(\phi)$. Por último, si la longitud de la grieta aumenta, se produce un aumento del factor de intensificación de tensiones en todos los casos.

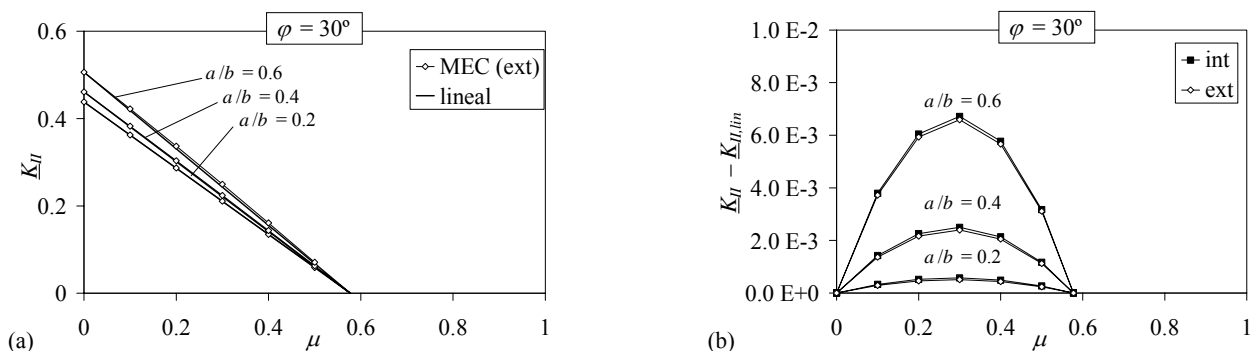


Figura 8. Orientación $\varphi = 30^\circ$: (a) evolución de K_{II} con μ ; (b) desviación del comportamiento lineal.

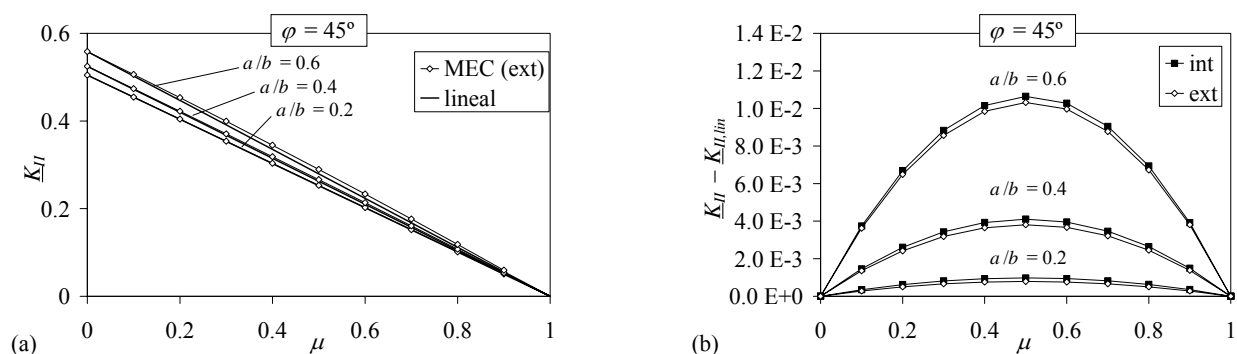


Figura 9. Orientación $\varphi = 45^\circ$: (a) evolución de K_{II} con μ ; (b) desviación del comportamiento lineal.

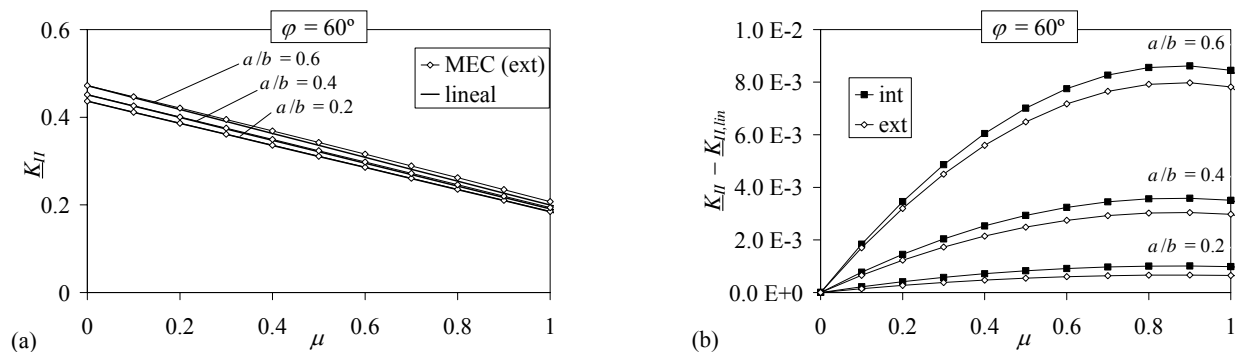


Figura 10. Orientación $\varphi = 60^\circ$: (a) evolución de K_{II} con μ ; (b) desviación del comportamiento lineal.

REFERENCIAS

- [1] Anderson, T.L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press LLC, 1994.
- [2] Tada, H., Paris, P.C. y Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, American Society of Mechanical Engineers, 2000.
- [3] Murakami, Y., *Stress Intensity Factor Handbook*, Pergamon Press, 1988.
- [4] Hammouda, M.M.I., Fayed, A.S. y Sallam, H.E.M., "Mode II stress intensity factors for central slant cracks with frictional surfaces in uniaxially compressed plates", *International Journal of Fatigue*, 24, pp. 1213-1222, 2002.
- [5] Graciani, E., Mantič, V., Paris, F. y Blázquez, A., "Weak formulation of axi-symmetric frictionless contact problems with boundary elements. Application to interface cracks", *Computers and Structures*, 83, pp. 836-855, 2005.
- [6] Paris, F. y Cañas, J., *Boundary Element Method: Fundamentals and Applications*, Oxford University Press, 1997.
- [7] Zak, A.R., "Stresses in the vicinity of boundary discontinuities in bodies of revolution", *Journal of Applied Mechanics*, 31: pp. 150-152, 1964.
- [8] Broberg, K.B. *Cracks and Fracture*, Academic Press, 1999.