Un cálculo abductivo natural

Ángel Nepomuceno Fernández
(Universidad de Sevilla)

1. Introducción

En cada tipo de inferencia hallamos una relación entre las premisas y la conclusión, que podemos expresar simbólicamente como $P \models_X C$, donde P representa el conjunto de las premisas y C la conclusión, mientras que el subíndice X se refiere a la relación de consecuencia de que se trate, ya sea clásica, intuicionista, etc. (cuando sea en sentido clásico no aparecerá índice alguno). El par $\langle P, C\rangle$ constituye el *argumento* del razonamiento o inferencia en cuestión. En el estudio lógico de argumentos han destacado los cálculos que permiten determinar esquemas de argumentos correctos, qué conclusión se puede obtener de ciertas premisas para dar lugar a un argumento válido, etc. En este trabajo se propone un *cálculo de hipótesis* basado en los cálculos deductivo-naturales tipo Gentzen.

2. Inferencia abductiva

Dada una *teoría base* y un hecho, un problema abductivo consiste en hallar una *hipótesis* o *consecuencia abductiva*, tales que ésta junto con la teoría expliquen el hecho, en el sentido de que la teoría base y la hipótesis, tomadas conjuntamente, impliquen o entrañen el hecho. Si el sistema de razonamiento adoptado es clásico, entonces la relación de entrañamiento es la de consecuencia lógica (o implicación lógica) estudiada por la lógica clásica. Simbólicamente, dadas la teoría base Θ y el hecho φ, (Θ, φ) representa un problema abductivo; se tomará α como una solución si se verifica que $\Theta\cup\{\alpha\}\models\varphi$. Este es el requisito básico, pero se pueden establecer otros para evitar soluciones triviales, como que $\alpha\neq\varphi$, que $\Theta\cup\{\alpha\}$ sea consistente, etc., por lo que se pueden estudiar distintos tipos de abducciones. En cualquier caso, esta noción debería ser entendida como proceso inferencial, distinto de la inducción y de la deducción, que en la investigación científica tiene como finalidad la generación de hipótesis para su posterior examen o comprobación, poniendo en juego todas las operaciones por las que se haya engendrado la teoría de que se trate (Hintikka, 1999). Así pues, planteado un problema abductivo (Θ, φ), definimos la inferencia abductiva de la siguiente manera:

$(\Theta, \varphi) \models_{AB} \alpha$ syss $\Theta, \alpha \models \varphi$ y no es el caso que $\Theta \models \varphi$ ni $\Theta \models \neg\varphi$.

3. Un cálculo abductivo

Es conocido el cálculo deductivo natural tipo Gentzen para los sistemas formales clásicos. Dado un lenguaje formal de predicados de primer orden L, el cálculo deductivo-natural $\vdash$ permite obtener las consecuencias lógicas de un conjunto de fórmulas de *L*. Más concretamente, este cálculo es correcto y completo, es decir, para cada clase de fórmulas Γ y la fórmula β, $\Gamma \models \beta$ syss $\Gamma \vdash \beta$. Los postulados de este cálculo constituyen un conjunto de reglas o patrones de inferencia, una de introducción y otra de eliminación por cada constante lógica de *L*.

Planteado un problema abductivo (Θ, φ) y teniendo en cuenta las características del cálculo deductivo natural, la definición anterior resulta equivalente a

$(\Theta, \varphi) \models_{AB} \alpha$ syss $\Theta, \alpha \vdash \varphi$ y no es el caso que $\Theta \vdash \varphi$ ni $\Theta \vdash \neg\varphi$

¿Es definible un cálculo de las hipótesis que solucionan problemas abductivos?

El cálculo $\vdash_{CNAB}$ hace uso de las reglas propias del cálculo deductivo-natural y tiene la siguiente regla especial de *afirmación de hipótesis abductiva* (AHA), para hallar hipótesis a partir de un problema abductivo (Θ, φ):

Si $\Theta, \neg\varphi \rightarrow \neg\alpha$, no $(\Theta \vdash \alpha)$, no $(\Theta \cup \{\alpha\} \vdash \bot)$, y $\alpha \neq \varphi$; entonces α.

En algunas condiciones antecedentes pueden surgir problemas (en primer orden surge la indecidibilidad, por ejemplo). En general, $\Delta \vdash_{CNAB} \beta$ syss existe una sucesión de fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tal que, para cada $i \leq n\text{-}1$, $\delta_i \in \Theta$ o δ_i es consecuencia (por aplicación de las reglas del cálculo deductivo) de fórmulas precedentes y δ_n es β, la cual se ha obtenido por aplicación de AHA. Veamos algún ejemplo. Sea el problema abductivo (Θ, φ), donde $\Theta = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$ y $\varphi = r$; obtenemos la siguiente secuencia que culmina con una hipótesis:

1. $p \rightarrow q$	Premisa
2. $q \rightarrow r$	Premisa
3. $\neg r$	Hipótesis auxiliar
4. p	Hipótesis auxiliar
5. q	*M. P.*
6. r	*M. P.*
7. $r \wedge \neg r$	Introducción $\wedge$ 3, 6
8. $\neg p$	Introducción $\neg$ 4
9. $\neg r \rightarrow \neg p$	I. I. 3-8.
10. p	AHA 1, 2, 9

Parte de las condiciones antecedentes de la regla AHA aparecen en las líneas 1 y 2 (teoría base) y en la línea 9, justificada por la deducción subsidiaria de 3 a 8. Fácilmente se obtiene una deducción de r a partir de las fórmulas 1, 2 y 10. También se puede obtener otra hipótesis abductiva distinta, a saber, q ¿Cuál es preferible? A este respecto, se puede optar por una u otra en función de determinados criterios.

Como segundo ejemplo, veamos un caso de fórmulas predicativas; $\Theta = \{\forall \Box x(Px \rightarrow Qx)\}$ y $\varphi = \Box \forall xQx$:

1. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$	Premisa
2. $\neg\forall xQx$	Hipótesis auxiliar
3. $\neg Qx$	E. $\forall$ 2
4. $Px \rightarrow Qx$	E. $\forall$ 1
5. $\neg Px$	M. T. 3, 4
6. $\neg\forall xPx$	I. $\forall$ 5
7. $\neg\forall xQx \rightarrow \neg\forall xPx$	I. I. 2-6
8. $\neg\forall xPx$	AHA 1, 7.

Tanto la regla de introducción como de eliminación de $\forall$ aplicadas a 5 y 2, respectivamente, se obtienen como reglas derivadas (con las restricciones pertinentes, si procede) en el cálculo. Nótese que, en general, $\vdash_{CNAB}$ no es monótono. En efecto, retomando el ejemplo de las fórmulas proposicionales, hemos obtenido $(\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}, r) \vdash_{CNAB} p$, pero no se verifica que

$(\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg p\}, r) \vdash_{CNAB} p$,

pues $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg p\} \cup \{p\} \vdash \bot$. Se puede definir el cálculo $\vdash_{CNAB}$ de manera que se incorporen determinados requisitos abductivos; el de consistencia, por ejemplo, está contemplado en la definición dada, a saber por la condición antecedente "no $(\Theta \cup \{\alpha\} \vdash \bot)$". El requisito explicativo sería expresable mediante la siguiente condición antecedente: "no $(\{\alpha, \neg\varphi\} \vdash \bot)$". Una vez fijados los requisitos abductivos correspondientes, tanto en la definición de la relación de consecuencia abductiva como en el cálculo (en la regla AHA), es demostrable la corrección del mismo. Así, definiendo

1) $(\Theta, \varphi) \models_{AB} \alpha$ syss $\Theta, \alpha \models \varphi$ y no es el caso que $(\Theta \models \varphi)$□, ni $(\alpha \models \varphi)$□, ni $(\Theta \cup \{\alpha\} \models \bot)$,

2) AHA: Si $\Theta, \neg\varphi \rightarrow \neg\alpha$, no $(\Theta \vdash \varphi)$, no $(\alpha \vdash \varphi)$ y no $(\Theta \cup \{\alpha\} \vdash \bot)$; entonces α,

se puede probar la corrección, teniendo en cuenta los problemas indicados. Para la abducción básica (plana), $(\Theta, \varphi) \models_{AB} \alpha$ syss $\Theta, \alpha \models \varphi$, y AHA: Si Θ, $\neg\varphi \rightarrow \neg\alpha$, entonces α, verificando corrección: Si $(\Theta, \varphi) \vdash_{CNAB} \alpha$, entonces $(\Theta, \varphi) \models_{AB} \alpha$.

Bibliografía

ALISEDA, A. 1997: *Seeking Explanation: Abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*, ILLC, Amsterdam.

HINTIKKA, J. 1999: "What is abduction? The fundamental problem of contemporary epistemology", en *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery*, Kluwer, Dordrecht, pp. 91-113.