Cálculo de δ-*resolución* proposicional

Fernando Soler Toscano
(Universidad de Sevilla)

Definiciones

El cálculo de δ -*resolución* es dual al cálculo de resolución, lo que podrá observarse en las siguientes definiciones. En primer lugar, una δ -*cláusula* es un conjunto de literales, implícitamente unidos conjuntivamente. Cuando tal conjunto es vacío, lo llamamos la δ -*cláusula* vacía, que representamos como $\square$. En cuanto a la semántica, una valoración ν satisface la δ -*cláusula* γ si y sólo si ν satisface todos los literales que la componen. La δ -*cláusula* $\square$, es universalmente válida. Además, dado el conjunto de δ -*cláusulas* Σ , éste será satisfecho por ν si y sólo si ν satisface al menos una de las δ -*cláusulas* que pertenecen a Σ .

Para transformar una fórmula proposicional a forma δ -*clausal* –es decir, en un conjunto de δ -*cláusulas*– la transformamos a forma normal disyuntiva (FND). De esta forma, cada conjunción elemental se transforma en una δ -*cláusula*. Puede comprobarse que los criterios de satisfacción de la FND coinciden con los de su correspondiente forma δ -*clausal*. Por ejemplo, dada la fórmula $\alpha \equiv \left(p \wedge (p \rightarrow q)\right) \rightarrow q$, tenemos que :

$FND(\alpha) \equiv \neg p \vee \left(p \wedge \neg q\right) \vee q$, por lo que su forma δ -*clausal* resulta ser el conjunto de δ -*cláusulas* $\Omega \equiv \left\{\{\neg p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\right\}$.

La única regla de este cálculo es la de δ -*resolución* binaria, similar en forma –aunque semánticamente dual– a la regla de resolución. Siendo λ un átomo, tenemos:

$$\frac{\Sigma_1 \cup \{\lambda\} \qquad \Sigma_2 \cup \{\neg\lambda\}}{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}$$

Si partimos de Ω, es posible hacer la siguiente derivación por δ -*resolución*:

1. $\{\neg p\}$, miembro de Ω .
2. $\{p, \neg q\}$, miembro de Ω .
3. $\{q\}$, miembro de Ω .

4. $\{\neg q\}$, desde 1 y 2, por δ *-resolución*.

5. $\square$, desde 3 y 4, por δ *-resolución*.

Se ha obtenido la δ *-cláusula* vacía. Al contrario del cálculo normal de resolución, en este caso esto significa que el conjunto de δ *-cláusulas* de partida es universalmente válido, por lo que también lo será α. Lo veremos en la próxima sección.

Corrección y completud

A continuación presentamos los teoremas de corrección y completud de este cálculo. Al ser las pruebas duales a las del cálculo de resolución, las omitiremos por brevedad.

Teorema de corrección: Dado el conjunto de δ *-cláusulas* Σ, para toda δ *-cláusula* γ que pueda obtenerse a partir de Σ mediante aplicaciones de la regla de δ *-resolución*, se verifica, $\gamma \models \Sigma$.

Teorema de completud: Para toda fórmula proposicional universalmente válida α, es posible obtener $\square$ mediante δ *-resolución* a partir de la forma δ *-clausal* de α.

El teorema de corrección muestra la peculiaridad de este cálculo, pues se cumple que cada fórmula obtenida mediante δ *-resolución*, a diferencia de lo que ocurre en el cálculo de resolución, no es consecuencia lógica de las fórmulas de partida, sino lo recíproco: el conjunto de δ *-cláusulas* original es consecuencia lógica de cada fórmula resultante de las sucesivas aplicaciones de la regla de δ *-resolución*. De aquí que este cálculo pueda emplearse de un modo eficaz para la resolución de problemas abductivos, según se explica a continuación.

Uso abductivo

Dadas una teoría Θ –conjunción de fórmulas proposicionales– y una observación φ –fórmula proposicional, comúnmente un literal–, decimos que $\langle\Theta,\varphi\rangle$ es un problema abductivo si no son consecuencia lógica de Θ ni φ ni $\neg\varphi$. La fórmula proposicional α es una solución abductiva a dicho problema abductivo si se cumple:

1. $\Theta,\alpha \models \varphi$ (requisito fundamental).
2. $\Theta \wedge \alpha$ es satisfacible (requisito de consistencia).
3. $\alpha \wedge \neg\varphi$ es satisfacible (requisito explicativo).

El cálculo de δ *-resolución* nos permite resolver problemas abductivos. Partimos del conjunto de δ *-cláusulas* correspondiente a la fórmula $\Theta \rightarrow \varphi$.

Entonces $\langle \Theta, \varphi \rangle$ es un problema abductivo si y sólo si (debido al teorema de completud) no es posible obtener $\square$ mediante δ *-resolución*. En ese caso, cada una de las δ *-cláusulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ obtenidas cumple $\gamma_i \models \Theta \rightarrow \varphi$, y por lo tanto $\Theta, \gamma_i \models \varphi$, para $1 \leq i \leq n$. Así, el cálculo de δ *-resolución* permite encontrar fórmulas que cumplen el primer requisito de las soluciones abductivas. Por ello decimos que se trata de un *cálculo abductivo*, al ser generador de hipótesis explicativas.

Respecto al segundo criterio, comprueba que la explicación sea consistente con la teoría. La comprobación de que $\Theta \wedge \alpha$ es satisfacible puede hacerse simplemente verificando que su FND contenga al menos una conjunción elemental donde no se encuentren dos literales complementarios. Igualmente puede hacerse para comprobar que $\alpha \wedge \neg\varphi$ es satisfacible, lo que corresponde al tercer requisito, que exige que la explicación no sea autosuficiente para explicar la observación, pues debe requerir la teoría.

Como ejemplo, sea la teoría $\Theta \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$, y la observación que se quiere explicar $\varphi \equiv c$. Entonces,

$$FND(\Theta \rightarrow \varphi) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee c$$

De cada conjunción elemental se obtiene una δ *-cláusula*. Entonces se aplica la regla de δ *-resolución*:

1. $\{a, \neg b\}$, δ *-cláusula* inicial.
2. $\{b, \neg c\}$, δ *-cláusula* inicial.
3. $\{c\}$, δ *-cláusula* inicial.
4. $\{b\}$, desde 2 y 3, por δ *-resolución.*
5. $\{a\}$, desde 1 y 4, por δ *-resolución.*

Como no es posible obtener nuevas δ *-cláusulas* y no se ha alcanzado $\square$, deben buscarse soluciones abductivas. De las cinco δ *-cláusulas* seleccionamos sólo las tres últimas, pues *subsumen* a las otras dos (criterio de minimalidad). Las tres cumplen el requisito de consistencia, pero tan solo $\{b\}$ y $\{a\}$ cumplen el requisito explicativo. Por tanto ambas pueden ser propuestas como posibles soluciones abductivas. Conviene observar cierto criterio preferencial que se deriva de la noción de *historia* de las cláusulas. En este sentido, la explicación $\{a\}$ es mejor que $\{b\}$ ya que la *historia* de aquella incluye la de ésta, lo que implica que hace un *mayor uso* de la teoría.

En cuanto a la extensión a primer orden hay que tener en cuenta:

- Para obtener la forma δ *-clausal*, se debe realizar una operación dual a la eskolemización: se sustituyen las variables universales por términos de Skolem y las existenciales por variables libres.
- Para obtener las explicaciones, se emplea des-eskolemización (también dual).
- La búsqueda de □ no puede saturarse, por lo general (indecidibilidad de la abducción en lógica de primer orden).