TRATAMIENTO MULTIMODAL DE CONTEXTOS

ENRIQUE SARRIÓN MORILLO, IGNACIO HERNÁNDEZ ANTÓN, ÁNGEL NEPOMUCENO FERNÁNDEZ
Grupo de Lógica, Lenguaje e Información - U. de Sevilla
esarrion, iha, nepomuce@us.es

ABSTRACT: We take as starting point the context logic studied in (Grossi, Meyer, and Dignum 2008) and (Aucher et al. 2009), which was concerned with the development of a dynamic logic of rules. Here we focus on issues of Formal Epistemology and omit the addition of deontic operators. We define some basic logics that are useful for the study of epistemic actions such as expanding, contracting or revising a theory taking into account different kinds of inferential results.

Key words: context logic, context models, modal operators, finite contexts.

1 Introducción

Dada una teoría, su extensión en un contexto se puede considerar como una ampliación de la misma con resultados obtenidos en procesos epistémicos, entre los que se cuentan los inferenciales, ya sean éstos deductivos, inductivos, abductivos o predictivos[1]. En general, las inferencias en un contexto de investigación científica son regidas por un sistema de razonamiento, el cual se puede identificar con lo que se ha dado en llamar lógica subyacente de la práctica correspondiente. Tal *lógica subyacente* es codificable en un sistema formal -un lenguaje formal, interpretable mediante cierta teoría semántica, y un mecanismo deductivo-.

No es habitual tomar en consideración una lógica subyacente mediante la cual se puedan captar procesos de inferencia no deductivas. En este trabajo proponemos unos sistemas de lógica básicos a partir de los cuales son definibles nuevas reglas inferenciales con vistas a representar operaciones epistémicas resultantes de procesos inferenciales no deductivos.

El modelo AGM de cambio epistémico, establecido a partir de (Alchourrón, Gärdenfors, and Makinson 1985), está basado en lógica clásica estándar y considera que el agente epistémico es omnisciente, es decir, que su base de conocimiento es cerrada bajo consecuencia lógica: para el lenguaje L y la teoría $\Theta \subset L$, si $Cn(\Theta) = \{\varphi \in L : \Theta \models \varphi\}$, entonces $\Theta = Cn(\Theta)$.

[1]Estudios pertinentes acerca de la abducción, y, en parte, la inducción, se hallan, entre otros, en (Aliseda 2006), (Gabbay and Woods 2006) y (Hintikka 1998); la noción de preducción se establece en (Rivadulla 2010).

Organizamos el trabajo de la siguiente manera. A esta introducción le sigue el apartado 2, en el que se presenta qué se entenderá por modelo de contexto y una lógica básica que es correcta y completa respecto de la clase de tales modelos. En el siguiente apartado se estudian mínimamente otros modelos -modelos de contextos no vacíos y el caso de modelos finitos-, y se define la lógica básica correspondiente. En un último apartado se incluyen algunas observaciones finales y se señalan nuevas líneas de trabajo, para finalizar con una lista de referencias.

2 Modelos contextuales

En una práctica científica se pueden presentar diversos estados epistémicos. Por ello, haciendo uso de una semántica kripkeana, ciertos conjuntos de estados o mundos posibles serán relevantes (o no) para cada contexto. Definimos entonces un *modelo de contextos*, o modelo de subconjuntos, de acuerdo con el siguiente clausulado:

1. P es un conjunto (no vacío) de variables proposicionales.

2. $\mathscr{C} = \{U\} \cup \{X,Y,Z,\dots\}$, es el conjunto de los contextos (realmente un conjunto de parámetros modales), donde U representa el operador *global*.

Entonces, se define un modelo de subconjuntos (contextos) $\mathscr{M} = (W,R,\mathscr{I})$, de manera que:

1. $W \neq \emptyset$ es el conjunto de mundos (o estados) posibles.

2. $R(U) = W$, y para cada $X \in \mathscr{C}$, si $X \neq U$, entonces $R(X) \subseteq W.R(X)$ representa el conjunto de mundos o estados *relevantes* para el contexto X. No obstante, por comodidad, y siempre que no se dé lugar a otras ambigüedades, llamaremos contexto al propio $R(X)$, es decir, se tomará al conjunto de mundos relevantes para el "contexto" como explicitación del contexto mismo. Obviamente, para el contexto global todos los estados son relevantes.

3. $\mathscr{I}$ es una valoración tal que para cada $p \in P, \mathscr{I}(p) \subset W.\mathscr{I}(p)$ representa el conjunto de estados que satisfacen p.

Se define un lenguaje proposicional a partir de P de acuerdo con la siguiente regla BNF:

$$\varphi := p|\neg\varphi|\varphi \to \psi|[X]\varphi$$

Naturalmente, $p \in P$. La expresión $[X]\varphi$ representa "en el contexto X vale φ". Dicho de otro modo, al anteponer el operador $[X]$ a la fórmula φ, se está expresando que "el contexto X es necesariamente relevante para la fórmula φ". El operador $\langle X\rangle$ es el operador dual, de manera que $\langle X\rangle\varphi = \neg[X]\neg\varphi$ expresa que "en el contexto X es posible φ" (lo que es equivalente a afirmar que "no es el caso que en el contexto X no valga φ", o bien que "el contexto X es posiblemente relevante para la fórmula φ"). Conviene distinguir dos clases de fórmulas en relación con los operadores indicados, a saber:

1. *Contextuales*, en las cuales al menos un símbolo no lógico está bajo el alcance de un operador contextual, como, por ejemplo, en $[X]\varphi, [X]\varphi \to [Y]\psi, \langle X\rangle\varphi \to [Y]\langle X\rangle\varphi$, etc.

2. *Proposicionales*, en las cuales no ocurre ningún operador de contexto.

Dado un modelo contextual $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{I})$, para $w \in W$, se establece la noción de satisfacción, $\models$, según las siguientes cláusulas:

1. Para $p \in P, \mathscr{M}, w \models p$ si y sólo si (en adelante "syss") $w \in \mathscr{I}(p)$.

2. $\mathscr{M}, w \models \neg\varphi$ syss $\mathscr{M}, w \not\models \varphi$.

3. $\mathscr{M}, w \models \varphi \to \psi$ syss $\mathscr{M}, w \not\models \varphi$ o $\mathscr{M}, w \models \psi$.

4. Para $X \in \mathscr{C}, \mathscr{M}, w \models [X]\varphi$ syss para todo $w' \in R(X), \mathscr{M}, w' \models \varphi$. En este caso, en efecto, $\mathscr{M}$ en el estado w satisface "φ vale en el contexto X", pues en cada estado relevante para el contexto, el modelo satisface la fórmula.

Cuando $\mathscr{M}, w \models \varphi$ para todo $w \in W$, entonces φ es válida en $\mathscr{M}$, lo que se expresa como $\mathscr{M} \models \varphi$. Por otra parte, si para cada modelo contextual $\mathscr{M}$ se verifica que $\mathscr{M} \models \varphi$ (es decir, φ válida en $\mathscr{M}$), entonces φ es universalmente válida (en el sentido de los modelos contextuales), en símbolos $\models \varphi$.

El valor semántico de cada fórmula φ en el modelo $\mathscr{M}$ se establece siguiendo el clausulado de la regla BNF citada:

1. $\|p\|_{\mathscr{M}} = \mathscr{I}(p)$.

2. $\|\neg\varphi\|_{\mathscr{M}} = W \setminus \|\varphi\|_{\mathscr{M}}$.

3. $\|\varphi \to \psi\|_{\mathscr{M}} = \|\neg\varphi\|_{\mathscr{M}} \cup \|\psi\|_{\mathscr{M}}$.

4. $\|[X]\varphi\|_{\mathscr{M}} = R(X) \cap \|\varphi\|_{\mathscr{M}}$.

Nótese que, de acuerdo con las definiciones, si $\mathscr{M},w \models [X]\varphi$, entonces el conjunto de (lo que podríamos llamar) los 'estados-φ' contiene el conjunto de estados relevantes para el contexto X, es decir, $R(X) \subseteq \|\varphi\|_{\mathscr{M}}$ y, en consecuencia, $R(X) \cap \|\varphi\|_{\mathscr{M}} = R(X)$.

Para contar con una lógica plena debemos definir un cálculo lógico, que por comodidad representamos mediante $\vdash$, de manera que $\vdash \varphi$ indica que la fórmula φ es demostrable en el cálculo, y para el conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \vdash \varphi$ expresa que φ se demuestra en el cálculo a partir de Γ. Este cálculo consta de los siguientes axiomas y reglas:

1. Todos los axiomas y reglas del cálculo proposicional clásico (ya sea tipo Hilbert, Lukasiewicz, Gentzen, etc.).
2. $[X]\varphi \to [Y][X]\varphi$.
3. $\langle X\rangle\,\varphi \to [Y]\,\langle X\rangle\,\varphi$.
4. $[U]\varphi \to \varphi$.
5. $[X](\varphi \to \psi) \to ([X]\varphi \to [X]\psi)$.
6. Regla de necesitación: de $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [X]\varphi$.

Sea $\mathfrak{M}$ la clase de los modelos contextuales. Respecto de esta clase, el cálculo es correcto y completo[2], es decir, para $\Theta \subset L$ y $\varphi \in L$, se verifica que:

$$\Theta \vdash \varphi \text{ syss } \Theta \models \varphi.$$

3 Clases específicas de contextos

3.1 Contextos no nulos

Surgen algunas cuestiones con vistas a las posibles aplicaciones de estas lógicas en ámbitos epistemológicos. Una de ellas es: ¿qué representa el contexto X en un modelo sin estados relevantes para el mismo? Sea $\mathscr{M} = (W,R,\mathscr{I})$ tal que para un $X \in \mathscr{C}$ se tiene que $R(X) = \emptyset$. En este caso tendremos que en el contexto X vale cualquier fórmula: $\mathscr{M},w \models [X]\varphi$.

La consideración de que, en general, si una fórmula vale en un contexto, entonces dicha fórmula es posible en tal contexto, precisa que estemos hablando de contextos no vacíos. Un modelo tal que $R(X) = \emptyset$ no satisface $[X]\varphi \to \langle X\rangle\,\varphi$, al satisfacer al antecedente pero no al consecuente. Así pues, sea la clase de modelos $\mathfrak{M}_P = \{\mathscr{M} \in \mathfrak{M} : \mathscr{M} = (W,R,\mathscr{I}) \& \forall X \in \mathscr{C}, R(X) \neq \emptyset\}$. Respecto de

[2] En (Aucher et al. 2009) se presenta la prueba de corrección y completud del cálculo que definen, el cual es básicamente coincidente con el aquí presentado.

esta clase, al ser una subclase de la clase de los modelos de contexto, el cálculo es también correcto y completo.

3.2 Contextos finitos

Sea la clase de contextos finitos (no vacíos)

$$\mathfrak{M}_{PF} = \{\mathscr{M} \in \mathfrak{M} : \mathscr{M} = (W, R, \mathscr{I}) \& |W| \leq \omega_0 \ \& \ \forall X \in \mathscr{C}, R(X) \neq \emptyset\}$$

Entonces, dado un parámetro modal X, se puede hallar una fórmula ψ_X tal que su valor semántico es $R(X)$, es decir $\|\psi_X\|_{\mathscr{M}} = R(X)$. Así, por ejemplo, para el contexto global U, la fórmula podría ser $p \vee \neg p$, de tal manera que para el modelo $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{I}), \|p \vee \neg p\|_{\mathscr{M}} = R(U) = W$.

La correspondiente cláusula definitoria de la relación de satisfacción puede ahora adaptarse a esta circunstancia:

- Para $X \in \mathscr{C}, \mathscr{M}, w \models [X]\varphi$ syss para todo $w' \in R(X), \mathscr{M}, w' \models \varphi$ syss $\mathscr{M} \models \psi_X \to \varphi$.

Un nuevo cálculo es definible en relación a esta clase de modelos. Se trata de una simplificación del anterior y consta de los siguientes axiomas y reglas:

1. Todos los axiomas y reglas del cálculo proposicional clásico (ya sea tipo Hilbert, Lukasiewicz, Gentzen, etc.).
2. $[U]\varphi \to \varphi$.
3. Regla de necesitación: de $\vdash \varphi$ se infiere $\vdash [U]\varphi$.

Hemos de tener en cuenta que $[X]\varphi \to \langle X \rangle \varphi$ vale en cada modelo, dado que en éstos, por definición, se verifica que $R(X) \neq \emptyset$. Esta circunstancia es expresable en el siguiente esquema proposicional válido:

$$(\psi_X \to \varphi) \to (\psi_X \to \psi_X \wedge \varphi).$$

La regla de necesitación respecto de cualquier parámetro X es derivada. En efecto, se puede obtener la siguiente derivación:

1. $\vdash \varphi$ — Premisa.
2. $\vdash \varphi \to (\psi_X \to \varphi)$ — Axioma proposicional (para cualquier contexto X).
3. $\vdash \psi_X \to \varphi$ — *Modus ponens*, 1,2.

4. $\vdash [X]\varphi$ Definición-equivalencia 3.

Los axiomas 2, 3 y 5 del cálculo anterior, corresponden a los siguientes esquemas proposicionales, respectivamente:

2'. $(\psi_X \to \varphi) \to (\psi_Y \to (\psi_X \to \varphi))$.

3'. $\psi_X \wedge \varphi \to (\psi_Y \to \psi_X \wedge \varphi)$.

5'. $(\psi_X \to (\varphi \to \psi)) \to ((\psi_X \to \varphi) \to (\psi_X \to \psi))$.

Como hemos visto, la clase de los modelos finitos es una subclase de los modelos de contexto, es decir $\mathfrak{M}_{PF} \subseteq \mathfrak{M}$. Por otra parte, el cálculo es una adaptación del cálculo estudiado anteriormente. En consecuencia, el nuevo cálculo es correcto y completo respecto de $\mathfrak{M}_{PF}$, es decir:

$$\Theta \vdash \text{ syss } \Theta \models \varphi.$$

4 Observaciones finales

Para trabajar con lenguajes epistémicos otra manera de definir modelos contextuales tiene en cuenta la(s) correpondiente(s) relación(es) de accesibilidad[3]. En estos casos el lenguaje contiene un operador de conocimiento **K**, de manera que dada la fórmula φ, $\mathbf{K}\varphi$ expresa que φ es conocida.

Ahora un modelo contextual $M = (W, R, R_K, \mathscr{I})$, donde $W \neq \emptyset, R : \mathscr{C} \times W \longmapsto W$ -siendo $R(W, w)$ el conjunto de estados (mundos) relevante al mundo w en el contexto X-, R_K es la relación de accesibilidad e $\mathscr{I}$ la función interpretación. La noción de satisfacción se define a partir de las cláusulas siguientes:

1. $M, X, w \models p$ syss $\forall w' \in R(X, w), w' \in \mathscr{I}(p)$.

2. $M, X, w \models \mathbf{K}\varphi$ syss $\forall w' \in W$ tal que $(w, w') \in R(X, w)$, se verifica $M, X, w \models \varphi$.

Estas lógicas de contexto, especialmente cuando se toman modelos finitos sin contexto nulo, son aplicables en estudios de Epistemología Formal. El modelo AGM propone las operaciones de expansión, contracción y revisión, pero el sujeto epistémico es tomado como omnisciente, lo que lo aleja de una representación más acorde con las capacidades de los agentes reales.

Sin embargo, si se considera que una teoría se establece como resultado de una práctica científica en un contexto, la lógica subyacente debería tomarse como una lógica contextual ampliada para

[3]En (Rebuschi and Lihoreau 2009) se plantean modelos teniendo en cuenta un conjunto de agentes, por ello con relaciones de accesibilidad para cada agente; la semántica no coincide exactamente con la esbozada en nuestro trabajo.

comprender ciertas operaciones epistémicas. Refiriéndonos a las más básicas estudiadas, a partir de un lenguaje L y un modelo de contextos no nulos $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{I})$, se podría definir una operación de ampliación inferencial de una teoría Θ de la siguiente manera:

$$\Theta + \varphi = \{\psi \in L : \Theta \cup \varphi \hookrightarrow_X \psi\},$$

siempre que "$\hookrightarrow_X$", relación de 'consecuencia lógica en un contexto X', sea reflexiva y transitiva[4] y ψ sea el resultado de una deducción, o bien de una inducción, de una abducción o de una preducción.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco de ejecución de los proyectos *Interpretaciones Alternativas de Lógicas no Clásicas* (referencia HUM5844 de la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia de la Junta de Andalucía), y *Conciencia, Lógica y Computación* (referencia FFI2011-29609-C02-01, del Ministerio de Ciencia e Innovación).

REFERENCIAS

Alchourrón, C., Gärdenfors, P., & Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, *50*(2), 510–530.

Aliseda, A. (2006). *Abductive Reasoning. Logical Investigations into Discovery and Explanation*. Springer. Volume 330 of Synthese Library Series.

Aucher, G., Grossi, D., Herzig, A., & Lorini, E. (2009). *LORI 2009*, chapter Dynamic Context Logic, (pp. 15–26). Springer, LNAI 5834.

Gabbay, D. & Woods, J. (2006). *A Practical Logic of Cognitive Systems, vol. 2: The Reach of Abduction: Insight and Trial*. Elsevier.

Grossi, D., Meyer, J. J. C., & Dignum, F. (2008). The many faces of counts-as: A formal analysis of constitutive rules. *Journal of Applied Logic*, *6*, 192–217.

Hintikka, J. (1998). What is abduction? the fundamental problem of contemporary epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, *34*(3), 503–533.

Rebuschi, M. & Lihoreau, F. (2009). Contextual epistemic logic.

Rivadulla, A. (2010). Complementary strategies in scientific discovery: Abduction and preduction. In Pietarinen, A. V., Bergman, M., Paavola, S., & Rydenfelt, H. (Eds.), *Ideas in Action: Proceedings of the Applying Peirce Conference*, (pp. 264–276).

van Benthem, J. (2011). *Logical Dynamics of Information and Interaction*. Cambridge University Press.

[4]Son los requisitos mínimos necesarios para que una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas sea considerada una relación de consecuencia lógica, ya sea en perspectiva sintáctica o semántica; es decir, para que estemos ante una lógica. Por otra parte, la Lógica debe ocuparse de estudiar los flujos de información (véase (van Benthem 2011)).