

# El espectro de grafos mundo pequeño<sup>1</sup>

Francesc Comellas y Silvia Gago<sup>2</sup>

## Resumen

Numerosas redes reales, como la *world wide web*, sistemas de transporte, redes sociales o biológicas, presentan a la vez un apiñamiento o *clustering* elevado (los nodos tienen muchos vecinos mutuos) y un diámetro pequeño (máxima distancia entre pares de nodos). Estas redes se modelan mediante grafos conocidos como grafos mundo pequeño (*small-world*). Por otra parte, la determinación del espectro de un grafo es importante por la relación que los autovalores y sus multiplicidades tienen con invariantes relevantes y con propiedades topológicas y de comunicación del grafo como el diámetro, la bisección, distancias, conectividad, expansión, particiones, distribución de cargas, etc.. En este trabajo determinamos completamente el espectro de varias familias de grafos mundo pequeño determinadas.

## 1 Introducción y notación

En 1967 el sociólogo Stanley Milgram [17] comprobó, en un estudio que se considera ya clásico, que la separación media (contada a partir del número de personas en una cadena de conocidos) entre los habitantes de los Estados Unidos era solamente seis. Este resultado es sorprendente dada una población del orden de 200 millones. Aunque en teoría de grafos es bien conocido que el diámetro de un grafo aleatorio con un número similar de vértices es relativamente pequeño [3], una red social no puede considerarse totalmente aleatoria puesto que normalmente dos personas que se conocen suelen tener muchos conocidos comunes. Esto llevó a Duncan Watts [20] a definir una red mundo pequeño como un grafo que tiene un coeficiente de

apiñamiento mucho mayor que el de una red aleatoria y un diámetro que crece logarítmicamente con el orden del grafo (similar al de un grafo aleatorio). Watts y Strogatz en un artículo profusamente citado y publicado en Nature [21] proporcionan un modelo estocástico que permite la generación de grafos mundo pequeño. Se parte de un grafo muy estructurado como un anillo cordal o una malla, con un apiñamiento elevado y una distancia grande entre vértices, y se reconectan aleatoriamente las ramas de forma que el diámetro vaya reduciéndose. Estos autores muestran que el proceso conduce primero a una disminución rápida de las distancias entre vértices y más adelante a la reducción del apiñamiento obteniendo al final un grafo totalmente aleatorio. En la región intermedia aparecen las condiciones que se consideran mundo pequeño. En [10] se ha demostrado que el efecto mundo pequeño es universal y puede, de hecho, obtenerse a partir de cualquier grafo con diámetro elevado. En [8, 9] se ve que es posible una construcción determinista simple de grafos mundo pequeño, en particular a partir del mismo grafo inicial que usaron Watts y Strogatz. La ventaja de estos modelos deterministas es que permiten el cómputo genérico exacto de los parámetros del grafo. El trabajo que presentamos aquí es pues una aplicación en la que determinamos el espectro de familias de grafos que se han construido mediante las técnicas antes citadas.

La determinación del espectro de un grafo es importante, puesto que éste proporciona, por ejemplo, información para la estimación de su conectividad y de parámetros de expansión, que son en general muy difíciles de obtener mediante otros métodos. En particular, el espectro de la matriz de adyacencia de un grafo da cotas directas sobre su diámetro y el número isoperimétrico [18], entre otras propiedades. El espectro laplaciano, más concretamente el segundo autovalor, contiene información sobre propiedades de expansión, conec-

<sup>1</sup>Trabajo subvencionado en parte por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y fondos FEDER (proyecto TIC-2001-2171.)

<sup>2</sup>Dep. de Matemática Aplicada IV. Univ. Politécnica de Cataluña. E-mail: comellas@mat.upc.es

tividad, conjuntos de corte maximales, números de independencia, genus, bisection width, etc. [7, 19]. También se han diseñado algoritmos para la partición de grafos en base a sus autovalores y autovectores [15, 16]. Finalmente, el espectro de un grafo es también útil para la construcción de algoritmos para el balanceado de cargas [5].

En este trabajo,  $G = (V, E)$  denota un grafo con conjunto de vértices  $V = V(G)$ , y ramas  $E = E(G)$  que son pares no ordenados de vértices. El orden del grafo es  $n = |V|$ . Si los vértices  $u, v \in V$  forman una rama se dice que  $u$  y  $v$  son *adyacentes*. El *grado* de un vértice  $u$ , que se indica  $\deg(u)$ , es el número de ramas incidentes con  $u$  y el grado de un grafo  $G$  es  $\Delta = \max_{u \in V} \deg(u)$ . Un grafo es  $\Delta$ -regular si el grado de todos sus vértices es  $\Delta$ . La *distancia* entre dos vértices  $u$  y  $v$ ,  $d(u, v)$ , es el número de ramas del camino mas corto entre  $u$  y  $v$ . La distancia máxima entre cualquier par de vértices,  $D = \max_{u, v \in V} d(u, v)$ , es el *diametro* del grafo. La familia básica de grafos que consideramos en este artículo (y en [21]) son grafos circulantes [4]. Denotamos  $C_{n, \Delta}$  al grafo circulante  $\Delta$ -regular,  $\Delta$  par, que tiene  $n$  vértices etiquetados con enteros modulo  $n$ , y  $\Delta$  ramas por vértice de forma que cada vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i \pm 1, i \pm 2, \dots, i \pm \frac{\Delta}{2} \pmod{n}$ . Este grafo tiene diámetro  $D = \lceil \frac{n-1}{\Delta} \rceil$ .

Una forma usual de representar un grafo  $G$  es a través de su *matriz de adyacencia*  $A = (a_{uv})$ , con filas y columnas indexadas por los vértices de  $G$ , y elementos  $a_{uv} = 1$ , si  $u$  y  $v$  son adyacentes y  $a_{uv} = 0$  en caso contrario. Se conoce como *espectro de un grafo*  $G$  al espectro de su matriz de adyacencia [6], o conjunto de sus autovalores y multiplicidades, que se denota por  $SpG = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ m_0 & m_1 & \dots & m_d \end{pmatrix}$ . La *matriz laplaciana*  $L$  de un grafo  $G$  se define como  $L = D - A$ , donde  $A$  es la matriz de adyacencia de  $G$  y  $D = \text{diag}(\deg(u))$ ,  $u \in V(G)$  es una matriz que tiene en su diagonal los grados de los vértices de  $G$ . Una matriz cuadrada  $C$  se llama *circulante*, y la denotamos  $C := \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ , si cada una de sus filas se obtiene desplazando cíclicamente una posición la fila anterior. Esto es:

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

Entonces  $C_{n, \Delta} = \text{circ}(0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$  es la matriz de adyacencia del grafo circulante  $C_{n, \Delta}$  (hay  $\frac{\Delta}{2}$  unos en cada bloque de unos). Denotaremos un grafo mediante una mayúscula en cursiva y su matriz de adyacencia en negrita.

## 2 Espectro del grafo circulante $C_{n, \Delta}$

Determinamos, en primer lugar, el espectro del grafo circulante  $C_{n, \Delta}$ , base para la construcción de los grafos mundo pequeño considerados en nuestro estudio.

La matriz de adyacencia de un ciclo no orientado de  $n$  vértices es  $A = \text{circ}(1, 0, \dots, 0)$ , y su potencia  $k$ -ésima  $A^k = \text{circ}(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  con el valor 1 en la posición  $k$ . Entonces cualquier matriz circulante se puede escribir de la forma  $C = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$ . Por otra parte, el polinomio característico de  $A$  es  $\lambda^n - 1$  y por lo tanto sus autovalores son  $\lambda_k = \sqrt[n]{1} = \omega^k = e^{i \frac{2\pi}{n} k}$ . Es inmediato verificar que los correspondientes autovectores son  $\Phi_k = (\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})$  donde  $\omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . También podemos comprobar, a partir de  $A\Phi_k = \lambda_k \Phi_k$ , que en general  $A^i \Phi_k = (\lambda_k)^i \Phi_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $0 \leq i \leq \infty$ . Dada la matriz de adyacencia de un grafo circulante  $C = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  y puesto que  $C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$ , podemos calcular sus autovalores y autovectores:  $C\Phi_k = (\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i)\Phi_k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (A^i \Phi_k) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\lambda_k^i \Phi_k) = (\sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda_k^i) \Phi_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Por lo tanto,  $\Phi_k$  es un autovector de  $C$  correspondiente al autovalor  $\mu_k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda_k^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \omega^{ki}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Los autovalores de  $A$  verifican  $\lambda_{n-k} = \omega^{n-k} = \omega^n \omega^{-k} = \omega^{-k} = \bar{\lambda}_k$ . Esta propiedad permite simplificar los autovalores d el grafo circulante  $C_{n, \Delta}$  con matriz de adyacencia  $C_{n, \Delta} = \text{circ}(0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$  puesto que  $\mu_k = \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \lambda_k^i + \sum_{i=n-\frac{\Delta}{2}+1}^n \lambda_k^i = \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \lambda_k^i + \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \bar{\lambda}_k^i = \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} (\lambda_k^i + \bar{\lambda}_k^i) = \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} (\omega^{ki} + \omega^{-ki}) = 2 \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\frac{2\pi}{n} ki)$ . De donde comprobamos que  $\mu_{n-k} = \mu_k$ . Por lo tanto, el espectro del grafo  $C_{n, \Delta}$  es de la forma:

$$SpC_{n, \Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 2 \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\frac{2\pi}{n} i) & \dots & 2 \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\frac{2\pi}{n} i (\frac{n}{2} - 1)) & \mu_{\frac{n}{2}} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$  si  $\frac{\Delta}{2}$  es par y  $\mu_{\frac{n}{2}} = -2$  si  $\frac{\Delta}{2}$  es impar.

La siguiente caracterización del núcleo de  $C_{n,\Delta}$  será utilizada más adelante.

**Lema 1**  $Ker(C_{n,\Delta}) = V(\Phi_k, k = \frac{n(2h+1)}{\Delta+2} \in Z) \cup V(\Phi_k, k = \frac{2nh}{\Delta} \in Z) \cup V(\Phi_{\frac{n}{2}}, \frac{\Delta}{2} \text{ par}), 0 \leq k \leq n-1,$  para algún  $h \in Z$

*Demostración:* Si  $\frac{\Delta}{2}$  es par, el autovalor  $\mu_{\frac{n}{2}} = 0$ , luego su correspondiente autovector pertenece al núcleo:  $\mu_k = 2 \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \cos(\frac{2\pi}{n} ik) = \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \omega^{ki} + \sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} \omega^{-ki} = \frac{\omega^k - \omega^{(\frac{\Delta}{2}+1)k}}{1-\omega^k} + \frac{\omega^{-k} - \omega^{-\frac{\Delta}{2}k-1}}{1-\omega^{-k}} = 0$ , de donde  $\omega^{(\Delta+1)k} - \omega^{(\frac{\Delta}{2}+1)k} + \omega^{\frac{\Delta}{2}k} - 1 = 0$ , lo que nos conduce al siguiente producto,  $(\omega^{k(1+\frac{\Delta}{2})} + 1)(\omega^{\frac{\Delta}{2}k} - 1) = 0$  con lo que puede ocurrir que:  $\omega^{(\frac{\Delta}{2}+1)k} + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^{(\frac{\Delta}{2}+1)k} = -1 \Leftrightarrow \frac{(\Delta+2)k}{2} = \frac{n}{2}(2h+1), h \in Z \Rightarrow k = \frac{n(2h+1)}{\Delta+2} \in Z$ , para algún  $h \in Z$  y como  $\Delta$  es par  $\Delta+2$  también lo es  $\Rightarrow \Delta+2$  no divide a  $(2h+1) \Rightarrow \Delta+2$  divide a  $n, \Rightarrow n = (\Delta+2)q \Rightarrow k = q(2h+1), h \in Z$ , siempre que  $k < n$ , o bien puede ocurrir que  $1 - \omega^{\frac{\Delta}{2}k} = 0 \Leftrightarrow \omega^{\frac{\Delta}{2}k} = 1 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{2}k = nh \in Z, \Leftrightarrow k = \frac{2n}{\Delta}h \in Z$ , para algún  $h \in Z$ . ■

### 3 $SW_1$ , unión de un grafo circulante $C_{n,\Delta}$ con un grafo completo $K_m$

El primer modelo que estudiamos consiste en agregar nuevas ramas al grafo regular circulante  $C_{n,\Delta}$ ,  $n$  y  $\Delta$  pares, en  $m$  de sus vértices, de tal forma que estos  $m$  vértices formen parte de un grafo completo  $K_m$ , y así se reduzca notablemente el diámetro del grafo, aunque también disminuya ligeramente el coeficiente de apiñamiento (véase [8, 10]). La matriz de adyacencia del nuevo grafo, que denotamos  $SW_1$ , será la suma de la matriz de adyacencia de  $C_{n,\Delta}$  más otra matriz definida de la siguiente manera:

$$(K'_m)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i, j \neq k \frac{n}{m} \text{ o } i = j \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta nueva matriz corresponde a la matriz de adyacencia del grafo que denotamos  $K'_m$  y que se obtiene al insertar  $n-m$  vértices aislados a un grafo completo  $K_m$ . Tenemos por lo tanto que  $SW_1 = C_{n,\Delta} + K'_m$ .

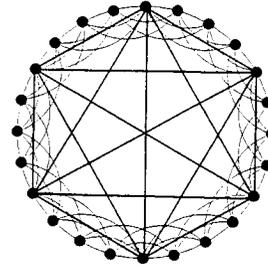


Figura 1: Un grafo mundo pequeño tipo  $SW_1$ .

**Lema 2**  $SpK'_m = \begin{pmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & n-m \end{pmatrix}$

*Demostración:* El polinomio característico del grafo completo  $K_m$  es  $(x - (m-1))(x+1)^{m-1}$ , al agregar  $n-m$  vértices aislados, el nuevo polinomio característico será  $(x - (m-1))(x+1)^{m-1}x^{n-m}$ . Por lo tanto, el espectro de  $K'_m$  será el mismo que el de  $K_m$ , agregando  $n-m$  ceros. ■

**Teorema 3** Sea  $\lambda \in SpSW_1, \lambda \in R$  y sea  $\Phi$  su correspondiente autovector, entonces:

**Caso 1:**  $\lambda \in SpC_{n,\Delta} \cap Spec(K'_m) \Leftrightarrow \lambda = 0 = \mu_k$  y existe un  $h \in Z$  tal que  $k = \frac{mp}{2}$  ( $\neq \frac{n}{2}$  si  $\frac{\Delta}{2}$  es impar),  $p \neq 0 \in Z, k = \frac{n(2h+1)}{\Delta+2} \in Z, o k = \frac{2n}{\Delta}h \in Z, 0 \leq k \leq n-1$  En este caso la multiplicidad del 0 es la mitad de los valores de  $k$  que cumplen estas condiciones.

**Caso 2:**  $\lambda \in Spec(C_{n,\Delta}), \lambda \notin Spec(K'_m) \Leftrightarrow \lambda = \mu_k, k = \frac{mp}{2} \neq \frac{n}{2} \in Z, p \neq 0 \in Z, k \neq \frac{n(2h+1)}{\Delta+2} \in Z, y k \neq \frac{2n}{\Delta}h \in Z, 0 \leq k \leq n-1.$

En este caso la multiplicidad de cada autovalor distinto es 2.

**Caso 3:**  $\lambda \notin Spec(C_{n,\Delta}), \lambda \in Spec(K'_m)$  (no es posible).

**Caso 4:**  $\lambda \notin Spec(C_{n,\Delta}) \cup Spec(K'_m) \Leftrightarrow \lambda$  es solución de las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \frac{1}{\lambda - \mu_{ms}} = \frac{n}{m(m-1)}, \quad \sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \frac{1}{\lambda - \mu_{ms+k}} = -\frac{n}{m}$$

$$(k = 1, \dots, m-1)$$

*Demostración:* Se omite por razones de espacio, pero puede consultarse en [14]. La demostración del Teorema 4 permite ver la metodología empleada. ■

### 4 Modelos casi coespectrales con $C_{n,\Delta}$

Los modelos que se analizan en esta sección se construyen a partir de uno o varios grafos circulantes  $C_{n,\Delta}$  añadiendo nodos de forma que se reduzca el diámetro, sin que se vea demasiado afectado el factor de apiñamiento. Parte del espectro del grafo mundo pequeño final coincide con el espectro del grafo circulante inicial. Fijados los parámetros de la construcción es posible determinar totalmente el espectro final.

#### 4.1 $SW_2$ , rueda simple no completa.

Este caso consiste en añadir un nodo central a  $C_{n,\Delta}$  y unirlo con un conjunto de  $m$  nodos de manera regular (suponiendo que  $n = mp$ ), de manera parecida al grafo rueda. El sistema matricial para la determinación de los autovalores es en este caso:

$$\begin{pmatrix} C_{n,\Delta} & b^T \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde  $C_{n,\Delta}$  es la matriz de adyacencia de  $C_{n,\Delta}$ , y  $b = [1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \dots, 1, \dots, 0]$  (con valores 1 en las posiciones  $1, \frac{n}{m}, 2\frac{n}{m}, \dots, (m-1)\frac{n}{m}$ ), por lo que el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} C_{n,\Delta}x_1 + b^T x_2 = \lambda x_1 \\ bx_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz  $B = b^T b$  que es una matriz tal que  $(B)_{pq} = 1$  si  $p, q$  son múltiplos de  $\frac{n}{m}$ , y 0 si no. Su espectro es:  $Sp B = \begin{pmatrix} 0 & m \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$

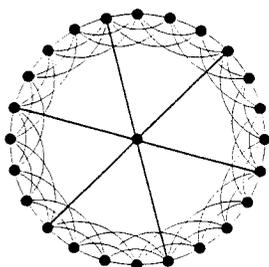


Figura 2: Un grafo mundo pequeño tipo  $SW_2$ .

**Teorema 4** Los autovalores de  $SW_2$  son:

- $\lambda = 0$ , con multiplicidad  $\dim(Ker(C_{n,\Delta}))$  si no hay ningún vector del  $Ker(C_{n,\Delta})$  que sea combinación lineal de  $\{\Phi_{i\frac{n}{m}}, 0 \leq i \leq m-1\}$ , o con multiplicidad  $\dim(Ker(C_{n,\Delta})) - 1$  si existe algún vector que verifica esta condición.
- Si  $\lambda \in Sp C_{n,\Delta}, \lambda \notin Sp B \iff \lambda = \mu_k, x_1 \in Ker(B) \iff$   
 Si  $k \not\propto m$ , la multiplicidad es 2.  
 Si  $k \propto m, k \neq 0$ , la multiplicidad es 1.
- Si  $\lambda \notin Sp C_{n,\Delta} \cup Sp B$ , debe ser solución de la siguiente ecuación

$$\sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms})} = \frac{n}{m^2}$$

*Demostración:*

Si  $\lambda = 0$  el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} C_{n,\Delta}x_1 + b^T x_2 = 0 \\ bx_1 = 0 \end{cases}$$

Entonces  $x_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \Phi_j$  y de la segunda ecuación  $\sum_{i=0}^{m-1} (x_1)_{i\frac{n}{m}} = 0$  obtenemos:  $\sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \Phi_j)_{i\frac{n}{m}} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \sum_{i=0}^{m-1} \omega^{ji\frac{n}{m}} = (m-1) \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{jm} = 0$ . Podemos distinguir dos casos:

- Si  $x_1 \in Ker(C_{n,\Delta})$  la primera ecuación es  $b^T x_2 = 0$ , es decir  $x_2 = 0$  y también se cumple. Veamos qué condiciones deben verificarse para que esto ocurra: Sea  $r = \dim(Ker(C_{n,\Delta}))$ , entonces  $x_1 = \sum_{j=0}^r \alpha_j \Phi_j$ , donde  $\Phi_j$  es una base del núcleo. Como hemos visto anteriormente, se debe cumplir que  $\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{jm} = 0$  para que se cumpla la segunda condición, es decir, si hay valores de  $k$  que sean múltiplos de  $m$  entre los autovectores que forman el núcleo, la multiplicidad del valor 0 será igual al número de estos autovectores menos 1 más el resto de autovectores que no son múltiplos de  $m$ , en total  $r - 1$ . Pero si no hubiera ningún autovector cuyo índice fuera múltiplo de  $m$ , la multiplicidad del 0 sería  $r$ .

- Si  $x_1 \notin Ker(C_{n,\Delta})$  entonces  $C_{n,\Delta}x_1 \neq 0$ . Pero esto no es posible ya que  $x_2 = 0$ . La primera ecuación del sistema puede escribirse:

$$C_{n,\Delta}x_1 = G_{n,\Delta} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \Phi_j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j G_{n,\Delta} \Phi_j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mu_j \Phi_j = -b^T x_2$$

Luego se tiene que cumplir que las componentes múltiplos de  $\frac{n}{m}$  sean iguales a  $-x_2$ , y el resto igual a 0:

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mu_j \Phi_j\right)_{i \frac{n}{m}} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mu_j \omega^{j i \frac{n}{m}} = -x_2 \neq 0$$

$$0 \leq i \leq m-1$$

Se plantea un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ( $\alpha_j, 0 \leq j \leq n-1$ ) cuyo término independiente es  $-b^T x_2$ . Sumando las  $m$  primeras, las  $m$  segundas y así sucesivamente, se obtienen  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas ( $\alpha_j, 0 \leq j \leq m-1$ ), de la forma siguiente:  $\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{(mj+i)} \mu_{(mj+i)} (\omega')^{ji} = -x_2, \omega'^m = 1, 0 \leq i \leq m-1$ , con término independiente  $-x_2 j$  ( $j$  es el vector cuyas componentes son todas 1), que es proporcional a la primera columna del sistema, por lo tanto, resolviendo vemos que la única solución posible es que  $x_2 = 0$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , sustituyendo  $x_2$  en la primera ecuación obtenemos  $\lambda C_{n,\Delta} x_1 + b^T b x_1 = \lambda^2 x_1$  y podemos distinguir los siguientes casos:

**Caso 1:**  $\lambda \in Sp C_{n,\Delta} \cap Sp B \iff \lambda = 0$ . No es posible, ya que suponemos que  $\lambda \neq 0$

**Caso 2:**  $\lambda \in Sp C_{n,\Delta} \cap Sp \overline{B} \iff \lambda = \mu_k, x_1 \in Ker(B)$

Veamos qué ocurre con los autovectores  $\Phi_k$  de  $C_{n,\Delta}$

- Si  $k$  no es múltiplo de  $m$ , supongamos que  $x_1 = \Phi_k b = \sum_{i=0}^{m-1} \omega^{ik \frac{n}{m}} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ , sustituyendo en la primera ecuación,  $C_{n,\Delta} \Phi_k = \lambda \Phi_k \Rightarrow \lambda = \mu_k$ . Estos autovalores aparecen con multiplicidad 2, por lo tanto se conservan  $n-m$  autovalores de  $C_{n,\Delta}$ .
- Si  $k$  es múltiplo de  $m \Rightarrow (\Phi_k)_{i \frac{n}{m}} = \omega^{hi \frac{n}{m}} = 1, 0 \leq i \leq m-1 \Rightarrow (\Phi_k - \Phi_{n-k})_{i \frac{n}{m}} = 0, 0 \leq i \leq m-1 \Rightarrow x_1 b = (\Phi_k - \Phi_{n-k}) b = 0 \Rightarrow$

$G_{n,\Delta} \Phi_k = \lambda \Phi_k \Rightarrow \lambda = \mu_k$ . Estos autovalores aparecen con multiplicidad 1, por lo tanto también se conservan  $\frac{m-1}{2}$  autovalores de  $C_{n,\Delta}$ , suponiendo  $m$  impar, ya que el autovalor  $\mu_0$  solo tenía multiplicidad 1, y su autovector  $j$  no cumple la condición anterior.

**Caso 3:**  $\lambda \in \overline{Sp C_{n,\Delta}} \cap Sp B \iff \lambda = m, x_1 \in Ker(C_{n,\Delta})$  Si  $\lambda = m$  su correspondiente autovector es  $\Psi = [1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0]$  de tal forma que tiene 1 en los lugares múltiplos de  $\frac{n}{m}$  y ceros en el resto. Al ser de multiplicidad 1,  $x_1$  es proporcional a  $\Psi$ , y podemos comprobar que no pertenece a  $Ker(C_{n,\Delta})$ . Luego este caso tampoco puede suceder.

**Caso 4:**  $\lambda \notin Sp C_{n,\Delta} \cup Sp B$  Del sistema, se deben buscar los valores de  $\lambda$  para los que los autovalores de la matriz  $M = (\lambda^2 I - \lambda C_{n,\Delta})^{-1} B$  sean iguales a 1. Obtenemos una matriz cuyas columnas  $i \frac{n}{m}$  son distintas de 0, y considerando las filas  $i \frac{n}{m}$ , obtenemos una submatriz  $m \times m$  que tendrá los mismos autovalores que  $M$  salvo  $n-m$  ceros, y que además tiene todos los elementos iguales a  $\sum_{i=0}^{m-1} c_{i \frac{n}{m}}$ . Resolviendo la ecuación  $|C - xI| = 0$  vemos que los autovalores de esta matriz son el 0 con multiplicidad  $m-1$  y  $m \sum_{i=0}^{m-1} c_{i \frac{n}{m}} = m \lambda_0^C$ , donde  $C$  es la matriz circulante de la forma  $C = circ(c_0, c_{\frac{n}{m}}, c_{\frac{n}{m} \cdot 2}, \dots, c_{\frac{n}{m}(m-1)})$  cuyos autovalores son  $\lambda_0^C = \frac{m}{n} \left( \sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \alpha_{ms} \right)$ . Luego la ecuación a resolver es  $\frac{m^2}{n} \left( \sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \alpha_{ms} \right) = 1$  que conduce a:

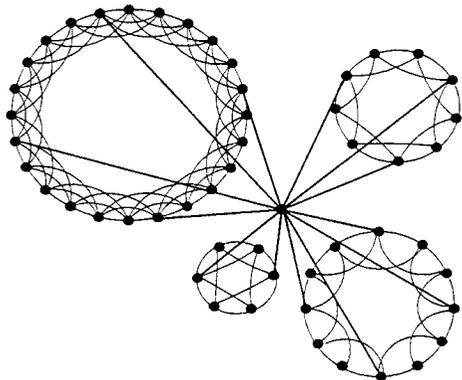
$$\sum_{s=0}^{\frac{n}{m}-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms})} = \frac{n}{m^2}$$

ecuación con una incógnita, de grado  $\frac{n}{2m} + 1$ , de la que se obtienen los autovalores de  $SW_2$  distintos a los de  $C_{n,\Delta}$ . ■

### 4.2 $SW_3$ , unión de $s$ ruedas $SW_2$ por el vértice central común.

Vamos a suponer que conectamos  $s$  ruedas  $SW_2$  distintas, de tal manera que el nodo central es común a todas. De forma similar a los casos anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 5** Sea  $\lambda \in Spec(SW_3)$  y sea  $\Phi$  su correspondiente autovector, entonces:

Figura 3: Ejemplo de un grafo  $SW_3$ 

- $\lambda = \mu_k^i \in SpC_{n,\Delta_i}$ ,  $k \neq 0$ ,  $k \neq \frac{n_i}{2}$  si  $\frac{\Delta_i}{2}$  es impar para  $1 \leq i \leq s$  (con multiplicidad 2 si  $k$  no es múltiplo de  $m_i$  y con multiplicidad 1 si lo es)
- $\lambda \notin SpC_{n,\Delta}$  para algún  $1 \leq i \leq s$ , entonces es solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{m_1^2}{n_1} \sum_{h=0}^{\frac{n_1}{m_1}-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{m_1 h}^1)} + \dots + \frac{m_s^2}{n_s} \sum_{h=0}^{\frac{n_s}{m_s}-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{m_s h}^s)} = 1$$

donde  $\mu_h^i$ ,  $0 \leq h \leq n_i$  son los autovalores de la matriz  $C_{n,\Delta}$ , para todo  $0 \leq i \leq s$

- $\lambda = 0$

*Demostración:* Se omite. ■

La ventaja de este modelo está en que es posible conectar grafos circulares  $C_{n,\Delta}$  iguales o distintos. Si se conectan varios grafos iguales de la misma forma (utilizando  $m$  vértices en cada uno), se consigue un modelo que mejorará al modelo  $SW_2$ , ya que con el mismo diámetro y parámetro de apiñamiento la ecuación a resolver para obtener los autovalores distintos a los de  $C_{n,\Delta}$  tendrá sólo  $\frac{n}{2m} + 1$  incógnitas (como en  $SW_2$ ), pero en cambio el número de vértices es ajustable y puede ser tan grande que queramos.

Si se conectan grafos circulares distintos, con distintos grados, escogiéndolos adecuadamente, se puede modelar una red cuyos nodos tengan una distribución potencial de grados, como es el caso de la mayoría de redes reales y en particular la *world wide web* [13].

### 4.3 $SW_4$ , conexión de los vértices centrales de varias ruedas $SW_2$ a un nuevo vértice.

Siguiendo en la misma línea, conectamos los nodos centrales de varias ruedas  $SW_2$  distintas a otro más. De esta forma, aunque el diámetro aumenta en dos unidades, se evita que un solo nodo concentre demasiadas ramas. Esto permite un mejor control de los grados al conectar varios grafos del tipo  $SW_2$ , a diferencia del modelo anterior, haciendo que se adapten lo mejor posible a parámetros de redes reales.

**Teorema 6** Sea  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in SpSW_4$  y sea  $\Phi$  su correspondiente autovector, entonces:

- $\lambda = \mu_k^i \in SpC_{n,\Delta}$ ,  $k$  no múltiplo de  $m_i$ ,  $k \neq 0$ ,  $k \neq \frac{n_i}{2}$  si  $\frac{\Delta_i}{2}$  es impar para  $1 \leq i \leq s$  (con multiplicidad 2)
- $\lambda \notin SpC_{n,\Delta_i}$  para algún  $1 \leq i \leq s$ , entonces ocurre:

$$\lambda \in SpSW_2^i, \text{ si verifica que: } \lambda = \frac{m_i^2}{n_i} \sum_{h=0}^{\frac{n_i}{m_i}-1} \frac{1}{\lambda - \mu_{m_i h}^i}, \quad 1 \leq i \leq s$$

$\lambda \notin SpSW_2^i$ , entonces es solución de la siguiente ecuación:

$$\sum_{h=1}^s \frac{1}{\lambda \left( \lambda - \frac{m_h^2}{n_h} \sum_{j=0}^{\frac{n_h}{m_h}-1} \frac{1}{\lambda - \mu_{m_h j}^h} \right)} = 1$$

donde  $\mu_h^i$ ,  $0 \leq h \leq n_i$  son los autovalores de la matriz  $C_{n,\Delta}$ , para todo  $0 \leq i \leq s$

*Demostración:* Se omite. ■

Este modelo cuenta con la ventaja de que se pueden conectar ruedas  $SW_2$  distintas, con nodos con distintos grados, y diferentes parámetros de apiñamiento, y escogiéndolos adecuadamente, se puede modelar una red con una distribución de grados en ley potencial, aunque como desventaja es más compleja la resolución de la ecuación que proporciona los autovalores que no cambian respecto a  $C_{n,\Delta}$ .

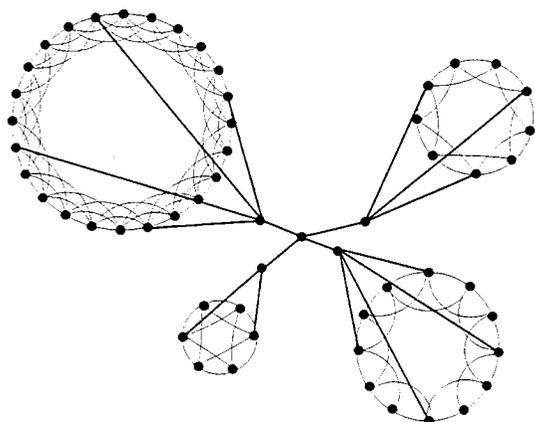


Figura 4: Un ejemplo de grafo mundo pequeño  $SW_4$ .

## 5 Producto de un grafo completo por otros con parámetro de apiñamiento alto.

Se trata de determinar el espectro del producto de dos grafos, uno cuyo diámetro sea pequeño, como por ejemplo un grafo completo  $K_m$  y otro que tenga el parámetro de apiñamiento alto, como por ejemplo  $C_{n,\Delta}$ . La matriz de adyacencia del nuevo grafo será el producto de Kronecker de las matrices de adyacencia de los dos grafos, y su espectro es:

$$Sp(K_m \times C_{n,\Delta}) = \{\lambda_i \mu_j \mid \lambda_i \in Sp K_m, \mu_j \in Sp C_{n,\Delta}\} = \underbrace{\{-\mu_j, \dots, -\mu_j, (m-1)\mu_j \mid \mu_j \in Sp C_{n,\Delta}\}}_{m-1}$$

ya que el espectro de  $K_m$  es

$$Sp K_m = \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

El grafo resultante tiene  $n \times m$  vértices,  $\left(\frac{m(m-1)}{2} \frac{n\Delta}{2}\right)$  ramas y es regular de grado  $\Delta(m-1)$ , y su coeficiente de apiñamiento puede ser elevado si  $\Delta$  es grande, reduciéndose notablemente el diámetro respecto al del grafo inicial. Sin embargo, para valores elevados de  $\Delta$ , el grafo tendrá muchas ramas, y la matriz de adyacencia no será esparcida, como ocurre en grafos mundo pequeño reales. La gran ventaja de este modelo es que podemos conocer con exactitud todo su espectro y que además se obtiene un grafo regular.

Una manera de reducir más el diámetro del grafo producto, sin tener que aumentar demasiado

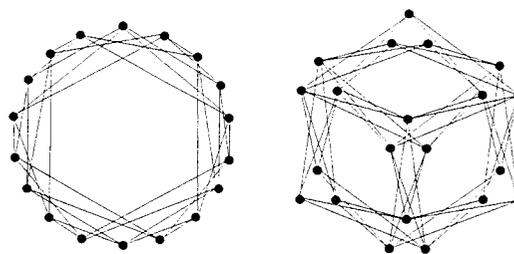


Figura 5: Producto de un grafo completo  $K_3$  por un grafo circulante  $C_{6,1}$  y por una rueda  $SW_2$  formada por la unión del vértice central con tres vértices de  $C_{6,1}$

el número de ramas consiste en hacer el producto por una rueda  $SW_2$ . Aunque tendremos que resolver una ecuación para encontrar los autovalores que cambian (con relación al grafo circulante base), el número total de nodos final será mucho mayor que en el caso de un producto con un circulante y además el diámetro se reducirá mucho más. El espectro del grafo resultante se obtiene de la misma manera, como el producto de los autovalores de los dos grafos. Sin embargo, en este caso, el grafo final no será regular.

## Referencias

- [1] R. Albert, H. Jeong y A.-L. Barabási. Diameter of the world wide web. *Nature* **401**, 130-131 (1999).
- [2] A.-L. Barabási y R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**, 509-512 (1999).
- [3] B. Bollobás y F. de la Vega, The diameter of random graphs. *Combinatorica* **2**, 125-134 (1982).
- [4] J.-C. Bermond, F. Comellas y D.F. Hsu, Distributed loop computer networks: A survey. *J. Parallel Distrib. Comput.* **24**, 2-10 (1995).
- [5] S. Bezrukov, R. Elsässer, B. Monien, R. Preis y J.-P. Tillich. New spectral lower bounds on the bisection width of graphs. *Proc. WG'2000*, U. Brandes, D. Wagner (eds.), Springer Ver., LNCS 1928, June 2000, pp. 23-34 (2000).

- [6] N. Biggs. *Algebraic Graph Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1974; second edition 1993).
- [7] C. Bornstein, A. Litman, B.M. Maggs, R.K. Sitaraman, T. Yatzkar. On the bisection width and expansion of butterfly networks. *Proc. First Merged Int. Parallel Processing Symposium and Symposium on Parallel and Distributed Processing*. March 30- April 3, Orlando, FL, 1998.
- [8] F. Comellas, J. Ozón y J.G. Peters. Deterministic small-world communication networks. *Inform. Process. Lett.* **76**, 83–90 (2000).
- [9] F. Comellas y M. Sampels. Deterministic small-world networks. *Physica A* **309**, 231–235 (2002).
- [10] F. Comellas y J. Ozón. On the universality of small-world graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **10** (2001).
- [11] T. Decker, B. Monien y R. Preis. Towards optimal load balancing topologies. *Proc. 6th EuroPar Conference*, A. Bode, T. Ludwig, W. Karl, and R. Wismüller (eds.), Springer, LNCS 1900, 2000, 277–287.
- [12] R. Elsässer, R. Královic y B. Monien. Scalable sparse topologies with small spectrum. *Proc. 18th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, Springer Verlag, 2001.
- [13] M. Faloutsos, P. Faloutsos y C. Faloutsos. On power-law relationships of the Internet topology. *Computer Communication Review* **29**(4), 251–262 (1999).
- [14] S. Gago. *El espectro de grafos que modelan redes de comunicación*. Proyecto Fin de Carrera, Escuela Politécnica Superior de Castelldefels, UPC, Setiembre 2001.
- [15] L. Hagen y A. Kahng. Fast spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. International Conference on Computer-Aided Design, 1991. ICCAD-91. *IEEE Digest of Technical Papers* 1991, 10–13.
- [16] L. Hagen y A. Kahng. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. *IEEE Trans. CAD/ICS* **11**(9), 1074–1085 (1992).
- [17] S. Milgram. The Small-World Problem. *Psychology Today* **1**, 60–67 (1967).
- [18] B. Mohar. Isoperimetric number of graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B* **47**, 274–291 (1989).
- [19] B. Mohar. The Laplacian spectrum of graphs. in *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Vol. 2, Ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk, Wiley, 1991, pp. 871–898.
- [20] D.J. Watts. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999).
- [21] D.J. Watts y H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature* **393**, 440–442 (1998).