

Conexiones ortogonales con vértices prefijados¹

M.A. Garrido, A. Márquez, J.R. Portillo y P. Reyes²

Resumen

Un problema importante dentro de la disciplina conocida como Graph Drawing es obtener inmersiones ortogonales de un grafo, es decir, con las aristas representadas por secuencias de segmentos horizontales y verticales. La restricción de este problema cuando los vértices del grafo están en posiciones prefijadas es también del máximo interés.

En este sentido Raghavan *et al.* [10] (1986) han considerado el problema de conectar pares de puntos mediante aristas con un único codo sin intersecciones. Consideramos en este trabajo dos extensiones naturales de este problema: permitiendo más de un codo por arista entre pares de puntos y estudiando la conexión entre conjuntos arbitrarios (pero fijos) de puntos en el plano utilizando inmersiones ortogonales de grafos arbitrarios (pero asimismo fijos).

1. Introducción

Numerosos trabajos relativos al trazado ortogonal de grafos están dedicados a la tarea de asignar coordenadas a los vértices de las inmersiones ortogonales con el objetivo de encontrar *buenas* representaciones. Sin embargo, muchos casos prácticos requieren que las coordenadas de los vértices a conectar se hayan fijado previamente. Supuestamente, este hecho debería simplificar el problema, pero en la práctica, surgen cuestiones nuevas y muy diferentes.

El tipo de problemas que trataremos en esta parte de la memoria será una nueva ampliación del problema EMPAREJAMIENTO ORTOGONAL SIMPLE PLANO (*Single Bend Wiring*). Este problema, tratado y resuelto por Raghavan, Cohoon y Sahni en 1986 consiste en conectar pares de puntos en el plano mediante aristas ortogonales simples (con

un codo a lo sumo) de manera que éstas no se corten [10]. Los autores citados muestran un algoritmo cuadrático que resuelve el problema. También prueban que en el caso de no poder ser trazadas todas las conexiones, encontrar el número máximo de ellas que sí pueden ser trazadas simultáneamente sin cruces es un problema NP-duro. También lo es el encontrar el menor número de capas necesarias para poder emparejar simultáneamente todos los puntos usando planos paralelos interconectados entre sí.

Debido a estos resultados, se hace necesario considerar enfoques diferentes del problema. En el trabajo de Garrido *et al.* [4] se trata la ampliación del problema considerando un soporte diferente para los trazados ortogonales: superficies orientables no planas. La motivación de estos autores es la misma que la nuestra: el problema EOSP no satisface los requerimientos de determinados problemas de diseño VLSI, que exigen la conexión de grupos de puntos según un determinado esquema. Entonces, es necesario el uso de estructura más *ricas* en contenido para intentar encontrar las soluciones a estos problemas. Ello es lo que nos impulsa a estudiar la multiconexión entre conjuntos con dos o más puntos, la cual se realizará mediante esquemas prefijados. Por otra parte, el problema ampliado que presentamos tiene otras aplicaciones diferentes del diseño VLSI, tales como el etiquetado de mapas, el diseño de diagramas de bloques (organigramas, diagramas de flujo, etc.) y el diseño de redes.

En este trabajo permanecemos en el plano y la ampliación se hace sobre los trazados: en lugar de conectar pares de puntos, permitiremos la conexión de conjuntos de puntos mediante inmersiones ortogonales de grafos. El número de codos permitidos podrá ser mayor que uno, pero deberá permanecer acotado para cada problema. Denominaremos estos problemas de CONEXIÓN ORTOGONAL PLANA (COP).

¹Trabajo parcialmente subvencionado por la Junta de Andalucía.

²Dpto. de Matemática Aplicada 1. Universidad de Sevilla. Electrocorreo: {vizuete,almar,josera,preyes}@us.es

$(COP((G_1, b_1), (G_2, b_2), \dots, (G_n, b_n)))$

ENTRADA: Un conjunto de grafos conexos $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ y un conjunto de enteros positivos $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Para cada grafo G_i , un conjunto de puntos en el plano \mathcal{W}_i , con cardinalidad igual a la del conjunto de vértices de G_i .

PREGUNTA: ¿Pueden unirse simultáneamente todos los puntos de cada conjunto \mathcal{W}_i , usando una inmersión ortogonal plana con menos de b_i codos del grafo G_i , cuyos vértices sean los puntos del conjunto de puntos en el plano y sin que haya intersecciones entre los segmentos de las aristas de las inmersiones?

Cuando estudiemos un problema COP concreto, i.e.: con los grafos y las cotas ya fijadas, analizaremos la complejidad computacional del problema. Para los casos en que exista un algoritmo polinomial que resuelva el problema, éste se dará explícitamente. La entrada del algoritmo serán las coordenadas de los puntos en el plano y la salida las inmersiones ortogonales de los grafos. También se mostrará el tiempo computacional requerido por el algoritmo.

En muchas aplicaciones sólo determinadas inmersiones pueden ser consideradas por la naturaleza de la aplicación (v.g., algunos circuitos tienen que ser conectados de una manera prefijada). Ello nos lleva a estudiar la variante del problema CONEXIÓN ORTOGONAL PLANA que se obtiene cuando se restringe la elección del trazado de las inmersiones ortogonales a un número finito. El problema correspondiente se denota $((r_1, r_2, \dots, r_n)$ - $COP((G_1, b_1), (G_2, b_2), \dots, (G_n, b_n)))$

Estudiaremos los diferentes problemas según su complejidad computacional. La Sección 2 se dedica a estudiar los problemas que pueden resolverse en tiempo polinomial. Para ello usaremos reducción al problema de satisfacibilidad 2-SAT o técnicas de Geometría Computacional.

La Sección 3 está dedicado a los problemas que se presentan al incorporar el grafo completo de tres vértices K_3 , que denominamos problemas de TRIÁNGULOS ORTOGONALES. Estos tienen múltiples aplicaciones, no sólo en el diseño de circuitos, sino también en el trazado de rectángulos con restricciones (organigramas, bases de datos, diagramas de flujo, rotulado, etc.). Además, en el estudio de estos problemas se presentan técnicas diferentes

a las estudiadas anteriormente.

Se presentan dos resultados fundamentales de NP-completitud en la Sección 4. El primero de ellos se refiere a la inmediata ampliación del problema EOSP que se obtiene permitiendo un máximo de dos codos por arista, el problema EMPAREJAMIENTO ORTOGONAL DOBLE PLANO (EODP). Se muestra a continuación una caracterización de NP-completitud para los problemas CONEXIÓN ORTOGONAL PLANA, dando una condición suficiente para que un problema $COP(n(G, b+2))$ sea NP-completo: se requiere que el grafo G sea 2-conexo y que exista una inmersión ortogonal plana de G con b codos. Analizamos seguidamente otros problemas $COP(n(G, b+2))$ NP-completos con G 2-conexo que no verifican la condición anterior, es decir, que no existe una inmersión ortogonal plana de G con b codos probando así que esta condición no es necesaria. Otros casos en los que el grafo no es 2-conexo se analizan en la Sección 4.3, obteniendo también resultados de NP-completitud.

2. Problemas cop resolubles en tiempo polinomial

2.1. Casos con inmersión única

Consideramos en esta sección casos del problema CONEXIÓN ORTOGONAL PLANA resolubles en tiempo computacional polinomial. Concretamente, tratamos acerca de aquellos problemas que involucran grafos que sólo admiten una inmersión ortogonal plana en cuyo caso el problema puede reducirse a un problema de intersección de segmentos. La versión más simple del teorema principal de esta sección se da cuando estudiamos diferentes copias de un mismo grafo:

Teorema 1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo que admite una única inmersión ortogonal plana con b codos. Sea $e = |E|$ el número de aristas del grafo. Entonces el problema $COP(n(G, b))$ se puede resolver en tiempo computacional óptimo $O(n(e+b) \log(n(e+b)))$. Cuando la respuesta es positiva, el algoritmo proporciona una instancia que satisface el problema.*

El problema de determinar si un grafo admite una única inmersión ortogonal plana con b codos

es un problema NP-completo. Ello nos impide, en principio, utilizar el Teorema 1 como una herramienta útil, pues es necesario un preprocesado del problema que, en principio, no puede hacerse en tiempo computacional asequible. Sin embargo, para muchos grafos concretos es fácil probar la existencia de inmersión ortogonal plana única y por lo tanto el problema de conexión entre copias de esos grafos puede ser reducido a intersección de segmentos. Considerando algunos de estos grafos, obtenemos resultados particulares:

Corolario 2 Los problemas $COP(n(K_2, 0))$, $COP(n(P_2, 0))$, $COP(n(K_3, 1))$, $COP(n(K_{1,3}, 0))$, $COP(n(K_{1,4}, 0))$, $COP(n(K_{1,4}, 1))$, $COP(n(C_m, 0))$ ($4 \leq m \leq 9$ fijo) $COP(n(C_4, 1))$, $COP(n(K_4 - K_2, 2))$ y $COP(n(K_{2,3}, 2))$ son resolubles en tiempo computacional óptimo $O(n \log n)$. Cuando la respuesta es positiva, el algoritmo proporciona una instancia que satisface el problema.

Hacemos notar que existen otras combinaciones de grafo y cota (G, b) que admiten más de un trazado ortogonal plano, pero en las que puede utilizarse la misma técnica empleada para los casos ya estudiados. Estudiamos a continuación el problema $COP(n(K_4, 4))$ en el cual pueden trazarse para cada conjunto de puntos infinitos trazados de inmersiones ortogonales planas, pero que puede resolverse también en tiempo $O(n \log n)$:

Proposición 3 $COP(n(K_4, 4))$ es resoluble en tiempo $O(n \log n)$. Si la respuesta es positiva, el algoritmo proporciona una instancia que soluciona el problema.

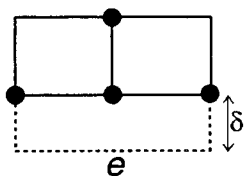


Figura 1: Inmersión ortogonal con cuatro codos del grafo $K_{4,4}$

Demostración: (Esquema) La única forma de obtener una inmersión ortogonal plana con cuatro codos

del grafo completo $K_{4,4}$ es la que puede verse en la Figura 1, donde las aristas marcadas con líneas continuas son fijas y la arista e , marcada con líneas discontinuas, puede *move*se.

La técnica para hallar los trazados ortogonales simples consiste en hacer un estudio de las intersecciones de las aristas *fijas*, que se resuelve en tiempo $O(n \log n)$. Si no hay intersecciones, podremos dibujar las aristas e lo suficientemente cerca de las demás, de modo que estas aristas no intersequen a ninguna otra. ■

2.2. Casos reducibles a 2-sat

Teorema 4

El problema 2-COP $((G_1, b_1), \dots, (G_n, b_n))$ es resoluble en tiempo $O(n^2)$.

Demostración:

Transformamos cada instancia del problema 2-COP en una instancia del problema 2-SAT de forma que ésta sea satisfacible si y solamente si aquella pueda ser trazada en el plano sin intersecciones entre las inmersiones de los grafos. Para ello, asignamos una variable booleana u_i a cada uno de los n conjuntos de vértices \mathcal{W}_i . El valor 1 de la variable corresponde a una de las inmersiones planas del grafo con \mathcal{W}_i como conjunto de vértices y el valor 0 a la otra. Cada una de las $n(n-1)/2$ interacciones entre dos grafos G_i y G_j se convierte en una fórmula booleana $f_{i,j}$ formada por, como máximo, dos cláusulas con uno o dos literales, inspeccionando las posibles intersecciones entre las dos inmersiones de cada grafo. Esta inspección se hace $2n(n-1)$ veces. El coste computacional de cada posible intersección de inmersiones es de $O((e+b) \log(e+b))$, donde e denota el máximo del número de aristas en los grafo G_i y b es el máximo entre las cotas del número de codos b_i .

Encontrar un trazado sin intersecciones equivale a encontrar valores de verdad para todas las variables u_i que satisfagan las $n(n-1)/2$ fórmulas simultáneamente. Es decir, hay que encontrar una asignación de verdad para $U = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} f_{i,j}$.

U es una fórmula de Krom, i.e.: una entrada del problema 2-SATISFACIBILIDAD (2-SAT), el cual es resoluble en tiempo lineal en el número de cláusulas y de variables [1]. En nuestro caso, el número de cláusulas es como mucho $n(n-1)$ y el

número de variables es n , por lo tanto, el problema puede solucionarse en tiempo $O(n^2)$. ■

Hay muchos problemas COP a los que puede ser aplicado este teorema, siempre que los grafos involucrados posean a lo sumo dos inmersiones ortogonales planas. En particular, la solución dada por Raghavan *et al.* al problema EMPAREJAMIENTO ORTOGONAL SIMPLE PLANO (EOSP) en 1986 [10] resulta ser consecuencia inmediata del Teorema 4.

Teorema 5 $COP(n(K_2, 1))$, $COP(n(K_{1,3}, 1))$ y $COP(n(C_5, 1))$ son resolubles en tiempo computacional $O(n^2)$.

Ahora bien, si intentamos aplicar la técnica utilizada en el Teorema 4 a problemas con más de dos inmersiones por grafo (o por copia de grafo), obtenemos, en principio, una reducción del correspondiente problema r -COP al problema r -SAT y, como es sabido, éste es un problema NP-completo para $r \geq 3$.

Sin embargo, en casos específicos el problema puede ser reducido al problema 2-SAT, incluso si hay más de dos inmersiones ortogonales planas por copia del grafo. Esto ocurre cuando las posibles intersecciones entre copias del grafo tienen alguna característica que pueda aprovecharse en el proceso de transformación. Un buen ejemplo es el problema $COP(n(P_3, 0))$, que podemos resolver en tiempo cuadrático aunque P_3 admite hasta cuatro inmersiones ortogonales planas sin codos, haciendo uso de un preprocesado que controle las intersecciones:

Teorema 6 El problema $COP(n(P_3, 0))$ se puede resolver en tiempo computacional $O(n^2)$.

3. Triángulos ortogonales

Dedicamos esta sección a los problemas de conexión ortogonal plana mediante inmersiones ortogonales del grafo K_3 en el plano, denominados problemas de TRIÁNGULOS ORTOGONALES. La geometría de triángulos ortogonales tiene aplicaciones en las mismas áreas que el problema EOSP. Además, los problemas que planteamos en este capítulo están fuertemente relacionados con los problemas de etiquetado (*map-labeling*) [3]. Entre estos problemas se incluyen el rotulado de mapas y otras aplicaciones en Sistemas de Información Geográfica, el

trazado de rectángulos en organigramas y similares y, en general, con cualquier aplicación que requiera el dibujo de rectángulos con restricciones.

El número de codos permitidos en los trazados ortogonales de cada triángulo determinará la naturaleza computacional del problema. Se comprueba fácilmente que $COP(n(K_3, 0))$ tiene solución negativa siempre. Ya ha sido probado en el Corolario 2 que $COP(n(K_3, 1))$ puede resolverse en tiempo computacional $O(n \log n)$.

El caso de trazados con dos codos, $COP(n(K_3, 2))$, puede considerarse una variante de los problemas de etiquetado cuando las etiquetas son *elásticas* (*cf.*, por ejemplo [8]). Este tipo de problemas suelen presentar un comportamiento computacional NP-completo. Sin embargo haciendo uso de un algoritmo incremental cuadrático se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 7 El problema $COP(n(K_3, 2))$ se resuelve en tiempo polinomial $O(n^2)$. En el caso de que la respuesta al problema sea positiva, el algoritmo de resolución devuelve también una instancia del problema que lo verifica, i.e.: un conjunto de triángulos ortogonales sin cruces uniendo los puntos de cada trío con dos codos o menos.

Este problema es esencialmente diferente a los anteriores en el sentido de que los grafos involucrados admiten ahora un número infinito de trazados ortogonales planos. En la Figura 2.a vemos una entrada del problema, en 2.b las bandas *elásticas* definidas por la entrada en las cuales deben trazarse los posibles rectángulos-solución y mostramos una posible solución en la Figura 2.c.

Si el número de codos es mayor que dos obtendremos en la Sección 4 la NP-completitud del problema r -COP($n(K_3, 1)$), ($r \geq 3$).

4. Problemas NP-completos

En esta sección se estudia la NP-completitud de diversos problemas de CONEXIÓN ORTOGONAL PLANA. El primer caso para el que se prueba este resultado es la ampliación del problema original EOSP que consiste en permitir dos o más codos por arista. Posteriormente se obtiene un resultado general para grafos 2-conexos, dando una condición suficiente para que el problema r -COP($n(G, b)$)

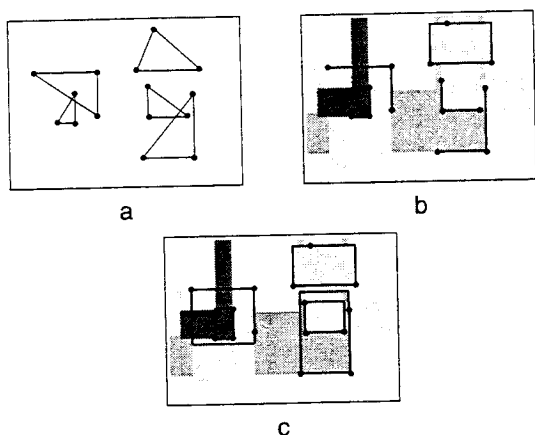


Figura 2: a) Una entrada del problema $\text{COP}(n(K_3, 2))$. b) Bandas definidas por la entrada. c) Una solución utilizando las bandas definidas.

sea NP-completo. Se presentarán finalmente algunos casos particulares y se expondrán otros problemas NP-completos que no satisfacen las hipótesis del teorema general.

4.1. Emparejamiento ortogonal doble plano

Teorema 8 *El problema $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ es NP-completo.*

Demostración: (Esquema) Se comprueba fácilmente que $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ se puede resolver en tiempo polinomial no determinista, i.e.: pertenece a NP. Para demostrar entonces que el problema es NP-completo, será suficiente reducir en tiempo polinomial un problema NP-completo a éste. Utilizaremos una variante del problema 3-SAT, el denominado 3-SAT PLANO (cf. [1]). Dada una instancia arbitraria \mathcal{UC} del problema 3-SAT PLANO construiremos en tiempo polinomial una instancia \mathcal{W} de $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ tal que \mathcal{UC} sea satisfacible si y solamente si podemos trazar sin cruces los caminos de \mathcal{W} .

Para ello será preciso definir determinadas configuraciones que formarán la instancia de $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$: conjuntos de cláusula, conjuntos de variable y conjuntos de transmisión. Todas estas configuraciones se situarán siguiendo una inmersión

ortogonal del grafo plano definido por la instancia \mathcal{UC} .

La figura 3 muestra un ejemplo de la construcción de una instancia del problema $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ a partir de una instancia de 3-SAT PLANO, aunque por claridad sólo se muestran las configuraciones correspondientes a dos cláusulas y una variable. ■

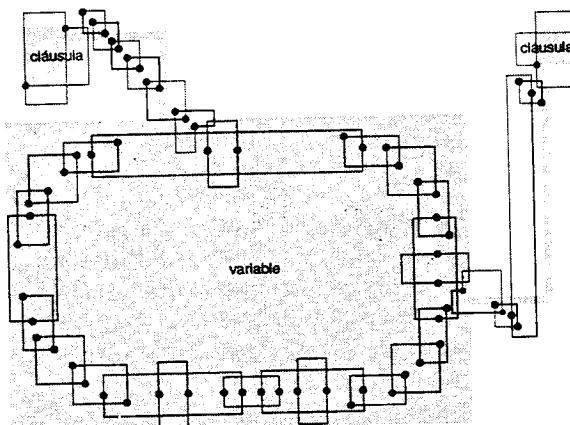


Figura 3: Parte de una instancia de $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ generada a partir de una instancia de 3-SAT PLANO.

Como consecuencia del teorema anterior y uniéndolo a los resultados ya conocidos para un menor número de caminos permitidos por par de puntos y también a los resultados de las secciones 2.1 y 2.2, obtenemos el resultado principal para EMPAREJAMIENTOS ORTOGONALES EN EL PLANO:

Teorema 9 *El problema $r\text{-COP}(n(K_2, b))$ es NP-completo si y solo si $r \geq 3$ y $b \geq 2$.*

4.2. Grafos 2-conexos

Recordemos que en las aplicaciones de los problemas de conexión ortogonal es necesario utilizar, en multitud de ocasiones, conexiones entre varios puntos. En esta sección probamos uno de los resultados más potentes de este trabajo: una condición suficiente acerca del grafo G (ser 2-conexo y poseer una inmersión ortogonal plana de G con b codos) que proporciona la NP-completitud del problema $3\text{-COP}(n(G, b+2))$. Sin embargo, las hipótesis del teorema son sólo condiciones para garantizar

una propiedad de las inmersiones del grafo: que, dada una configuración de puntos, existan tres o más inmersiones ortogonales planas que *salgan* de la clausura rectangular del conjunto de puntos, formando lo que llamaremos *asas*. Esto será utilizado posteriormente para la demostración de la NP-completitud de algunos problemas concretos.

Nótese que el problema de encontrar una inmersión ortogonal plana con b codos de un grafo dado con sus vértices en puntos prefijados es un problema NP-completo. Sin embargo, para un grafo dado con pocos vértices es posible, en general, hacer un estudio de las inmersiones factibles, lo cual nos permite utilizar este teorema como herramienta para establecer la NP-completitud de numerosos problemas concretos de conexión ortogonal plana.

Teorema 10 Sea G un grafo 2-conexo. Si existe una inmersión ortogonal plana de G con b codos, el problema $3\text{-COP}(n(G, b+2))$ es NP-completo.

Demostración: (Esquema) Para demostrar este teorema, se utiliza una técnica similar a la utilizada en la prueba del Teorema 8. El problema $3\text{-COP}(n(K_2, 2))$ se puede resolver en tiempo polinomial no determinista o, lo que es lo mismo, pertenece a NP. Entonces, para probar que el problema que tratamos es NP-completo, basta con reducir en tiempo polinomial un problema NP-completo ya conocido a éste. Para ello usamos de nuevo el problema 3-SAT PLANO [1].

La figura 4 muestra un ejemplo de la construcción de una instancia del problema $3\text{-COP}(n(G, b))$ a partir de una instancia de 3-SAT PLANO. Sólo se muestran las configuraciones obtenidas a partir de una cláusula y una variable. ■

Corolario 11 Sea G un grafo 2-conexo. Si existe una inmersión ortogonal plana de G con b codos, los problemas $r\text{-COP}(n(G, d))$ son NP-completos, para todos los $r \geq 3, d \geq b+2$.

Nos interesa ahora, para cada grafo G concreto, hallar el menor número b para el que exista una inmersión ortogonal. Así podremos aplicar estos resultados para probar la NP-completitud del problema con $b+2$ codos y estudiaremos luego la complejidad computacional de los problemas con b y con $b+1$ codos. De este modo caracterizaremos,

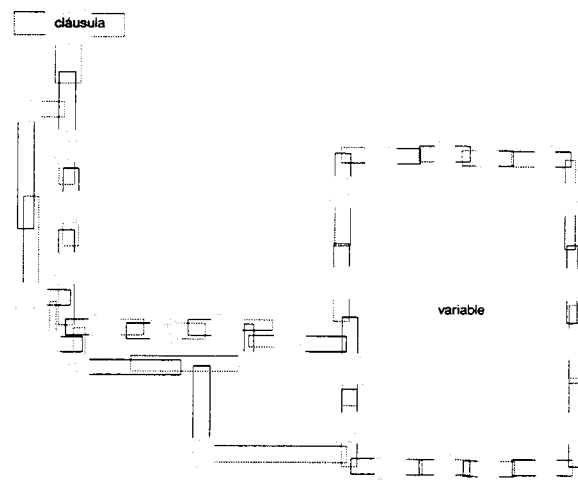


Figura 4: Parte de una instancia de $3\text{-COP}(n(G, b))$ generada a partir de una instancia de 3-SAT PLANO.

para los grafos en los que sea posible, la complejidad de los problemas $\text{COP}(n(G, k))$ en función de k . Mostramos a continuación algunos resultados obtenidos:

Teorema 12

- $r\text{-COP}(n(K_3, b))$ es NP-completo, para cualesquiera $r, b \geq 3$.
- $r\text{-COP}(n(C_m, b))$ es NP-completo para cualesquiera $r \geq 3, b \geq 2$ y $m \geq 4$.
- $r\text{-COP}(n(K_4 - K_2, b))$ es NP-completo si y sólo si, $r \geq 3$ y $b \geq 3$.
- $r\text{-COP}(n(K_4, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 5$.
- $r\text{-COP}(n(K_{2,3}, b))$ es NP-completo si y sólo si $r, b \geq 3$.
- $r\text{-COP}(n(K_{2,4}, b))$ es completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 5$.
- $r\text{-COP}(n(Q_3, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 5$.
- $r\text{-COP}(n(\Pi_8, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 12$.

- $r\text{-COP}(n(W_4, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 5$.
- $r\text{-COP}(n(K_5 - K_2, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 8$.
- El problema $r\text{-COP}(n(K_{1,3}, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 3$.
- $r\text{-COP}(n(K_4 - K_{1,2}, b))$ es NP-completo cuando $r \geq 3$ y $b \geq 2$.

Los dos primeros casos del teorema anterior tienen características comunes: existe una inmersión ortogonal plana con b codos para el grafo 2-conexo G , no existe ninguna inmersión ortogonal plana con menos de b codos para el grafo G y los problemas $\text{COP}(n(G, b))$ y $\text{COP}(n(G, b + 1))$ se resuelven en tiempo polinomial. Como se ha hecho notar, las hipótesis del Teorema 10 eran utilizadas para construir inmersiones con tres *asas* y a partir de ahí, mostrar la NP-completitud del problema COP. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias, puesto que la argumentación fundamental de la prueba se hacía a partir de la construcción de las *asas*. Los restantes resultados del teorema anterior se obtienen adaptando la demostración mediante la construcción de las *asas* correspondientes en cada caso.

4.3. Otros casos NP-completos

Hemos presentado condiciones suficientes para que un problema de conexión ortogonal plana $r\text{-COP}(n(G, b + 2))$ ($r \geq 3$) fuera NP-completo. Se demostró mediante ejemplos que algunas de estas condiciones no eran necesarias. Estudiamos a continuación problemas COP donde la condición que falta es la 2-conexión del grafo. La demostración del Teorema 10 puede adaptarse para obtener el siguiente teorema:

Teorema 13 *Se verifican los siguientes resultados:*

- $r\text{-COP}(n(K_2, b))$ es NP-completo si y sólo si $r \geq 3$ y $b \geq 2$ (Teorema 9).
- $r\text{-COP}(n(P_2, 2))$ es NP-completo cuando $r \geq 3$.
- El problema $r\text{-COP}(n(P_3, 2))$ es NP-completo para cualquier $b \geq 2$ y $r \geq 3$.
- El problema $r\text{-COP}(n(P_m, b))$, con m fijo es NP-completo para cualquier $b \geq 2$ y $r \geq 3$.
- $r\text{-COP}(n(K_{1,4}, b))$ es NP-completo cuando $r \geq 3$ y $b \geq 3$.

Mostramos ahora el resultado de NP-completitud que se obtiene para el problema $3\text{-COP}(n(K_{1,3}, 2))$. Esta prueba presenta una característica distintiva interesante: cada *pestaña* se obtiene mediante dos inmersiones de dos configuraciones de puntos distintas (Figura 5).

Teorema 14 *El problema $3\text{-COP}(n(K_{1,3}, 2))$ es NP-completo.*

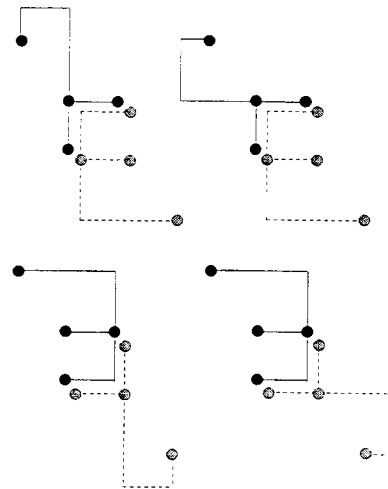


Figura 5: *Asas* obtenidas con las parejas de inmersiones.

5. Conclusiones y problemas abiertos

A continuación se expone un resumen de los resultados obtenidos en esta sección y posteriormente se discutirá sobre problemas abiertos y líneas de investigación que puedan ser sugeridas por este trabajo.

5.1. Resumen de resultados

El cuadro 1 muestra los resultados obtenidos para los problemas $\text{COP}(n(G, b))$, donde el grafo tie-

ne 4 vértices o menos. Un resumen de los resultados obtenidos para otros grafos particulares, as como resultados para tipos específicos de grafos (camino, ciclos,...) puede consultarse en [9].

Cuadro 1: Complejidad computacional de $COP(n(G, b))$, para $|V(G)| \leq 4$

	0	1	2	≥ 3
$ V(G) = 2$				
K_2	$n \log n$	n^2	NP*	NP*
$ V(G) = 3$				
P_2	$n \log n$?	NP*	...
K_3	NO	$n \log n$	n^2	NP*
$ V(G) = 4$				
P_3	n^2	?	NP*	...
$K_{1,3}$	$n \log n$	n^2	NP*	...
$K_4 - K_{1,2}$	NO	$n \log n$	NP*	...
C_4	$n \log n$	$n \log n$	NP*	...
$K_4 - K_2$	NO	NO	$n \log n$	NP*

$ V(G) = 4$	0-3	4	≥ 5
K_4	NO	$n \log n$	NP*

5.2. Problemas abiertos

Citamos dos líneas de investigación que se han abierto a partir de los estudios que se han presentado en este trabajo y que ya han proporcionado resultados.

Los problemas de conexión ortogonal usando triángulos presentados en el Capítulo 3 se hallan fuertemente relacionados con problemas de etiquetado de mapas (*map-labeling*). La aplicación de las técnicas propuestas para los problemas de conexión ha dado lugar a resultados interesantes en esta disciplina [3, 5].

Otra línea de investigación abierta a partir de este trabajo es la que intenta aproximar los problemas aquí expuestos mediante el uso de Programación Evolutiva. Es decir, si el problema tiene solución negativa o si el hallar la solución exacta es demasiado costoso computacionalmente (o, simplemente, imposible) se utilizan algoritmos genéticos para intentar maximizar el número de inmersiones ortogonales planas sin cruces trazables [6, 7].

Referencias

- [1] M. R. Garey y M. R. Johnson. *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, 1979.
- [2] M. A. Garrido, C. Iturriaga, A. Márquez, J. R. Portillo y P. Reyes, *Labeling points on a line*. Euroconference on Discrete and Algorithmic Geometry. Anogia, Creta, Grecia. 2001.
- [3] M. A. Garrido, C. Iturriaga, A. Márquez, J. R. Portillo, P. Reyes y A. Wolff, *Labeling subway lines*. 12th Annual Int. Symp. on Algorithms and Computation (ISAAC'01), Christchurch, Nueva Zelanda. Springer-Verlag, LNCS, vol. 2223, pp 649-659. 2001.
- [4] M. A. Garrido, A. Márquez, A. Morgana y J. R. Portillo, *Single bend wiring on surfaces*. Discrete and Applied Mathematics. vol. 117 pp. 27-40. 2002.
- [5] M. A. Garrido, A. Márquez, J. R. Portillo y P. Reyes. *Drawing Constrained Rectangles in the Plane without Intersections*. Joint Meeting of the Third World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI'99) and the Fifth Int. Conference on Information Systems Analysis and Synthesis (ISAS'99). Orlando, Fl. EE.UU. 1999.
- [6] —. *Aplicación de algoritmos genéticos al problema MAX-SBW*. I Encuentro Andaluz de Matemática Discreta. Univ. La Rábida. 1999.
- [7] —. *Trazados ortogonales. Resultados generales y aproximación por algoritmos genéticos*. II Jornades de Matemàtica discreta i algorísmica. Palma de Mallorca. 2000.
- [8] C. Iturriaga y A. Lubiw, *Elastic Labels around the Perimeter of a Map*. 8th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS'99), Vancouver, Canadá. Springer-Verlag, LNCS, vol. 1663, pp. 306-317. 1999
- [9] J. R. Portillo, *Problemas de conexiones ortogonales*. Tesis Doctoral. Univ. Sevilla. 2002.
- [10] R. Raghavan, J. Cohoon y S. Sahni, *Single Bend Wiring*. Journal of Algorithms. vol. 7 pp. 232-257. 1986.