(α, k)-sets en el plano[1]

Versión Preliminar

M. Abellanas[2] M. Claverol[3] F. Hurtado[4] C. Seara[4]

Resumen

En este trabajo se inicia el estudio combinatorio del conjunto de (α, k)-sets para nubes de puntos en el plano. Se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de (α, k)-sets en cada uno de los cuatro casos posibles: ambos parámetros α y k fijos, uno de ellos fijo y el otro variable o ambos variables. También para cada caso, se describen algoritmos de construcción de todos los (α, k)-sets.

1 Introducción

Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Sea $\mathcal{C}$ una familia de curvas en el plano. Dada una curva $c \in \mathcal{C}$, un c-k-set es la intersección de S con una de las regiones abiertas definidas por c de cardinalidad k. Si c es una recta orientada, el c-k-set se corresponde con la definición usual de k-set, es decir, un k-set de S es un subconjunto de S con cardinal k separable del resto por una recta a la que se denomina *k-recta*.

El problema de determinar el número máximo de k-sets para conjuntos de n puntos en el plano ha sido ampliamente abordado por diversos autores, en parte debido a su importancia en el análisis geométrico de algoritmos. Los primeros resultados de Erdös et al. [5] establecieron una cota superior de $O(n\sqrt{k})$. Posteriormente, Pach et al. [8] consiguen una cota superior de $O(n\sqrt{k}/\log^* k)$. Más recientemente, Dey [2] la estableció en $O(nk^{1/3})$. Para la cota inferior, Lovász [6] construyó familias de conjuntos con $\Omega(n \log k)$ k-sets. La cota inferior es mejorada por Tóth en [9] construyendo conjuntos de puntos en el plano con $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ k-sets para cualquier n, k con $n \geq 2k > 0$.

Se pueden considerar los k-sets definidos por una curva cualquiera $c \in C$, no siendo c una recta. El caso más simple que podemos considerar es el de los c-k-sets siendo c una cuña, que es la región abierta del plano definida por dos semirrectas con un origen común. Una α-cuña es una cuña de ángulo α, $0 < \alpha \leq \pi$. En este trabajo, aún en desarrollo, estudiamos los k-sets para esta situación particular.

Definición 1 *Un (α, k)-set es la intersección de S con una α-cuña tal que el cardinal de la intersección es igual a k, es decir, un (α, k)-set es un subconjunto de S con cardinal k separable del resto por una α-cuña.*

Lema 2 *Todo k-set es un (α, k)-set.*

[1] Parcialmente financiado por los proyectos MEC-DGES PB98-0933, Gen. Cat. SGR2001-00224 y CAM 07T/0014/2001

[2] Dept. Mat. Aplic., UPM., mabellanas@fi.upm.es

[3] Dept. Mat. Aplic. IV, UPC., merce@mat.upc.es

[4] Dept. Matemática Aplicada II, UPC., hurtado@ma2.upc.es, seara@ma2.upc.es

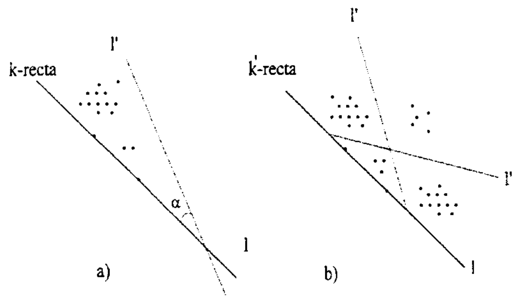

Figura 1: a) Todo k-set es un (α, k)-set, b) todo (α, k)-set puede obtenerse de un k'-set, con $k' \geq k$.

Lema 3 *Si $k' \geq k$, todo (α, k)-set puede obtenerse de un k'-set y todo k'-set obtenido por una recta orientada l genera a lo más dos (α, k)-sets tales que una de las semirrectas de la cuña está contenida en l.*

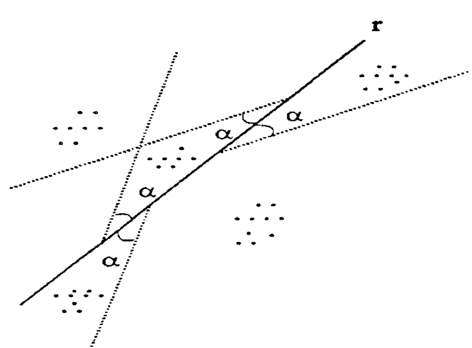

Figura 2: Tres (α, k)-sets asociados a r.

En este artículo realizaremos un estudio combinatorio de los (α, k)-sets para nubes de puntos en el plano. Se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de (α, k)-sets en cada uno de los cuatro casos posibles: ambos parámetros α y k fijos, uno de ellos fijo y el otro variable o ambos variables. También para cada caso, se describen algoritmos de construcción de todos los (α, k)-sets.

2 (α, k)-sets con α fija y k fija

En esta sección estudiamos los (α, k)-sets en el caso en que los parámetros α y k son fijos. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de (α, k)-sets y mostramos un algoritmo que genera todos los (α, k)-sets de una nube de puntos.

Teorema 4 (Cota superior) *El número de (α, k)-sets para valores fijos de α y k es a lo sumo $O(n^2)$.*

Demostración: Dado un (α, k)-set, trasladamos paralelamente una de las semirrectas de la cuña hasta que toque al menos un punto del (α, k)-set. En caso de haber alcanzado dos puntos del (α, k)-set giramos ligeramente la cuña, manteniendo la semirrecta sobre uno de los dos puntos, para dejar al otro punto en su interior. Se procede análogamente con la otra semirrecta. Sean pues a y b los puntos de contacto de las semirrectas (Figura 3a). Consideramos el segmento ab y el arco capaz definido por el segmento ab y el ángulo α. El vértice de la cuña está en este arco capaz y lo desplazamos sobre él hasta que una de las semirrectas toque un nuevo punto de S.

Si el nuevo punto es del (α, k)-set, (en la Figura 3b la semirrecta pasando por a alcanza r), cambiamos por el nuevo punto el extremo del segmento situado en la misma recta, sobre el cual definimos el arco capaz de ángulo α. Giramos ligeramente el vértice de la cuña sobre el nuevo arco capaz para que el punto inicial pase al interior de la cuña y nuevamente cada una de las semirrectas pase sólo por un punto del (α, k)-set. En caso de que ambas semirrectas hayan alcanzado simultáneamente un punto del (α, k)-set, procedemos con una de ellas, por ejemplo, la de menor pendiente.

Si el nuevo punto no es del (α, k)-set ya tenemos una recta pasando por dos puntos uno del (α, k)-set y el otro no y es la que consideramos como recta asociada al (α, k)-set (en la Figura 3b recta pasando por b y q). En caso de que ambas semirrectas hayan alcanzado simultáneamente un punto no perteneciente al (α, k)-set, tomamos como recta asociada una de ellas, por ejemplo, la de menor pendiente.

Es claro que, procediendo de este modo, una de las rectas soporte de la cuña pasando por un punto del (α, k)-set alcanzará un punto fuera del mismo. Esto es así pues dichas rectas van girando entorno a puntos de la envolvente convexa del (α, k)-set, haciendo un barrido del plano. Luego a cada (α, k)-set le podemos asociar una recta pasando por dos puntos tales que uno sea del (α, k)-set y el otro no.

Por otra parte, dada una recta pasando por dos puntos de los cuales sabemos que uno de ellos es del (α, k)-set y el otro no, puede ser la recta asociada a lo sumo a ocho (α, k)-sets (cuatro por punto). Por tanto, el número de (α, k)-sets es menor o igual que ocho veces el número de rectas que pasan por dos puntos de S, es decir a lo más $O(n^2)$. ■

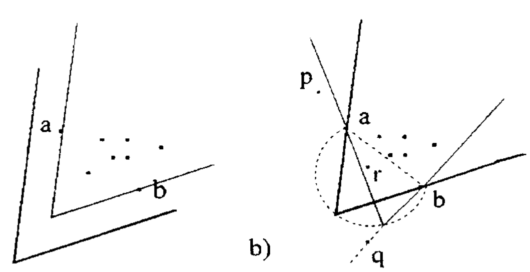

Figura 3: Obtención de la recta asociada al (α, k)-set.

Una cota inferior del número de (α, k)-sets para valores fijos de α y k nos la proporciona la cota inferior del número de k-sets. Lovász [6] la estableció en $\Omega(n \log k)$. Recientemente, Tóth [9] construye un conjunto de n puntos en el plano con $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ k-sets para cualquier n, k con $n \geq 2k > 0$, mejorando la anterior cota inferior.

En el siguiente teorema establecemos diferentes cotas inferiores en función del ángulo fijado α, con $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Teorema 5 (Cota inferior) *Para α y k fijos, con $\alpha \leq \frac{2k\pi}{n+k}$ el número de (α, k)-sets es $\Omega((\frac{n-k}{2})^2)$. Si $\alpha > \frac{2k\pi}{n+k}$ el número de (α, k)-sets es $\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$.*

Demostración: Se realiza la siguiente construcción. Se colocan los n puntos sobre dos rectas paralelas r y s (r sobre s) de la siguiente manera: trazamos una vertical y en su intersección con r ponemos el primer punto p y el resto de puntos situados sobre r muy juntos, a la derecha de p, formando el conjunto A (Figura 4). Al conjunto de puntos situados sobre s le llamamos B. Para obtener B, ponemos en la intersección de s con la vertical un punto q y el resto a su izquierda del siguiente modo: inicialmente se distribuyen equiespaciados con ángulo $\frac{2\alpha}{k}$ sobre la semicircunferencia de diámetro pq a partir de q, después se proyectan sobre s desde p. Se observa que en esta construcción, $|B| \leq \frac{k\pi}{\alpha}$.

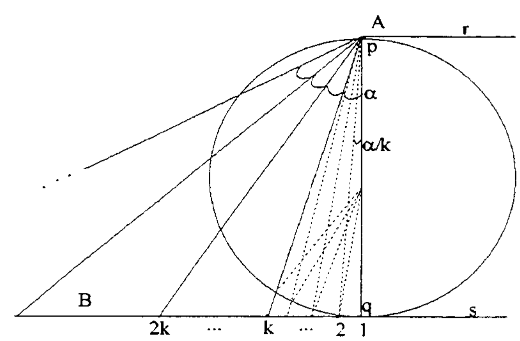

Figura 4: Los puntos de A están concentrados a la derecha de p y los de B distribuidos como en la figura.

El número de puntos es n, luego para cierta t, $|A| = n - k - t$ y $|B| = k + t$. El número de (α, k)-sets es $(n-k-t)t$ pues para cada punto de A se pueden construir t $(k-1)$-sets de puntos contiguos en B. Debemos buscar el valor de t para maximizar el número de (α, k)-sets, teniendo en cuenta la restricción: $|B| = k + t \leq \frac{k\pi}{\alpha}$, esto es, $t \leq k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)$. El número de (α, k)-sets es $(n-k-t)t$, una parábola en t $(0 \leq t \leq n-k)$ que tiene su máximo en $t = \frac{n-k}{2}$.

Si la cota superior de t, $k(\frac{\pi}{\alpha}-1)$, es mayor o igual al máximo de la parábola, $\frac{n-k}{2}$, esto es si $\alpha \leq \frac{2k\pi}{n+k}$, entonces podemos tomar $t = \frac{n-k}{2}$ alcanzando el número máximo de (α, k)-sets $\Omega((\frac{n-k}{2})^2)$.

Si $k(\frac{\pi}{\alpha} - 1) < \frac{n-k}{2}$, esto es si $\alpha > \frac{2k\pi}{n+k}$, no podemos alcanzar el máximo de la parábola pero el máximo número de (α, k)-sets lo obtendremos tomando la mayor t posible en este caso, es decir $t = k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)$, por lo que el número de (α, k)-sets es $\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$. ■

Algoritmo de construcción

Dada una nube S de n puntos, la obtención de todos los (α, k)-sets, con α y k fijos puede realizarse según el siguiente algoritmo, cuyo coste es: $O(n^3 \log k)$.

ALGORITMO–αFkF

1. Se obtienen las $O(n^2)$ rectas orientadas r_{ij}, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, pasando por los pares de puntos de S.

2. Para cada r_{ij} se identifican qué puntos de S quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto S_{ij}^+.

   Se seleccionan k puntos arbitrarios de S_{ij}^+ y se ordenan según a un barrido con una de las dos rectas que forma ángulo α con r_{ij} (análogamente con la otra recta). Sean $p_1, \cdots, p_k$ el conjunto de los k puntos ordenados según el criterio anterior.

   Para cada punto p de S_{ij}^+ se analiza su posición relativa con el conjunto de k puntos ordenados que se tiene y que inicialmente es $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$, siendo $\leq$ el orden de barrido anterior. Los pasos a seguir son:

   2.1. Si $p \leq p_k$, se elimina p_k y se realiza una búsqueda binaria para la inserción de p en el conjunto. El nuevo conjunto tiene k puntos ordenados a los que volvemos a notar por $p_1, \cdots, p_k$.

   2.2. Si $p \geq p_k$, se procede al análisis de otro punto de S_{ij}^+. Si no quedan más puntos, el conjunto resultante de puntos ordenados son los k primeros puntos de S_{ij}^+, según a un barrido con una recta que forma ángulo α con r_{ij}.

   De este modo se obtienen los (α, k)-sets asociados a r_{ij}.

3. Se eliminan los (α, k)-sets repetidos.

3 (α, k)-sets con α fija y k variable

En esta sección estudiamos los (α, k)-sets en el caso en que el parámetro α es fijo y el k variable. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de (α, k)-sets y mostramos un algoritmo que genera todos los (α, k)-sets de una nube de puntos.

Teorema 6 (Cota superior) *El número de (α, k)-sets, con α fija y k variable, es a lo sumo $O(n^3)$.*

Demostración: Por el lema 3 sabemos que todo (α, k)-set puede obtenerse de un k'-set con $k' \geq k$. El número de k'-sets con k' variable es a lo más $O(n^2)$, ya que cada k'-set viene definido por una recta que pasa por dos puntos de la nube. Basta ahora observar que para cada k'-set a lo sumo pueden obtenerse $O(n)$ (α, k)-sets con α fijo y k variable. Por tanto, la cota superior obtenida es $O(n^3)$. ■

Teorema 7 (Cota inferior) *El número de (α, k)-sets, con α fija y k variable, es al menos $\Omega(n^3)$.*

Demostración: A continuación se construye un ejemplo en el que se alcanza la cota. Se consideran dos rectas paralelas horizontales cortadas por una tercera recta formando un ángulo igual al mínimo entre α y $\pi - \alpha$ (Figura 5). Se situan $\frac{n}{2}$ puntos en la recta superior a la derecha de la recta secante (conjunto A), y otros tantos en la recta inferior a la izquierda de la recta secante (conjunto B) (Figura 5). Para cada intervalo A' de t puntos de A, $0 \leq t \leq k$, sea p_i el punto anterior al primero de A' y p_j el posterior al último. Considérese el arco capaz de ángulo α y extremos p_i y p_j.

El ángulo tomado para la recta secante nos asegura que con vértice próximo a p_i se tiene una cuña conteniendo todos los puntos de A' y ninguno de B y, con vértice en p_j se tiene otra cuña con todos los de A' y todos los de B. De este modo, por continuidad, se asegura la existencia de una cuña de ángulo α, con vértice en el arco capaz, tal que contiene t puntos de A, los de A', y $k - t$ de B. El número de (α, k)-sets obtenidos es:

$$\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{n}{2} - (t-1)\right) = k\frac{n+1}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{n+2}{2}$$

Dado que k no era fija, la suma para todos sus posibles valores es:

$$\sum_{k=0}^{n/2} k\frac{n+1}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+3)^2}{24}$$

Es decir, el número de (α, k)-sets es $\Omega(n^3)$. ■

Corolario 8 *El número máximo de (α, k)-sets con α fija y k variable es $\Theta(n^3)$.*

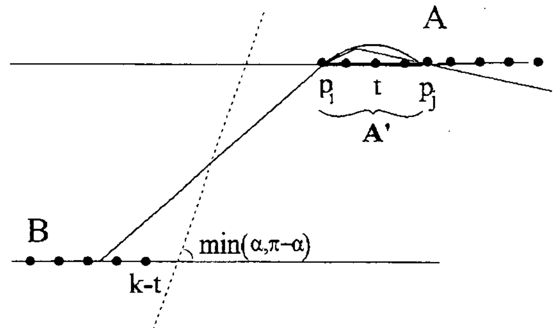

Figura 5: La α-cuña con vértice en el arco capaz de ángulo α y extremos p_i, p_j, contiene t puntos de A y $k - t$ de B.

Algoritmo de construcción

Dada una nube S de n puntos, la obtención de todos los (α, k)-sets, con α fija y k variable puede realizarse según el siguiente algoritmo cuyo coste es: $O(n^4 \log n)$.

ALGORITMO–αFkV

1. Se obtienen las $O(n^2)$ rectas orientadas r_{ij}, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, pasando por los pares de puntos de S.

2. Para cada r_{ij}, se identifican qué puntos de S quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto S_{ij}^{+}.

   Se consideran las dos rectas que forman ángulo α con r_{ij}, l'_{ij}, l''_{ij}. Los puntos de S_{ij}^{+} se ordenan mediante un barrido de la recta l'_{ij} (análogamente con l''_{ij}). Se obtienen los (α, k)-sets asociados a r_{ij}, donde k irá variando desde uno hasta el cardinal del conjunto S_{ij}^{+}.

3. Se eliminan los (α, k)-sets repetidos.

4 (α, k)-sets con α variable y k fija

En esta sección estudiamos los (α, k)-sets en el caso en que el parámetro α es variable y el k fijo. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de (α, k)-sets y mostramos un algoritmo que genera todos los (α, k)-sets de una nube de puntos.

Teorema 9 (Cota superior) *El número de (α, k)-sets, para α variable y k fijo es como mucho $O(n^3k^{1/3})$.*

Demostración: Cualquier (α, k)-set puede obtenerse de un k'-set de S con $k' \geq k$. El orden de éstos es $O(n^2)$ y, cada uno de ellos tiene, a lo sumo, n elementos. Luego $O(n^2nk^{1/3}) = O(n^3k^{1/3})$ es la cota superior de (α, k)-sets obtenida. ■

Teorema 10 (Cota inferior) *El número de (α, k)-sets, para α variable y k fijo es al menos de $\Omega(n^2k)$.*

Demostración: Construimos un conjunto de n puntos alcanzando dicha cota. Se consideran dos rectas paralelas situando $\frac{n}{2}$ puntos sobre cada una de ellas (Figura 6). Los (α, k)-sets se obtienen separando i puntos consecutivos de la primera recta y $(k - i)$ de la segunda con una α-cuña, α variable.

De este modo resultan $O(n^2k)$ (α, k)-sets diferentes. ■

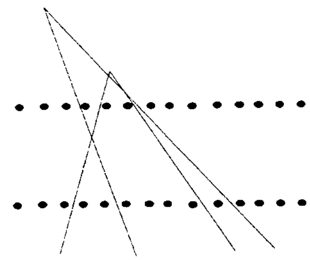

Figura 6: En la figura, para $k = 8$ se muestran dos $(\alpha, 8)$-sets con ángulos distintos.

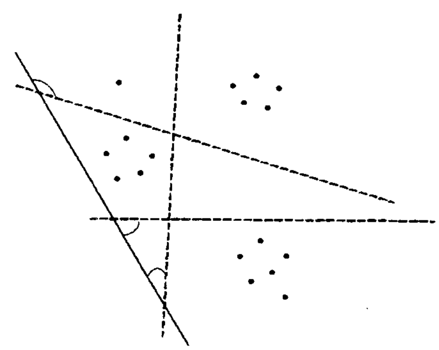

Figura 7: Considerando la nube de puntos situados a un lado de una recta, cualquier k-set es un (α, k)-set (α variable) contenido en una cuña con un lado sobre dicha recta, y viceversa.

Algoritmo de construcción

En primer lugar se describe un algoritmo general para la obtención de los k-sets de una nube de puntos M, que se utilizará posteriormente en el de construcción de los (α, k)-sets. La idea del mismo se basa en un algoritmo óptimo para la obtención de los niveles $1, \cdots, k$ en un arreglo de rectas, descrito por Everet et al. en [4]. El coste es $O(m \log m + mk)$.

Obtención de los k-sets. Dada una nube M de m puntos:

ALGORITMO–k-SETS [4]

1. Se construyen las capas convexas de M. Se suprimen las de profundidad mayor que $k + 1$.
2. Partiendo de una k-recta vertical, se hace un barrido rotacional, almacenando k-sets.

Obtención de los (α, k)-sets. El siguiente algoritmo construye los (α, k)-sets, con k fija y α variable de una nube de puntos, con coste: $O\left(n^3 k^{4/3} \log n\right)$. Sea S nube de n puntos:

ALGORITMO–αVkF

1. Se obtienen las $O(n^2)$ rectas orientadas r_{ij}, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, pasando por los pares de puntos de S.
2. Para cada r_{ij} se identifican qué puntos de S quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto S_{ij}^+.

   Para cada uno de los conjuntos S_{ij}^+, se aplica el anterior algoritmo de obtención de k-sets. Éstos son todos los posibles (α, k)-sets con α variable y k fija.
3. Se eliminan los (α, k)-sets repetidos.

5 (α, k)-sets con α variable y k variable

En esta sección estudiamos los (α, k)-sets en el caso en que los parámetros α y k son variables. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de (α, k)-sets y mostramos un algoritmo que genera todos los (α, k)-sets de una nube de puntos.

Teorema 11 (Cota superior) *El número de (α, k)-sets es a lo sumo $O(n^4)$.*

Demostración: En el lema 3 vimos que todo (α, k)-set puede obtenerse de un k'-set, $k' \geq k$. Sin fijar k se tienen $O(n^2)$ k-sets. Los conjuntos que estamos calculando son (α, k)-sets con α y k variables. Toda recta pasando por dos puntos determina un k-set del cual, como mucho, se pueden obtener $O(n^2)$ (α, k)-sets diferentes. Luego la cota superior obtenida es $O(n^4)$. ∎

Teorema 12 (Cota inferior) *El número de (α, k)-sets es al menos $\Omega(n^4)$.*

Demostración: A continuación construimos un ejemplo en el que se alcanza la cota. Se consideran dos rectas paralelas sobre cada una de las cuales se sitúan $\frac{n}{2}$ puntos (Figura 8). Para cada pareja de puntos sobre una misma recta, además de ellos se toma el conjunto de puntos comprendidos entre ambos. Juntando las parejas de conjuntos así formados, uno sobre cada recta, obtenemos un (α, k)-set diferente (α y k variables). En cada recta hay tantos subconjuntos posibles como parejas de puntos, $O((n/2)^2)$. Luego considerando ambas rectas, $O(n^4)$. ∎

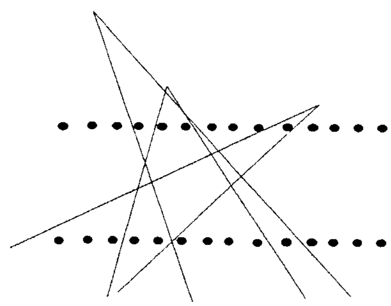

Figura 8: Los (α, k)-sets se construyen tomando puntos consecutivos sobre ambas rectas, siendo α y k variables.

Corolario 13 *El número de (α, k)-sets es $\Theta(n^4)$.*

Algoritmo de construcción

Dada una nube S de n puntos, la obtención de todos los (α, k)-sets, con α y k variables puede realizarse según se muestra en el siguiente algoritmo, con coste: $O(n^5 \log n)$.

ALGORITMO–αVkV

1. Se obtienen las $O(n^2)$ rectas orientadas r_{ij}, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ $i \neq j$, pasando por los pares de puntos de S.

2. Para cada par de rectas, se obtienen los cuatro (α, k)-sets que determinan (véase Figura 9).

3. Se eliminan los (α, k)-sets repetidos.

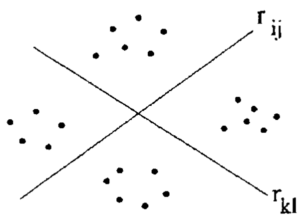

Figura 9: Cada par de rectas determina 4 (α, k)-sets con α y k variables.

Conclusiones

En la siguiente tabla se resumen las cotas presentadas en cada uno de los casos, según los valores de α y k. En nuestra opinión cabe esperar mejoras tanto en algunos valores combinatorios como en algunos costes computacionales, por lo que seguimos trabajando en este tema.

	Cota sup.	Cota inf.
αFkF*	$O(n^2)$	$\Omega((\frac{n-k}{2})^2)$
αFkF**	$O(n^2)$	$\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$
αFkV	$O(n^3)$	$\Omega(n^3)$
αVkF	$O(n^3 k^{1/3})$	$\Omega(n^2 k)$
αVkV	$O(n^4)$	$\Omega(n^4)$

Notación: F indica fijo y V variable.

* indica la restricción: $\alpha \leq \frac{2k\pi}{n+k}$.

** indica la restricción: $\frac{2k\pi}{n+k} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Referencias

[1] T. K. Dey, *Improved Bounds for k-sets and k-th Levels*, Manuscript, 1997.

[2] T. K. Dey, *Improved Bounds for k-sets and Related Problems*, Discrete and Computational Geometry, 19, 1998, pp. 373–382.

[3] H. Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Ed. Springer-Verlag, 1987.

[4] H. Everet, M. van Krevel, J. M. Robert, *An Optimal Algorithm for Computing (≤ k)-Levels with Applications to Separation and Transversal Problems*, Proceedings of the ninth Annual Symposium on Computational Geometry, 1993, pp. 38–46.

[5] P. Erdös, L. Lovász, A. Simmons, E. G. Straus, *Dissection Graphs of Planar Point Sets*, in A Survey of Combinatorial Theory, North Holland, 1973, pp. 139–149.

[6] L. Lovász, *On the Number of Halving Lines*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math., 14, 1971, pp. 107–108.

[7] M. H. Overmars, J. van Leeuwen, *Maintenance of Configurations in the Plane*, J. of Computers and System Sciences, 23, 1981, pp. 166–204.

[8] J. Pach, W. Steiger, E. Szemerédi, *An Upper Bound on the Number of Planar k-sets*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 7, 1992, pp. 109–123.

[9] G. Tóth, *Points Sets with many k-Sets*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 26, 2001, pp. 187–194.