# Delta-matroides rueda ternarios y otras obstrucciones para ternaridad de delta-matroides.

Guadalupe Rodríguez
Universitat Politècnica de Catalunya, UPC
Universidad Autónoma Metropolitana, UAM-A

**Resumen**

Un problema abierto en la teoría de representación de delta-matroides es el de hallar una lista de obstrucciones para $GF(3)$-representabilidad por medio de matrices antisimétricas. Se dá un primer paso en la resolución de este problema para una clase particular de delta-matroides llamados *delta − matrides rueda*. Estos delta-matroides son binarios y tienen asociadas ruedas como sus gráficas fundamentales. Se exhibe la lista de obstrucciones que caracteriza a esta clase con respecto a su representabilidad sobre el campo $GF(3)$. También se exhiben $D_{W_{3,6}}$, que es obstrucción para la ternaridad de los delta-matroides inducidos por ruedas parciales alternadas del tipo $W_{k,2k}$, con $k$ impar, y $D_{W_{4R}}$ que es obstrucción para ternaridad de otra familia de delya-matroides conocida como $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$.

## 1 Conceptos Fundamentales de Delta-matroides.

Un *delta − matroide* es una pareja $D = (V, \mathcal{F})$, con $V$ un conjunto finito y $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de $V$, que cumple un axioma de cambio de base:

($\mathbf{A\Delta}$) Para $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $x \in F_1 \Delta F_2$, existe $y \in F_1 \Delta F_2$, tal que $F_1 \Delta \{x, y\} \in \mathcal{F}$.

A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama *bases* de $D$. $\Delta$ es el operador diferencia simétrica entre conjuntos.

Una *aplicación* $\Delta$ es una operación que convierte a $D$ en $D'{=}D\Delta X{=}(V, \mathcal{F}\Delta X)$ donde $\mathcal{F}\Delta X = \{F\Delta X : F \in \mathcal{F}\}$ y $X \subseteq V$. Se dice que $D'$ es un delta-matroide $\Delta$-*equivalente* a $D$.

$(V, \mathcal{F})$ es un matroide si y sólo si $(V, \mathcal{F})$ es un delta-matroide tal que sus bases son equicardinales. Si $M$ es un matroide entonces $M\Delta V$ es el matroide dual de $M$.

Se dice que un delta-matroide $D$ es *representable* o tiene una representación lineal sobre un campo $\mathbf{F}$ si existe una $(V \times V)$-matriz $A$ simétrica o antisimétrica, con entradas en $\mathbf{F}$, que cumple que: $A[F]$ es no singular $\Longleftrightarrow F \in \mathcal{F}$, donde $A[F]{=}\{A_{i,j} : i, j \in F, F \subseteq V\}$. A las matrices $A[F]$ se les llama *submatrices principales*. Por convención se considera $A[F]$ no singular, si $F = \emptyset$.

Si $A$ es una $(V \times V)$-matriz simétrica o antisimétrica, se denota por $D(A)$ al delta-matroide que se obtiene tomando como sus bases a los $F \subseteq V$ tales que $A[F]$ son las submatrices principales no singulares de $A$.

Considérense $x \in V$ y los conjuntos dados a continuación:

$$\mathcal{F} \setminus x = \{F : F \subseteq V \setminus x, F \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{F} \circ x = \{F : F \subseteq V \setminus x, F \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}.$$

Se definen dos *menores elementales* de un delta-matroide, el primero como $D \setminus x = (V \setminus x, \mathcal{F} \setminus x)$, $D \setminus x$ es un menor elemental de $D$ obtenido por *borrado* del elemento $x$; el segundo se define como $D \circ x = (V \setminus x, \mathcal{F} \circ x)$, $D \circ x$ es un menor elemental de $D$ obtenido por *contracción* del elemento $x$. En general, un *menor* se obtiene tomando varios menores elementales sucesivamente, sin importar el orden en que esto se realice. A. Bouchet [4] probó que todo menor normal de un delta-matroide representable sobre $\mathbf{F}$ con una matriz antisimétrica es también $\mathbf{F}$-representable por medio de una matriz antisimétrica.

## 2 Signados y Orientaciones.

Dada una $(V \times V)$-matriz antisimétrica $A$, con entradas $\{0,1\}$, cabe aclarar que en el caso binario, una matriz antisimétrica es una matriz simétrica con su diagonal principal nula. Se define $A'$ como una matriz *signada* que proviene de $A$, si a cada entrada 1 de $A$ le corresponde en $A'$, $+1$ o $-1$. Se dice que $A$ tiene un *signado compatible* si para toda submatriz principal de $A$, sea esta $A[X]$ con $X \subseteq V$, se cumple que $det_2 A[X] \neq 0 \Rightarrow det_3 A'[X] \neq 0$ para toda $X \subseteq V$, donde $det_r$ denota al determinante de $A[X]$ calculado sobre el campo $GF(r)$, $r = 2, 3$.

Sea $D = (V, \mathcal{F})$ un delta-matroide binario normal que puede ser representado mediante una matriz antisimétrica $A_D$=$[a_{ij}]$ con $i, j \in V$. Se considera el grafo simple $G_{A_D}$, tal que $A_D$ es su matriz de adyacencia. $G_{A_D}$ es el *grafofundamental* de $D$, relativo a $A_D$. Así $G_{A_D}$ es un grafo cuyos vértices son los elementos de $V$ y hay una arista de $i$ a $j$, si $a_{i,j} \neq 0$; $i, j \in V$.

Dado que existe una correspondencia biyectiva entre los grafos simples y sus matrices de adyacencia, se puede ver el signado de $A$ como una orientación de $G_A$. Sea $A$=$[a_{ij}]$ con $i, j \in V$, si $a_{ij} = +1$, se pone una flecha del vértice $i$ al vértice $j$, si $a_{ij} = -1$, se pone una flecha del vértice $j$ al vértice $i$.

En las matrices de representación se consideran los renglones y columnas etiquetados por los elementos de $V$. Considérese $x \in V$, se dice que se realiza una *operación conmutador* sobre $x$ en $A'$ si se cambian los signos en el renglón y la columna de $A'$ que tienen como etiqueta a $x$. El efecto de esta operación sobre $G_A$ es invertir las orientaciones de las aristas incidentes a $x$. En $G_A$, a la operación descrita se la llama una *operación válida* sobre $x$.

**Lema 1** *La operación conmutador sobre $x \in V$ no altera los determinantes de las submatrices $A'[X]$, $X \subseteq V$.* □

Para el estudio de representabilidad de delta-matroides son importantes dos hechos: la obtención y análisis de los delta-matroides $\Delta$- equivalentes y la obtención de sus menores. Para un delta-matroide binario $D$, con una matriz de representación antisimétrica $A$, se pueden estudiar directamente sobre el grafo $G_A$ las operaciones mencionadas. Considérese $G_A$=$(V_G, E_G)$ un grafo simple. Para $U_1, U_2 \subseteq V_G$ se define $[U_1, U_2]$=$\{u_1 u_2 \in E_G : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, *complementar* $[U_1, U_2]$ consiste en borrar todas las aristas de $[U_1, U_2]$ y poner una arista, para todo par no ordenado $u_1 u_2$, $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ la cual no era una arista en $G_A$. Sean $uw \in E_G$, $B$=$N(u) \setminus N(w)$, $C$=$N(u) \cap N(w)$ y $D$=$N(w) \setminus N(u)$, donde $N(v)$ denota el conjunto de los vértices adyacentes a $v$ en un grafo, $v \in \{u, w\}$. Una *complementación local* a lo largo de $uw$ es la operación que consiste en complementar los conjuntos de aristas $[B, C]$, $[C, D]$ y $[D, B]$. Un *pivoteo* de $G_A$ en $uw$ es la operación que consiste en efectuar una complementación local de $G_A$ a lo largo de $uw$ y después intercambiar las etiquetas $u$ y $w$.

Sean $D_1$ y $D_2$ dos delta-matroides, $G_{A_1}$ y $G_{A_2}$ los grafos fundamentales correspondientes a $D_1$ y $D_2$. Si haciendo un pivoteo sobre una arista de $G_{A_1}$, se obtiene $G_{A_2}$ entonces $D_1$ y $D_2$ son $\Delta$-equivalentes. Para $D$ un delta-matroide, con $G_A$ como su grafo fundamental y $x \in V$, el grafo fundamental de $D \setminus x$ es $G_A \setminus x$. El grafo fundamental de $D \circ x$ se obtiene, considerando una arista $xy$ de $G_A$, entonces se tiene que: $(D \Delta \{x, y\}) \setminus x = (D \circ x) \Delta \{y\}$ , luego basta con realizar un pivoteo sobre la arista $xy$ y borrar, después, el vértice $x$. Ver la demostración del último hecho en [1].

**Lema 2** *Sean $A$ una matriz antisimétrica con entradas en $GF(2)$ y $G_A$ su grafo de adyacencia. Para todo circuito inducido $C$ de $G_A$ se cumple que $det_2(C)$=0.* □

**Lema 3** *Si $A$ es una $(V \times V)$-matriz antisimétrica, entonces $D(A)$ es un delta-matroide con todas sus bases de cardinalidad par.* □

## 3 Delta-matroides rueda.

Un $k-$ *ciclo*, denotado por $C_k$, es un grafo simple, conexa, regular de grado 2, con $k$ vértices. La *rueda* $W_k$ se construye agregando un vértice central 0, adyacente a cada uno de los vértices de $C_k$. A $C_k$ se le llama el *aro* de la rueda y a las aristas que unen el vértice 0 con cada vértice del aro se les llama *rayos*. Una *rueda parcial* $W_{h,k}$, $2 \leq h \leq k$, es una rueda $W_k$, con $k - h$ rayos borrados. Los vértices de $C_k$, se numeran consecutivamente de 1 a $k$, de tal manera que a todo vértice $i$, recorriendo el aro hacia la derecha, le sigue $i + 1$, para

$i = 1, ...k-1$. Una rueda parcial *alternante* es una rueda de la forma $W_{k,2k}$ tal que hay un rayo del vértice central a cada uno de los vértices impares (o pares) del aro.

Un delta-matroide *rueda* $D_{W_k}$ es un delta-matroide binario, tal que su grafo fundamental es $W_k$, $k \in Z^+, k \geq 3$ . Si $A_{W_k}$ es la matriz de adyacencia de $W_k$, entonces $D_{W_k}{=}D(A_{W_k})$. Es decir, $D_{W_k}{=}(V, \mathcal{F}_{W_k})$, donde $V = \{0, 1, 2, ..., k\}$ y $\mathcal{F}_{W_k}{=} \{X \subseteq V; A_{W_k}[X]$ es no-singular$\}$. De esta forma $A_{W_k}$ es una representación lineal de $D_{W_k}$ sobre $GF(2)$. De la misma manera toda rueda parcial $W_{h,k}$ origina un delta-matroide $D_{W_{h,k}}$.

$D_{W_k}$ es $GF(3)$-representable si existe un signado de $A_{W_k}$ tal que la matriz signada $A^s_{W_k}$ es antisimétrica y para todo $F$, base de $D_{W_k}$ sobre $GF(2)$, $F$ es también una base sobre $GF(3)$. O equivalentemente en términos de la gráfica fundamental $W_k$, correspondiente al delta-matroide $D_{W_k}$, $D_{W_k}$ es $GF(3)$-representable, si existe una orientación compatible de $W_k$, a partir de la matriz $A_{W_k}$.

**Lema 4** *Sea un grafo que consiste sólo de un camino cerrado $p$ con un número impar de aristas. Dada una orientación arbitraria de sus aristas, $p$ puede transformarse en un camino cerrado con todas sus aristas orientadas en un sólo sentido, mediante un número finito de operaciones válidas sobre los vértices de $p$.* $\square$

**Teorema 1** *$D_{W_5}, D_{W_6}$ y $D_{W_7}$ son delta-matroides rueda minimales no representables sobre $GF(3)$, mediante matrices antisimétricas.*

*Demostración.* Supóngase que $D_{W_5}, D_{W_6}$ y $D_{W_7}$ son delta-matroides que son $GF(3)$-representables con matrices antisimétricas, entonces existen sus correspondientes matrices de representación, sean estas $A_5, A_6$ y $A_7$. De manera natural, cada una de ellas induce una orientación de los grafos $W_5$, $W_6$ y $W_7$. Sea $A^b_k$ la matriz de representación de $D_{W_k}$ sobre $GF(2)$, esta se obtiene de $A_k$ sustituyendo las entradas -1 por 1, $k = 5, 6, 7$. Luego, debe cumplirse que: $det_2 A^b_k[X] \neq 0 \Leftrightarrow det_3 A_k[X] \neq 0$, para todo $X \subseteq V$.

Considérese $W_k$ y sean $c_i$ los cuadrados, tales que sus vértices son 0, $i$ y los dos vértices consecutivos en el aro, tomados a la derecha de $i$. Todo cuadrado $c_i$ tiene cuatro orientaciones posibles, llamense las tres primeras $Or_1$ $Or_2$ y $Or_3$, en el orden que se presentan a continuación: $[\uparrow \rightleftarrows \downarrow]$, $[\uparrow \rightrightarrows \uparrow]$ , $[\uparrow \leftrightarrows \downarrow]$ .

Para dichas orientaciones se cumple que: $det_2 A^b_k[c_i] = det_3 A_k[c_i] = 0$.

Para la cuarta se tiene que: $det_3 A_k[\uparrow \rightrightarrows \downarrow] \neq 0$,

La última orientación será llamada orientación $\mu$. Es importante hacer dos observaciones: la primera es que la diagonal que aparece en los $c_i$ no contribuye al valor del determinante, la segunda es que toda orientación de $W_k$ induce una orientación de cada uno de los cuadrados $c_1, ..., c_k$, y recíprocamente, al orientar los cuadrados $c_1, ..., c_{k-1}$ se construye una orientación de $W_k$, para $k = 5, 6, 7$.

En [1] se demuestra que no existe una orientación compatible para $W_5$, luego $D_{W_5}$ no es $GF(3)$-representable con matrices antisimétricas. $A_7$ debe tener un signado compatible, ya que por hipótesis, $D_{W_7}$ es ternario. Considérese la orientación correspondiente para $W_7$. Por el lema 4, se puede efectuar un número finito de operaciones conmutador sobre las aristas del aro, de manera que el aro de $W_7$ quede orientado en un sólo sentido. Si se hace lo anterior, para $W_7$ existen dos orientaciones posibles, estas son: $Or_1$ $Or_1$ $Or_2$ $Or_2$ $Or_1$ $Or_1$ o $Or_2$ $Or_2$ $Or_1$ $Or_1$ $Or_2$ $Or_2$. En los dos casos mencionados, los cuadrados $c_1, c_2, ..., c_{k-1}$ presentan una orientación compatible, pero el cuadrado $c_k$ queda con la orientación $\mu$. Esto contradice la representabilidad de $W_7$.

Para el análisis de $W_6$, se pueden orientar compatiblemente todos los cuadrados $c_1, c_2, ..., c_k$, sin que ocurra la orientación $\mu$, con una orientación de este tipo, el aro nunca queda orientado en una sola dirección. Considérese cualquier orientación de $W_6$ que evite la orientación $\mu$ de sus cuadrados, esta orientación nos induce un signado antisimétrico de la matriz $A_6$. Esta matriz cumple la condición de los determinantes para los $X \subseteq V$ tales que $\mid X \mid= 2$ y $\mid X \mid= 4$. Sólo resta considerar $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que corresponde al aro de $W_6$. Considérense las orientaciones de $C_6$, el circuito con seis aristas, hay dos clases disjuntas de orientaciones, llámense estas $Or_A$ y $Or_B$. Se dirá que dos orientaciones pertenecen a una misma clase si se puede pasar de una a otra mediante un número finito de operaciones conmutador, aplicadas a los vértices de $C_6$. Sea $Or_A$ la orientación que tiene un número par de aristas orientadas en cada dirección y $Or_B$ la orientación que tiene un número impar de aristas en cada dirección. Se tiene que $det_3F = 0$ con $Or_A$ y $det_3F \neq 0$ con $Or_B$, pero $det_2F = 0$. Luego si $D_{W_6}$ es $GF(3)$-representable, el aro debe tener la orientación $Or_A$.

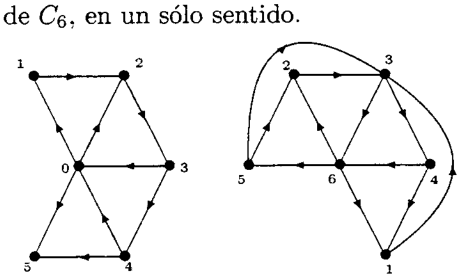
Esto no es posible si todos los cuadrados tienen una orientación distinta de la orientación $\mu$. Por lo tanto, no existe una orientación para $W_6$ que se traduzca en una representación de $D_{W_6}$ sobre $GF(3)$. Esto contradice la suposición inicial.

Falta mostrar que $D_{W_5}$, $D_{W_6}$ y $D_{W_7}$ son minimales, no representables sobre $GF(3)$, con matrices antisimétricas. Debido a la simetría de $D_{W_k}$, sólo se deben analizar cuatro menores elementales distintos, para cada $D_{W_k}$:

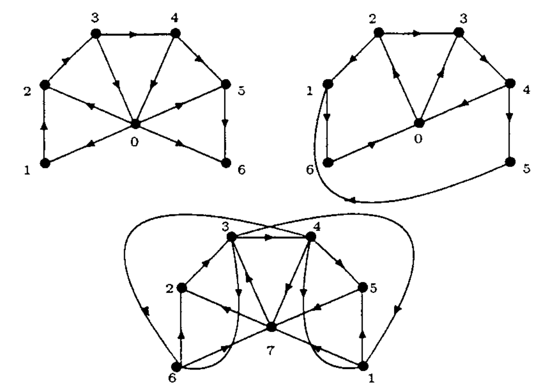
$D_{W_k} \setminus \{0\}, D_{W_k} \circ \{0\}, DW_k \setminus \{x\}$ y $D_{W_k} \circ \{x\}$ con $x \in \{1, ..., k\}$.

Para $D_{W_5}$ se tiene que sus cuatro menores elementales son $\Delta$-equivalentes, es decir, partiendo de uno de sus menores elementales se pueden obtener los restantes realizando complementaciones locales sobre las aristas de su grafo fundamental. El grafo funfamental de $D_{W_5} \setminus \{5\}$ es un ciclo $C_5$, una orientación de $C_5$ que corresponde a una representación ternaria del delta-matroide, se obtiene orientando todas las aristas para formar un ciclo dirigido en un sólo sentido.

Para $D_{W_6}$, $D_{W_6} \setminus \{6\}$ es isomorfo a $D_{W_6} \circ \{6\}$, luego basta exhibir las orientaciones de los grafos fundamentales correspondientes a $D_{W_6} \setminus \{6\}$ y $(D_{W_6} \circ \{0\})\Delta\{6\}$. Estas aparecen en la siguiente figura , en el orden mencionado. $D_{W_6} \setminus \{0\}$ es isomorfo a $C_6$, la orientación se obtiene orientando las aristas de $C_6$, en un sólo sentido.




Para $D_{W_7}$, se exhiben los grafos fundamentale corresponden a una $GF(3)$-representación para cada uno de sus menores elementales. En la figura que aparece a continuación, aparecen en el siguiente orden: $D_{W_7} \setminus \{7\}$, $(D_{W_7} \circ \{7\})\Delta\{6\}$ y $(D_{W_7} \circ \{0\})\Delta\{7\}$.




El grafo fundamental correspondiente al menor $D_{W_7} \setminus \{0\}$ es un circuito con 7 aristas orientadas en un sólo sentido. □

**Proposición 1** *$D_{W_3}$ y $D_{W_4}$ son $GF(3)$-representables, mediante matrices antisimétricas.*

*Demostración.* Para demostrar esta proposición, basta exhibir las matrices de representación de $D_{W_3}$ y $D_{W_4}$. Ver [14]. □

Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Para $n \geq 8$, se dan algunas reducciones sobre $W_n$ que corresponden a una simplificación de los delta-matroides $D_{W_n}$, por medio de toma de menores.

Las fórmulas de reducción están referidas a la etiquetas originales de $W_n$. Las reducciones que se proponen involucran complementaciones locales sobre algunas aristas del grafo $W_n$. Este proceso preserva la estructura de los delta-matroides involucrados. También, con el objeto de tener claridad al describir las reducciones sobre la rueda $W_n$ , se denotará una arista $uv$ como el conjunto formado por sus vértices, es decir $\{u, v\}$.

*REDUCCION* 1.

Sea $n = 3k$. La reducción consiste en realizar una complementación local sobre cada arista de $W_n$, de la forma $(2 + 3i, 3 + 3i)$ con $i = 0, ..., k - 1$; seguida del borrado de los vértices que forman las aristas anteriores, es decir:

$$(D_{W_n}\Delta\{2,3\}\Delta...\Delta\{2+3(k-1), 3+3(k-1)\})\setminus\{2\}\setminus\{3\} \setminus ... \setminus \{2 + 3(k - 1)\} \setminus \{3 + 3(k - 1)\}.$$

*REDUCCION R.*

Se define un $6-$ *segmento* sobre una rueda $W_n$ como una sucesión de seis aristas consecutivas sobre el aro de $W_n$. Así mismo se define un *cuasi* $6-$ *segmento*, como cualquier sucesión de menos de seis aristas consecutivas sobre el aro de $W_n$.

PROCESO DE LA REDUCCION R:

Sea $W_n$ una rueda con sus vértices etiquetados como de costumbre. Para $n \geq 9$.

1. Considérese la siguiente descomposición de $n$: $n = 6s + r$, $s$ es el número de 6-segmentos en $W_n$ y $r$ es el número de aristas del cuasi 6-segmento restante, se toman consecutivamente los $s$ 6-segmentos iniciando con el 6-segmento con vértices etiquetados del 1 al 7.

2. Paso general de la reducción:

Este paso se efectúa sobre cada 6-segmento. Considérese el $k$-ésimo 6-segmento, $k \in \{0, ..., s-1\}$. La numeración en los 6-segmentos es la inicial.

La reducción sobre el 6-segmento $k$, se hace como sigue:

**i.** $\Delta\{2+6k, 3+6k\}$ $\Delta\{3+6k, 4+6k\}$ $\Delta\{5+6k, 6+6k\}$,

**ii.** $\setminus\{2+6k\} \setminus \{3+6k\} \setminus \{5+6k\} \setminus \{6+6k\}$.

Cada vez que se efectúa este paso, se eliminan cuatro vértices del $k$-ésimo 6-segmento de $W_n$. El paso 2 se realiza para cada $k$, con $k \in \{0, ..., s-1\}$.

3. No se hace ninguna operación sobre el cuasi 6-segmento. Este forma parte de la rueda reducida.

**Proposición 2** *Sea $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 8$. Todo delta-matroide rueda $D_{W_n}$ se puede reducir a $D_{W_4}$, $D_{W_5}$, $D_{W_6}$ o $D_{W_7}$, dependiendo de la clase de n, módulo 4. Sean $n = 4k + j$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Para $k \geq 2$, $D_{W_n}$ se reduce a:*

*$W_4$ si $n \equiv 0$ mod 4, $W_5$ si $n \equiv 1$ mod 4,*
*$W_6$ si $n \equiv 2$ mod 4, y $W_7$ si $n \equiv 3$ mod 4.*

*Demostración.* Para $n \geq 8$, efectuando una o más veces la reducción $R$, se obtiene la proposición. □

**Proposición 3** *Los delta-matroides rueda $D_{W_{4k}}$, para $k \in \mathbf{Z}^+$ son $GF(3)$-representables mediante matrices antisimétricas.*

*Demostración.* Se cumple la proposición, pues toda rueda $W_{4k}$ con $k \in Z^+$ tiene una orientación compatible. Partiendo de la orientación $Or_1$ $Or_1$ $Or_2$ $Or_2$, esta se repite $k$ veces para $W_{4k}$:

$Or_1$ $Or_1$ $Or_2$ $Or_2$ . . . $Or_1$ $Or_1$ $Or_2$ $Or_2$ ($k$ veces). □

Como corolario de la proposición anterior, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 2** *$D_{W_5}$, $D_{W_6}$ y $D_{W_7}$ son los únicos delta-matroides rueda minimales no representables sobre $GF(3)$ con matrices antisimétricas.* □

# 4 Dos familias de delta-matroides no ternarios cuyos grafos fundamentales son ruedas parciales.

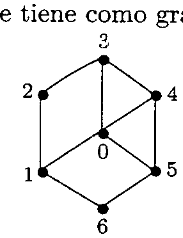
**I.** Sea $W_{3,6}$, el delta-matroide que tiene como grafo fundamental a la rueda parcial alternante con $C_6$ como aro y el vértice central unido con cada uno de los vértices del aro que tienen una etiqueta impar.

**Proposición 4** *Sea $k \geq 5$. Todo delta-matroide $D_{W_{k,2k}}$ cuyo grafo fundamental es una rueda parcial alternada, no es ternario, si k es impar.*

*Demostración.* $D_{W_{k,2k}}$ no es ternario, pues contiene como menor a $D_{W_{3,6}}$. La afirmación anterior se cumple, pues toda rueda parcial alternada $W_{k,2k}$, numerando sus rayos consecutivamente con las etiquetas impares de 1 a $k$ , sobre el aro y con 0 como etiqueta del centro, se reduce a $W_{(k-2),2(k-2)}$ efectuando las siguientes operaciones:

$(\Delta\{2k, 2k-1\}\Delta\{2k-2, 1\} \setminus \{2k\} \setminus \{2k-1\}) \setminus \{2k-2\} \setminus \{1\}$, sobre $W_{k,2k}$. □

**II.** Sea $D_{W_{4R}} = (V_{W_{4R}}, \mathcal{F}_{W_{4R}})$ con $V_{W_{4R}} = \{0, 1, ..., 6\}$ y que tiene como grafo fundamental a:




,

Se puede ver que $D_{W_{4R}}$ es una obstrucción para ternaridad de delta-matroides, usando una matriz antisimétrica como la matriz de representación, ver [14,15].

Considérese la siguiente familia de grafos que son ruedas parciales con 4 rayos. Sean

$k_1$ y $k_2$ números enteros positivos, considérese $W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}$ con el vértice central etiquetado con 0 y los vértices del aro con el etiquetado acostumbrado. Se toman 3 rayos que tienen uno de sus extremos en los vértices del aro, que tienen etiquetas consecutivas, sin pérdida de generalidad, se pueden considerar los rayos: 01, 02 y 03. Se borran los $3^{k_1}$ rayos siguientes, se conserva el rayo $0\,3^{k_1}+4$ y se borran los siguientes $3^{k_2}$ rayos.

Si se consideran los delta-matroides $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$, inducidos por los elementos de la familia de ruedas parciales introducidos anteriormente, se tiene que todo delta-matroide que es un elemento de esta familia contiene como menor a $D_{W_{4R}}$. Para ver que es un menor de $D$, para todo $D \in D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$, se efectúan operaciones de toma de menores usando técnicas similares a la Reducción 1. Además $D_{W_{4R}}$ es un menor minimal no ternario para la familia $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$. Este último hecho se puede enunciar en la siguiente proposición.

**Proposición 5** *$D_{W_{4R}}$ es un menor de todo delta-matroide que es un elemento de la familia de delta-matroides $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$. Además $D_{W_{4R}}$ es una obstrucción para GF(3)-representabilidad de delta-matroides mediante matrices antisimétricas.* □

## Referencias


[1] R. E. Bixby. On Reid's characterization of the ternary matroids. *J. Combin. Theory Ser.B* 26, 174-204, 1979.

[2] A. Bouchet. Unimodularity and circle graphs. *Discrete Math.,* 66, 203-208, 1987.

[3] A. Bouchet. Representability of Δ-matroids. *Colloquia Societatis Janos Bolyai,* 52, 167-182, 1988.

[4] A. Bouchet and A. Duchamp. Representability of Δ-matroids over $GF(2)$. *Linear Algebra Appl.,* 146, 67-78, 1991.

[5] A. Bouchet. A characterization of unimodular orientations of simple graphs. *J.Comb. Theory Series B,* 56, 45-54, 1992.

[6] A. Bouchet. Circle graph obstructions. *J. Combin. Theory Ser. B,* 60, 107-144, 1994.

[7] A. Bouchet. Multimatroids II. Orthogonality, minors and connectivity. *Electron J. Combin. 5* 1, 8-25, 1998.

[8] A. Bouchet. Multimatroids III. Tightness and fundamental graphs. Combinatorial Geometries. *European J. Combin. 22* 5, 657-677, 2001.

[9] A. Bouchet. Multimatroids IV. Chain-group representations. *Linear Algebra Appl. 277* no. 1-3, 271-289, 1998.

[10] T. H. Brylawski and D Lucas. Uniquely representable combinatorial geometries. *Teorie Combinatorie* (Proc. 1973 Internat. Colloq.) pp. 83-104. Accademia Nazionale dei Lincei, Rome.

[11] J. F. Geelen. Matchings, Matroids and Unimodular Matrices. PhD. thesis, University of Waterloo, 1997.

[12] J. G. Oxley. *Matroid Theory.* Oxford Science Publications, 1992.

[13] G. Rodríguez. GF(3)-representabilidad de Delta-Matroides. Tesis doctoral, 1999.

[14] G. Rodríguez. Delta-matroides rueda ternarios. *Morfismos, CINVESTAV.* Artículo entregado, 2001.

[15] P. D. Seymour. Matroid representation over GF(3). *J. Combin. Theory Ser. B* 26, 159-173, 1979.

[16] W. T. Tutte. Introduction to the Theory of Matroids. *American Elsevier,* 1971.

[17] K. Truemper. Alpha-balanced graphs and matrices and $GF(3)$-representability of matroids. *J. Combin. Theory Ser. B,* 32, 112-139, 1982.

[18] K. Truemper. *Matroid Descomposition.* Academic Press, New York, 1992.

[19] D. J. A. Welsh. *Matroid Theory.* Academic Press, New York, 1976.

[20] G. Whittle. A characterisation of the matroids representable over $GF(3)$ and the rationals. *Journal of Combinatorial Theory (B).* 65 (1995) 222- 261.