Tutte unicidad: grafos localmente grid y grafos localmente C_6 [1]

D. Garijo [2], A. Márquez [2], A. de Mier [3], M. Noy [3], M.P. Revuelta [2]

Resumen

Este trabajo contiene dos resultados fundamentales, en primer lugar demostramos la Tutte unicidad de todos los grafos localmente grid y en segundo lugar clasificamos los grafos localmente C_6 y demostramos que todos ellos están unívocamente determinados por su polinomio de Tutte.

1 Introducción

El polinomio de Tutte es un polinomio en dos variables que puede ser definido para un grafo, una matriz o en general para un matroide. Decimos que un grafo G es Tutte único si $T(G;x,y) = T(H;x,y)$ implica que G es isomorfo a H para cualquier grafo H, siendo $T(G;x,y)$ el polinomio de Tutte asociado a G. Esto es una extensión natural del concepto de grafos cromáticamente únicos estudiado por Koh y Teo [2]. La Tutte unicidad ha sido estudiada para matroides por Bonin y Miller[1]. Recientemente A. de Mier y M. Noy[3] iniciaron el estudio para grafos, y en colaboración con A. Márquez y P. Revuelta[4] definieron y clasificaron los grafos localmente grid, además de demostrar la Tutte unicidad de la grid toroidal. Como continuación de esta investigación probamos la Tutte unicidad de los demás grafos localmente grid y extendemos el problema a los grafos localmente C_6.

[1]Trabajo parcialmente subvencionado por los proyectos BFM2001-2474-ORI y PAI FQM-164

[2]Dep. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla (Spain). {dgarijo,almar,pastora}@us.es

[3]Dep. Matemàtica Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya. Pau Gargallo 5. 08028 Barcelona (Spain). {demier,noy}@ma2.upc.es

2 Polinomio de Tutte

Sea $G = (V,E)$ un grafo, para cada $A \subseteq E$ definimos su *rango* $r(A) = n - k(G|A)$ siendo $n = |V|$ y $k(G|A)$ el número de componentes conexas del subgrafo recubridor (V,A). Conocido el rango podemos definir el polinomio generador de rango-tamaño:

$$R(G;x,y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(A)} y^{|A|}$$

Este polinomio contiene exactamente la misma información sobre G que el *polinomio de Tutte*:

$$T(G;x,y) = \sum_{A \subseteq G} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}$$

Es importante observar que el coeficiente del monomio $x^i y^j$ de $R(G;x,y)$ es el número de subgrafos recubridores de G de rango i y tamaño j luego para cada i y para cada j el polinomio de Tutte indica el número de conjuntos de aristas de G de rango i y tamaño j. Además, evaluando este polinomio en distintos puntos del plano obtenemos diversos invariantes del grafo; por ejemplo $T(G;2,1)$ es el número de bosques, $T(G;2,0)$ es el número de orientaciones acíclicas de G etc.. Al ser el polinomio de Tutte una generalización del polinomio Cromático de un grafo, ya que

$$\chi(G,\lambda) = (-1)^{r(A(G))} \lambda^{k(G)} T(G;1-\lambda,0)$$

siendo $k(G)$ el número de componentes conexas del grafo, y habiéndose estudiado los grafos cromáticamente únicos es lógico pensar que existan grafos unívocamente determinados por su polinomio de Tutte.

3 Grafos localmente grid

Continuando con el trabajo realizado en [4] donde se definen y clasifican los grafos localmente grid, y se demuestra la Tutte unicidad de la grid toroidal, nos planteamos demostrar que los demás grafos localmente grid también son Tutte únicos.

Teorema 1 *Los grafos localmente grid son Tutte únicos para todo $p, q \geq 6$.*

La idea clave en la demostración del teorema anterior es la de ciclo esencial. Un ciclo C en un grafo localmente grid G se dice esencial si no es contractible. Sabemos que dados dos grafos localmente grid con pq vértices, si la longitud del ciclo esencial más corto en cada grafo no es la misma o en caso de que sí lo sea, no coincide el número de ciclos esenciales de dicha longitud entonces los polinomios de Tutte respectivos no son iguales. Por tanto, para demostrar el teorema anterior hay que comparar dos a dos todos los grafos localmente grid en los que coincidan las cantidades anteriores. Pongamos como ejemplo el siguiente caso. Veamos que $T(T^{\delta}_{p,q}; x, y) \neq T(K^{1}_{p,q}; x, y)$ con $p < q + \delta$, para ello basta demostrar que el coeficiente de $x^q y^{q-1}$ del polinomio generador de rango-tamaño es distinto en cada caso, es decir, que el número de conjuntos de aristas de rango $q-1$ y tamaño q es distinto en cada grafo. Definimos dos tipos de conjuntos de aristas de rango $q-1$ y tamaño q:
Tipo 1: Ciclos esenciales de longitud q.
Tipo 2: Conjuntos de aristas de rango $q-1$ y tamaño q que no sean ciclos esenciales.
Haciendo un recuento del número de conjuntos de aristas de cada tipo que hay en cada grafo, obtenemos la siguiente tabla:

Tipo	$T^{\delta}_{p,q}$	$K^{1}_{p,q}$
1	x	$x+1$
2	?	?

Si demostramos que existe una biyección entre los conjuntos del tipo 2 de ambos grafos, tendremos probado que los polinomios de Tutte de $T^{\delta}_{p,q}$ y $K^{1}_{p,q}$ son distintos. Para ello definimos los siguientes conjuntos de aristas en la grid plana $p \times q$:

$$E_r = \{((i,r),(i,r+1))\,;\, 0 \leq i \leq p-1\}$$

para

$$0 \leq r \leq q-2$$

Sea A un subconjunto de aristas del tipo 2, llamamos $s(A) = \min\{r \in [0, q-2]\,;\, A \cap E_r = \emptyset\}$ (este mínimo existe para todo conjunto del tipo 2). Para cada $r \in [0, q-2]$ definimos una biyección φ_r entre los conjuntos de aristas de ambos grafos de rango $q-1$, tamaño q y $s(A) = r$.
Si $A \subset A(T^{\delta}_{p,q})$,

$$\varphi_r(A) = \cup\{\psi(((x,y),(x',y')))\,;\, ((x,y),(x',y')) \in A\}$$

donde

$$\psi(((x,y),(x',y'))) = \begin{cases} ((x,y),(p-1-x'+\delta,y')) \\ \text{si } y' = q-1, y = 0 \\ ((x,y),(x',y')) \text{ si } y,y' \in [0,r] \\ ((p-1-x+\delta,y),(p-1-x'+\delta,y')) \\ \text{si } r+1 \leq y,y' \leq q-1 \end{cases}$$

4 Grafos localmente C_6

Definición 2 *Un grafo G se dice que es localmente C_6 si el conjunto de vecinos de cada vértice de G induce un subgrafo isomorfo a C_6.*

El objetivo de esta sección es dar una clasificación de los grafos localmente C_6 y demostrar que dichos grafos están unívocamente determinados por su polinomio de Tutte, para ello necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 3 *El conjunto de grafos localmente grid con N vértices es isomorfo al conjunto de grafos localmente C_6 con N vértices.*

Demostración: Sea G un grafo localmente grid con N vértices. Podemos obtener un grafo localmente C_6 con N vértices sin más que triangular los cuatro cuadrados de la estructura local de cada vértice de G (ver Figura 1).

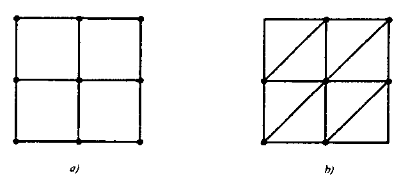

Figura 1: a) Estructura localmente grid b) Estructura localmente C_6

Recíprocamente, si G es un grafo localmente C_6 con N vértices tenemos que comprobar que a partir de él podemos obtener un grafo localmente grid con N vértices, es decir, que podemos pasar de una triangulación a una cuadrangulación respetando en cada caso la estructura local. Para ello consideramos un ciclo esencial de longitud mínima y un entorno de dicho ciclo, en este entorno está perfectamente definida la derecha y la izquierda ya que se trata de un ciclo no desorientador. Las dos partes del grafo que quedan fuera del entorno admiten una inmersión en el cilindro y por tanto nuestro problema se reduce al interior del entorno. Al ser el ciclo esencial de longitud mínima las aristas que lo forman son aristas opuestas y tenemos un número par de triángulos tanto a la derecha como a la izquierda del ciclo esencial considerado, ya que si tuviéramos un número impar no estaríamos hablando de un ciclo esencial de longitud mínima. El tener un número par de triángulos nos permite eliminar aristas obteniendo que cada vértice pertenece exactamente a cuatro cuadrados y por tanto hemos construido un grafo localmente grid. ∎

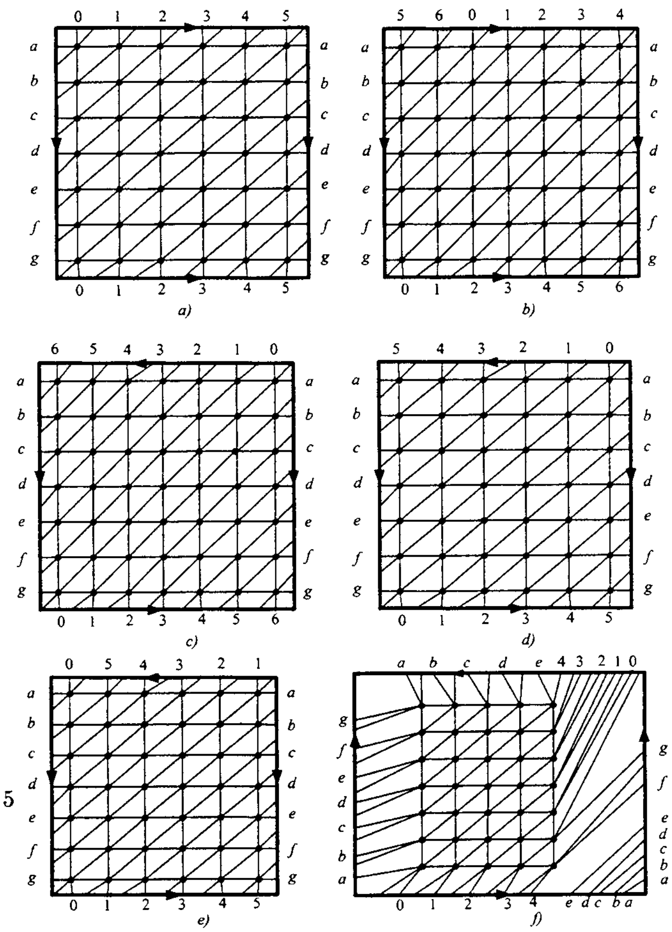

Figura 2: a) $T^{*}_{6,7}$ b) $T^{*2}_{7,7}$ c) $K^{*1}_{7,7}$ d)$K^{*0}_{6,7}$ e) $K^{*2}_{6,7}$ f) $S^{*}_{5,7}$

Teorema 4 *Si G es un grafo localmente C_6 con N vértices, entonces G es isomorfo a uno y sólo uno de los siguientes grafos:*

a) $G \cong T^{*\delta}_{p,q}$ *con* $pq = N$, $p \geq 5$, $\delta \leq p/2$ *y* $\delta + q \geq 5$ *si* $q \geq 4$ *ó* $\delta + q \geq 6$ *si* $q = 2,3$ *ó*

si $q = 1$, $\quad 4 \leq \delta \leq p/2$.

b) $G \cong K^{*i}_{p,q}$ *con* $pq = N$, $p \geq 5$, $i \equiv p \ (mod\ 2)$ *para* $i \in \{0,1,2\}$ *y* $q \geq 4 + \lceil i/2 \rceil$.

c) $G \cong S^{*}_{p,q}$ *con* $pq = N$, $p \geq 3$ *y* $q \geq 6$.

siendo $T^{*\delta}_{p,q}$, $K^{*i}_{p,q}$ *y* $S^{*}_{p,q}$ *los grafos de la Figura 2.*

Teorema 5 *Los grafos localmente C_6 son Tutte únicos para $p,q \geq 6$.*

Referencias

[1] J.E. Bonin, W.P. Miller, Characterizing combinatorial geometries by numerical invariants, *European J. Combin. 20* (1999), 713–724.

[2] K.M. Koh, K.L. Teo, The search for chromatically unique graphs, *Graphs and Combinatorics* 6 (1990), 259–285. The search for chromatically unique graphs II, *Discrete Math.* 172 (1997), 59–78.

[3] A. de Mier, M. Noy. *On graphs determined by their Tutte polynomial.* (manuscrito).

[4] A. de Mier, A. Márquez, M. Noy, P. Revuelta. *Locally grid graphs: classification and Tutte uniqueness.* (manuscrito).