El problema de Turán sobre grafos bipartitos completos

M. Cera, A. Diánez, P. García–Vázquez[1]y J.C. Valenzuela[2]

Resumen

En este trabajo estudiamos el problema consistente en determinar el máximo número de aristas de un grafo sin contener un subgrafo bipartito completo. Cuando el orden del grafo está relacionado con el orden del bipartito de modo adecuado, es posible demostrar resultados que conducen a nuevas soluciones para este problema.

1 Introducción

Uno de los problemas extremales más conocidos dentro de la Teoría de Grafos consiste en la búsqueda del valor exacto de la función $ex(n;F)$, es decir, el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener a F como subgrafo, siendo F un grafo cualquiera. El resultado más relevante en este área fue demostrado por P. Turán [4] en 1941, y responde a la cuestión antes planteada cuando F es un grafo completo. El valor exacto de la función $ex(n;K^p)$ viene dado por el número de aristas del único grafo $(p-1)$–partito completo cuyos vértices están repartidos entre sus clases del modo más igualitario posible. Además, dicho grafo, conocido como *Grafo de Turán*, es también el único grafo de ese tamaño que no contiene a K^p como subgrafo.

Este problema supuso, sin duda, el inicio de la Teoría Extremal de Grafos, con la aparición de numerosos problemas extremales que relacionan diversos invariantes de un grafo, como el número de aristas, la valencia media o el número cromático, con la propiedad de contener a cierto grafo F como subgrafo. Uno de esos problemas, consiste en la búsqueda del valor exacto de la función $ex(n;K_{s,t})$, esto es, el máximo número de aristas de un grafo de orden n sin contener como subgrafo al grafo bipartito completo con s vértices en una de sus clases y t vértices en la otra.

Aunque el planteamiento de este problema se remonta a los aos cuarenta, como el Problema de Turán, sin embargo, las soluciones aportadas al mismo son más bien escasas. Además todas han sido obtenidas asintóticamente, es decir, fijando valores de s y t, y haciendo tender n al infinito. En este sentido, destacamos los trabajos de W.G. Brown [1] y de P. Erdös, A. Rényi y V.T. Sós [2], que demuestran de modo independiente, que

$$ex(n;K_{2,2}) = \frac{1}{2}\left(1+o(1)\right)n^{3/2},$$

o el de Z. Füredi [3], donde se prueba que

$$\lim_{n\to\infty} ex(n;K_{2,t+1})n^{-3/2} = \sqrt{t}/2.$$

Por otra parte, la relación de este problema con el Problema de Zarankiewicz [5], nos permite deducir cotas inferior y superior para esta función que, igualmente, son buenas desde un punto de vista asintótico.

En este trabajo, pretendemos abordar el análisis de este problema desde otro punto de vista diferente. Estudiaremos la función $ex(n;K_{t,t})$ y lo haremos para valores relacionados de n y t. Algunos resultados parciales, nos conducirán a nuevas acotaciones para la función estremal anterior que mejoran a las conocidas si n y t están suficientemente cercanos, y que son óptimas para $n=2t$ y $n=2t+1$.

2 Principales resultados

En general, los grafos extremales para este problema suelen tener una gran número de aristas, lo cual significa que su grafo complementario es un

[1]Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: {mcera,anadianez,pgvazquez}@us.es

[2]Dpto. de Matemáticas. Universidad de Cádiz. E-mail: jcarlos.valenzuela@uca.es@uca.es

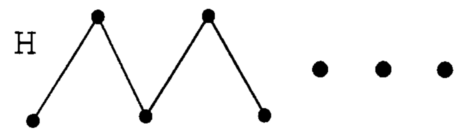

Figura 1: El grafo $G = \overline{H}$ no contiene a $K_{4,4}$ como subgrafo.

grafo muy disperso. Por ello, resulta más cómodo abordar el análisis de este problema trabajando sobre la estructura del grafo complementario.

Así pues probar que un grafo G contiene a $K_{t,t}$ como subgrafo es equivalente a demostrar que su grafo complementario H contiene dos conjuntos de vértices, U y V, con intersección vacía y de modo que no existe en H ninguna arista que una a vértices de distinto conjunto.

El siguiente resultado nos permite deducir una condición suficiente para que un grafo contenga al grafo bipartito completo $K_{t,t}$ como subgrafo.

Teorema 1 *Sean n y t enteros positivos, con $n \geq 2t$, y sea H un grafo con n vértices tal que contiene un subgrafo con $2t$ vértices y $t-1$ aristas. Entonces H contiene dos conjuntos disjuntos de t vértices cada uno, U y V, de modo que ninguna arista une en H a vértices de U con vértices de V.*

Teniendo en cuenta esta condición suficiente, nos preguntamos cuál debe ser el tamao mínimo de un grafo con n vértices para garantizar la hipótesis del teorema anterior. La respuesta a esta cuestión la obtenemos en el siguiente resultado.

Lema 2 *Sean n y t enteros positivos, con $n \geq 2t$. Sea H un grafo con n vértices y a lo sumo, $2n - 3t - 1$ aristas. Entonces H contiene un subgrafo con $2t$ vértices y $t - 1$ aristas.*

En consecuencia, podemos deducir una cota superior para la función estremal $ex(n; K_{t,t})$ en el siguiente corolario.

Corolario 3 *Sean n y t enteros positivos, con $n \geq 2t$. Se verifica:*

$$ex(n; K_{t,t}) \leq \binom{n}{2} - (2n - 3t).$$

Consideremos el grafo G con $n = 2t$ vértices cuyo grafo complementario H está formado por un camino de longitud t y $t-1$ vértices aislados (Ver Figura 1). Es evidente que resulta imposible encontrar en H dos conjuntos disjuntos de tamao t cada uno, de modo que ninguna arista una en H a vértices de distinto conjunto. Por tanto, G no contiene a $K_{t,t}$ como subgrafo, lo cual nos permite deducir que la cota superior anterior es óptima para $n = 2t$. De modo equivalente, podemos comprobar que dicha cota es también óptima para $n = 2t + 1$ sin más que considerar el grafo G^* cuyo grafo complementario, H^*, está formado por un ciclo de longitud $t + 2$ y $t - 1$ vértices aislados.

Referencias

[1] W.G. Brown *On graphs that do not contain a Thomsen graph.* Canad. Math. Bull. vol.9 pp.281-289. 1966.

[2] P. Erdös, A. Rényi and V.T. Sós *On a problem of Graph Theory.* Studia Sci. Math. Hungar. vol.1 pp.215-235. 1966.

[3] Z. Füredi *New Asymptotics for Bipartite Turán Numbers.* Jornal of Combinatorial Theory, Series A. vol.75 pp.141-144. 1996.

[4] P. Turán *Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie.* Mat. Fiz. Lapok vol.48 pp.436-452. 1941.

[5] K. Zarankiewicz *Problem P 101.* Colloq. Math.Trans. Amer. Math. Soc. vol.2. pp.116-131. 1951.