TEOREMA DE DIVISION PARA LOS OPERADORES DIFERENCIALES Y CALCULO DE MULTIPLICIDADES DE $\mathcal{D}$-MODULOS.

Memoria presentada por Francisco J. Castro Jiménez para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Autorizo consulta

Director de la memoria

José L. Vicente

Fdo. José Luis Vicente Córdoba

V°B° del Jefe del Departamento

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS.

A María Eugenia

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos que me han ayudado en la realización de este trabajo. Especialmente a:

D. José L. Vicente Córdoba que me animó a continuar mis estudios en Francia.

LE Dung Trang de quien he recibido continuo estímulo en los últimos cuatro años.

Bernard Teissier que tuvo la amabilidad de atender y contestar a las numerosas preguntas que le formulé.

Zoghman Mebkhout que ha seguido muy de cerca la elaboración de esta memoria y que me condujo al estudio de los $\mathcal{D}$-módulos.

Todos los miembros del Departamento de Algebra y Fundamentos.

INDICE

INTRODUCCION

Los resultados presentados en esta memoria se enmarcan dentro de lo que se denomina estudio algebraico de los $\mathcal{D}$-módulos (o de los módulos sobre el anillo $\mathcal{D}$ de los operadores diferenciales lineales con coeficientes holomorfos, sobre una variedad analítica $(X,\mathcal{O})$) (Cf. [BJO], [BER], [PHA]).

La génesis de los $\mathcal{D}$-módulos es sin duda la teoría del "análisis algebraico" de M. Sato, quien considera un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales como un módulo de presentación finita sobre $\mathcal{D}$ (Cf. [KAS-1]). La idea es bien fácil: si

$$(1)\quad \begin{cases} R_{11}u_1 + \cdots + R_{1q}u_q = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ R_{p1}u_1 + \cdots + R_{pq}u_q = 0 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales (esto es, $R_{ij} \in \mathcal{D}$ y $(u_1,\ldots,u_q)$ las incógnitas), se le asocia el $\mathcal{D}$-módulo M conúcleo del homomorfismo φ definido por

$$(2)\quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^p & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}^q & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ (P_1,\ldots,P_p) & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{p} P_i R_{ij}\right)_{1\leq j\leq q} & & & & \end{array}$$

E inversamente, a una presentación (2) de un $\mathcal{D}$-módulo M se le asocia el sistema dado en (1). (Esta correspondencia no es biunívoca ya que un mismo $\mathcal{D}$-módulo M puede tener dos presentaciones distintas). Para una introducción detallada al estudio de los $\mathcal{D}$-módulos se puede consultar [BJO], [KAS-2], [LE-M] y [PHA].

A partir de ahora la expresión "$\mathcal{D}$-módulo" significará "$\mathcal{D}$-módulo de presentación finita" (o "$\mathcal{D}$-módulo coherente") (Cf. [SG] I).

El principal objeto geométrico asociado a un $\mathcal{D}$-módulo M es su <u>variedad característica</u> $V(M)$. Recordemos brevemente su definición: Sobre $\mathcal{D}$ se considera la filtración creciente definida por el orden de los operadores diferenciales. El graduado $gr(\mathcal{D})$ asociado a esta filtración (Cf. 0.0.5.) se identifica canónicamente al haz, sobre X, de las funciones holomorfas sobre el espacio cotangente a X – $T^*(X)$ – y polinomiales en las variables de la fibra. Sea $(M^{(m)})_{m\in N}$ una "buena filtración" de M (Cf. 0.0.8.). Entonces el graduado asociado a esta filtración $gr(M)$ es un $gr(\mathcal{D})$-módulo coherente y tensorizando $gr(M)$ con $\mathcal{O}_{T^*(X)}$ -el haz estructural de $T^*(X)$- se obtiene un haz $G(M)$, sobre $T^*(X)$, $\mathcal{O}_{T^*(X)}$-coherente. Su soporte -que no depende de la buena filtración elegida (Cf. [SG] II)- es por definición la variedad característica $V(M)$ de M. Así pues escribimos

$$V(M) = supp(G(M)) = supp(gr(M) \otimes_{gr(\mathcal{D})} \mathcal{O}_{T^*(X)})$$

y $V(M)$ es una subvariedad reducida de $T^*(X)$. Por ejemplo, si $M = \mathcal{D}/I$ (donde I es un ideal a la izquierda de $\mathcal{D}$) hay una estrecha relación entre $V(M)$ y los símbolos principales de los elementos de I: si $P = \sum_{|\delta| \leq d} a_\delta(X)D^\delta$ es un operador diferencial, el símbolo principal de P, que denotaremos por $\sigma(P)$, es la función (de 2n variables) $\sigma(P) = \sum_{|\delta|=d} a_\delta(X)D^\delta$.

La variedad característica de $M = \mathcal{D}/I$ coincide con la variedad de ceros del ideal generado por el conjunto $\{\sigma(P)/ P \in I\}$ (este ideal es llamado el ideal graduado asociado a I y es denotado por $gr(I)$).

Aquí el término "variedad" es empleado en el sentido de la geometría algebarica y no significa que $V(M)$ no tenga singularidades (para $n=1$, la variedad característica del $\mathcal{D}$-módulo $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}(x.D)$ es el conjunto $\{(x,\xi)\in C^2/ x.\xi=0\}$ y el punto $(0,0)$ es singular en $V(M)$).

Otros dos invariantes importantes asociados a un $\mathcal{D}$-módulo M son la <u>dimensión</u> y la <u>multiplicidad</u> de M en un punto del espacio cotangente $T^*(X)$. Si $(\underline{x},\underline{a})$ es un punto de $T^*(X)$ la dimensión (resp. la multiplicidad) de M en el punto $(\underline{x},\underline{a})$, que denotaremos por $d_{(\underline{x},\underline{a})}(M)$ (resp. $e_{(\underline{x},\underline{a})}(M)$) es por definición la dimensión (resp. la multiplicidad) de $G(M)_{(\underline{x},\underline{a})}$ como $\mathcal{O}_{T^*(X),(\underline{x},\underline{a})}$-módulo (Cf. 4.1.3. y 4.1.4.).

La función $(\underline{x},\underline{a}) \longmapsto e_{(\underline{x},\underline{a})}(M)$ tiene un comportamiento muy particular: en efecto, en cada componente irreducible C de $V(M)$ existe un abierto de Zariski U_C de manera que la función $(\underline{x},\underline{a}) \longmapsto e_{(\underline{x},\underline{a})}(M)$ es constante en U_C. Al valor de la multiplicidad de M en un punto de U_C se le llama <u>multiplicidad genérica</u> de M en la componente C.

Nuestro primer propósito (que corresponde al resultado principal de este trabajo) es resolver los dos problemas siguientes:

Problema A.- Conocido un sistema de generadores del ideal I de $\mathcal{D}$, dar un método para calcular -de manera efectiva- unas ecuaciones de la variedad característica de $M = \mathcal{D}/I$. Es decir un sistema de generadores del ideal gr(I).

Problema B.- Conocido un sistema de generadores del ideal I de $\mathcal{D}$, dar un método para calcular -de manera efectiva- la dimensión y la multiplicidad de $M = \mathcal{D}/I$ en un punto cualquiera del espacio cotangente $T^*(X)$.

Siendo la situación de carácter local podemos suponer que I es un ideal -a la izquierda- del anillo $\mathcal{D}_o$ de los gérmenes de operadores diferenciales lineales holomorfos en el origen de C^n y que el punto en cuestión es el $(0,0) \in T^*(C^n) = C^{2n}$.

Solución al problema A.-

Teorema 1.-

i) Sea I un ideal de $\mathcal{D}_o$. I posee un sistema de generadores $(P^i)_{1\leq i\leq m}$ tal que la familia de sus símbolos principales $(\sigma(P^i))_{1\leq i\leq m}$ es un sistema de generadores del ideal gr(I) de $C\{X\}[\xi]$ (un tal sistema de generadores es llamado una base involutiva de I) (Cf. 2.2.5. y 2.2.11.).

ii) Si $(P'^i)_{1\leq i\leq m'}$ es cualquier sistema de generadores de I, existe un algoritmo para calcular una base involutiva de I a partir de $(P'^i)_{1\leq i\leq m'}$ (Cf. 3.0.15.).

Nótese que no todo sistema de generadores es una base involutiva. Basta tomar $n=2$ e I el ideal generado por D_1 y x_1D_2. Es claro que $D_2 = D_1.x_1D_2 - x_1D_2D_1 \in I$ y sin embargo $\xi_2 = \sigma(D_2) \notin (\xi_1, x_1\xi_2)C\{X_1,X_2\}[\xi_1,\xi_2]$.

La demostración del teorema 1 utiliza fundamentalmente un teorema de división -de tipo Weierstrass- en el anillo de los operadores diferenciales. Para los detalles concretos del enunciado y de la demostración véase 2.1.0.. Diremos aquí que, dada una familia de elementos de $\mathcal{D}_o$, $\{P^1,\dots,P^m\}$, el teorema de división nos permite asociar a cada elemento P de $\mathcal{D}_o$ una familia de cocientes $(Q_i)_{1\leq i\leq m}$ y un resto R unívocamente determinados por ciertas condiciones combinatorias.

Una familia $\{P^1,\dots,P^m\}$ de elementos de I se dice que es una base de división de I si se verifica la condición siguiente:

$\forall P \in \mathcal{D}_o$, $P \in I$ si y solo si (el resto de la división de P entre $(P^1,\dots,P^m)$ es cero.)

Se demuestra (Cf. 2.2.5.) que todo ideal I posee una base de división y que una tal base es siempre involutiva (Cf.2.2.11).

En el estudio de la dimensión y la multiplicidad de $\mathcal{D}/I$ el concepto de <u>exponente privilegiado</u> juega un papel fundamental.

Si $f = \sum_{|\alpha|\geq\nu} f_\alpha T^\alpha$ es un elemento de $C[[T_1,\dots,T_r]]$

(resp. $P = \sum_{|\delta| \leqslant d} a_\delta(X)D^\delta = \sum_{\substack{(\alpha,\delta)\\ |\delta| \leqslant d}} a_{(\alpha,\delta)} X^\alpha D^\delta$ es un elemento de $\mathcal{D}_0$), del conjunto de todos los exponentes α de f (resp. (α,δ) de P) se elige uno (de una manera sistematizada en 1.0.3. (resp. 2.0.0.)). A ese exponente se le llama <u>exponente privilegiado</u> de f (resp. P).

Si $\mathfrak{A}$ (resp. I) es un ideal del anillo de series (resp. del anillo $\mathcal{D}_0$) se denota por $E(\mathfrak{A})$ (resp. E(I)) el conjunto de los exponentes privilegiados de todos los elementos de $\mathfrak{A}$ (resp. I). Se tienen los dos resultados siguientes:

Resultado 1.- Si $\{f^1,\ldots,f^m\}$ es una base de división del ideal $\mathfrak{A}$, entonces

$$E(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i=1}^{m} \exp(f^i) + N^r.$$

Resultado 2.- Existe un algoritmo para calcular - a partir del conjunto $E(\mathfrak{A})$- la dimensión y la multiplicidad del módulo $C[[T]]/\mathfrak{A}$.

El resultado 1 es una consecuencia del teorema de división. En 4.3. se da el algoritmo al que se hace referencia.

<u>Solución al problema B</u>.-

<u>Teorema 2</u>.- Sea I un ideal de $\mathcal{D}_0$. Se verifican.

i) Si $(P^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ es una base de división de I entonces

$$E(I) = \bigcup_{i=1}^{m} \exp(P^i) + N^{2n}.$$

ii) $E(I)=E(gr(I))=E(gr(I)C\{X\}[\xi])=E(gr(I)C[[X,\xi]])$.

La prueba de este teorema se hace utilizando la definición de exponente privilegiado y el teorema de división 2.1.0..

Ahora el problema B está resuelto pues a partir de un sistema de generadores de I se calcula, por el procedimiento de 3.0.15., una base de división de I. Esta base de división determina al conjunto $E(I)$ y por tanto al conjunto $E(gr(I)C[[X,\xi]])$. Ahora bien, la dimensión y la multiplicidad de $\mathcal{D}_o/I$ en el $(0,0)$ coincide con la dimensión y la multiplicidad del $C[[X,\xi]]$-módulo $C[[X,\xi]]/gr(I)C[[X,\xi]]$ (Cf. 4.2.0.) y acabamos de ver que estos dos números son calculados -de forma efectiva- a partir del conjunto $E(gr(I)C[[X,\xi]])$.

Finalmente nos planteamos el siguiente

<u>Problema C</u>.- Sea M un submódulo de un $\mathcal{D}_o$-módulo libre $\mathcal{D}_o^p$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ un sistema de generadores de M. Dar un método para calcular -de manera efectiva- una resolución libre de M.

Se procede de la manera siguiente: El teorema de división en el anillo $\mathcal{D}_o$ se generaliza a cualquier módulo libre $\mathcal{D}_o^p$. Así, todo submódulo M de un módulo libre posee una base de división(que se puede calcular explícitamente a partir de un sistema de generadores de M). Si $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M y si el <u>exponente privilegiado</u> de $\underline{P}^i$ es (α^i,δ^i) (Cf. 2.0.0.)

entonces, una <u>relación</u> entre los $(\underline{P}^i)$ se obtiene haciendo la división del elemento $X^{\alpha^i}D^{\delta^i}\underline{P}^j - X^{\alpha^j}D^{\delta^j}\underline{P}^i$ (que pertenece a M) por $(\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m)$ (nótese que el resto de esta división debe ser cero (Cf. 2.2.1.)). Una tal relación es llamada una <u>relación elemental</u> entre los $(\underline{P}^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$.

<u>Solución al problema C.</u>-

<u>Teorema 3</u>.-

Sea M un submódulo de un $\mathcal{D}_\circ$-módulo libre $\mathcal{D}_\circ^p$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ una base de división de M. El módulo de las relaciones entre los elementos $(\underline{P}^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ está generado por la familia (finita) de las relaciones elementales entre los $(\underline{P}^i)$.

El teorema 3 (cuya prueba se da en 3.0.13.), junto con el teorema 1 ii), nos proporciona un método para calcular una resolución libre de M. En efecto, se considera la sucesión exacta

$$\mathrm{Ker}(\Phi) \longrightarrow \mathcal{D}_\circ^m \xrightarrow{\Phi} M \longrightarrow 0$$

donde $\Phi(Q_1,\ldots,Q_m) = \sum_{i=1}^{m} Q_i\underline{P}^i$. Como se conoce un sistema de generadores de $\mathrm{Ker}(\Phi)$, se calcula una base de división de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ y se repite el razonamiento anterior (reemplazando M por $\mathrm{Ker}(\Phi)$) y se obtiene así un nuevo término de una resolución libre de M. Por un razonamiento general (Cf. 3.1.3.) se demuestra que la resolución así construida tiene longitud menor o igual que $2n-1$.

Para terminar comentamos brevemente el contenido de cada capítulo de esta memoria.

En el capítulo preliminar (capítulo 0) se estudia la relación entre un módulo filtrado y el módulo graduado asociado y se definen diferentes filtraciones sobre el anillo de los operadores diferenciales.

El capítulo 1 está dedicado al teorema de división en el caso "conmutativo".

En el capítulo 2 se define el exponente privilegiado de un operador, se demuestra el teorema de división en el anillo de los operadores diferenciales (utilizando el teorema de división en el caso conmutativo), se definen las bases de división y se estudia la relación entre una base de división de un ideal I de $\mathcal{D}_0$ y una base de división del ideal graduado asociado a I (Cf. 2.2.11.).

El capítulo 3 contiene los cálculos explícitos en el anillo $\mathcal{D}_0$. Se dan algoritmos para construir una base de división de un submódulo de un módulo libre y una resolución libre de un módulo de tipo finito.

En el capítulo 4 se tratan las multiplicidades de los $\mathcal{D}_0$-módulos. Se da un algoritmo para calcular la multiplicidad de un módulo de la forma $\mathcal{D}_0/I$ en un punto del espacio cotangente. En el caso particular de que la variedad característica de $\mathcal{D}_0/I$ sea un divisor con cruzamientos normales, se da un método para calcular las multiplicidades genéricas de $\mathcal{D}_0/I$ en cada componente irreducible de $V(\mathcal{D}_0/I)$.

Finalmente, en 4.5. se dan algunos ejemplos de cálculo de multiplicidades y de resoluciones libres.

NOTACIONES

Salvo que se especifique lo contrario la letra K denotará un cuerpo de característica arbitraria.

Si n es un entero positivo, para toda n-upla de variables $X=(X_1,\dots,X_n)$, $K[[X]]$ (resp. $K[X]$) denotará la K-álgebra de las series formales (resp. de los polinomios) en $X_1,\dots,X_n$. Si K es el cuerpo de los números reales R o el de los números complejos C, $K\{X\}$ denotará la K-álgebra de las series convergentes en $X_1,\dots,X_n$.

Para todo $\alpha \in N^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ se escribirá $X^{\alpha}= X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$. Si p es un entero positivo y $(\alpha,i)\in N^n x\{1,\dots,p\}$ se escribirá $X^{(\alpha,i)}=(0,\dots,X^{\alpha},\dots,0)$, estando el monomio situado en el i-ésimo lugar.

Para todo $\alpha\in N^n$ y para todo $(\beta,i)\in N^n x\{1,\dots,p\}$ se escribirá $\alpha+(\beta,i)=(\alpha+\beta,i)$.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

0.0. ANILLOS Y MODULOS FILTRADOS. ANILLOS Y MODULOS GRADUADOS.

En este parágrafo todos los anillos considerados serán unitarios (no necesariamente conmutativos). Los homomorfismos de anillos transformarán el elemento unidad en el elemento unidad. Todos los módulos considerados serán módulos a izquierda.

0.0.0. DEFINICION.-

Sea A un anillo (resp. M un A-módulo). Una filtración creciente de A (resp. M) es una familia $(A^{(d)})_{d\in R}$ (resp. $(M^{(d)})_{d\in R}$) de subgrupos de A (resp. M) verificando:

i) $A^{(d)} \subseteq A^{(d')}$ (resp. $M^{(d)} \subseteq M^{(d')}$) si $d \leqslant d'$.

ii) $A^{(d)}A^{(d')} \subseteq A^{(d+d')}$ (resp. $A^{(d)}M^{(d')} \subseteq M^{(d+d')}$), $d,d' \in R$.

iii) $\bigcup_{d\in R} A^{(d)} = A$ (resp. $\bigcup_{d\in R} M^{(d)} = M$).

iv) $1 \in A^{(0)} \setminus (\bigcup_{d<0} A^{(0)})$.

Se define de manera análoga una filtración decreciente de A (resp. M) reemplazando i) por i'): $A^{(d)} \supseteq A^{(d')}$ (resp. $M^{(d)} \supseteq M^{(d')}$) si $d \leqslant d'$ y iv) por iv'): $1 \in A^{(0)} \setminus (\bigcup_{d>0} A^{(d)})$.

Una anillo filtrado es un par $(A,(A^{(d)}))$ donde A es un anillo y $(A^{(d)})$ es una filtración (creciente, resp. decreciente) de A. Si $(A,(A^{(d)}))$ es un anillo filtrado, un A-módulo filtrado es un par $(M,(M^{(d)}))$, donde M es un A-módulo y $(M^{(d)})$ es una filtración (creciente, resp. decreciente) de M.

0.0.1. NOTA.-

Si $(A^{(d)})$ es una filtración decreciente del anillo A, se define $\hat{A}^{(d)} = A^{(-d)}$, $\forall d \in R$. La familia $(\hat{A}^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración creciente del anillo A. De esta manera basta estudiar las filtraciones crecientes. En adelante "filtración" significará "filtración creciente".

0.0.2. DEFINICION.-

Sean $(A,(A^{(d)}))$ un anillo filtrado, $(M,(M^{(d)}))$ y $(N,(N^{(d)}))$ A-módulos filtrados. Un homomorfismo de A-módulos $f:M \to N$ es un homomorfismo filtrado si

$$f(M^{(d)}) \subseteq N^{(d)}, \quad \forall d \in R.$$

f es estricto si

$$f(M^{(d)}) = f(M) \cap N^{(d)}, \quad \forall d \in R.$$

Denotaremos por $\mathrm{filt}({}_A\mathfrak{M})$ la categoría cuyos objetos son los A-módulos filtrados y cuyos morfismos son los homomorfismos filtrados.

0.0.3. DEFINICION.-

Sea B un anillo (resp. M un B-módulo). Una graduación de B (resp. de M) es una familia $(B^{(d)})_{d\in R}$ (resp. $(M^{(d)})_{d\in R}$)

de subgrupos de B (resp. M) verificando:

i) $B = \bigoplus_{d\in R} B^{(d)}$ (resp. $M = \bigoplus_{d\in R} M^{(d)}$)

ii) $B^{(d)}B^{(d')} \subseteq B^{(d+d')}$ (resp. $B^{(d)}M^{(d')} \subseteq M^{(d+d')}$) $\forall (d,d')\in R$.

Un elemento x de B (resp. M) es homogéneo de grado d si $x \in B^{(d)}$ (resp. $M^{(d)}$).

Un anillo graduado es un par $(B,(B^{(d)})$ donde B es un anillo y $(B^{(d)})$ una graduación de B. Si $(B,(B^{(d)}))$ es un anillo graduado, un B-módulo graduado es un par $(M,(M^{(d)}))$ donde M es un B-módulo y $(M^{(d)}))$ una graduación de M.

0.0.4. DEFINICION.-

Sea $(B,(B^{(d)}))$ un anillo graduado y sean $(M,(M^{(d)}))$ $(N,(N^{(d)}))$ B-módulos graduados. Un homomorfismo de anillos $f:M\to N$ es un homomorfismo graduado si

$$f(M^{(d)}) \subseteq N^{(d)}, \quad \forall\, d \in R.$$

Si $(B,(B^{(d)}))$ es un anillo graduado, denotaremos por $gr({}_B\mathfrak{M})$ la categoría cuyos objetos son los B-módulos graduados y cuyos morfismos son los homomorfismos graduados. $gr({}_B\mathfrak{M})$ es una categoría abeliana.

0.0.5. DEFINICION.- Sea $(A,(A^{(d)}))$ (resp. $(M,(M^{(d)}))$) un anillo (resp. un A-módulo) filtrado. Se define el anillo (resp. módulo) graduado asociado a $(A,(A^{(d)}))$ (resp. $(M,(M^{(d)}))$) como:

$$gr(A):= \bigoplus_{d \in R} gr(A)^{(d)} = \bigoplus_{d \in R} (A^{(d)} / \bigcup_{d' < d} A^{(d')})$$

$$\left(\text{resp. } gr(M):= \bigoplus_{d \in R} gr(M)^{(d)} = \bigoplus_{d \in R}(M^{(d)} / \bigcup_{d' < d} M^{(d')}\right)$$

Si $(M,(M)^{(d)})$ y $(N,(N)^{(d)})$ son A-módulos filtrados y $f:M \to N$ es un homomorfismo filtrado, se define el homomorfismo graduado asociado a f como

$$gr(f): gr(M) \longrightarrow gr(N) \quad \text{donde}$$

$$gr(f)(x + \bigcup_{d'< d} M^{(d')}) = f(x) + \bigcup_{d' < d} N^{(d')} , \forall x \in M^{(d)} ,\forall d \in R.$$

De esta manera se ha definido un funtor, que notaremos $gr(\ )$, de $filt({}_{A}\mathfrak{M})$ en $gr({}_{gr(A)}\mathfrak{M})$.

<u>0.0.6. NOTACION</u>.-

En adelante se escribirá $gr^{(d)}(A)$ (resp. $gr^{(d)}(M)$) en lugar de $gr(A)^{(d)}$ (resp. $gr(M)^{(d)}$).

Para cada $d \in R$ se escribirá

$$\tilde{A}^{(d)}:= \bigcup_{d' < d} A^{(d')}$$

$$(\text{resp. } \tilde{M}^{(d)}:= \bigcup_{d' < d} M^{(d')}).$$

Para aligerar la notación, y si no hay lugar a confusión, se dejará de precisar en cada caso la filtración (resp. gra duación) en cuestión.

Sea A un anillo filtrado (resp. graduado). Sea M un A-módulo filtrado (resp. graduado), para cada $p \in \mathbb{R}$ se define

$$M[p]^{(d)} = M^{(d+p)}, \ \forall d \in \mathbb{R}.$$

La familia $(M[p]^{(d)})_{d \in \mathbb{R}}$ es una filtración (resp. graduación) de M. En adelante se notará $M[p]$ el A-módulo filtrado (resp. graduado) así definido.

Si $(M)_{i \in I}$ es una familia de A-módulos filtrados (resp. graduados), se define la filtración producto (resp. graduación producto) de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ como

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)^{(d)} = \bigoplus_{i \in I} M_i^{(d)}, \ \forall d \in \mathbb{R}.$$

Si $(M,(M)^{(d)})$ es un A-módulo filtrado y M' es un submódulo de M, la familia $(M' \cap M^{(d)})$ es una filtración de M', que llamaremos la filtración inducida en M' por la de M.

Si $f:M \rightarrow N$ es un homomorfismo filtrado, la familia $(f(M)^{(d)}))$ es una filtración de $f(M)$, que llamaremos filtración imagen de $(M^{(d)})_{d \in \mathbb{R}}$ por f.

0.0.7. DEFINICION.-

Sea A un anillo filtrado (resp. graduado). Sea M un A-módulo filtrado (resp. graduado). Se dice que M es un

A-módulo filtrado libre (resp. graduado libre) si existe una familia de números reales $(p_i)_{i \in I}$ tal que M es isomorfo, en la categoría $\mathrm{filt}({}_A\mathfrak{M})$ (resp. $\mathrm{gr}({}_A\mathfrak{M})$), a

$$\bigoplus_{i \in I} A[p_i]$$

con la filtración (resp. graduación) producto (Cf. 0.0.6.).

0.0.8. DEFINICION.-

Sea $(A,(A^{(d)}))$ un anillo filtrado y $(M,(M^{(d)}))$ un A-módulo filtrado. La filtración $(M^{(d)})$ es una buena filtración si existen $x_1,\ldots,x_s \in M$ y $k_1,\ldots,k_s \in R$ tales que

$$M^{(d)} = \sum_{j=1}^{s} A^{(d-k_j)}.x_j \quad , \forall d \in R.$$

0.0.9. NOTA.-

Si $(M^{(d)})$ es una buena filtración de M, entonces M es un A-módulo de tipo finito, pues $M = \bigcup_{d \in R} M^{(d)}$.

Si M,N son A-módulos filtrados y la filtración de M es buena, entonces la filtración imagen de la de M por un homomorfismo filtrado $f:M \longrightarrow N$ es también buena: basta observar que

$$f(M^{(d)}) = \sum_{j=1}^{s} f(A^{(d-k_j)}.x_j) = \sum_{j=1}^{s} A^{(d-k_j)}.f(x_j).$$

Por otra parte, todo A-módulo de tipo finito admite una buena filtración: si $f:A^s \longrightarrow M$ es un homomorfismo de A-módulos sobreyectivo, se considera sobre M la filtración imagen de la filtración producto sobre A^s. f es entonces un homomorfismo filtrado y el resultado sigue de que la filtración producto sobre A^s es buena.

0.0.10. DEFINICION.-

Sea $(M,(M^{(d)})$ un A-módulo filtrado. La filtración $(M^{(d)})$ se dice que es una Z-filtración si se verifica:

$$M^{(d)} = M^{(E[d])} \quad \forall d \in R$$

donde $E[d]$ es el mayor entero menor o igual que d. Una tal filtración se denotará $(M^{(m)})_{m\in Z}$.

0.0.11. NOTACION.-

En adelante y salvo que se especifique lo contrario todas las filtraciones consideradas serán Z-filtraciones.

0.0.12. DEFINICION.-

Una filtración $(A^{(m)})_{m\in Z}$ del anillo A se dice que es noetheriana si se verifican:

i) gr(A) es noetheriano a izquierda y a derecha.

ii) Si $\bigoplus_{i=1}^{s} A[p_i]$ es un módulo filtrado libre (de tipo finito), si H es un submódulo de $\bigoplus_{i=1}^{s} A[p_i]$ y si $\{x_1,\dots,x_p\}$ es una familia de elementos de H tal que $x_j \in H^{(k_j)} \setminus H^{(k_j-1)}$ $(1\leq j\leq p)$ y tal que $\{x_j+H^{(k_j-1)}\}_{1\leq j\leq p}$ genera gr(H), entonces

$$H^{(k)} := H \cap (\bigoplus_{i=1}^{s} A[p_i])^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_j)}.x_j \,, \forall k \in Z.$$

iii) $\bigcap_{k \in Z} A^{(k)} = (0)$.

iv) $A^{(0)}$ es noetheriano a izquierda y a derecha.

0.0.13. PROPOSICION.-

Supongamos que la filtración de A es noetheriana. Si M es un A-módulo filtrado y su filtración es buena, entonces la filtración inducida, por la de M, en cualquier submódulo L de M es buena.

En efecto: sea $\{x_1,\ldots,x_p\}$ una familia de elementos de M tal que $x_i \in M^{(k_i)} \setminus M^{(k_i-1)}$, $(1 \leq i \leq p)$, verificando

$$M^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_j)} x_j.$$

Consideremos el módulo filtrado libre $\bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_j]$ y el homomorfismo filtrado

$$f\colon \bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_j] \longrightarrow M$$

definido por $f(a_1,\ldots,a_p) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$.

Sea L un submodulo de M. Consideremos sobre $H = f^{-1}(L)$ la filtración inducida por la de $\bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_j]$. Esta es una buena filtración (por la condición ii) de 0.0.12.) y el resultado sigue de que la filtración inducida en L por la de M es la filtración imagen, por f, de la filtración de $f^{-1}(L)$.

0.0.14. PROPOSICION.-

Sean M, N y P A-módulos filtrados y sea

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ una sucesión exacta en la categoría de los A-módulos. Si f y g son estrictos, entonces la sucesión

$$gr(M) \xrightarrow{gr(f)} gr(N) \xrightarrow{gr(g)} gr(P)$$

es exacta en la categoría $gr(\underset{gr(A)}{\mathfrak{M}})$.

En efecto: $gr(g).gr(f) = gr(g.f) = 0$. Por otra parte si $gr(g)(y+N^{(m-1)})=0$, $(y \in N^{(m)})$, quiere decir que $g(y) \in P^{(m-1)} \cap$ $\cap\, g(N) = g(N^{(m-1)})$ y por tanto existe $y' \in N^{(m-1)}$ t.q. $g(y)=g(y')$. Entonces $g(y-y')=0$; luego $y-y' \in Im(f) \cap N^{(m)} = f(M^{(m)}$. Así pues existe $x \in M^{(m)}$ t.q. $f(x)=y-y'$ y por tanto $gr(f)(x+M^{(m-1})=$ $=(y-y')+N^{(m-1)} = y+N^{(m-1)}$.

0.0.15. PROPOSICION.-

Supongamos que la filtración de A es noetheriana. Sea M un A-módulo filtrado por una buena filtración.Entonces:

i) A es noetheriano a izquierda y a derecha.

ii) La filtración de M es separada:es decir

$$\bigcap_{m \in Z} M^{(m)} = (0).$$

Prueba.- i) Sea I un ideal a izquierda de A. Como $gr(A)$ es noetheriano a izquierda, $gr(I)$ está generado por una familia finita de elementos homogéneos $\{\bar{a}_1,\ldots\bar{a}_p\}$, con $a_i \in I \cap$ $(A^{(k_i)} \setminus A^{(k_i-1)})$, $(k_i \in Z)$, $(1 \leq i \leq p)$.

$$I = \bigcup_{m\in Z} I \cap A^{(m)} = \bigcup_{m\in Z} \sum_{j=1}^{p} A^{(m-k_j)}.a_j \subseteq$$

$\subseteq \sum_{j=1}^{p} A.a_j$ y por tanto I está generado por la familia (a_i).

Análogamente se procede si I es un ideal a la derecha.

ii) Supongamos que $M^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_j)}.x_j$ con $x_j \in M^{(k_j)} \setminus M^{(k_j-1)}$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to Ker(f) \xrightarrow{i} \bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_j] \xrightarrow{f} M \to 0$$

donde $f(a_1,\ldots,a_p)=a_1x_1+\ldots+a_px_p$.

Escribamos $H=Ker(f)$. Como i y f son estrictos la filtración de M viene dada por

$$M^{(m)} = (H+(A^p)^{(m)})/H \text{ , } \forall m \in Z$$

(donde se escribe A^p en lugar de $\bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_j]$).

Tenemos que demostrar por tanto que

$$H = \bigcap_{m\in Z} (H + (A^p)^{(m)}).$$

Escribamos $\overline{H} = \bigcap_{m\in Z} H + (A^p)^{(m)}$.

La inclusión $H \subset \overline{H}$ es evidente. Consideremos las sucesiones exactas

$$0 \to H \to A^p \to A^p/H \to 0$$

$$0 \to \overline{H} \to A^p \to A^p/\overline{H} \to 0$$

(sobre H y $\overline{H}$ se consideran las filtraciones inducidas por la de A^p; sobre A^p/H y $A^p/\overline{H}$ las filtraciones imágenes).

Aplicando 0.0.14. se obtienen dos sucesiones exactas:

$$0 \to gr(H) \to gr(A^p) \to gr(A^p/H) \to 0$$

$$0 \to gr(\bar{H}) \to gr(A^p) \to gr(A^p/\bar{H}) \to 0$$

pero $gr(A^p/H)=gr(A^p/\bar{H})$ (basta observar que $H+(A^p)^{(k)} = \bar{H}+(A^p)^{(k)}$ para todo $k \in Z$).Como la filtración de A es noetheriana se tiene $H=\bar{H}$ (basta aplicar ii) de 0.0.12.).

0.0.16. COROLARIO.-

Si la filtración de A es noetheriana y la filtración de M es buena, para todo submódulo L de M se verifica:

$$L = \bigcap_{m \in Z} L+M^{(m)}.$$

Prueba.- Por 0.0.13. la filtración inducida, por la M, sobre L es buena. Por tanto la filtración imagen sobre M/L esbuena y basta aplicar 0.0.15. ii).

0.0.17. PROPOSICION.- (Cf. [SCH]).

a) Si A es un A-módulo filtrado y M es un A-módulo filtrado libre, entonces gr(M) es graduado libre.

b) Si la filtración de A es noetheriana, la filtración de M es buena y si $gr(M)$ está generado por $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_p\}$ (con $\bar{x}_i \in gr^{(k_i)}(M)$), entonces M está generado por $\{x_1,\ldots,x_p\}$. Más aún, $M^{(k)} = \sum_{i=1}^{p} A^{(k-k_i)}.x_i$, $\forall k \in Z$, y si gr(M) es graduado libre entonces M es filtrado libre.

Prueba.- a) Es evidente.

b) Consideremos la sucesión exacta

$$\bigoplus_{j=1}^{p} A[-k_i] \xrightarrow{f} N \to 0$$

donde $f(a_1,\ldots,a_p)= a_1x_1+\ldots+a_px_p$ y N es el submódulo de M generado por $\{x_1,\ldots,x_p\}$. Se considera sobre N la filtracion imagen:

$$N^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_i)}.x_i \ , \forall k \in Z.$$

Sea $x \in M^{(k)} \setminus M^{(k-1)}$, se tiene:

$\bar{x} = x+M^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{p} \bar{a}_j\bar{x}_j$, con $\bar{a}_j \in gr^{(k-k_j)}(A)$. Es decir:

$x-\sum_{j=1}^{p} a_jx_j \in M^{(k-1)}$ y por tanto $M^{(k)} \subseteq \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_j)}.x_j + M^{(k-1)} \subseteq$ $\subseteq N + M^{(k-1)}$. Esto demuestra que $M^{(k)} \subseteq N + M^{(l)}$, $\forall (k,l) \in Z$ y por tanto $M = N + M^{(l)}$, $\forall l \in Z$. Luego $M = \bigcap_{l \in Z} (N+M^{(l)}) = N$.

Si $gr(M)$ es graduado libre, sea $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_p\}$ (con $\bar{x}_i = x_i + M^{(m_i-1)}$, $m_i \in Z$, $1 \leq i \leq p$) una base de $gr(M)$ como $gr(A)$-módulo. Se considera la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Ker(f) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} A[-m_i] \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

donde $f(a_1,\ldots,a_p)=a_1x_1+\ldots+a_px_p$. Sobre M se considera la filtración imagen. Aplicando el funtor $gr(\ )$ se obtiene (Cf. 0.0.14.):

$$0 \rightarrow gr(Ker(f)) \rightarrow gr(\bigoplus_{i=1}^{p} A[-m_i]) \xrightarrow{gr(f)} gr(M) \rightarrow 0$$

pero $gr(\bigoplus_{i=1}^{p} A[-m_i]) = \bigoplus_{i=1}^{p} gr(A)[-m_i] = gr(M)$ y por tanto $gr(ker(f))$ $=0$. Así pues $Ker(f) = 0$ y M es filtrado libre.

0.0.18. PROPOSICION.-(Cf. [SCH]).

Supongamos que la filtración de A es noetheriana. Sea

$$(1) \quad L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

una sucesión de filt($_A\mathcal{M}$). Si la filtración de M es buena y la sucesión

$$(2) \quad gr(L) \xrightarrow{gr(f)} gr(M) \xrightarrow{gr(g)} gr(N)$$

es exacta en $gr({}_{gr(A)}\mathfrak{M})$, entonces la sucesión (1) es exacta en la categoría de los A-módulos.

Prueba.- Sea $y \in M^{(k)} \setminus M^{(k-1)}$ t.q. $g(y)=0$. Entonces $gr(g)(y+M^{(k-1)}) = g(y)+N^{(k-1)}=0$. Por la exactitud de (2) existe $x+L^{(k-1)} \in gr^{(k)}(L)$ t.q. $gr(f)(x+L^{(k-1)})=f(x)+M^{(k-1)}=y+M^{(k-1)}$. Por tanto $f(x)-y \in M^{(k-1)}$ y se tiene $y \in f(L)+M^{(k-1)}$. Esto demuestra que $y \in \bigcap_{l \in Z} f(L)+M^{(l)}$. Aplicando 0.0.16. se tiene $y \in f(L)$.

0.0.19. -

Sea A un anillo filtrado y sean M y N A-módulos filtrados. Si $f:M \longrightarrow N$ es un homomorfismo filtrado, se considera sobre Ker(f) la filtración inducida por la de M y sobre Im(f) la inducida por la de N. El homomorfismo canónico (graduado)

$$i_f: gr(Ker(f)) \longrightarrow Ker(gr(f))$$

definido por $i_f(x+Ker(f)^{(m-1)}) = x+M^{(m-1)}$, $\forall x \in Ker(f)^{(m)}$, $\forall m \in Z$. es inyectivo y se identifica $gr(Ker(f))$ con $i_f(gr(Ker(f)))$.

El homomorfismo canónico (graduado)

$$j_f: Im(gr(f)) \longrightarrow gr(Im(f))$$

definido por $j_f(gr(f)(x+M^{(m-1)}))=f(x)+Im(f)^{(m-1)}$, $\forall x \in M^{(m)}$, $\forall m \in Z$ es inyectivo y se identifica $Im(gr(f))$ con $j_f(Im(gr(f)))$.

0.0.20. PROPOSICION.-

En la situación de 0.0.19. i_f es sobreyectivo si y solo si j_f es sobreyectivo.

Prueba.-(Cf. [SCH] prop. 1.7.).

0.1. LOS ANILLOS $\mathcal{D}(K)$, $\mathcal{D}(K)$ Y A(K). SUS FILTRACIONES.

En lo que se sigue, salvo que se especifique lo contrario, la letra K denotará un cuerpo conmutativo de característica cero.

$\mathcal{D}(K)$ (resp. A(K)) denotará la K-álgebra de los operadores diferenciales con coeficientes en el anillo $K[[X]] = K[[X_1,\ldots,X_n]]$ (resp. $K[X_1,\ldots,X_n]$) ($n \in N$). Así $\mathcal{D}(K)$ (resp. A(K)) es el conjunto de expresiones formales

$$\sum_{\delta \in N^n} a_\delta (X) D^\delta$$

donde $a_\delta(X) \in K[[X]]$ (resp. $K[X]$) y $D=(D_1,\ldots,D_n)=(\frac{\partial}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_n})$.

Si $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in N^n$ la expresión D^δ es una abreviación de $D_1^{\delta_1}\ldots D_n^{\delta_n}$.

En este conjunto de define una suma de la manera natural y un producto por las reglas $D_i.f = f.D_i + \frac{\partial f}{\partial X_i}$ $(1\leq i\leq n)$, $\forall f \in K[[X]]$ (resp. $K[X]$). El anillo (no conmutativo) así construido tiene una estructura de K-módulo. Si K= R ó C, $\mathcal{D}(K)$ denotará la K-álgebra de los operadores diferenciales con coeficientes en el anillo $K\{X\} = K\{X_1,\ldots,X_n\}$.

En adelante la letra B denotará indistintamente los anillos $K[[X]]$, $K\{X\}$-si K=R o´ C- y $K[X]$. Los anillos $\mathcal{D}(K)$, $\mathcal{D}(K)$ y A(K) serán denotados a su vez $B[D]$. La letra p denotará un entero positivo.

0.1.0. DEFINICION.-

Sea $L_2 \colon R^n \longrightarrow R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. Sea $\underline{P}$ un elemento no nulo de $B[D]^p$. Si $\underline{P}$ se escribe de la forma

$$\underline{P}= \sum_{(\delta,i)\in N^n\times\{1,\dots,p\}} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)} =$$

$$= \sum_{(\alpha,\delta,i)\in N^{2n}\times\{1,\dots p\}} a_{(\alpha,\delta,i)}X^{\alpha}D^{(\delta,i)}$$

donde $a_{(\delta,i)}\in B$ y $a_{(\alpha,\delta,i)}\in K$, se llama orden de $\underline{P}$, relativamente a L_2, al número real

$$\mathrm{ord}_{L_2}(\underline{P})= \max\left\{L_2(\delta)/\exists i\in\{1,\dots,p\} \text{ y } a_{(\delta,i)} \neq 0\right\}.$$

Se llama diagrama de Newton de $\underline{P}$ al conjunto

$$N(\underline{P})= \left\{(\alpha,\delta,i)\in N^{2n}\times\{1,\dots,p\}/\ a_{(\alpha,\delta,i)}\neq 0\right\}.$$

0.1.1.-

Si $d\in R$ se define

$$(B[D]^p)^{(d)}_{L_2} = \left\{\underline{P}\in B[D]^p \ /\ \mathrm{ord}_{L_2}(\underline{P})\leq d\right\}.$$

(para aligerar la notación escribiremos $\mathrm{ord}(\underline{P})$ y $(B[D]^p)^{(d)}$ en lugar de $\mathrm{ord}_{L_2}(\underline{P})$ y $(B[D]^p)^{(d)}_{L_2}$).

Por definición se escribe $\mathrm{ord}(\underline{0})= -\infty$.

Para $p=1$ la familia $(B[D]^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración creciente del anillo $B[D]$ (Cf. 0.0.0.).

La familia $((B[D]^p)^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración creciente del $B[D]$-módulo $B[D]^p$ (Cf. 0.0.0.). Esta filtración será llamada la L_2-filtración de $B[D]^p$. De acuerdo con 0.0.5. escribiremos $gr_{L_2}(B[D])$ (reps. $gr_{L_2}(B[D]^p)$) o simplemente $gr(B[D])$ (resp. $gr(B[D]^p)$) el anillo graduado (resp. el $gr(B[D])$-módulo graduado) asociado a la L_2-filtración de $B[D]$ (resp. $B[D]^p$).

Se escribe

$$gr(B[D]^p) = \bigoplus_{d\in R} gr^{(d)}(B[D]^p)$$

donde

$$gr^{(d)}(B[D]^p) = (B[D]^p)^{(d)}/\widetilde{(B[D]^p)}^{(d)} \quad \forall d \in R.$$

Para p=1, $gr(B[D])$ es isomorfo (como anillo graduado) al anillo de polinomios

$$B[\xi] = B[\xi_1,\dots,\xi_n] = \bigoplus_{d\in R} \widehat{B[\xi]}^{(d)}_{L_2} = \bigoplus_{d\in R} \widehat{B[\xi]}^{(d)}$$

donde

$$\widehat{B[\xi]}^{(d)}_{L_2} = \widehat{B[\xi]}^{(d)} = \Big\{ \sum_{\alpha\in N^n} f_\alpha \xi^\alpha \in B[\xi] \,/\, f_\alpha = 0 \text{ si } L_2(\alpha) \neq d \Big\}.$$

El homomorfismo de anillos graduados

$$j_{L_2} = j = \bigoplus_{d\in R} j^{(d)}_{L_2} = \bigoplus_{d\in R} j^{(d)} : gr(B[D]) \longrightarrow B[\xi]$$

definido por

$$j^{(d)}_{L_2} = j^{(d)} : gr^{(d)}(B[D]) \longrightarrow \widehat{B[\xi]}^{(d)}$$

$$j^{(d)}\Big(\sum_{\substack{\delta\in N^n \\ L_2(\delta)\le d}} a_\delta(X) D^\delta + \widetilde{B[D]}^{(d)} \Big) = \sum_{\substack{\delta\in N^n \\ L_2(\delta)= d}} a_\delta(X)\, \xi^\delta$$

es un isomorfismo de anillos graduados.

En adelante se identificará $gr(B[D])$ a $B[\xi]$ mediante el isomorfismo j. Por la misma razón se identificará el gr(B[D])-módulo graduado gr(B[D]^p) al B[ξ]-módulo graduado

$$B[\xi]^p = \bigoplus_{d\in R} (\widehat{B[\xi]^p})^{(d)} := \bigoplus_{d\in R} (\widehat{B[\xi]}^{(d)} \underbrace{x\ldots x}_{p\text{-veces}} \widehat{B[\xi]}^{(d)}) \quad (*)$$

Se denota

$$(\sigma^p)^{(d)}_{L_2} := (\sigma^p)^{(d)}: (B[D]^p)^{(d)} \longrightarrow gr^{(d)}(B[D]^p) \equiv (\widehat{B[\xi]^p})^{(d)}$$

el homomorfismo canónico de paso al cociente. Si $\underline{P}=(P_1,\ldots,P_p)$ es un elemento de $(B[D]^p)^{(d)}$, entonces $(\sigma^p)^{(d)}_{L_2}(\underline{P}) = (\sigma^p)^{(d)}(\underline{P})$ es llamado el símbolo de orden d de $\underline{P}$ relativamente a la L_2-filtración de $B[D]^p$.

Es evidente que

$$(\sigma^p)^{(d)}(\underline{P}) = (\sigma^{(d)}(P_1),\ldots,(\sigma^{(d)})(P_p))$$

donde se ha notado $\sigma^{(d)}$ en lugar de $(\sigma^1)^{(d)}$.

<u>0.1.2. Propiedad multiplicativa del símbolo.</u>

$\forall\, \underline{P}\in(B[D]^p)^{(d)}$, $\forall Q\in(B[D]\ )^{(d')}$ se verifica

$$(\sigma^p)^{(d+d')}(Q.\underline{P}) = \sigma^{(d')}(Q).(\sigma^p)^{(d)}(\underline{P}).$$

<u>0.1.3. DEFINICION.</u>

Si $\underline{P}$ es un elemento de orden d de $B[D]^p$ se llama símbolo principal de $\underline{P}$ relativamente a la L_2-filtración de $B[D]^p$ al símbolo de orden d de $\underline{P}$, $(\sigma^p)^{(d)}(\underline{P})$. El símbolo principal de $\underline{P}$ será notado $(\sigma^p)(\underline{P})$.

(*) Esta graduación será llamada la L_2-graduación de $B[\xi]^p$.

0.1.4. NOTACION.-

Si no hay riesgo de confusión se notará en adelante $\sigma^{(d)}(\underline{P})$ (resp. $\sigma(\underline{P})$) en lugar de $(\sigma^{P})^{(d)}(\underline{P})$ (resp. $(\sigma^{P})(\underline{P})$).

0.1.5. La filtración de Bernstein de A(K).-

Sea $L: R^{2n} \rightarrow R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. Si $\underline{P} \in A(K)^{P}$ el diagrama de Newton de $\underline{P}$ (Cf. 0.1.0.) $N(\underline{P})$ es un subconjunto finito de $N^{2n}x\{1,\ldots,p\}$. Si $\underline{P}$ se escribe

$$\underline{P} = \sum_{(\alpha,\delta,i)\in N^{2n}x\{1,\ldots,p\}} a_{(\alpha,\delta,\ i)}X^{\alpha}D^{(\delta,i)}$$

se llama orden total de $\underline{P}$ relativamente a L (comparar con 0.1.1.) al número real

$$\mathrm{ordt}_L(\underline{P}) = \max\{L(\alpha,\delta)/\exists i\in\{1,\ldots,p\} \text{ y } a_{(\alpha,\delta,i)} \neq 0\}.$$

Si $d\in R$ se define

$$(A(K)^{P})_L^{(d)} = \{\underline{P}\in A(K)^{P}/\ \mathrm{ordt}_L(\underline{P}) \leq d\}.$$

$(A(K)^{P})_L^{(d)}$ es un K-espacio vectorial. Para aligerar la notación escribiremos $\mathrm{ordt}(\underline{P})$ y $(A(K)^{P})^{(d)}$ en lugar de $\mathrm{ordt}_L(\underline{P})$ y $(A(K)^{P})_L^{(d)}$ respectivamente.

La familia $(A(K)^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración creciente (Cf. 0.0.0.) del anillo A(K). La familia $((A(K)^{P})^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración creciente del A(K)-módulo $A(K)^{P}$. Esta filtración será llamada la filtración de Bernstein de $A(K)^{P}$ relativamente a L o simplemente la L-filtración de Bernstein de $A(K)^{P}$.

Se notará $gr_L(A(K)^{P})$ o simplemente $gr(A(K)^{P})$ el graduado asociado a ésta filtración.

$gr(A(K))$ es isomorfo (como anillo graduado) al anillo graduado

$$K[X,\xi] = K[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n] = \bigoplus_{d\in R} \widehat{K[X,\xi]}^{(d)}$$

donde

$$\widehat{K[X,\xi]}^{(d)} = \Big\{ \sum_{(\alpha,\delta)\in N^{2n}} f_{(\alpha,\delta)} X^{\alpha} \xi^{\delta} \in K[X,\xi] / f_{(\alpha,\delta)}=0 \text{ si } L(\alpha,\delta)\neq d \Big\}.$$

En lo que sigue se identificará $gr(A(K))$ a $K[X,\xi]$. Por la misma razón de identificará $gr(A(K)^p)$ al $K[X,\xi]$-módulo graduado

$$K[X,\xi]^p = \bigoplus_{d\in R} \widehat{(K[X,\xi]^p)}^{(d)} := \bigoplus_{d\in R} \underbrace{\widehat{K[X,\xi]}^{(d)} \times \ldots \times \widehat{K[X,\xi]}^{(d)}}_{p\text{-veces}} .$$

Notaremos

$$(\gamma^p)_L^{(d)} (:= (\gamma^p)^{(d)}) : (A(K)^p)^{(d)} \longrightarrow gr^{(d)}(A(K)^p) = \widehat{(K[X,\xi]^p)}^{(d)}$$

el homomorfismo canónico de paso al cociente.

Si $\underline{P} \in (A(K)^p)^{(d)}$, $(\gamma^p)^{(d)}(\underline{P})$ es llamado el símbolo de orden d de $\underline{P}$ relativamente a la L-filtración de Bernstein de $A(K)^p$. Si $ordt(\underline{P})=d$, $(\gamma^p)^{(d)}(\underline{P})$ es llamado el símbolo principal de $\underline{P}$ relativamente a la L-filtración de Bernstein de $A(K)^p$. El símbolo principal de $\underline{P}$ será notado $(\gamma^p)(\underline{P})$. Si no hay lugar a confusión, en adelante notaremos $\gamma^{(d)}(\underline{P})$ y $\gamma(\underline{P})$ en lugar de $(\gamma^p)^{(d)}(\underline{P})$ y $(\gamma^p)(\underline{P})$ respectivamente.

CAPITULO 1

TEOREMA DE DIVISION EN LOS MODULOS

$K[[X]]^p$ Y $K[X]^p$.

1.0. RELACIONES DE ORDEN SOBRE $N^n x\{1,\dots,p\}$. EXPONENTES PRIVILEGIADOS.-

1.0.0.

Sea $L:R^n \longrightarrow R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. La relación, que notaremos $<_L$, definida sobre $N^n x\{1,\dots,p\}$ por:

$$(\alpha,i) <_L (\beta,j) \Leftrightarrow \begin{cases} L(\alpha)<L(\beta) \\ \text{o bien} \\ L(\alpha)=L(\beta) \quad \text{e} \quad i<j \\ \text{o bien} \\ L(\alpha)=L(\beta),\ i=j \quad \text{y} \quad \exists k\in\{1,\dots,p\} \text{ t.q.} \end{cases}$$

$$\alpha_n = \beta_n, \dots, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1} \quad \text{y} \quad \alpha_k < \beta_k.$$

es una relación de orden total sobre $N^n x\{1,\dots,p\}$. La relación $<_L$ es también un buen orden.

1.0.1 DEFINICION.-

Sea $\underline{f}$ un elemento de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$). Si $\underline{f}$ se escribe de la forma

$$\underline{f} = \sum_{(\alpha,i)\in N^n x\{1,\ldots,p\}} f_{(\alpha,i)} X^{(\alpha,i)}$$

con $f_{(\alpha,i)} \in K$, se llama diagrama de Newton de $\underline{f}$ al conjunto de índices

$$N(\underline{f}) = \{(\alpha,i)\in N^n x\{1,..,p\} \ / \ f_{(\alpha,i)} \neq 0\}.$$

1.0.2. DEFINICION.-

Sea $L:R^n \longrightarrow R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. Sea $\underline{f}$ un elemento de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$). Se llama orden (resp. grado) de $\underline{f}$, relativamente a L, al número real

$$\mathrm{ord}_L(\underline{f}) = \inf\{L(\alpha)/\ \exists\, i\in\{1,\ldots,p\} \text{ y } (\alpha,i)\in N(\underline{f})\}.$$

$$(\text{resp. } \mathrm{grd}_L(\underline{f}) = \sup\{L(\alpha)/\ \exists\, i\in\{1,\ldots,p\} \text{ y } (\alpha,i)\in N(\underline{f})\}.)$$

Se llama forma inicial (resp. forma final) de $\underline{f}$, relativamente a L, al elemento de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$)

$$\mathrm{in}_L(\underline{f}) = \sum_{(\alpha,i)/L(\alpha)=\mathrm{ord}_L(\underline{f})} f_{(\alpha,i)} X^{(\alpha,i)}$$

$$(\text{resp. } \mathrm{fin}_L(\underline{f}) = \sum_{(\alpha,i)/L(\alpha)=\mathrm{grd}_L(\underline{f})} f_{(\alpha,i)} X^{(\alpha,i)})$$

1.0.3. DEFINICION.-

Sea $L:R^n \to R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. Sea $\underline{f} = \underline{0}$ un elemento de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$).

Se llama exponente privilegiado de $\underline{f}$, relativamente a L, al menor elemento (con respecto al orden $<_L$ de 1.0.0.) del conjunto $N(in_L(\underline{f}))$ (resp. $N(fin_L(\underline{f}))$). Dicho elemento se denotará $exp_L(\underline{f})$.

1.0.4. NOTA.-

Si $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_p)$ es un elemento de $K[X]^p$ y cada f_i es un polinomio homogéneo de grado $d \in N$, entonces el exponente privilegiado de $\underline{f}$ -relativamente a la forma antidiagonal sobre R^n- coincide con el exponente privilegiado de $\underline{f}$ considerado como elemento de $K[[X]]^p$.

1.0.5. Propiedad aditiva del exponente privilegiado.-

Si $\underline{f} \in K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$) y $g \in K[[X]]$ (resp. $K[X]$) ($\underline{f} \neq \underline{0}$, $g \neq 0$) se verifica

$$exp_L(g.\underline{f}) = exp_L(g) + exp_L(\underline{f}).$$

1.0.6.

Para lo que se sigue se fija una forma lineal $L:R^n \to R$ con coeficientes positivos o nulos. Si $\underline{f} \neq \underline{0}$ es un elemento de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$) llamaremos exponente privilegiado de $\underline{f}$ (y denotaremos $exp(\underline{f})$) al exponente privilegiado de $\underline{f}$ relativamente a L. Cuando la expresión $\exp(\underline{f})$ aparezca en el texto se tratará siempre de un elemento $\underline{f}$ no nulo.

1.0.7. NOTAS.-

a) Si $\underline{f} \in K[[X]]^p$ es evidente que se cumple

$$\exp_L(\underline{f}) = \inf_{<_L}(N(\underline{f}))$$

(donde $<_L$ es el orden definido en 1.0.0.).

b) Existe un orden total, que notaremos $\triangleleft_L$, sobre $N^n x\{1,\dots,p\}$ tal que se verifica:

$$\forall\ \underline{f} \in K[X]^p \setminus (\underline{0}),\ \exp_L(\underline{f}) = \inf_{\triangleleft_L}(N(\underline{f})).$$

En efecto: la relación, que notaremos $\triangleleft_L$, definida sobre $N^n x\{1,\dots,p\}$ por

$$(\alpha,i) \triangleleft_L (\beta,j) \Leftrightarrow \begin{cases} L(\alpha) > L(\beta) \\ \text{o bien} \\ L(\alpha)=L(\beta) \quad \text{e} \quad i<j \\ \text{o bien} \\ L(\alpha)=L(\beta),\ i=j \quad \text{y} \quad \exists\, k \in \{1,\dots,p\} \text{ t.q.} \\ \quad \alpha_n=\beta_n,\dots,\alpha_{k+1}=\beta_{k+1} \quad \text{y} \quad \alpha_k<\beta_k. \end{cases}$$

es una relación de orden total (pero no un buen orden) sobre $N^n x\{1,\dots,p\}$. Es evidente que se verifica:

$$\exp_L(\underline{f}) = \inf_{\triangleleft_L}(N(\underline{f})), \quad \forall\ \underline{f} \in K[X]^p \setminus (\underline{0}).$$

1.0.8. Propiedades del exponente privilegiado.-

a) Sea $\{\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m\}$ una familia de elementos de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$) verificando

$$\exp(\underline{f}^i) \neq \exp(\underline{f}^j) \quad i \neq j \ , \ 1\leq i,j\leq m.$$

Entonces $\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m \neq \underline{0}$ y además $\exists k\in\{1,\ldots,p\}$ t.q.

$$\exp(\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m)= \min_{<_L}\{\exp(\underline{f}^j),\ 1\leq j\leq m\} = \exp(\underline{f}^k)$$

$$(\text{resp. } \exp(\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m)= \min_{\triangleleft_L}\{\exp(\underline{f}^j),\ 1\leq j\leq m\}= \exp(\underline{f}^k))$$

b) Sea $\{\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m\}$ una familia de elementos de $K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$) tal que $\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m \neq \underline{0}$. Entonces

$$\min_{<_L}\{\exp(\underline{f}^j),\ 1\leq j\leq m\} \overset{=}{<}_L \exp(\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m)$$

$$(\text{resp. } \min_{\triangleleft_L}\{\exp(\underline{f}^j),\ 1\leq j\leq m\} \overset{=}{\triangleleft}_L \exp(\underline{f}^1+\ldots+\underline{f}^m))$$

Las propiedades a) y b) se demuestran por inducción sobre m.

1.0.9. Partición asociada a un elemento de $(N^n\times\{1,\ldots,p\})^m$.

Sea $((\alpha^1,i^1),\ldots,(\alpha^m,i^m))) \in (N^n\times\{1,\ldots,p\})^m$. Se considera la familia de subconjuntos de $N^n\times\{1,\ldots,p\}$, E^j $(1\leq j\leq m)$ definida por

$$E^1 = (\alpha^1,i^1) + N^n$$

$$E^j = ((\alpha^j,i^j) + N^n) \setminus (\bigcup_{k=1}^{j-1} E^k) , \quad 2\leq j\leq m.$$

Se escribe $E := \bigcup_{j=1}^{m} E^j$ y $\overline{E} := N^n x\{1,\ldots,p\} \setminus E.$

La familia $\{E^1,\ldots,E^m,\overline{E}\}$ es una partición de $N^n x\{1,\ldots,p\}$. Esta familia puede tener elementos iguales al conjunto vacío. Esta familia será llamada la partición asociada al elemento $((\alpha^1,i^1),\ldots,(\alpha^m,i^m)) \in (N^n x\{1,\ldots,p\})^m$.

1.0.10.

Con las notaciones de 1.0.9. se considera $m=4$, $p=1$, $n=2$ y se identifica $N^2 x\{1\}$ con N^2. La figura 1.0.10. representa la partición asociada a $(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4)$.

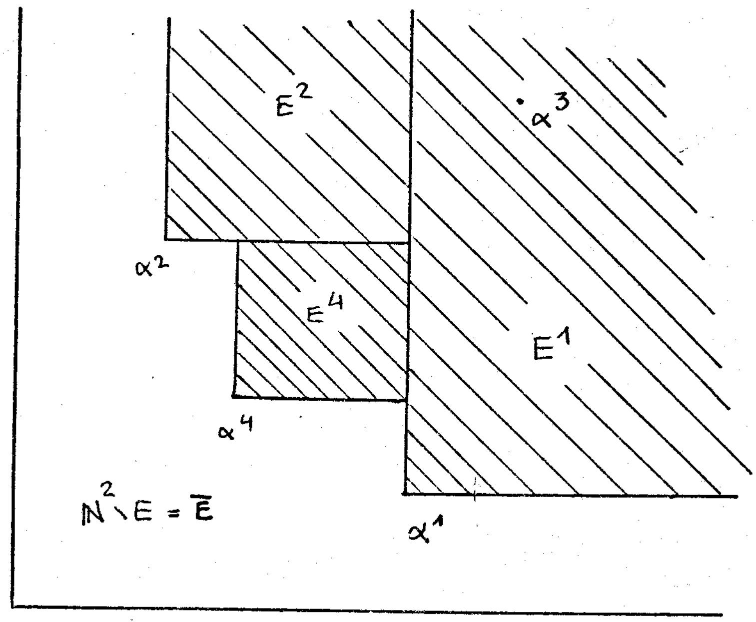


Fig. 1.0.10.

$E^3 = \phi$

1.1. TEOREMA DE DIVISION EN LOS MODULOS $K[[X]]^p$ Y $K[X]^p$.

1.1.0. TEOREMA.-

Sea $(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m)$ un elemento de $(K[[X]]^p)^m$ (resp. $(K[X]^p)^m$), tal que $\underline{f}^j \neq \underline{0}$, $1\leq j\leq m$. Sea $\{E^1,\ldots,E^m,\bar{E}\}$ la partición asociada al elemento $(\exp(\underline{f}^1),\ldots,\exp(\underline{f}^m))$ (Cf. 1.0.9.). Entonces para todo $\underline{f} \in K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^p$) existe un único elemento $(q_1,\ldots,q_m,\underline{r}) \in K[[X]]^m x K[[X]]^p$ (resp. $K[X]^m x K[X]^p$) tal que:

i) $\underline{f} = q_1.\underline{f}^1+\ldots+q_m.\underline{f}^m + \underline{r}$

ii) $\exp(\underline{f}^j) + N(q_j) \subseteq E^j$, $1\leq j\leq m$

iii) $N(\underline{r}) \subseteq \bar{E}$.

1.1.1. Nota sobre la demostración de 1.1.0.

Una demostración de 1.1.0. para el caso de las series formales se encuentra en [H. pp. 73-74]. El caso de los polinomios se encuentra en [GA-2]. Finalmente , si $K = R$ ó C, existe un teorema análogo a 1.1.0. en el módulo $K\{X\}^p$. En este caso puede encontrarse una prueba en [A-H-V], [BR] y [GA-1].

1.1.2. Observaciones sobre el teorema 1.1.0.

a) Sea $L_2:R^n \longrightarrow R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. La letra B denotará un anillo conmutativo unitario y la letra S el anillo $B[[Y]]=B[[Y_1,\ldots,Y_n]]$ (resp. $B[Y]=$

$B[Y_1,\dots,Y_n]$). Si p es un entero positivo la letra M denotará el S-módulo libre S^p.

Para cada $d \in R$ se define

$$M_{L_2}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{(\alpha,i)\in N^n \times \{1,\dots,p\} \\ L_2(\alpha)\geq d}} f_{(\alpha,i)} Y^{(\alpha,i)} \Big/ \; f_{(\alpha,i)} \in B \right\}$$

$$\left(\text{resp. } M_{L_2}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{(\alpha,i)\in N^n \times \{1,\dots,p\} \\ L_2(\alpha)\leq d}} f_{(\alpha,i)} Y^{(\alpha,i)} \Big/ \; f_{(\alpha,i)}=0 \text{ salvo para un núm. finito de indices.} \right\}\right)$$

La familia $(S^{(d)})_{d\in R}$ (para p=1) es una filtración decreciente (resp. creciente) del anillo S. La familia $(M^{(d)})_{d\in R}$ es una filtración decreciente (resp. creciente) del S-módulo $M = S^p$ (Cf. 0.0.0.). Para aligerar la notación se escribirá $M^{(d)}$ en lugar de $M_{L_2}^{(d)}$.

El anillo graduado asociado a la filtración $(S^{(d)})$ de S se identifica naturalmente al anillo graduado

$$\hat{S} = \bigoplus_{d\in R} \hat{S}_{L_2}^{(d)} = \bigoplus_{d\in R} \hat{S}^{(d)}$$

donde

$$\hat{S}_{L_2}^{(d)} = \hat{S}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha\in N^n \\ L_2(\alpha)=d}} f_\alpha Y^\alpha \Big/ \; f_\alpha \in B \right\}.$$

$$\left(\text{resp. } \hat{S}_{L_2}^{(d)} = \hat{S}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha\in N^n \\ L_2(\alpha)=d}} f_\alpha Y^\alpha \Big/ \; f_\alpha=0 \text{ salvo para un número finito de indices.} \right\}\right).$$

El módulo graduado asociado a la filtración $(M^{(d)})$ de M se identifica naturalmente al $\hat{S}$-módulo graduado

$$\hat{M} = \bigoplus_{d\in R} \hat{M}^{(d)}_{L_2} = \bigoplus_{d\in R} \hat{M}^{(d)}$$

donde

$$\hat{M}^{(d)}_{L_2} = \hat{M}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{(\alpha,i)\in N^n\times\{1,\dots,p\} \\ L_2(\alpha)=d}} f_{(\alpha,i)} Y^{(\alpha,i)} / \ f_{(\alpha,i)} \in B \right\}$$

(resp. $\hat{M}^{(d)}_{L_2} = \hat{M}^{(d)} = \left\{ \sum_{\substack{(\alpha,i)\in N^n\times\{1,\dots,p\} \\ L_2(\alpha)=d}} f_{(\alpha,i)} Y^{(\alpha,i)} / \begin{array}{l} f_{(\alpha,i)}=0 \text{ salvo para un} \\ \text{núm.finito de indices} \end{array} \right\}$

b) Consideremos ahora una forma lineal $L:R^k \times R^n \to R$ $(k,n \in N)$ con coeficientes positivos o nulos. Notemos $L_1 = L|_{R^k\times(0)}$ y $L_2 = L|_{(0)\times R^n}$. Supongamos que con las notaciones de 1.1.2. a) B es el anillo $K[[X]] = K[[X_1,\dots,X_n]]$ (resp. $K[X] = K[X_1,\dots,X_n]$)

Sea $(\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m)$ un elemento de $M^m = (K[[X]][[Y]]^p)^m$ (resp. $(K[X][Y]^p)^m$), tal que $f^i \in \hat{M}^{(d_i)}$, $d_i \in R$ $(1\le i\le m)$. Si $\underline{f} \in \hat{M}^{(d)}$ el teorema de división 1.1.0. -relativamente a la forma L- aplicado a $\underline{f}$ y $(\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m)$ asegura la existencia (y la unicidad) de un elemento $(q_1,\dots,q_m,\underline{r}) \in S^m \times M$, verificando

i) $\underline{f} = q_1\underline{f}^1 + \dots + q_m\underline{f}^m + \underline{r}$

ii) $\exp(\underline{f}^i) + N(q_i) \subseteq E^i$, $1\le i\le m$

iii) $N(\underline{r}) \subseteq \overline{E}$.

En esta situación el elemento $(q_1,\ldots,q_m,\underline{r})$ verifica además la condición:

$$\text{iv)}\begin{cases} q_i \in \hat{S}^{(d-d_i)}, & (1\leq i\leq m) \\ \underline{r}\in \hat{M}^{(d)} \end{cases}$$

En efecto: escribamos

$$1\leq i\leq m \qquad q_i = \sum_{s\in R} q_{i,s} \quad \text{con} \quad q_{i,s}\in \hat{S}^{(s)}, \ \forall s\in R$$

$$\underline{r} = \sum_{s\in R} \underline{r}_s \qquad \text{con} \quad \underline{r}\in \hat{M}^{(s)}$$

entonces

$$\underline{f}=\underline{f}_d=\left(\sum_{s\in R} q_{1,s}\right)\underline{f}^1+\ldots+\left(\sum_{s\in R} q_{m,s}\right)\underline{f}^m + \sum_{s\in R}\underline{r}_s =$$

$$= q_{1,d-d_1}\underline{f}^1+\ldots+q_{m,d-d_m}\underline{f}^m + \underline{r}_d$$

y por la unicidad (en 1.1.0.) se tiene

$$q_i = q_{i,d-d_i}\in \hat{S}^{(d-d_i)} \qquad 1\leq i\leq m$$

$$\underline{r} = \underline{r}_d \in \hat{M}^{(d)}.$$

c) Supongamos que la forma lineal $L_2=L|_{(0)\times R^n}:R^n \to R$ tenga todos sus coeficientes positivos. Entonces

$$\hat{M}^{(d)} = \bigoplus_{(\alpha,i)/L_2(\alpha)=d} B.Y^{(\alpha,i)} \subset B[Y]^p$$

pues $\left\{(\alpha,i)\in N^{(n)}\times\{1,\ldots,p\} \ /L_2(\alpha)=d\right\}$ es finito.

Entonces, en la situación de 1.1.2. b) (esto es: $\underline{f} \in \widehat{M}^{(d)}$, $(\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m) \in M^m$ y $\underline{f}^i \in \widehat{M}^{(d_i)}$) se tiene

$$q_i \in K[[X]][Y] \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\underline{r} \in K[[X]][Y]^p.$$

Señalaremos que si la forma lineal L_2 tiene algún coeficiente nulo las afirmaciones anteriores no son siempre verdaderas. En efecto, pongamos $B=C$, $S=C[[Y_1,Y_2]]$, $p=1$, $L_2(i,j)=j$ $\forall (i,j) \in \mathbb{R}^2$, $f = 1 \in \widehat{S}^{(0)}_{L_2}$, $m=1$ y $f^1 = 1-Y_1 \in S^{(0)}_{L_2}$. Entonces, el teorema de división 1.1.0. afirma que

$$1 = \Big(\sum_{t \in R} Y_1^{\,t} \Big)(1-Y_1)$$

y $q_1 = \sum_{t \in R} Y_1^{\,t} \notin C[Y_1,Y_2]$.

1.2. BASES DE DIVISION.-

En este parágrafo fijamos una forma lineal $L:R^n \to R$ con coeficientes positivos o nulos. La letra B denotará indistintamente los anillos $K[[X]]=K[[X_1,\dots,X_n]]$, $K[X]=K[X_1,\dots,X_n]$ y-si $K=R$ o C- $K\{X\}=K\{X_1,\dots,X_n\}$. La letra p denotará un entero positivo

1.2.0. Nota al teorema 1.1.0..-

Si $\{\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m\}$ es un subconjunto de $B^p \setminus (0)$ y si $\underline{f} \in B^p$, el resto de la división de $\underline{f}$ por $(\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m)$ será denotado por $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m)$ (Cf. 1.1.0.).

Si $\tau:\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,m\}$ es una aplicación biyectiva, en general se tiene

$$\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m) \neq \underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)}) \ ;$$

basta tomar, en $C[[X_1,X_2]]$, $\underline{f} = X_1+X_2$, $\underline{f}^1=X_1$, $\underline{f}^2=X_2$ entonces

$$\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,\underline{f}^2) = \underline{f}^2$$

$$\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^2,\underline{f}^1) = \underline{f}^1.$$

Sin embargo se tiene la siguiente proposición:

1.2.1. PROPOSICION.- Sea M un submódulo de B^p, $M\neq(0)$. Sea $\{\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m\}$ un subconjunto de $M\setminus(\underline{0})$ y sea $\tau:\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,m\}$ una aplicación biyectiva.Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\forall \underline{f} \in B^p$, $\underline{f} \in M$ si y solo si $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m)=0$

ii) $\forall \underline{f} \in B^p$, $\underline{f} \in M$ si y solo si $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})=0$.

Prueba.- Es suficiente probar i) $\Rightarrow$ ii). Si $\underline{f} \in B^p$, haciendo la división (Cf. 1.1.0.) de $\underline{f}$ por $(\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})$ se obtiene

$$(*) \quad \underline{f} = g_{\tau(1)}\underline{f}^{\tau(1)}+\dots+g_{\tau(m)}\underline{f}^{\tau(m)} + \underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})$$

$$\text{y} \quad N(\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})) \subseteq (N^n x\{1,\dots,p\}) \setminus (\bigcup_{j=1}^{m} \exp(f^j)+N^n))$$

Si $\underline{f} \in M$ entonces $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)}) \in M$ y dividiendo se obtiene:

$$\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)}) = \sum_{j=1}^{m} 0.\underline{f}^j + \underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})$$

y aplicando i) se tiene $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)})=\underline{0}$.

Por otra parte, si $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^{\tau(1)},\dots,\underline{f}^{\tau(m)}) = \underline{0}$ entonces $\underline{f} \in M$ (basta aplicar (*)).

La proposición 1.2.1. permite dar la siguiente definición:

1.2.2. DEFINICION.- (Base de división)

Sea M un submódulo de B^p, $M \neq (\underline{0})$. Una base de división de M es un subconjunto $\{\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m\}$ de $M \setminus (\underline{0})$ verificando:

$$\forall \underline{f} \in B^p, \quad \underline{f} \in M \quad \text{si y solo si} \quad \underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m) = \underline{0}.$$

1.2.3. OBSERVACIONES.-

1) Una base de división de un submódulo M de B^p es siempre un sistema de generadores de M.

2) En realidad hay que hablar de base de división de M relativamente a L. En efecto: en el anillo $C[[X_1,X_2]]$ la familia $\{X_1X_2+X_1^2,\ X_2^2+X_1^2,\ X_1^3+X_1^4\}$ es una base de división del ideal $\mathfrak{a}$ que ella genera -si se consideran los exponentes privilegiados y la división (Cf. 1.0.3. y 1.1.0.) relativamente a la forma lineal $L(i,j)=i$ $\forall (i,j)\in R^2$-. Si embargo, si consideramos la forma $L(i,j)=j$ $\forall (i,j)\in R^2$, la familia en cuestión no es una base de división de $\mathfrak{a}$. En efecto; el elemento $(X_1^3+X_2^2)$ pertenece a $\mathfrak{a}$ y si se hace la división de $(X_1^3+X_2^2)$ por $(X_1^2+X_1X_2,\ X_1^2+X_2^2,\ X_1^3+X_1^4)$ se obtiene

$$X_1^3+X_2^2 = (X_1-X_2)(X_1^2+X_1X_2) + X_1X_2^2+X_2^2$$

y el resto no es cero.

En adelante cuando la expresión "base de división" aparezca en el texto se sobreentenderá que es relativamente a la forma L fijada de antemano.

3) Algunos autores (Cf. [BR], [GA-1], [GA-2]) denominan base standard a la base de división aquí definida. Señalaremos que una base standard (de un ideal de B) en el sentido de Hironaka, no es en general una base de división del ideal en cuestión

Basta tomar $B = \mathbb{C}[[X_1,X_2]]$ y $\mathcal{G}=(f^1,f^2)B$ con $f^1=X_1+X_2$ y $f^2=X_1-X_2$. $\{f^1,f^2\}$ es una base standard de $\mathcal{G}$ ya que $(in(f^1),\ in(f^2))$ genera $in(\mathcal{G})$ (el ideal inicial de $\mathcal{G}$; $in(\mathcal{G}):=(in(f)/f\in\mathcal{G})\mathbb{C}[[X_1,X_2]]$).

Sin embargo $\{f^1,f^2\}$ no es una base de división de $\mathcal{G}$ -relativamente a cualquier forma lineal $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-. En efecto: Si $exp(f^1)=(=exp(f^2))=(1,0)$ (resp. $(0,1)$), entonces X_2 (resp. X_1) es un elemeneto de $\mathcal{G}$ y el resto de la división de X_2 (resp. X_1) por (f^1,f^2) es igual a X_2 (resp. X_1) -relativamente a cualquier forma lineal $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con coeficientes positivos o nulos.

1.2.4. NOTACION.-

Si M es un submódulo de B^p y $M\neq(\underline{0})$, notaremos $E(M)$ el conjunto

$$E(M) = \{exp(\underline{f})/\ \underline{f}\in M\setminus(\underline{0})\}\subset \mathbb{N}^n\times\{1,\dots,p\}.$$

$E(M)$ es invariante por las traslaciones de $\mathbb{N}^n$; esto es, $E(M) + \mathbb{N}^n = E(M)$ (basta aplicar 1.0.5.)

1.2.5. PROPOSICION.-

Sea $M\neq(\underline{0})$ un submódulo de B^p. Sea $\{\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m\}$ un subconjunto de $M\setminus(\underline{0})$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\{\underline{f}^1,\dots,\underline{f}^m\}$ es una base de división de M.

ii) $E(M) = \bigcup_{i=1}^{m} exp(\underline{f}^i) + \mathbb{N}^n.$

Prueba.- i) $\Rightarrow$ ii). Si $\underline{f} \in M \setminus (\underline{0})$, por división se obtiene:

$$\underline{f} = q_1\underline{f}^1+\ldots+q_m\underline{f}^m$$

y $\exp(q_i\underline{f}^i) \neq \exp(q_j\underline{f}^j)$ $1 \leq i,j \leq m$ $i \neq j$ (ya que $\exp(q_i\underline{f}^i) \in E^i$, $\exp(q_j\underline{f}^j) \in E^j$ y $E^i \cap E^j = \emptyset$ (Cf. 1.1.0.).

Aplicando 1.0.8. a) se obtiene la existencia de un k, $1 \leq k \leq m$ tal que

$$\exp\Big(\sum_{i=1}^{m} q_i\underline{f}^i\Big) = \exp(\underline{f}) = \exp(q_k\underline{f}^k) \in \exp(\underline{f}^k)+N^n.$$

ii) $\Rightarrow$ i). Sea $\underline{f} \in B^p$; dividiendo se obtiene:

$$\underline{f} = q_1\underline{f}^1+\ldots+q_m\underline{f}^m + \underline{r}$$

donde $N(\underline{r}) \subset N^n \times \{1,\ldots,p\} \setminus E(M)$. Si $\underline{f} \in M$ entonces $\underline{r} \in M$ y, si $\underline{r} \neq \underline{0}$, $\exp(\underline{r}) \in E(M)$. Esto es una contradicción, luego $\underline{r} = \underline{0}$.

1.2.6. PROPOSICION.-

Sea E un subconjunto de $N^n \times \{1,\ldots,p\}$ invariante por las traslaciones de N^n (esto es: $E + N^n = E$). Entonces existe un subconjunto finito F de E tal que

$$E = \bigcup_{(\alpha,i)\in F} (\alpha,i) + N^n.$$

Un tal subconjunto F será llamado un subconjunto generador finito de E.

Prueba.- (Cf. [GA-1] p. 117).

1.2.7. PROPOSICION.- (Existencia de una base de división)

Sea $M \neq (\underline{0})$ un submódulo de B^p. M posee una base de división.

Prueba.- Sea $F(M)$ un subconjunto finito generador de $E(M)$ (Cf. 1.2.6.). Toda familia $(f^{(\alpha,i)})_{(\alpha,i) \in F(M)}$ de elementos de M verificando $\exp(f^{(\alpha,i)})=(\alpha,i)$ es una base de división de de M (Cf. 1.2.5.). Una tal familia siempre existe por la definición de $E(M)$. (Cf. 1.2.4.).

CAPITULO 2

TEOREMA DE DIVISION EN LOS MODULOS

$\mathscr{D}(K)^p$, $\mathscr{D}(K)^p$ Y $A(K)^p$.

2.0. EXPONENTES PRIVILEGIADOS. RELACIONES DE ORDEN SOBRE $N^n x\{1,\ldots,p\}$.

En este parágrafo se utilizan las notaciones de 0.1.. Se fija una forma lineal $L:R^{2n} \longrightarrow R$ con coeficientes positivos o nulos y, salvo que se especifique lo contrario, $L_2:=L|_{(0)xR^n}:R^n \rightarrow R$ tendrá todos sus coeficientes positivos.(*)

Como en 0.1. si $\underline{P}$ es un elemento de $B[D]^p$ se notará $\sigma(\underline{P})$ el símbolo principal de $\underline{P}$ relativamente a la L_2-filtración de $B[D]^p$ (Cf. 0.1.3.)

En estas condiciones se tiene la siguiente definición:

2.0.0. DEFINICION.- (Exponente privilegiado).

Sea $\underline{P} \neq \underline{0}$ un elemento de $\mathscr{D}(K)^p$ (resp. $\mathscr{D}(K)^p$,

---

(*) Ver 2.0.5. y 2.1.2.

resp. $A(K)^p$). Se llama exponente privilegiado de $\underline{P}$ relativamente a la forma L, y lo notaremos $\exp_L(\underline{P})$, al exponente privilegiado de $\sigma(\underline{P})$ relativamente a L, $\sigma(\underline{P})$ considerado como elemento de $K[[X,\xi]]^p$ (resp. $K\{X,\xi\}^p$, resp. $K[X,\xi]^p$) (Cf. 1.0.3.).

2.0.1. NOTACION.-

En adelante cuando la expresión $\exp(\underline{P})$ aparezca en el texto se tratará siempre del exponente privilegiado de $\underline{P}$ relativamente a la forma L y $\underline{P}$ será siempre un elemento no nulo.

2.0.2. Propiedad aditiva del exponente privilegiado.-

Si $\underline{P} \in B[D]^p$ y $Q \in \mathcal{B}[D]$ se verifica

$$\exp(Q.\underline{P}) = \exp(Q) + \exp(\underline{P}).$$

En efecto: $\exp(Q.\underline{P}) = \exp(\sigma(Q.\underline{P})) = \exp(\sigma(Q).\sigma(\underline{P})) =$

$= \exp(\sigma(Q)) + \exp(\sigma(\underline{P})) = \exp(Q) + \exp(\underline{P})$ (sin más que aplicar 2.0.0., 0.1.2. y 1.0.5.).

2.0.3. Relaciones de orden sobre $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$ y exponentes privilegiados.-

Denotamos $L_1 := L|_{R^n x(0)}$.

a) La relación, que denotaremos $\square_L$, definida sobre $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$ por

$$(\alpha,\delta,i) \sqsubset_L (\beta,\gamma,j) \Longleftrightarrow \begin{cases} L_2(\delta) > L_2(\gamma) \\ \text{o bien} \\ L_2(\delta)=L_2(\gamma) \quad \text{y} \quad \begin{cases} L_1(\alpha) < L_1(\beta) \\ \text{o bien} \\ L_1(\alpha)=L_1(\beta) \quad \text{e} \quad i<j \\ \text{o bien} \\ L_1(\alpha)=L_1(\beta),\ i=j \quad \text{y} \\ \quad (\alpha,\delta) <_{lex} (\beta,\gamma). \end{cases} \end{cases}$$

(donde $<_{lex}$ denota el orden lexicográfico inverso sobre N^{2n}) es una relación de orden total (pero no es un buen orden) sobre $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$.

<u>2.0.3.1.</u> Con las notaciones precedentes se tiene:

$$\forall\ \underline{P} \in \mathcal{D}(K)^p, \quad \exp_L(\underline{P}) = \min_{\sqsubset_L} N(\underline{P}).$$

(basta observar que $\min_{\sqsubset_L}(N(P))$ existe pues el conjunto $\{(\delta,i)\in N^n x\{1,\dots,p\} / \exists \alpha \in N^n \text{ y } (\alpha,\delta,i) \in N(\underline{P})\}$ es finito)

b) La relación, que denotaremos $\sqsubset_L$, definida sobre $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$ por

$$(\alpha,\delta,i) \ \circ_L (\beta,\gamma,j) \iff \begin{cases} L_2(\delta) > L_2(\gamma) \\ \text{o bien} \\ L_2(\delta)=L_2(\gamma) \quad \text{y} \quad \begin{cases} L_1(\alpha)>L_1(\beta) \\ \text{o bien} \\ L_1(\alpha)=L_1(\beta) \quad \text{e} \quad i<j \\ \text{o bien} \\ L_1(\alpha)=L_1(\beta), \quad i=j \quad \text{y} \\ \qquad (\alpha,\delta) <_{lex} (\beta,\gamma). \end{cases} \end{cases}$$

(donde $<_{lex}$ denota el orden lexicográfico inverso sobre N^{2n}) es una relación de orden total (pero no es un buen orden) sobre $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$.

2.0.3.2. Con las notaciones precedentes se tiene:

$$\forall\ \underline{P} \in A(K)^p, \quad \exp_L(\underline{P}) = \min{}_{\circ_L}(N(\underline{P})$$

(basta observar que le $\min_{\circ_L}(N(P)$ existe pues $N(P)$ es un subconjunto finito de $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$).

2.0.4. Propiedades del exponente privilegiado.-

a) Si $\{\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m\}$ es una familia de elementos de $\mathcal{D}(K)^p$ (resp. $A(K)^p$) tal que $\exp(\underline{P}^i)\neq\exp(\underline{P}^j)$ $(1\leq i<j\leq m)$ entonces $\underline{P}^1+\dots+\underline{P}^m \neq \underline{0}$ y existe $k\in\{1,\dots,m\}$ tal que

$$\exp(\sum_{i=1}^{m} \underline{P}^i) = \exp\ (\underline{P}^k) = \min_{\square_L}\{\exp(\underline{P}^j);\ 1 \leq j \leq m\}$$

$$(\text{resp. } \exp(\sum_{i=1}^{m} \underline{P}^i) = \exp(\underline{P}^k) = \min_{O_L}\{\exp(\underline{P}^j);\ 1 \leq j \leq m\}).$$

b) Si $\{\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m\}$ es una familia de elementos de $\mathcal{D}(K)^p$ (resp. $A(K)^p$) y $\underline{P}^1 +\ldots+ \underline{P}^m \neq \underline{0}$, entonces,

$$\min_{\square_L}\{\exp(P^j);\ 1 \leq j \leq m\} \ \bar{\bar{\square}}_L\ \exp(\sum_{i=1}^{m} \underline{P}^i)$$

(resp. $\min_{O_L}\{\exp(\underline{P}^j);\ 1 \leq j \leq m\} \ \bar{\bar{O}}_L\ \exp(\sum_{i=1}^{m} \underline{P}^i)$), (donde $\bar{\bar{\square}}_L$ (resp. $\bar{\bar{O}}_L$) significa "menor o igual" para el orden $\square_L$ (resp. O_L) definido en 2.0.3.).

En efecto: a) Si m=2, $\exp(\sigma(\underline{P}^1)) \neq \exp(\sigma(\underline{P}^2))$. De 1.0.8.a) se tiene que $\sigma(\underline{P}^1) + \sigma(\underline{P}^2) \neq \underline{0}$ y por tanto $\underline{P}^1+\underline{P}^2 \neq \underline{0}$. Supongamos $\exp(\underline{P}^1)\ \square_L\ \exp(\underline{P}^2)$ (resp. $\exp(\underline{P}^1)\ O_L\ \exp(\underline{P}^2)$). Entonces, o bien $\mathrm{ord}(\underline{P}^1) > \mathrm{ord}(\underline{P}^2)$ y $\exp(\underline{P}^1+\underline{P}^2) = \exp(\underline{P}^1)$, o bien $\mathrm{ord}(\underline{P}^1) = \mathrm{ord}(\underline{P}^2)$ y $\exp(\sigma(\underline{P}^1)) <_L \exp(\sigma(\underline{P}^2))$ (resp. $\exp(\sigma(\underline{P}^1)) \lhd_L \exp(\sigma(\underline{P}^2))$) (cf. 2.0.3. y 1.0.0.). Aplicando otra vez 1.0.8.a) se obtiene $\exp(\sigma(\underline{P}^1) + \sigma(\underline{P}^2)) = \exp(\sigma(\underline{P}^1))$; y como $\mathrm{ord}(\underline{P}^1) = \mathrm{ord}(\underline{P}^2)$ y $\sigma(\underline{P}^1) + \sigma(\underline{P}^2) \neq \underline{0}$ se obtiene finalmente $\exp(\sigma(\underline{P}^1) + \sigma(\underline{P}^2)) = \exp(\sigma(\underline{P}^1 + \underline{P}^2)) = \exp(\underline{P}^1 + \underline{P}^2)$. La prueba se termina por inducción en m.

La prueba de b) es análoga.

<u>2.0.5. NOTA.-</u>

Cuando la forma $L_2: R^n \to R$ tiene algún coeficiente nulo se define exponente priviligiado como sigue:

Sea $P \in B[D]^p$.

$$\underline{P} = \sum_{(\delta,i) \in N^n \times \{1,\ldots,p\}} a_{(\delta,i)}(X)\, D^{(\delta,i)} \quad , \; a_{(\delta,i)} \in B.$$

Se define

$$(\delta(P),i(P)) = \min_{\triangleleft_{L_2}} \{ (\delta,i) \in N^n \times \{1,\ldots,p\} \;/\; a_{(\delta,i)} \neq 0 \}$$

donde $\triangleleft_{L_2}$ es el orden definido sobre $N^n \times \{1,..,p\}$ en 1.0.7.b).
Se define

$$\exp_L(\underline{P}) := \exp(\underline{P}) := (\exp(a_{(\delta(P),i(P))}), \delta(P),i(P))$$

donde $\exp(a_{(\delta(P),i(P))})$ es el exponente priviligiado de $a_{(\delta(P),i(P))} \in$ $\in K[[X]]$ (resp. $K\{X\}$, resp. $K[X]$) relativamente a la forma $L_1 = L_{|R^n \times (\underline{0})}$ (cf. 1.0.3).

La razón de la elección de esta definición de exponente privilegiado se encuentra en 2.1.2.

Este exponente verifica propiedades análogas a 2.0.2. y 2.0.4.

2.0.6. NOTA.-

Sea $L:R^{2n} \to R$ una forma lineal con coeficientes positivos o nulos. Si $\underline{P} \in A(K)^p$, $\underline{P} \neq \underline{0}$, notaremos $\gamma(\underline{P})$ el símbolo principal de $\underline{P}$ relativamente a la L-filtración de Bernstein de $A(K)^p$ (cf. 0.1.5.).

Se define el exponente privilegiado de $\underline{P}$ relativamente a la L-filtración de Bernstein de $A(K)^p$ como el exponente privilegiado de $\gamma(\underline{P})$ relativamente a L, $\gamma(\underline{P})$ considerado como un elemento de $K[X,\xi]^p$ (cf. 1.0.3.).

El exponente privilegiado definido aquí no coincide en general con el definido en 2.0.0.

El exponente privilegiado definido aquí verifica propiedades análogas a 2.0.2. y 2.0.4.

2.1. TEOREMA DE DIVISION EN LOS MODULOS $\mathcal{D}(K)^p$, $\mathcal{D}(K)^p$ Y $A(K)^p$.

2.1.0. TEOREMA.-

Sea $(\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m)$ un elemento de $B[D]^p$ tal que $\underline{P}^i \neq \underline{0}$, $1\leq i\leq m$. $\{E^1,\dots,E^m,\bar{E}\}$ la partición asociada al elemento $(\exp(\underline{P}^1),\dots,\exp(\underline{P}^m))$ (Cf. 1.0.9.).

Entonces, para todo $\underline{P} \in B[D]^p$ existe un único elemento $(Q_1,\dots,Q_m,\underline{R}) \in B[D]^m \times B[D]^p$ tal que:

i) $\underline{P} = Q_1\underline{P}^1+\dots+Q_m\underline{P}^m + \underline{R}$.

ii) $\exp(\underline{P}^i) + N(Q_i) \subseteq E^i$, $1\leq i\leq m$.

iii) $N(\underline{R}) \subseteq \bar{E}$.

La familia $(Q_i)_{1\leq i\leq m}$ es llamada la familia de cocientes, y $\underline{R}$ el resto, de la división de $\underline{P}$ por $(\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m)$.

Prueba.-

UNICIDAD.- Supongamos que para $\underline{P} \in B[D]^p$, $(Q_1,\dots,Q_m,\underline{R})$ y $(Q'_1,\dots,Q'_m,\underline{R}')$ verifican las condiciones i), ii) y iii) del teorema. Entonces,

$$(*) \qquad (Q_1-Q'_1)\underline{P}^1+\dots+(Q_m-Q'_m)\underline{P}^m + (\underline{R}-\underline{R}') = \underline{0}.$$

Si $1 \leq i < j \leq m$, entonces

$$\exp((Q_i - Q_i')\underline{P}^i) \neq \exp((Q_j - Q_j')\underline{P}^j)$$

y si $1 \leq i \leq m$, entonces

$$\exp((Q_i - Q_i')\underline{P}^i) \neq \exp(\underline{R} - \underline{R}')$$

puesto que

$$\exp((Q_i - Q_i')\underline{P}^i) \in E^i \quad 1 \leq i \leq m \quad y$$

$$\exp(\underline{R} - \underline{R}') \in \overline{E}$$

y la familia $\{E^1, \ldots, E^m, \overline{E}\}$ es una partición de $N^{2n} x \{1, \ldots, p\}$ (Cf. 1.0.9.). Aplicando 2.0.4.a) se obtiene

$$(Q_1 - Q_1')\underline{P}^1 + \ldots + (Q_m - Q_m')\underline{P}^m + (\underline{R} - \underline{R}') \neq \underline{0}$$

que está en contradicción con (*) y por tanto se debe tener $Q_i = Q_i'$ $(1 \leq i \leq m)$ y $\underline{R} = \underline{R}'$.

<u>EXISTENCIA</u>.- Sea $\underline{P} \in \hat{\mathcal{D}}(K)^p$ (resp. $\mathcal{D}(K)^p$, resp. $A(K)^p$). La prueba de la existencia se hace por inducción sobre $\text{ord}(\underline{P})$; (el conjunto $L_2(N^n) \subseteq R$, con el orden inducido por el de R, es un conjunto bien ordenado).

Si $\text{ord}(\underline{P}) = 0$ entonces $\underline{P} \in B^p$ (puesto que L_2 tiene todos sus coeficientes positivos).

Supongamos que $\text{ord}(\underline{P}^i) = d_i$ $(d_i \in R,\ 1 \leq i \leq m)$.

El teorema de división 1.1.0. aplicado a $\underline{P}$ y $(\sigma(\underline{P}^1,\ldots,\sigma(\underline{P}^m))\in K[[X,\xi]]^p$ (resp. $K\{X,\xi\}^p$, resp. $K[X,\xi]^p$) asegura la existencia (y la unicidad) de un elemento $(q_1,\ldots,q_m,\underline{r})\in$ $\in K[[X,\xi]]^{p+m}$ (resp. $K\{X,\xi\}^p$, resp. $K[X,\xi]^p$) verificando

i) $\underline{P} = q_1\sigma(\underline{P}^1)+\ldots+q_m\sigma(\underline{P}^m) + \underline{r}$

ii) $\exp(\sigma(\underline{P}^i) + N(q_i) \subseteq E^i, \quad 1\leq i\leq m$

iii) $N(\underline{r})\subset \overline{E}$.

(basta observar que $\exp(\sigma(\underline{P}^i)) = \exp(\underline{P}^i)$, $1\leq i\leq m$).

Por otra parte, aplicando 1.1.2.b) se puede escribir

$$q_i = \sum_{L_2(\delta)=-d_i} q_{i,\delta}(X)\,\xi^{\delta}, \qquad 1\leq i\leq m$$

iv) $$\underline{r} = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=0} \underline{r}_{(\delta,i)}(X)\,\xi^{(\delta,i)} \in K[[X]]^p \text{ (resp. } K\{X\}^p\text{, resp. } K[X]^p\text{)}.$$

En particular $q_i = 0$ si $d_i > 0$. Por tanto se puede escribir:

$$\underline{P} = \sum_{j/d_j=0} q_j\cdot(\underline{P}^j) + \underline{r}$$

pero si $d_j = 0$ entonces $\sigma(\underline{P}^j) = \underline{P}^j \in B^p$ (puesto que L_2 tiene todos sus coeficientes positivos) y se tiene

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot \underline{P}^j + \underline{r}$$

como el elemento $(q_1,\ldots,q_m,\underline{r})$ verifica las condiciones i), ii) y iii) del teorema esto prueba la existencia si $\mathrm{ord}(\underline{P})=0$.

Supongamos la existencia demostrada para todo elemento $\underline{P}'$ de orden menor que $d\in R$. Sea $\underline{P}$ un elemento de $B[D]^p$ de orden d. Por la hipótesis de inducción se puede suponer que

$$\underline{P} = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)}$$

y por tanto

$$\sigma(\underline{P}) = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d} a_{(\delta,i)}(X)\xi^{(\delta,i)} \in K[[X,\xi]]^p \text{ (resp. } K\{X,\xi\}^p$$

$$\text{resp. } K[X,\xi]^p).$$

Aplicando el teorema 1.1.0. a $\sigma(\underline{P})$ y $(\sigma(\underline{P}^1),\ldots,\sigma(\underline{P}^m))$ se obtiene la existencia de un elemento $(q_1,\ldots,q_m,\underline{r}) \in K[[X,\xi]]^p$ (resp. $K\{X,\xi\}^{p+m}$, resp. $K[X,\xi]^{p+m}$) verificando:

i) $\sigma(\underline{P}) = q_1\sigma(\underline{P}^1)+\ldots+q_m\sigma(\underline{P}^m) + \underline{r}$

ii) $\exp(\sigma(\underline{P}^i) + N(q_i) \subseteq E^i$, $1\leq i\leq m$

iii) $N(\underline{r}) \subseteq \bar{E}$.

Por otra parte, aplicando 1.1.2. b) se puede escribir

$$\text{iv)}\begin{cases} q_j = \sum_{\delta/L_2(\delta)=d-d_j} q_{j,\delta}(X)\xi^{\delta}, & 1\leq i\leq m. \\ \underline{r} = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d} \underline{r}_{(\delta,i)}(X)\xi^{(\delta,i)}. \end{cases}$$

Aplicando 1.1.2. c) se obtiene:

$$q_i(=q_i(X,\xi))\in K[[X]][\xi] \text{ (resp. } K\{X\}[\xi],\text{ resp. } K[X][\xi]),\ 1\leq i\leq m.$$

y

$$\underline{r}(=\underline{r}(X,\xi))\in K[[X]][\xi]^p \text{ (resp. } K\{X\}[\xi]^p,\text{ resp. } K[X][\xi]^p)$$

y por tanto se puede escribir:

$$Q_i = q_i(X,D) = \sum_{\delta|L_2(\delta)=d-d_i} q_{i,\delta}(X)D^{\delta}\in \mathcal{D}(K) \text{ (resp.}$$

$$\mathcal{D}(K),\text{ resp. } A(K)),\ 1\leq i\leq m.$$

y

$$\underline{R} = \underline{r}(X,D) = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d} r_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)} \in \mathcal{D}(K)^p \text{ (resp.}$$

$$\mathcal{D}(K)^p,\text{ resp. } A(K)^p).$$

Escribamos $\underline{P}^j = \underline{P}^{j,o} + \underline{\tilde{P}}^j$ $(1\leq j\leq m)$, donde

$$\underline{P}^j = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)\leq d_j} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)}$$

y

$$\underline{P}^{j,o} = \sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d_j} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)}$$

Para cada $j \in \{1,\dots,m\}$ se tiene:

$$Q_j \underline{P}^{j,o} = \Big(\sum_{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j} q_{j,\gamma}(X)D^{\gamma}\Big)\Big(\sum_{(\delta,i)/L_2(\delta)=d_j} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j \\ (\delta,i)/L_2(\delta)=d_j}} q_{j,\gamma}(X)D^{\gamma} a_{(\delta,i)}(X)D^{(\delta,i)} =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j \\ (\delta,i)/L_2(\delta)=d_j}} q_{j,\gamma}(X)a_{(\delta,i)}(X)D^{(\gamma+\delta,i)} +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j \\ (\delta,i)/L_2(\delta)=d_j}} q_{j,\gamma}(X)[D^{\gamma},a_{(\delta,i)}(X)]D^{(\delta,i)}$$

(donde el corchete $[U,V]$ de dos operadores diferenciales es igual a UV-VU).

Ahora podemos escribir:

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j \underline{P}^j + \underline{R} = \sum_{j=1}^{m} Q_j \underline{P}^{j,o} + \underline{R} + \sum_{j=1}^{m} Q_j \underline{\widetilde{P}}^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\substack{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j \\ (\delta,i)/L_2(\delta)=d_j}} q_{j,\gamma}(X)a_{(\delta,i)}(X)D^{(\gamma+\delta,i)}\Big) + \underline{R} + \underline{G}$$

donde

$$\underline{G} = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{\substack{\gamma/L_2(\gamma)=d-d_j \\ (\delta,i)/L_2(\delta)=d_j}} q_{j,\gamma}(X)[D^{\gamma}, a_{(\delta,i)}(X)] D^{(\gamma+\delta,i)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} Q_j \underline{\tilde{P}}^j .$$

y por tanto

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j \underline{P}^j + \underline{R} = \underline{P} + \underline{G}$$

y como $\operatorname{ord}(\underline{G}) < d$, la prueba se termina aplicando la hipótesis de inducción a $\underline{G}$.

2.1.1. NOTA.-

Con las notaciones utilizadas en el teorema 2.1.0., si $\underline{P} \in B[D]^p$, $\operatorname{ord}(\underline{P})=d$ y si

$$\underline{P} = Q_1\underline{P}^1 + \ldots + Q_m\underline{P}^m + \underline{R}$$

es la igualdad obtenida aplicando el mismo teorema, es claro que

$$\sigma(\underline{P}) = \sigma^{(d-d_j)}(Q_1)\sigma(\underline{P}^1) + \ldots + \sigma^{(d-d_m)}(Q_m)\sigma(\underline{P}^m) + \sigma^{(d)}(\underline{R})$$

donde $\sigma^{(t)}(\underline{U})$, con $t \in R$, representa el símbolo de orden t del elemento $\underline{U}$ (Cf. 0.1.1.).

2.1.2. NOTA.- En la prueba del teorema 2.1.0. se ha utilizado de manera esencial el hecho que los cocientes q_i $(1 \leq i \leq m)$ y el resto $\underline{r}$, de la división de $\sigma(\underline{P})$ por $(\sigma(\underline{P}^1),\ldots,\sigma(\underline{P}^m))$ verifican

$$q_i \in K[[X]][\xi] \quad (\text{resp. } K\{X\}[\xi]\ ) \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\underline{r} \in K[[X]][\xi]^p \quad (\text{resp. } K\{X\}[\xi]^p).$$

Esto es así debido a 1.1.2.c). Como se probó allí, el resultado deja de ser válido si la forma $L_2 : R^n \longrightarrow R$ tiene algún coeficiente nulo. Esta es la razón por la que 2.0.0. no es una buena definición de exponente privilegiado cuando L_2 tiene algún coeficiente nulo. Con la definición 2.0.5. de exponente privilegiado se puede demostrar un teorema de división en $B[D]^p$ cuyo enunciado es idéntico al de 2.1.0. y cuya prueba es esencialmente la misma.

2.1.3. NOTA.-(UN TEOREMA DE DIVISION EN EL MODULO $B[\xi]^p$).

Conservamos aquí las notaciones anteriores. Es decir, B denota el anillo $K[[X]]$ (resp.-si K=R ó C - $K\{X\}$,resp. $K[X]$) y $B[\xi]$ el anillo de polinomios en las indeterminadas $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ y coeficientes en B.

Haciendo la sustitución formal de $D=(D_1,\ldots,D_n)$ por $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ procedemos como en 0.1. para definir las diferentes filtraciones de $B[\xi]^p$. Se define exponente privilegiado (ver 2.1.5.) de un elemento de $B[\xi]^p$ como en 2.0.0.. El enunciado del teorema de división en $B[\xi]^p$ es idéntico al enunciado de 2.1.0. La prueba de este teorema es absolutamente análoga a la de 2.1.0. sin más que tener en cuenta que $f.\xi^\alpha = \xi^\alpha.f$ para todo $f \in B$, $\forall \alpha \in N^n$.

2.1.4. OTRA DIVISION EN $A(K)^p$.-

Existe un teorema de división en $A(K)^p$ relativamente a la L-filtración de Bernstein. Su enunciado es idéntico al del teorema 2.1.0. teniendo en cuenta que, en este caso "exponente privilegiado" significa exponente privilegiado relativamente a la L-filtración de Bernstein. La prueba de este teorema es análoga a la de 2.1.0.

2.1.5. NOTA.-

Sea $\underline{f}$ un elemento de $K[[X]][\xi]^p$ (resp. $K\{X\}[\xi]^p$, resp. $K[X][\xi]^p$). $\underline{f}$ se puede considerar también como un elemento $\underline{\tilde{f}}$ de $K[[X,\xi]]^p$ (resp. $K\{X,\xi\}^p$, resp. $K[X,\xi]^p$). El exponente privilegiado de $\underline{f}$, definido en 2.1.3. no coincide, en general, con el exponente privilegiado de $\underline{\tilde{f}}$ definido en 1.0.3. Basta tomar n=p=1 y $\underline{f}=X^2+\xi^2$. $\exp(\underline{f})=(0,2)$ y $\exp(\underline{\tilde{f}})=(2,0)$, relativamente a la forma antidiagonal sobre R^2.

Sin embargo, si $\underline{f}$ es un elemento homogéneo de $K[[X]][\xi]^p$ (resp. $K\{X\}[\xi]^p$, resp. $K[X][\xi]^p$) - con respecto a la L_2-graduación definida en 0.1.1. - es evidente que se tiene la igualdad

$$\exp_L(\underline{f}) = \exp_L(\underline{\tilde{f}}).$$

2.2. BASES DE DIVISION.-

En este parágrafo fijamos una forma lineal $L:R^{2n} \longrightarrow R$ con coeficientes positivos o nulos. Salvo que se especifique lo contrario, supondremos que todos los coeficientes de $L_2 := L_{|(\underline{0})xR^n}$ son positivos.

Salvo que se especifique lo contrario, todas las filtraciones del anillo $B[D]$ (resp. módulo $B[D]^p$) serán L_2-filtraciones (cf. 0.1.1.).

Sea M un $B[D]$-submódulo de $B[D]^p$. Un sistema de generadores $\{\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m\}$ de M se dice que es una base involutiva de M si la familia $\{\sigma(\underline{P}^1),\ldots,\sigma(\underline{P}^m)\}$ es un sistema de generadores del $gr(B[D])$-módulo $gr(M)$.

No todo sistema de generadores es una base involutiva: Basta considerar $p=1$, $n=2$, M= ideal generado por (D_1,x_1D_2). $D_2 = D_1.X_1.D_2 - X_1.D_2.D_1$ M y por tanto $\xi_2 \in gr(M)$. Por otra parte ξ_2 no pertenece al ideal generado por $(\xi_1,x_1\xi_2)$ en el anillo $gr(B[D]) \cong B[\xi_1,\xi_2]$ (cf. 0.1.1.).

Nuestro propósito es construir, a partir de un sistema de generadores, una base involutiva. Para ello introducimos la noción de base de división, más fuerte, como veremos, que la de base involutiva.

2.2.0. PROPOSICION.-

Sea M un $B[D]$-submódulo de $B[D]^p$, $M \neq (\underline{0})$. Sean $\{\underline{P}^1,\ldots$ $\ldots,\underline{P}^m\}$ un subconjunto de $M \setminus (\underline{0})$ y una aplicación biyectiva

$\tau : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,m\}$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\forall \underline{P} \in B[D]^p,\ \underline{P} \in M \Leftrightarrow \underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m) = \underline{0}$

ii) $\forall \underline{P} \in B[D]^p,\ \underline{P} \in M \Leftrightarrow \underline{R}(\underline{P};\underline{P}^{\tau(1)},\dots,\underline{P}^{\tau(m)}) = \underline{0}$,

donde $\underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m)$ es el resto de la división de $\underline{P}$ por $(\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m)$ (cf. 2.1.0.).

Prueba.- Es idéntica a la de 1.2.1..

La proposición 2.2.0. nos permite dar la siguiente definición.

2.2.1. DEFINICION.-

Sea $M \neq (\underline{0})$ un submódulo de $B[D]^p$. Una base de división de M es un subconjunto $\{\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m\}$ de $M \setminus (\underline{0})$ tal que

$$\forall \underline{P} \in B[D]^p,\quad \underline{P} \in M \Leftrightarrow \underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m) = \underline{0}.$$

2.2.2. OBSERVACIONES.-

1) Una base de división de un submódulo de $B[D]^p$ es siempre un sistema de generadores de M.

2) En realidad hay que hablar de base de división relativamente a la forma L (Cf. 1.2.3.2)).

2.2.3. NOTACION.-

Si M es un submódulo de $B[D]^p$, $M \neq (\underline{0})$ notaremos E(M) el conjunto

$$E(M) = \{\exp(\underline{P}) / \underline{P} \in M \setminus (\underline{0})\} \subseteq N^{2n} x \{1,\dots,p\}.$$

$E(M)$ es invariante por las traslaciones de N^{2n} (es decir: $E(M) + N^{2n} = E(M)$. Esto es una consecuencia directa de 2.0.2.).

2.2.4. PROPOSICION.-

Sea $M \neq (\underline{0})$ un submódulo de $B[D]^p$. Sea $\{\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m\}$ un subconjunto de $M \setminus (\underline{0})$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\{\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m\}$ es una base de división de M.

ii) $E(M) = \bigcup_{i=1}^{m} \exp(\underline{P}^i) + N^{2n}$.

Prueba.- La prueba es formalmente análoga a la de 1.2.5..

2.2.5. PROPOSICION.- (Existencia de una base de división).

Sea $M \neq (\underline{0})$ un submódulo de $B[D]^p$. M posee una base de división.

Prueba.- Sea $F(M)$ un sunconjunto generador finito de $E(M)$ (Cf. 1.2.6.). Toda familia $(\underline{P}^{(\alpha,\delta,i)})_{(\alpha,\delta,i)\in F(M)}$ de elementos de M, verificando $\exp(\underline{P}^{(\alpha,\delta,i)}) = (\alpha,\delta,i)$ es una base de división de M por 2.2.4. y 1.2.6.. Una tal familia siempre existe como consecuencia de la definición de $E(M)$.

2.2.6. NOTACION.-

Por definición $(\underline{0})$ es una base de división del submódulo $(\underline{0})$ y se conviene en notar $E((\underline{0})) = \emptyset$.

Sea M un submódulo de $B[D]^p$. Se considera el K-subespacio vectorial de $B[D]^p$ definido por

$$(B[D]^p)^{E(M)} = \{\underline{P} \in B[D]^p / \ N(\underline{P}) \cap E(M) = \emptyset\}.$$

Se define un homomorfismo w de espacios vectoriales

$$w: (B[D]^p)^{E(M)} \longrightarrow B[D]^p/M$$

por $w(\underline{P}) = \underline{P} + M$.

<u>2.2.7. PROPOSICION</u>.- (División por un submódulo de $B[D]^p$).

El homomorfismo w es un isomorfismo de K-espacios vectoriales.

<u>Prueba</u>.- w es sobreyectiva: Sea $\{\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m\}$ una base de división de M. Sea $\underline{P} + M$ un elemento de $B[D]^p/M$. Dividiendo $\underline{P}$ por $(\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m)$ se obtiene un resto $\underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m) \in (B[D]^p)^{E(M)}$ (Cf. 2.1.0.). Evidentemente $w(\underline{P}) = w(\underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m))$.

w es inyectiva: Supongamos que $\underline{P},\underline{P}' \in (B[D]^p)^{E(M)}$ y que $\underline{P}-\underline{P}' \in$ $\in M$. Si $\underline{P} \neq \underline{P}'$ entonces $\exp(\underline{P}-\underline{P}') \in E(M)$ y esto está en contradicción con que $N(\underline{P}-\underline{P}') \cap E(M) = \emptyset$. Por tanto $\underline{P} = \underline{P}'$.

<u>2.2.8. NOTA</u>.-

La proposición 2.2.7. prueba que el resto de la división de un elemento $\underline{P}$,de $B[D]^p$, por una base de división de un submódulo M de $B[D]^p$ no depende de la base de división en cuestión y que sólo depende de M. La proposición 2.2.7. puede enunciarse así: Todo elemento $\underline{P} \in B[D]^p$ es congruente módulo M a un único elemento $\underline{R}(\underline{P};M)$ de $(B[D]^p)^{E(M)}$.

El elemento $\underline{R}(\underline{P};M)$ es llamado el resto de la división de $\underline{P}$ por el submódulo M.

2.2.9. Bases de división en $B[\xi]^p$.

Una vez demostrado un teorema de división en $B[\xi]^p$ (Cf. 2.1.3.) se tiene la noción de base de división de un submódulo de $B[\xi]^p$. En este caso se tienen apartados análogos a 2.2.0., 2.2.1., 2.2.2., 2.2.3., 2.2.4., 2.2.5., 2.2.6.,.2.2.7. y 2.2.8.. .

2.2.10.

Nuestro propósito es relacionar una base de división de un submódulo M de $B[D]^p$ con una base de división del submódulo $gr(M)$ de $gr(B[D]^p) \equiv B[\xi]^p$ (Cf. 0.1.1.).

En adelante se identificará $gr(M)$ con el $B[\xi]$-submódulo de $B[\xi]^p$ generado por la familia $\{\sigma(\underline{P})/\ \underline{P} \in M\}$.

2.2.11. PROPOSICION.-

Sea M un submódulo de $B[D]^p$ y $\{\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m\}$ un subconjunto de M. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\{\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m\}$ es una base de división de M.

ii) $\{\sigma(\underline{P}^1),\ldots,\sigma(\underline{P}^m)\}$ es una base de división de $gr(M) \subseteq$ $\subseteq B[\xi]^p$ (Cf. 2.2.9.).

En particular toda base de división es involutiva.

Prueba.- Es suficiente probar que $E(M) = E(gr(M))$ y aplicar 2.2.5.. La inclusión $E(M) \subseteq E(gr(M))$ es consecuencia de la definición de símbolo principal y de exponente privilegiado (Cf. 0.1.3. 2.0.0. y 2.1.3.).

Si $\underline{f}$ es un elemento homogéneo de $gr(M)$, entonces existe $\underline{P} \in M$ tal que $\sigma(\underline{P})=\underline{f}$ y por tanto $\exp(\underline{f}) = \exp(\sigma(\underline{P})) = \exp(\underline{P}) \in E(M)$. Esto demuestra la otra inclusión pues $gr(M)$ es un $B[\xi]$-módulo graduado.

$\therefore$

2.2.12. NOTA.-

Si consideramos sobre $A(K)^p$ la división de 2.1.4. (relativamente a la L-filtración de Bernstein de $A(K)^p$ (Cf. 0.1.5.) se tiene la correspondiente noción de base de división de un submódulo de $A(K)^p$. Se tienen en este caso apartados análogos a 2.2.0 2.2.1., 2.2.2., 2.2.3., 2.2.4., 2.2.5., 2.2.6., 2.2.7. y 2.2.8..

Si consideramos sobre $K[X,\xi]^p = gr(A(K)^p)$ (Cf. 0.1.5.) la división de 1.1.0., se demuestra, en $A(K)^p$, un resultado análogo a 2.2.11.

CAPITULO 3

CARACTERIZACION COMBINATORIA DE LAS BASES DE DIVISION.

RESOLUCION LIBRE DE UN B[D]-MODULO DE TIPO FINITO.

3.0. CARACTERIZACION COMBINATORIA DE LAS BASES DE DIVISION.-

3.0.0. NOTACION.-

Si $((\alpha^1,i^1),\dots,(\alpha^m,i^m))$ es un elemento de $N^n x\{1,..,p\}$ se denota por $\{E^1,\dots,E^m,\overline{E}\}$ la partición asociada (Cf. 1.0.9.).

Para cada $j\in\{1,\dots,m\}$ se denota por $\hat{E}^j$ el subconjunto de N^n verificando:

$$E^j = (\alpha^j,i^j) + \hat{E}^j.$$

Es claro que $(N^n \setminus \hat{E}^j) + N^n = N^n \setminus \hat{E}^j$ y notaremos $\hat{F}^j$ el menor, con respecto a la inclusión, subconjunto finito generador de $N^n \setminus \hat{E}^j$ (Cf. 1.2.6.).

En adelante la letra L , salvo si se especifica lo contrario, denotará la forma antidiagonal sobre R^n (esto es: $L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$).

A partir de ahora los exponentes privilegiados, las divisiones y las bases de división serán consideradas relativamente a la forma L.

3.0.1. PROPOSICION.-

Notemos por $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ (resp. $K\{X_1,\ldots,X_n\}$). La filtración $\mathfrak{m}$-ádica de $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ (resp. $K\{X_1,\ldots,X_n\}$) es una filtración noetheriana (Cf. 0.0.12.).

Prueba.- Es suficiente probar 3.0.1. en el primer caso. El otro caso es análogo.

Notemos $A = K[[X_1,\ldots,X_n]]$. La filtración $\mathfrak{m}$-ádica sobre A viene definida por:

$$A^{(d)} = \mathfrak{m}^{(-d)} \quad \text{si} \quad d<0,\ d\in Z,$$

$$A^{(d)} = A \quad \text{si} \quad d\geqslant 0,\ d\in Z.$$

$A^{(m)}/A^{(m-1)} = (0)$ si $m\geqslant 1$. $A^{(m)}/A^{(m-1)}$, si $m\leqslant 0$, se identifica con el conjunto de los polinomios homogéneos de grado $-m$ en las variables $(X_1,\ldots,X_n)$. Así $gr(A)$ es isomorfo al anillo $K[X_1,\ldots,X_n] = B$ con la graduación

$$B^{(m)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad m\geqslant 1. \\ \text{Polinomios homogéneos de grado } -m, \text{ si } m\leqslant 0. \end{cases}$$

Así, $gr(A)$ es noetheriano. Por otra parte $A^{(0)} = A$ es noetheriano y $\bigcap_{k\in Z} A^{(k)} = \bigcap_{k\in N} \mathfrak{m}^k = (0)$ (por el teorema de Krull (Cf. [MAT] p.69)).

Finalmente sea H un submódulo de $\bigoplus_{i=1}^{s} A[p_i]$ y sea $\{x_1,\ldots,x_p\}$ una familia de elementos de H verificando

$$x_j \in H^{(k_j)} \setminus H^{(k_j-1)} \quad (k_j \in Z,\ 1\leq j\leq m)$$

y de manera que la familia $(\bar{x}_j)_{1\leq j\leq m}$ genere a $gr(H)$.

Notemos $J^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} A^{(k-k_j)}x_j, \quad \forall k\in Z.$

Es claro que $J^{(k)} \subseteq H^{(k)} (:= H \cap (A^s)^{(k)}$; donde sobre A^s se considera la filtración producto $\bigoplus_{i=1}^{s} A[p_i]$).

Sea $x\in H^{(k)} \setminus H^{(k-1)}$. Como $(\bar{x}_j)_{1\leq j\leq p}$ genera a $gr(H)$ se tiene

$$\bar{x} = x + H^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{p} \bar{a}_j\bar{x}_j$$

donde $\bar{a}_j \in gr^{(k-k_j)}(A)$, $1\leq j\leq p$. Así pues

$$x - \sum_{j=1}^{p} a_jx_j \in H^{(k-1)}$$

y por tanto

$$J^{(k)} \subseteq H^{(k)} \subseteq J^{(k)} + H^{(k-1)} \qquad \forall\, k\in Z.$$

Esto demuestra además que

$$J^{(k)} \subseteq H^{(k)} \subseteq J^{(k)} + H^{(k')} \qquad \forall k,k' \in Z$$

por tanto

$$J^{(k)} \subseteq H^{(k)} \subseteq \bigcap_{k'\in Z} (J^{(k)} + H^{(k')})$$

pero $\bigcap_{k'\in Z} (J^{(k)} + H^{(k')}) = J^{(k)}$ (ya que $J^{(k)}$ es un submódulo de $H^{(k)}$ y por tanto es cerrado para la topología $\mathfrak{m}$-ádica de $H^{(k)}$ (Cf. [SE-1]p.18).

3.0.2. NOTACION.-

Si $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una familia de elementos de B^p ($B=K[[X]]=K[[X_1,..,X_n]]$ (resp. $K\{X\}=K\{X_1,...,X_n\}$, resp. $K[X]=K[X_1,...,X_n]$) y si $\underline{f} \in B^p$, notaremos $\underline{r}(\underline{f};\underline{f}^1,...,\underline{f}^m)$ el resto de la división de $\underline{f}$ por $(\underline{f}^1,...,\underline{f}^m)$ (Cf. 1.1.0.). Finalmente se notará $(E^i)_{1\leq i\leq m}$, $(\hat{E}^i)_{1\leq i\leq m}$ y $(\hat{F}^i)_{1\leq i\leq m}$ las familias de conjuntos asociadas al elemento $(\exp(\underline{f}^1),...,\exp(\underline{f}^m))$ de $N^n x\{1,..,p\}$(Cf.3.0.0.)

3.0.3. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $K[X]^p$. Sea $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ un sistema de generadores de M. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M.

ii) $\underline{r}(X^{\alpha}\underline{f}^i;\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m) = \underline{0} \quad \forall\, \alpha\in\widehat{F}^i, \quad i\in\{1,\ldots,m\}.$

Prueba.- (Cf. [GA-2]).

3.0.4. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $K[X]^p$ y sea $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ una base de división de M. Para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$ y cada $\alpha\in\widehat{F}^i$, notaremos $\underline{r}^i_{\alpha}$ la relación, entre los $(\underline{f}^i)$, obtenida dividiendo $X^{\alpha}\underline{f}^i$ por $(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m)$. Entonces el $K[X]$-módulo de las relaciones entre los $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ está generado por la familia

$(\underline{r}^i_{\alpha})_{\substack{\alpha\in\widehat{F}^i \\ 1\leq i\leq m}}$

Prueba.- (Cf. [GA-2]).

3.0.5. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $K[[X]]^p$ (resp. $K\{X\}^p$ -si K=R o C-). Sea $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ un sistema de generadores de M. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M.

ii) $\underline{r}(X^{\alpha}\underline{f}^i;\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m) = \underline{0} \quad \forall\alpha\in\widehat{F}^i,\ 1\leq i\leq m.$

Prueba.- Sea M un submódulo de $K[[X]]^p$ (el caso $K\{X\}^p$ es análogo).

Si $\underline{f} \in K[[X]]^p$ notaremos $in(\underline{f})$ la forma inicial de $\underline{f}$ (Cf. 1.0.2.). Como $\underline{r}(X^{\alpha}\underline{f}^i;\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m) = \underline{0}$ se tiene que

$$\underline{r}(X^{\alpha}in(\underline{f}^i);in(\underline{f}^1),\ldots,in(\underline{f}^m)) = \underline{0}$$

$\forall \alpha \in \hat{F}^i$, $1 \leq i \leq m$. (Nótese que $\exp(\underline{f}^i) = \exp(in(\underline{f}^i))$).

Por 3.0.3. la familia $(in(\underline{f}^i))_{1\leq i\leq m}$ es una base de división del $K[X]$-módulo que generan.

Consideremos la sucesión exacta

$$K[[X]]^m \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

con $\varphi(g_1,\ldots,g_m) = \sum_{i=1}^{m} g_i\underline{f}^i$.

Aplicando el funtor $gr(\ )$ se obtiene

$$K[X]^m \xrightarrow{gr(\varphi)} gr(M)$$

Por 3.0.4. $Ker(gr(\varphi))$ está generado por la familia $(\underline{\tilde{r}}^i_{\alpha})$ $\alpha \in \hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$ (donde $\underline{\tilde{r}}^i_{\alpha}$ es la relación, entre los $in(\underline{f}^i)$, obtenida dividiendo $X^{\alpha}in(\underline{f}^i)$ por $(in(\underline{f}^1),\ldots,in(\underline{f}^m))$. Así pues

$$(\underline{\tilde{r}}^i_{\alpha})K[X] \subseteq (in(\underline{r}^i_{\alpha}))K[X] \subseteq gr(Ker(\varphi))$$

(donde $\tilde{r}^i_{\alpha}$ es la relación obtenida dividiendo $X^{\alpha}\underline{f}^i$ por $(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m)$)

por tanto (Cf. 0.0.19.) se tiene

$$Ker(gr(\varphi)) = gr(Ker(\varphi))$$

y aplicando 0.0.20. se tiene que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{gr}(\varphi)) = \mathrm{gr}(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{gr}(M)$$

así $\mathrm{gr}(\varphi)$ es sobreyectivo y $(\mathrm{in}(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de $\mathrm{gr}(M)$. Como consecuencia $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M (basta observar que $E(M) = E(\mathrm{gr}(M))$ y aplicar 1.2.5.)

3.0.6. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $K[[X]]^p$ (resp. $K\{X\}^p$ -si $K=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-). Sea $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ una base de división de M. Para cada $i\in\{1,..,m\}$ y cada $\alpha\in\hat{F}^i$, notaremos $\underline{r}^i_\alpha$ la relación obtenida dividiendo $X^\alpha\underline{f}^i$ por $(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m)$. Entonces el $K[[X]]$-módulo (resp. $K\{X\}$-módulo) de las relaciones entre los $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ está generado por la familia $(\underline{r}^i_\alpha)_{\substack{\alpha\in\hat{F}^i\\ 1\leq i\leq m}}$.

Prueba.- Consideremos las sucesiones exactas

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to K||X||^m \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

con $\varphi(g_1,\ldots,g_m) = \sum_{i=1}^{m} g_i\underline{f}^i$

y

$$0 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{gr}(\varphi)) \to K[X]^m \xrightarrow{\mathrm{gr}(\varphi)} \mathrm{gr}(M) \to 0.$$

Se verifica:

a) $(\mathrm{in}(\underline{f}^i))_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de $\mathrm{gr}(M)$ (basta observar que $E(M)=E(\mathrm{gr}(M))$ y aplicar 1.2.5.)

b) Notaremos $\tilde{\underline{r}}^i_\alpha$ la relación obtenida dividiendo $X^\alpha in(\underline{f}^i)$ por $(in(\underline{f}^1),\dots,in(\underline{f}^m))$. Se verifica

$\tilde{\underline{r}}^i_\alpha = in(\underline{r}^i_\alpha)$ $\forall \alpha\in\hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$.

c) $gr(Ker(\varphi))$ $Ker(gr(\varphi)) =$

$$= K[X](\underline{r}^i_\alpha)_{\substack{\alpha\in\hat{F}^i \\ 1\leq i\leq m}} \subseteq gr(Ker(\varphi)).$$

(sin más que aplicar 3.0.4. y b)).

d) $Ker(gr(\varphi)) = gr(Ker(\varphi))$ está generado por la familia $(\tilde{\underline{r}}^i_\alpha) = (in(\underline{r}^i_\alpha))$ y por tanto $Ker(\varphi)$ está generado por la familia $(\underline{r}_\alpha)$ (sin más que aplicar 0.0.17.)

3.0.7. NOTACION.-

En adelante la letra L denotará la forma antidiagonal sobre R^{2n}. Las filtraciones consideradas en los módulos $B[D]^p$ y $B[\xi]^p$ ($B=K[[X]]$ (resp. $K\{X\}$, resp. $K[X]$) serán siempre relativas a ésta forma lineal (Cf. 0.1.1.). De igual manera los exponentes privilegiados, las divisiones y las bases de división serán,en adelante, relativos a la forma L.

Finalmente si $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ (resp. $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$) es una familia de elementos de $B[D]^p$ (resp. $B[\xi]^p$), se denotará por $(E^i)_{1\leq i\leq m}$, $(\hat{E}^i)_{1\leq i\leq m}$ y $(\hat{F}^i)_{1\leq i\leq m}$ las familias de conjuntos asociadas al elemento $(exp(\underline{P}^1),\dots,exp(\underline{P}^m))$ (resp. $(exp(\underline{f}^1),\dots,exp(\underline{f}^m))$) de $N^{2n}x\{1,\dots,p\}$ (Cf. 3.0.0.).

3.0.8. PROPOSICION.-

Sea M un submódulo de $B[\xi]^p$ generado por una familia $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ de elementos homogéneos ($\underline{f}^i \in (\widehat{B[\xi]^p})^{(d_i)}$ $d_i \in \mathbb{Z}$ (Cf. 0.1.1.). Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M (Cf.2.2.9.).

ii) $r(X^\alpha \xi^\delta \underline{f}^i;\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m) = \underline{0}$ $\forall(\alpha,\delta)\in\hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$.

Prueba.- i) $\Rightarrow$ ii) es consecuencia directa de 2.2.9..

ii) $\Rightarrow$ i). Consideremos la inclusión

$$K[[X]][\xi]^p \subset K[[X,\xi]]^p$$

(resp. $K\{X\}[\xi]^p \subseteq K\{X,\xi\}^p$, resp. $K[X][\xi]^p \subseteq K[X,\xi]^p$)

Notemos $\widetilde{M} = K[[X,\xi]]M$ (resp. $K\{X,\xi\}M$, resp. $K[X,\xi]M$) y $\underline{\tilde{f}}^i$ al elemento $\underline{f}^i$ considerado como un elemento de $\widetilde{M}$. Por definición $\exp(\underline{\tilde{f}}^i) = \exp(\underline{f}^i)$, $1\leq i\leq m$. Por tanto

$$r(X^\alpha \xi^\delta \underline{\tilde{f}}^i;\underline{\tilde{f}}^1,\ldots,\underline{\tilde{f}}^m) = \underline{0} \qquad \forall(\alpha,\delta)\in\hat{F}^i,\ 1\leq i\leq m.$$

Aplicando 3.0.3. y 3.0.8. se tiene que $(\underline{\tilde{f}}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de $\widetilde{M}$ y por tanto (Cf. 1.2.5.)

$$E(\widetilde{M}) = \bigcup_{i=1}^{m} \exp(\underline{\tilde{f}}^i) + \mathbb{N}^{2n}$$

Como M es un submódulo graduado de $B[\xi]^p$ se tiene la igualdad $E(M) = E(\widetilde{M})$. Esto demuestra (Cf. 2.2.9.) que $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M.

3.0.9. PROPOSICION.-

Sea M un submódulo de $B[\xi]^p$. Sea $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ una base de división de M de manera que $\underline{f}^i \in (\widehat{B[\xi]^p})^{(d_i)}$ $(d_i \in Z)$ Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ y cada $(\alpha,\delta) \in \hat{F}^i$ se denota $\underline{r}^i_{(\alpha,\delta)}$ la relación obtenida dividiendo $X^\alpha \xi^\delta . \underline{f}^i$ por $(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^m)$. Entonces el $B[\xi]$-módulo de las relaciones entre los $(\underline{f}^i)_{1\leq i\leq m}$ está generado por la familia $(\underline{r}^i_{(\alpha,\delta)})$ $(\alpha,\delta) \in \hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$.

Prueba.- Conservamos las notaciones de la prueba de 3.0.8. Consideremos el diagrama

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow K[[X]][\xi]^m \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}) \longrightarrow K[[X,\xi]]^m \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M \longrightarrow 0$$

donde $\varphi(g_1,\ldots,g_m) = \sum_{i=1}^{m} g_i \underline{f}^i$ y $\tilde{\varphi}$ es la extensión de φ a $K[[X,\xi]]^m$.

Como $E(M) = E(\tilde{M})$ la familia $(\tilde{\underline{f}}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de $\tilde{M}$. Aplicando 3.0.6. se tiene que $\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi})$ está generado por la familia $(\underline{r}^i_{(\alpha,\delta)})$ $(\alpha,\delta) \in \hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$. Por otra parte M es un submódulo graduado de $K[[X]][\xi]^p$ y φ es un homomorfismo graduado, así pues $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un submódulo graduado de $K[[X]][\xi]^m$ y $\underline{r}^i_{(\alpha,\delta)}$ es un elemento homogéneo de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $(\alpha,\delta) \in \hat{F}^i$, $1\leq i\leq m$.

Se tiene:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi}) \cap K[[X]][\xi]^m = K[[X]][\xi](\underline{r}^i_{(\alpha,\delta)})_{\substack{(\alpha,\delta)\in\hat{F}^i \\ 1\leq i\leq m}} \subseteq$$

$\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Los casos $B = K\{X\}$ y $B = K[X]$ se demuestran análogamente.

3.0.10. NOTACION.-

Si $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una familia de elementos de $B[D]^p$ y $\underline{P} \in B[D]^p$, notaremos $\underline{R}(\underline{P};\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m)$ el resto de la división de $\underline{P}$ por $(\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m)$.

3.0.11. PROPOSICION.-

La filtración $(B[D]^{(m)})_{m\in Z}$ -donde $B[D]^{(m)}$ es el conjunto de los operadores diferenciales de orden menor o igual a m (Cf. 0.1.1.)- es una filtración noetheriana de $B[D]$. La filtración de Bernstein de $A(K)$ (Cf. 0.1.5.) es una filtración noetheriana.

Prueba.- $gr(B[D]) \cong B[\xi]$ es noetheriano.

Para $m<0$ $B[D]^{(m)} = (0)$ y por tanto $\bigcap_{m\in Z} B[D]^{(m)} = (\underline{0})$. $B[D]^{(0)} = B$ es noetheriano.

Sea H un submódulo $B[D]^p = \bigoplus_{i=1}^{p} B[D][k_i]$ $(k_i \in Z)$

$(1\leq i\leq p)$. Sea $\{\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^s\}$ una familia de elementos de H, con $\underline{P}^i \in H^{(m_i)} \setminus H^{(m_i-1)}$ $(m_i \in Z)$ y de manera que $\{\sigma(\underline{P}^1),\dots,\sigma(\underline{P}^s)\}$ genera a $gr(H)$. Sea $\underline{P} \in H^{(m)} \setminus H^{(m-1)}$.

$$\sigma(\underline{P}) = \sum_{i=1}^{s} \bar{q}_i . \sigma(\underline{P}^i)$$

donde $\bar{q}_i \in gr^{(m-m_i)}(B[D])$. Se tiene pues

$$\underline{P} - \sum_{i=1}^{s} q_i \underline{P}^i \in H^{(m-1)}.$$

Esto demuestra que

$$J^{(m)} := \sum_{i=1}^{s} B[D]^{(m-m_i)} \underline{P}^i \subseteq H^{(m)} \subseteq J^{(m)} + H^{(m-1)}$$

y por tanto

$$J^{(m)} \subseteq H^{(m)} \subseteq J^{(m)} + H^{(m')} \qquad \forall m' \in Z.$$

Esto termina la prueba pues $\exists m' \in Z / \ H^{(m')} = 0$.

La segunda parte se demuestra análogamente.

3.0.12. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $B[D]^p$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ un sistema de generadores de M. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ es una base de división de M.

ii) $\underline{R}(X^\alpha D^\delta \underline{P}^i; \underline{P}^1,\dots,\underline{P}^m) = \underline{0} \quad \forall (\alpha,\delta) \in \hat{F}^i,\ 1\leq i\leq m.$

Prueba.- Se procede de manera análoga a 3.0.5.. En este caso hay que aplicar 3.0.8..

3.0.13. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $B[D]^p$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ una base de división de M. Para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$ y cada $(\alpha,\delta)\in\in\hat{F}^i$, se denota por $\underline{R}^i_{(\alpha,\delta)}$ la relación, entre los $(\underline{P}^i)$, obtenida dividiendo $X^\alpha D^\delta \underline{P}^i$ entre $(\underline{P}^1,\ldots,\underline{P}^m)$. Entonces, el $B[D]$-módulo de las relaciones entre los $(\underline{P}^i)$ está generado por la familia $(\underline{R}^i_{(\alpha,\delta)})_{\substack{(\alpha,\delta)\in\hat{F}^i\\ 1\leq i\leq m}}$.

Prueba.- Se procede de manera análoga a 3.0.6..

3.0.14. OBSERVACION.-

Los resultados 3.0.12 y 3.0.13. siguen siendo válidos en el módulo $A(K)^p$ con la filtración de Bernstein (Cf. 0.1.5.). Basta observar que en este caso $gr(A(K)^p)$ es isomorfo al módulo $K[X,\xi]^p$ con la graduación natural (graduación por el orden total de polinomios) (Cf. 0.1.5.). La prueba de estos resultados se hace de manera análoga a 3.0.5. y 3.0.6..

3.0.15. Cálculo de una base de división.-

Se aplican aquí las técnicas de [GA-2] para el caso de los polinomios.

Sea M un submódulo de $B[D]^p$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m}$ un sistema de generadores de M. Se denotan por $(E^i)_{1\leq i\leq m}$, $(\hat{E}^i)_{1\leq i\leq m}$ y $(\hat{F}^i)_{1\leq i\leq m}$ las familias de conjuntos asociadas a $(\exp(\underline{P}^1),..,\exp(\underline{P}^m))$ (Cf. 3.0.0.).

El método de cálculo de una base de división de M consiste en hacer tantas veces como sea posible la manipulación siguiente:

i) Escoger un $i\in\{1,...,m\}$ y un $(\alpha,\delta)\in\hat{F}^i$ que no hayan sido escogidos en una manipulación anterior.

ii) Hacer la división de $X^\alpha D^\delta \underline{P}^i$ por $(\underline{P}^1,...,\underline{P}^m)$.

iii) Si el resto de esta división es cero, volver a i).
Si el resto de la división es distinto de cero lo denotamos por $\underline{P}^{m+1}$.

iv) Volver a empezar con $\{\underline{P}^1,...,\underline{P}^m,\underline{P}^{m+1}\}$ como sistema de generadores de M.

No se puede hacer más que un número finito de manipulaciones. En efecto: si por el método anterior se obtiene una familia infinita $(\underline{P}^{m+k})_{k\in N}$ de elementos no nulos de M, por la condición iii) de 2.1.0. se tiene:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exp(\underline{P}^{m+k}) \notin \bigcup_{h=1}^{m+k-1} \exp(\underline{P}^{h}) + \mathbb{N}^{2n}$$

y por tanto el conjunto

$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \exp(\underline{P}^{h}) + \mathbb{N}^{2n}$$

(que verifica $E + \mathbb{N}^{2n} = E$) no podría estar generado por un número finito de elementos, lo cual está en contradicción con 1.2.6..

Suponamos que hay que hacer s $(s \geq 0)$ manipulaciones para obtener

$$\underline{R}(X^{\alpha} D^{\beta} \underline{P}^{i}; \underline{P}^{1}, \ldots, \underline{P}^{m+s}) = \underline{0}, \ \forall (\alpha,\beta) \in \widehat{F}^{i}, \ 1 \leq i \leq m+s.$$

entonces, por 3.0.12., $(\underline{P}^{i})_{1 \leq i \leq m+s}$ es una base de división de M.

Si M es un submódulo de B^{p}, o si M es un submódulo de $A(K)^{p}$ con la filtración de Bernstein (Cf.0.1.5.), se procede de manera análoga.

3.1. CONSTRUCCION DE UNA RESOLUCION LIBRE DE UN B[D]-MODULO DE TIPO FINITO.-

3.1.0. Si N es un B[D]-módulo de tipo finito, N es isomorfo a un cociente $B[D]^{s_0}/M$ donde M es un submódulo de $B[D]^{s_0}$ Construir una resolución libre de N es equivalente pues a construir una de M.

Sea entonces M un submódulo de $B[D]^{s_0}$ y sea $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m_1}$ un sistema de generadores de M. Se procede de la manera siguiente:

i) Se calcula, por el método 3.0.15., una base de división $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq s_1}$ de M. Escribimos $M_1=M$.

ii) Se considera la sucesión exacta de B[D]-módulos

$$(1)\qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_1) \xrightarrow{j} B[D]^{s_1} \xrightarrow{\varphi_1} M \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_1(Q_1,\ldots,Q_{s_1}) = \sum_{i=1}^{s_1} Q_i.\underline{P}^i$.

Consideramos sobre M la filtración inducida por la de $B[D]^{s_0}$ (sobre $B[D]^{s_0}$ la filtración producto de la de $B[D]$).

Sobre $B[D]^{s_1}$ se considera la filtración (Cf. 0.0.6.)

$$B[D]^{s_1} = \bigoplus_{i=1}^{s_1} B[D][-d_i] \quad (d_i=\mathrm{ord}(\underline{P}^i),\ 1\leq i\leq s_1)$$

y sobre $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ la filtración inducida por la de $B[D]^{s_1}$.

En estas condiciones la sucesión (1) es una sucesión en la categoría $\text{filt}({}_{B[D]}\mathfrak{M})$ (Cf.0.0.2.).

Como $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq s_1}$ es una base de división de M φ_1 es estricto (Cf. 0.0.2. y 0.0.17.). j es siempre estricto. Por tanto la sucesión

$$0 \to gr(Ker(\varphi_1)) \longrightarrow B[\xi]^{s_1} \xrightarrow{gr(\varphi_1)} gr(M) \longrightarrow 0$$

es exacta en $gr({}_{B[D]}\mathfrak{M})$ (Cf. 0.0.14.).

iii) Por 3.0.13. $Ker(\varphi_1)$ está generado por la familia $(\underline{R}^i)_{1\leq i\leq m_2}$ de las relaciones "elementales" entre los $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq s_1}$. Notaremos $Ker(\varphi_1) = M_2$.

iv) Volver a empezar reemplazando M_1 por M_2 y $(\underline{P}^i)_{1\leq i\leq m_1}$ por $(\underline{R}^i)_{1\leq i\leq m_2}$.

De esta manera se obtiene una familia de sucesiones exactas

$$3.1.0.i) \quad 0 \longrightarrow Ker(\varphi_i) \longrightarrow B[D]^{s_i} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \longrightarrow 0 \quad (i\geq 1)$$

donde $M_1 = M$, $M_i = Ker(\varphi_{i-1})$ $(i\geq 2)$ y φ_i es estricto $(i\geq 1)$.

Aplicando el funtor gr( ) se obtiene una familia de sucesiones exactas (Cf. 0.0.14.)

$$3.1.0.i)' \quad 0 \to gr(Ker(\varphi_i)) \to B[\xi]^{s_i} \xrightarrow{gr(\varphi_i)} gr(M_i) \to 0 \quad (i\geq 1)$$

Esto nos permite construir una resolución libre de M

$$\ldots \to B[D]^{s_k} \xrightarrow{\varphi_k} B[D]^{s_{k-1}} \to \ldots \to B[D]^{s_1} \xrightarrow{\varphi_1} M \to 0$$

y una resolución libre de gr(M)

$$\ldots \to B[\xi]^{s_k} \xrightarrow{gr(\varphi_k)} B[\xi]^{s_{k-1}} \to \ldots \to B[\xi]^{s_1} \xrightarrow{gr(\varphi_1)} gr(M) \to 0$$

<u>3.1.1.</u> Sean m y n dos enteros no negativos. La letra A denotará al anillo $K[[X_1,\ldots,X_m]][Y_1,\ldots,Y_n]$ (resp.-si $K = R$ o C- $K\{X_1,\ldots,X_m\}[Y_1,\ldots,Y_n]$) con la graduación

$$A = \bigoplus_{d\in N} \hat{A}^{(d)}$$

donde

$$\hat{A}^{(d)} = \left\{ \sum_{|\alpha|=d} f_\alpha(X)Y^\alpha \;/\; \begin{array}{l} f_\alpha(X) \in K[[X]] \text{ (resp.} \\ f_\alpha(X) \in K\{X\}) \end{array} \right\}$$

<u>3.1.2. TEOREMA</u>.- (Sizigias)

a) Con las notaciones de 3.1.1. sea M un A-módulo graduado y sea

$$\ldots \to A^{s_i} \xrightarrow{\varphi_i} A^{s_{i-1}} \to \ldots \to A^{s_o} \xrightarrow{\varphi_o} M \to 0$$

una resolución libre graduada de M. Entonces $Ker(\varphi_{n+m-1})$ es un A-módulo libre. Además, si M es un submódulo de un A-módulo libre, entonces $Ker(\varphi_{n+m-2})$ es libre.

b) Si $(\underline{a}^i)_{1\leq i\leq t}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+m-1})$ (resp. $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+m-2})$ si M es un submódulo de un A-módulo libre) verificando

$$\underline{a}^i \notin \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t} A.a^j \qquad 1\leq i\leq t$$

entonces, la familia $(\underline{a}^i)_{1\leq i\leq t}$ es una base del A-módulo $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+m-1})$ (resp. $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+m-2})$ si M es un submódulo de un A-módulo libre).

Prueba.- (Cf. [S-Z] Vol. II, p. 2 7).

3.1.3. TEOREMA.-

Sea M un submódulo de $B[D]^p$ y sea

$$(1) \quad \ldots \to B[D]^{s_k} \xrightarrow{\varphi_k} B[D]^{s_{k-1}} \to \ldots \to B[D]^{s_1} \xrightarrow{\varphi_1} M \to 0$$

una resolución libre de M obtenida por el procedimiento de 3.1.0. Entonces $\mathrm{Ker}(\varphi_{2n-1})$ es un $B[D]$-módulo libre.

Prueba.-

i) Caso $B=K[[X]]$ (resp. $K\{X\}$).

Aplicando el funtor gr( ) a la resolución (1) se obtiene (Cf. 3.1.0.) una resolución libre del gr(B[D])-módulo gr(M)

$$(2) \quad \ldots \to B[\xi]^{s_k} \xrightarrow{gr(\varphi_k)} B[\xi]^{s_{k-1}} \to \ldots \to B[\xi]^{s_1} \xrightarrow{gr(\varphi_1)} gr(M) \to 0$$

Esta resolución verifica las hipótesis del teorema 3.1.2.. Por tanto (como $gr(M)$ es un submódulo de $B[\xi]^{s_o}$, $s_o=p$) $Ker(gr(\varphi_{2n-1}))$ es un $B[\xi]$-módulo libre. Además

$$Ker(gr(\varphi_{2n-1})) = gr(Ker(\varphi_{2n-1})) \quad \text{(Cf. 3.1.2.2n-1)')}.$$

Por otra parte, la filtración de $B[D]$ es noetheriana (Cf. 3.0.11.) y la filtración de $Ker(\varphi_{2n-1})$ es buena (pues $Ker(\varphi_{2n-1})$ es un submódulo de $B[D]^{2n-1}$ y basta aplicar 0.0.13.), así pues $Ker(\varphi_{2n-1})$ es un $B[D]$-módulo libre (Cf. 0.0.17.).

ii) Caso $B=K[X]$.

Consideremos sobre $A(K)$ la filtración de Bernstein (Cf. 0.1.5.). La resolución libre de $gr(M)$

$$\cdots \to K[X,\xi]^{s_k} \xrightarrow{gr(\varphi_k)} K[X,\xi]^{s_{k-1}} \cdots \to K[X,\xi]^{s_1} \xrightarrow{gr(\varphi_1)} M \to 0$$

verifica las hipótesis del teorema 3.1.2. y se demuestra que $Ker(\varphi_{2n-1})$ es un $A(K)$-módulo libre de manera análoga al caso 1).

La parte b) de 3.1.2. permite encontrar, en este caso, una base de $Ker(\varphi_{2n-1})$. En efecto: la base de división de $Ker(gr(\varphi_{2n-1})) = gr(Ker(\varphi_{2n-1}))$ obtenida por el método 3.0.14. está formada por elementos homogéneos. Haciendo un número finito de operaciones (de hecho resolver un número finito de sistemas de ecuaciones lineales en el cuerpo K) se puede construir un subsistema de generadores $(\underline{a}^i)_{1\leq i\leq t}$ verificando

$$\underline{a}^i \notin \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{t} K[X,\xi].\underline{a}^j \ , \ 1\le i\le t.$$

Así $(\underline{a}^i)_{1\le i\le t}$ es una base de $gr(Ker(\varphi_{2n-1}))$ y la familia $(\underline{R}^i)_{1\le i\le t}$, donde $\sigma(\underline{R}^i)=\underline{a}^i$, es una base de $Ker(\varphi_{2n-1})$ (Cf. 0.0.17.).

3.1.4. OBSERVACION.-

Si en lugar de considerar en $A(K)$ la filtración de Bernstein, se considera la filtración por el orden (Cf. 0.1.1.) la resolución

$$\cdots \to K[X,\xi]^{s_k} \xrightarrow{gr(\varphi_k)} K[X,\xi]^{s_{k-1}} \cdots \to K[X,\xi]^{s_1} \xrightarrow{gr(\varphi_1)} M \longrightarrow 0$$

obtenida por le procedimiento de 3.1.0. no está en las hipótesis del teorema 3.1.2. (no es graduada respecto de las variables $X_1,\ldots,X_n$). Sin embargo $Ker(gr(\varphi_{2n-1}))$ es libre (y por tanto $Ker(\varphi_{2n-1})$ también lo es), pues la dimensión homológica global de $K[X,\xi]$ es $2n$ y la dimensión homológica de $gr(M)$ es menor o igual a $2n$ (Cf.[SE-1]Chap.IV,D). En estas condiciones $Ker(gr(\varphi_{2n-1}))$ es proyectivo sobre el anillo $K[X,\xi]$ y por tanto libre.

CAPITULO 4

MULTIPLICIDADES

4.0. SITUACION PUNTUAL.

En éste parágrafo la letra $\mathcal{O}$ denotará el anillo de los gérmenes de funciones holomorfas en el origen de C^n y la letra $\mathcal{D}$ el anillo de los gérmenes de operadores diferenciales lineales holomorfos en el origen de C^n. Se considera sobre $\mathcal{D}$ la filtración canónica (la filtración por el orden (Cf. 0.1.1.)).

4.0.0. PROPOSICION.-

Sea M un $\mathcal{D}$-módulo y $(F^{(m)})_{m\in N}$ una filtración de M (Cf. 0.0.0.) formada por $\mathcal{O}$-módulos. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(F^{(m)})$ es una buena filtración (Cf. 0.0.8.).

ii) $\exists m_o \in N \;/\; \mathcal{D}^{(r)} F^{(m_o)} = F^{(m_o+r)} \quad \forall r \in N$ y

$F^{(m)}$ es un $\mathcal{O}$-módulo de tipo finito $\forall m \in N$.

Prueba.- i) $\Rightarrow$ ii). Sea $\{x_1,\ldots,x_s\}$ una familia de elementos de

M y $\{k_1,\dots,k_s\}$ una familia de elementos de Z tales que:

$$F^{(k)} = \sum_{j=1}^{s} \mathcal{D}^{(k-k_j)}.x_j \quad \forall k\in N.$$

Sea $m_o = \max\{k_j/\ 1\le j\le s\}$. Entonces

$$\mathcal{D}^{(r)}F^{(m_o)} = \mathcal{D}^{(r)}\Big(\sum_{j=1}^{s}\mathcal{D}^{(m_o-k_j)}.x_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\mathcal{D}^{(m_o+r-k_j)}.x_j = F^{(m_o+r)} \qquad \forall r\in N.$$

Por otra parte, $F^{(k)}$ es una suma finita de Θ-módulos de tipo finito y por tanto él mismo es un Θ-módulo de tipo finito $\forall\, k\in N$.

ii) $\Rightarrow$ i). Sea $m_o \in N$ verificando ii). Para cada $m\in N$ se tiene:

$$F^{(m)} = \sum_{i=1}^{s(m)} \Theta.x_{i,m}$$

donde $x_{i,m} \in F^{(m)}$ y $s(m)\in N$. Entonces se verifica:

$$F^{(k)} = \sum_{\substack{0\le m\le m_o\\ 1\le i\le s(m)}} .\mathcal{D}^{(k-k_{i,m})}.x_{i,m}$$

donde $k_{i,m} = m$ para $1\le i\le s(m)$.

4.0.1. PROPOSICION.- Sea M un $\mathcal{D}$-módulo y $(F^{(m)})$ una filtración formada por Θ-módulos. Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $(F^{(m)})$ es una buena filtración.

ii) $gr(M)$ es un $gr(\mathcal{D})$-módulo de tipo finito.

Prueba.-

i) $\Rightarrow$ ii). Sea $\{x_1,\dots,x_s\} \subset M$ y $\{k_1,\dots,k_s\} \subset Z$ t.q.

$$F^{(k)} = \sum_{j=1}^{s} \mathcal{D}^{(k-k_j)}.x_j \quad ,$$

así pues la sucesión

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{D}[-k_i] \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

es exacta y φ es estricto (Cf. 0.0.2.). Aplicando 0.0.14. se tiene:

$$gr(\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{D}[-k_i]) = \bigoplus_{i=1}^{s} gr(\mathcal{D})[-k_i] \xrightarrow{gr(\varphi)} gr(M) \longrightarrow 0$$

es exacta y $gr(M)$ es de tipo finito.

ii) $\Rightarrow$ i). Si $gr(M) = \sum_{i=1}^{t} gr(\mathcal{D}).\sigma(x_i)$ con $x_i \in F^{(m_i)}$

se define $m_o = \max\{m_i,\ 1 \leq i \leq t\}$. Entonces $\mathcal{D}^{(r)}F^{(m_o)} = F^{(r+m_o)}$ $\forall r \in N$.

Como $gr^{(m)}(M)$ es un $\mathcal{O}$-módulo de tipo finito se concluye que $F^{(m)}$ es un $\mathcal{O}$-módulo de tipo finito, sin más que considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^{(m-1)} \longrightarrow F^{(m)} \longrightarrow gr^{(m)}(M) \longrightarrow 0$$

y tener en cuenta que $F^{(-1)} = (0)$.

4.0.2. NOTACION.-

Sea A un anillo local noetheriano y sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A. Si N es un A-módulo de tipo finito, denotaremos por $e^A(N)=e^A(N)=e(N)$ la multiplicidad de N relativamente al ideal $\mathfrak{m}$.

Denotaremos por $d_A(N)=d(N)$ la dimensión de N.(Cf. |BOU| A.C. Chap. 8).

4.0.3. PROPOSICION.-

Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de tipo finito y $F=(F^{(m)})_{m\in N}$ $F'=(F'^{(m)})_{m\in N}$ dos buenas filtraciones de M. Denotaremos por $gr_F(M)$ y $gr_{F'}(M)$ los módulos graduados asociados. Entonces para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $gr(\mathcal{D})$ se verifica:

$$\text{i) } d_{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_F(M)_{\mathfrak{m}}) = d_{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_{F'}(M)_{\mathfrak{m}})$$

$$\text{ii) } e^{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_F(M)_{\mathfrak{m}}) = e^{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_{F'}(M)_{\mathfrak{m}}).$$

Prueba.- (Cf. [SG] III. 3.1. y 3.2.).

4.0.4. DEFINICION.-

Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de tipo finito. Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $gr(\mathcal{D})$ se llama dimensión de M relativamente al ideal $\mathfrak{m}$, y se denota por $d_{\mathfrak{m}}(M)$, al número entero:

$$d_{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_F(M)_{\mathfrak{m}})$$

Se llama multiplicidad de M relativamente al ideal $\mathfrak{m}$, y se denota por $e_{\mathfrak{m}}(M)$, al número entero:

$$e_{gr(\mathcal{D})_{\mathfrak{m}}}(gr_F(M)_{\mathfrak{m}})$$

donde $F = (F^{(m)})$ es una buena filtración de M.

4.1. SITUACION GLOBAL.-

En este parágrafo $(X, \mathcal{O})$ denota una variedad analítica compleja lisa de dimensión n. La letra $\mathcal{D}$ denota el haz de los operadores diferenciales lineales holomorfos sobre X. Se considera sobre $\mathcal{D}$ la filtración canónica -llamada filtración por el orden (Cf. [PHA] pp.54-55)-.

La expresión " $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}$-módulo" (resp. $\mathcal{O}$-módulo) significa $\mathcal{M}$ es un haz de $\mathcal{D}$-módulos (resp. $\mathcal{O}$-módulos) a la izquierda.

4.1.0. DEFINICION.-

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo. Sea $(\mathcal{F}^{(m)})_{m\in N}$ una filtración de $\mathcal{M}^{(*)}$ formada por $\mathcal{O}$-módulos. $(\mathcal{F}^{(m)})$ es una buena filtración si se verifican:

i) $\mathcal{F}^{(m)}$ es un $\mathcal{O}$-módulo coherente, $\forall m\in N$ (Cf. [SE-2]p.208)

ii) $\exists m_o \in N \;/\; \mathcal{D}^{(r)}\mathcal{F}^{(m_o)} = \mathcal{F}^{(m_o+r)} \quad \forall r\in N.$

4.1.1. PROPOSICION.-

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo coherente (Cf. [SE-2] p.208). $\mathcal{M}$ admite una buena filtración localmente.

Prueba.- (Cf. [SG] I p.7)

4.1.2. PROPOSICION.-

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo y $(\mathcal{F}^{(m)})$ una filtración de $\mathcal{M}$. Las condiciones siguientes son equivalentes.

i) La filtración $(\mathcal{F}^{(m)})$ es localmente buena.

ii) $gr(\mathcal{M})$ es un $gr(\mathcal{D})$-módulo coherente.

Prueba.- (Cf. [SG] I 4.1.).

El fibrado cotangente de X, $T^*(X)$ se identifica canónicamente a $Specan(gr(\mathcal{D}))$ (Cf. [SC]). Así pues, un punto de $T^*(X)$ se identifica canónicamente a un par $(x,\mathfrak{m})$ donde $x \in X$ y $\mathfrak{m} \in Specmax(gr(\mathcal{D})_x) = Specmax(gr(\mathcal{D}_x))$ (donde "Specmax" significa espectro maximal, es decir el conjunto de los ideales maximales del anillo en cuestión).

4.1.3. DEFINICION.-

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo coherente. Se llama dimensión de $\mathcal{M}$ en un punto $(x,\mathfrak{m})$ de $T^*(X)$, y se denota $d_{(x,\mathfrak{m})}(\mathcal{M})$ al número entero

$$d_{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}_x)$$

definido en 4.0.4.. Se llama multiplicidad de $\mathcal{M}$ en $(x,\mathfrak{m})$, y se denota $e_{(x,\mathfrak{m})}(\mathcal{M})$, al número entero

$$e_{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}_x)$$

definido en 4.0.4..

<u>4.1.3!</u> Sea $(Z,\mathcal{O}_Z)$ una variedad analítica compleja y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Z$-módulo coherente. Se llama multiplicidad de $\mathcal{G}$ en un punto $z \in Z$, y se denota $e_z(\mathcal{G})$, al número entero $e^{\mathcal{O}_{Z,z}}(\mathcal{G}_z)$ definido en 4.0.2..

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo coherente admitiendo una filtración globalmente buena. El $\mathcal{O}_{T^*(X)}$-módulo

$$G(\mathcal{M}) = \pi^{-1}(gr(\mathcal{M})) \otimes_{\pi^{-1}(gr(\mathcal{D}))} \mathcal{O}_{T^*(X)}$$

(donde $\pi : T^*(X) \longrightarrow X$ es la proyección natural) es coherente.

<u>4.1.4. PROPOSICION.-</u>

Para cada $(x,\mathfrak{m}) \in T^*(X)$ se verifica:

$$e_{(x,\mathfrak{m})}(G(\mathcal{M})) = e_{(x,\mathfrak{m})}(\mathcal{M})$$

<u>Prueba.-</u>

$$e_{(x,\mathfrak{m})}(G(\mathcal{M})) = e^{\mathcal{O}_{T^*(X),(x,\mathfrak{m})}}(G(\mathcal{M})_{(x,\mathfrak{m})}) =$$

$$= e^{\mathcal{O}_{T^*(X),(x,\mathfrak{m})}}((gr(\mathcal{M}_x) \otimes_{gr(\mathcal{D}_x)} \mathcal{O}_{T^*(X),(x,\mathfrak{m})})$$

para aligerar la notación, pongamos

$$M = gr(\mathcal{M}_x)$$

$$A = gr(\mathcal{D}_x)$$

$$B = \mathcal{O}_{T^*(X),(x,\mathfrak{m})}$$

Es evidente que

$$M \otimes_A B = M \otimes_A (A \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B) = M_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B$$

por otra parte la inclusión

$$A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow B$$

es plana (esto se demuestra tomando coordenadas locales: $\mathcal{O}_x =$ $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\} = \mathbb{C}\{\underline{X}\}$; $gr(\mathcal{D}_x) = \mathcal{O}_x[\xi_1,\dots,\xi_n] = \mathcal{O}_x[\underline{\xi}]$ y $\mathcal{O}_{T^*(X),(x,\mathfrak{m})}$ $= \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n,T_1,\dots,T_n\} = \mathbb{C}\{\underline{X},\underline{T}\}$. La inclusión $A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow B$ viene dada por $\mathbb{C}\{X\}[\xi]_{(\underline{X},\underline{\xi}-\underline{a})} \hookrightarrow \mathbb{C}\{\underline{X},\underline{T}\}$; donde se ha identificado el ideal $\mathfrak{m}$ a $(\underline{\xi}-\underline{a})$). Aplicando ([BOU] A.C. Chap. 8, §7.2) se tiene

$$e^{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = e^B(M_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B) = e^B(M \otimes_A B)$$

y

$$e^{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = e^{gr(\mathcal{D}_x)_{\mathfrak{m}}}(gr(\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{m}}) = e_{(x,\mathfrak{m})}(\mathcal{M}).$$

4.1.5. PROPOSICION.-

Sea $(Z, \mathcal{O}_Z)$ una variedad analítica compleja lisa. Sea $\mathcal{G}$ un haz de $\mathcal{O}_Z$-módulos coherente tal que el soporte de (soporte de $\mathcal{G} = supp(\mathcal{G}) = \{z \in Z / \mathcal{G}_z \neq 0\}$) sea irreducible y liso. Entonces

$$e_z(\mathcal{G}) = e_{z'}(\mathcal{G}) \quad \forall z,z' \in supp(\mathcal{G}).$$

Prueba.- Podemos suponer $supp(\mathcal{G}) = Z$ (de lo contrario se restringe $\mathcal{G}$ a $supp(\mathcal{G})$).

Si $\dim(Z)=1$, consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/T(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

donde $T(\mathcal{G})$ es el haz de torsión de $\mathcal{G}$. $T(\mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_Z$-módulo coherente y $\dim(supp(T(\mathcal{G}))) = 0$; por tanto

$$e_z(\mathcal{G}) = e_z(\mathcal{G}/T(\mathcal{G})) \quad \forall z \in Z.$$

$\mathcal{G}/T(\mathcal{G})$ es un haz sin torsión y por tanto localmente libre ($\mathcal{O}_{Z,z}$ es un anillo de ideales principales); como Z es irreducible se tiene

$$e_z(\mathcal{G}/T(\mathcal{G})) = \text{rango de } (\mathcal{G}/T(\mathcal{G}))_z = \text{constante}.$$

Si $\dim(Z)>1$, para cada $z \in Z$ existe un entorno U_z de z, en Z, tal que para todo $z' \in U_z$ existe una curva irreducible y lisa C tal que $z,z' \in C$. Así pues

$$e_z(\mathcal{G}|_C) = e_{z'}(\mathcal{G}|_C)$$

y la función $z \mapsto e_z(\mathcal{G})$ es localmente constante; como Z es irreducible esta función es de hecho constante.

4.1.6. COROLARIO.-

Sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Z$-módulo coherente. Sea $Y=supp(\mathcal{G})$. Para cada componente irreducible C de Y se define:

U_C = el conjunto de puntos lisos de $(C \setminus \overline{(Y \setminus C)})$.

Entonces, para cada C, $e_z(\mathcal{G}) = e_{z'}(\mathcal{G})$ $\forall z,z' \in U_C$.

Prueba.- Basta aplicar 4.1.5. a $(U_C, \mathcal{O}_{U_C})$ y a $\mathcal{G}|_{U_C}$.

4.1.7. COROLARIO Y DEFINICION.-

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-módulo coherente. Sea $V(\mathcal{M})$ su variedad característica (Cf. [SG] II,1.). Para cada componente irreducible C de $V(M)$ se define

U_C = el cojunto de puntos lisos de $(C \setminus \overline{(V(\mathcal{M}) \setminus C)})$.

Entonces, $e_p(\mathcal{M}) = e_{p'}(\mathcal{M})$ $\forall p,p' \in U_C$.

La constante $e_p(\mathcal{M})$ (para $p \in U_C$) es llamada la multiplicidad genérica de $\mathcal{M}$ en C y la denotaremos por $e_C(\mathcal{M})$.

Prueba.- Se aplica 4.1.6. a $Z = T^*(U_i)$ y a

$$\mathcal{G}^i = \pi^{-1}(gr(\mathcal{M}_{U_i}) \otimes_{\pi^{-1}(gr(\mathcal{D}_{U_i}))} \mathcal{O}_{T^*(U_i)}$$

donde (U_i) es un recubrimiento (por abiertos) de X, de manera que $\mathcal{M}$ admite una buena filtración en cada U_i (Cf. 4.1.1.).

Finalmente se tiene en cuenta que

$V(\mathcal{M}) \cap T^*(U_i) = \mathrm{supp}(\mathcal{G}^i)$ (Cf. [SG] II,1).

4.2. MULTIPLICIDADES DE UN $\mathcal{D}$-MODULO MONOGENO.-

En este parágrafo la letra $\mathcal{O}$ denota al anillo $C\{\underline{X}\}= C\{X_1,\dots,X_n\}$ y la letra $\mathcal{D}$ al anillo de operadores diferenciales con coeficientes en $\mathcal{O}$. Así $gr(\mathcal{D})$ se identifica al anillo $C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]$.

4.2.0.

Si I es un ideal (a la izquierda) de $\mathcal{D}$, el graduado $gr(\mathcal{D}/I)$ se identifica al cociente

$$gr(\mathcal{D})/gr(I) \;=\; \mathcal{O}[\underline{\xi}]/gr(I) \qquad \text{(Cf. 0.0.14.).}$$

Existe una correspondencia biyectiva

$$C^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Specmax}(\mathcal{O}[\underline{\xi}]) = \mathrm{Specmax}(gr(\mathcal{D}))$$

definida por $\underline{a} \mapsto (\underline{X},\underline{\xi}-\underline{a}) = \mathfrak{m}_{\underline{a}}$.

En adelante notaremos indistintamente $e_{\underline{a}}(\mathcal{D}/I)$ o $e_{\mathfrak{m}_{\underline{a}}}(\mathcal{D}/I)$ la multiplicidad de $\mathcal{D}/I$ relativamente al ideal $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$ (Cf. 4.0.4.). El número entero $e_{\underline{a}}(\mathcal{D}/I)$ será llamado la multiplicidad de $\mathcal{D}/I$ en $\underline{a}\in C^n$.

4.2.0.1. Cálculo de $e_{\underline{0}}(\mathcal{D}/I)$.

Por definición se tiene

$$e_{\underline{0}}(\mathcal{D}/I) = e_{(\underline{X},\underline{\xi})}\left(\frac{C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]_{(\underline{X},\underline{\xi})}}{gr(I)_{(\underline{X},\underline{\xi})}}\right)$$

Como el completado de $C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]_{(\underline{X},\underline{\xi})}$ es $C[[\underline{X},\underline{\xi}]]$ la inclusión $C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]_{(\underline{X},\underline{\xi})} \hookrightarrow C[[\underline{X},\underline{\xi}]]$ es plana. Escribimos:

$$A = C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]_{(\underline{X},\underline{\xi})}$$

$$B = C[[\underline{X},\underline{\xi}]]$$

$$N = A/gr(I)_{(\underline{X},\underline{\xi})}$$

aplicando [BOU] A.C. Chap.8,§7.2. se tiene que

$$e^A(N) = e^B(N \otimes_A B) = e_{(\underline{X},\underline{\xi})}(B/gr(I).B)$$

y por tanto

$$e_{\underline{0}}(\mathcal{D}/I) = e\left(\frac{C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}{gr(I).C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}\right)$$

<u>4.2.0.2.</u> Cálculo de $e_{\underline{a}}(\mathcal{D}/I)$.

Consideremos el isomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \Psi_{\underline{a}} : C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}] &\longrightarrow C\{\underline{X}\}[\underline{\eta}] \\ \underline{X} &\longmapsto \underline{X} \\ \xi_i &\longmapsto \eta_i + a_i \end{aligned}$$

y notemos $gr(I)' = \Psi_{\underline{a}}(gr(I))$. Se tiene

$$e_{\underline{a}}(\mathcal{D}/I) = e_{(\underline{X},\underline{\xi}-\underline{a})}\left(\frac{C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]_{(\underline{X},\underline{\xi}-\underline{a})}}{gr(I)_{(\underline{X},\underline{\xi}-\underline{a})}}\right) = e_{(\underline{X},\underline{\eta})}\left(\frac{C\{\underline{X}\}[\underline{\eta}]_{(\underline{X},\underline{\eta})}}{gr(I)'_{(\underline{X},\underline{\eta})}}\right)$$

Así pues hemos reducido el cálculo de la multiplicidad de un $\mathcal{D}$-módulo, del tipo $\mathcal{D}/I$, en un punto de C^n al cálculo de la multiplicidad de un módulo del tipo $\dfrac{C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}{gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}$

4.2.1. NOTA.-

El objeto del parágrafo siguiente es demostrar que la multiplicidad de un $C[[\underline{X},\underline{\xi}]]$-módulo de la forma $\dfrac{C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}{gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]]}$ se calcula (de forma efectiva) a partir del conjunto de los exponentes privilegiados(*) de $gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]]$ (esto es: $E(gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]])$ (Cf. 1.2.4.).

Ahora bien $E(I) = E(gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]])$. En efecto: $gr(I)$ es un ideal graduado de $gr(\mathcal{D})=C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]$. Si $\underline{f}$ es un elemento homogéneo de $gr(I)$, el exponente privilegiado de $\underline{f}$, considerado como elemento de $C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]$ (Cf.2.1.3.), coincide con el exponente privilegiado de $\underline{f}$, considerado como un elemento de $C\{\underline{X},\underline{\xi}\}$ (Cf. 2.1.5.). Así pues se tiene $E(gr(I)\cdot C\{\underline{X}\}[\underline{\xi}]) = E(gr(I)C\{\underline{X},\underline{\xi}\}) = E(gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]])$ (la última igualdad es evidente). Y por 2.2.11. se tiene $E(I) = E(gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]])$.

Así pues conocido el "dato" $E(I)$ (que es un dato combinatorio asociado a I) se conoce la multiplicidad de $\mathcal{D}/I$ en $\underline{0}$ y $E(I)$ se conoce si conoce una base de división de I (Cf.2.2.4.)

En la igualdad $E(I)=E(gr(I)C[[\underline{X},\underline{\xi}]])$ interviene de manera esencial la definición 2.0.0.. Esta es una razón por la cual se ha elegido 2.0.0. como definición de exponente privilegiado.

(*) Relativamente a la forma antidiagonal sobre R^{2n}.

4.3. DIMENSION Y MULTIPLICIDAD DE UN MODULO DEL TIPO $\frac{C[[X]]}{\mathfrak{a}}$.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $C[[X]] = C[[X_1,\dots,X_n]]$. Nuestro propósito es calcular, a partir del conjunto $E(\mathfrak{a})$(*) (Cf. 1.2.4.) la dimensión y la multiplicidad (Cf. 4.0.2.) del $C[[X]]$-módulo cociente $\frac{C[[X]]}{\mathfrak{a}}$.

4.3.0. NOTACION.-

Si n es un número entero positivo notaremos:

1) $P(1,\dots,n)=P(n)$ el conjunto de las partes de $\{1,\dots,n\}$.

2) Si $\sigma\in P(n)$

$\|\alpha\|$ = cardinal de σ.

$S^{\sigma}_{(n)} = \{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in N^n / \alpha_i=0 \text{ si } i\in\sigma\}$.

$T^{\sigma}_{(n)} = S^{\{1,\dots,n\}\setminus\sigma}_{(n)}$

3) Si E es un ideal de N^n (es decir: $E + N^n = E$)

$cd(E) = \min\{\|\alpha\| / S^{\sigma}_{(n)} \cap E = \emptyset\}$

$d(E) = n - cd(E)$.

4) Si $\sigma\in P(n)$ y $\|\alpha\| = cd(E)$ el conjunto

$$\{\alpha\in T^{\sigma}_{(n)} / (\alpha+S^{\sigma}_{(n)})\cap E = \emptyset\}$$

es finito y notaremos $e_{\sigma}(E)=\text{card}\{\alpha\in T^{\sigma}_{(n)}/(\alpha+S^{\sigma}_{(n)})\cap E = \emptyset\}$

(*) Relativamente a la forma antidiagonal sobre R^n.

5) $e(E) = \sum_{\sigma \in P(n)/\|\sigma\| = cd(E)} e_\sigma(E).$

4.3.1. TEOREMA.-

Con las notaciones precedentes, sea $\mathfrak{G}$ un ideal de $C[[X]]$ y $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $C[[X]]$. Sea $E(\mathfrak{G})$ el conjunto de los exponentes privilegiados de $\mathfrak{G}$ relativamente a la forma anti-diagonal sobre R^n (Cf. 1.2.4.). Entonces:

i) $d_{C[[X]]}\left(\frac{C[[X]]}{\mathfrak{G}}\right) = d(E(\mathfrak{G}))$. (Cf. 4.0.2.).

ii) $e_{\mathfrak{m}}\left(\frac{C[[X]]}{\mathfrak{G}}\right) = e(E(\mathfrak{G}))$.

Para la prueba del teorema se necesitan algunos resultados que serán dados en forma de lemas. Antes de enunciar estos resultados fijaremos algunas notaciones.

4.3.2. NOTACION.-

$\forall \sigma \in P'(n) = P(n) \setminus (\emptyset)$ notaremos:

1) $pr^{\sigma}_{(n)} : N^n \longrightarrow T^{\sigma}_{(n)}$ la proyección natural.

2) $\phi^{\sigma}_{(n)} : T^{\sigma}_{(n)} \longrightarrow N^{\|\sigma\|}$ la biyección definida por

$$\phi^{\sigma}_{(n)}(\alpha) = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{\|\sigma\|}}) \quad \text{si } \sigma = \{i_1, \ldots, i_{\|\sigma\|}\} \text{ e } i_1 < \ldots < i_{\|\sigma\|}.$$

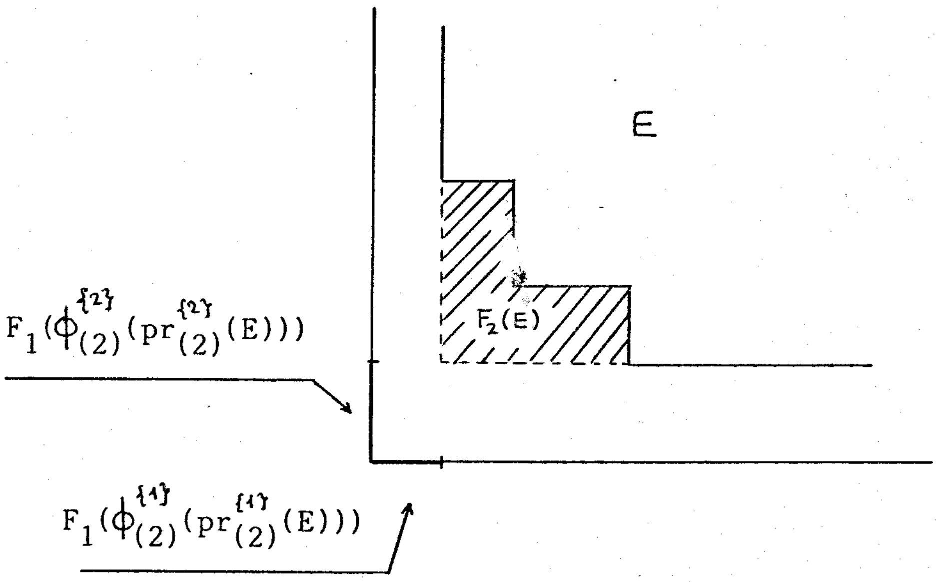
3) A cada ideal E de N^n se le asocia un subconjunto $F_n(E)$ de $N^n \setminus E$ de la manera siguiente:

Si $n=1$ $F_1(E) = N \setminus E$.

Supongamos construido $F_m(E')$ para todo ideal E' de N^m y para todo $m < n$. Sea E un ideal de N^n. Definimos

$$F_n(E) = N^n \setminus \left(E \cup \bigcup_{\substack{\sigma \in P'(n) \\ \sigma \neq \{1,\dots,n\}}} (\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right] + S^{\sigma}_{(n)} \right)$$

Una figura:(n=2).



4.3.3. LEMA.-

Sea E un ideal de N^n. Entonces

$$N^n \setminus E = \bigcup_{\sigma \in P'(n)} (\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right] + S^{\sigma}_{(n)} .$$

Prueba.- Es suficiente demostrar la inclusión

$$(\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right] + S^{\sigma}_{(n)} \subseteq N^n \setminus E, \quad \forall \sigma \in P'(n).$$

Si $\sigma=\{1,\dots,n\}$, el resultado es una consecuencia de la construcción de $F_n(E)$. Sea $\sigma\neq\{1,\dots,n\}$. $\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E))\subseteq N^{\|\sigma\|}$ es un ideal de $N^{\|\sigma\|}$ y por tanto

$$F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\subseteq(N^{\|\sigma\|}\setminus\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E))).$$

Así pues

$$(\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right]\subseteq T^{\sigma}_{(n)}\setminus pr^{\sigma}_{(n)}(E)$$

y por tanto

$$(pr^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[(\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}(F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E))))\right]=$$

$$=\quad(\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right]+S^{\sigma}_{(n)}\subseteq$$

$$\subseteq\quad(pr^{\sigma}_{(n)})^{-1}(T^{\sigma}_{(n)}\setminus pr^{\sigma}_{(n)}(E))\subseteq N^n\setminus E.$$

Para cada $\sigma\in P'(n)$ notaremos

$$G^{\sigma}_{(n)}(E)=(\phi^{\sigma}_{(n)})^{-1}\left[F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)))\right]\subseteq T^{\sigma}_{(n)}.$$

Se va a probar que $G^{\sigma}_{(n)}(E)$ es un subconjunto finito de $T^{\sigma}_{(n)}$. Esto es el objeto de los dos lemas siguientes.

<u>4.3.4. LEMA</u>.-

i) Si E' es un ideal de N^{n-1} y $E=E'\times N$, entonces $F_n(E)=\emptyset$.

ii) Si $\sigma \in P'(n)$ y $n \in \sigma$ entonces $G^{\sigma}_{(n)}(E) = \emptyset$ y

$$N^n \setminus E = \bigsqcup_{\sigma \in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}.$$

Prueba.-

Sea $\sigma \in P'(n)$ tal que $n \notin \sigma$. Se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N^{n-1}xN \arrow[r, "pr^{\sigma}_{(n)}"] & T^{\sigma}_{(n)} \arrow[r, "\phi^{\sigma}_{(n)}"] & N^{\|\sigma\|} \\
N^{n-1}x(0) \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr^{\sigma}_{(n)}"] & T^{\sigma}_{(n-1)}x(0) \arrow[u, equal] \arrow[r, "\phi^{\sigma}_{(n)}"] & N^{\|\sigma\|} \arrow[u, equal] \\
N^{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr^{\sigma}_{(n-1)}"] & T^{\sigma}_{(n-1)} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi^{\sigma}_{(n-1)}"] & N^{\|\sigma\|} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Es evidente que:

1) $\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E)) = \phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n-1)}(E')x(0)) = \phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n-1)}(E'))$

2) $G^{\sigma}_{(n)}(E) = G^{\sigma}_{(n-1)}(E')\ x(0).$

3) $S^{\sigma}_{(n-1)}xN = S^{\sigma}_{(n)}.$

Por otra parte se tiene:

$$N^n \setminus E = N^{n-1}xN \setminus E'xN = (N^{n-1} \setminus E')xN \overset{4.3.3.}{=}$$

$$\Big(\bigsqcup_{\sigma \in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n-1)}(E') + S^{\sigma}_{(n-1)}\Big)xN =$$

$$= \bigcup_{\sigma\in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n-1)}(E')x(0) + S^{\sigma}_{(n)} =$$

$$= \bigcup_{\sigma\in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}.$$

Aplicando 4.3.3. se obtiene:

$$N^n \setminus E = \bigcup_{\sigma\in P'(n)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)} \quad \text{y por tanto}$$

$$F_n(E) \subseteq \bigcup_{\sigma\in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}$$

y de la definición de $F_n(E)$ se obtiene que $F_n(E) = \emptyset$.

Si $\sigma\in P'(n)$ y $n\in\sigma$, entonces $pr^{\sigma}_{(n)}=pr^{\sigma\setminus\{n\}}_{(n-1)}xi_N$,

y por tanto $F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma}_{(n)}(E))) = F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma}_{(n)}(pr^{\sigma\setminus\{n\}}_{(n-1)}(E')xN))=$

$=F_{\|\sigma\|}(\phi^{\sigma\setminus\{n\}}_{(n-1)}(pr^{\sigma\setminus\{n\}}_{(n-1)}(E'))xN = \emptyset$. Así $G^{\sigma}_{(n)}(E) = \emptyset$.

<u>4.3.5. LEMA</u>.-

Sea E un ideal de N^n. Entonces $F_n(E)$ es un subconjunto finito de $N^n \setminus E$.

<u>Prueba</u>.- Se va a probar que $F_n(E)$ está incluido en un n-cubo de N^n.

Sea $\tau=\{1,\dots,n-1\}$. $\phi^{\tau}_{(n)}(pr^{\tau}_{(n)}(E)) = E'$ es un ideal de N^{n-1} y se tiene:

$$N^n\setminus(E'xN) \overset{(4.3.4.)}{=} \bigcup_{\sigma\in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n)}(E'xN) + S^{\sigma}_{(n)}.$$

Por otra parte si $\sigma \subset \tau$, entonces

$$pr^{\sigma}_{(n)}(E'xN) = pr^{\sigma}_{(n)}((\phi^{\tau}_{(n)}(pr^{\tau}_{(n)}(E))xN) =$$

$$= pr^{\sigma}_{(n)}((pr^{\tau}_{(n)})^{-1}(pr^{\tau}_{(n)}(E)) = pr^{\sigma}_{(n)}(E)$$

y por tanto

$$N^{n} \setminus (E'xN) = \bigcup_{\sigma \in P'(n-1)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}.$$ Luego

$$(*) \qquad F_{n}(E) \cap N^{n} \setminus (E'xN) = \emptyset.$$

Para cada $i \in N$, notaremos

$$E^{i}_{(n)} = N^{n-1}x\ (i) \cap E.$$

Sea $i_{n} = \min \{ i \in N/\ E^{i}_{(n)} = pr^{\tau}_{(n)}(E) + (0,\dots,0,i)$

(el ser E un ideal de N^{n} implica la existencia de i_{n}). Aplicando $(*)$ se obtiene:

$$F_{n}(E) \subseteq E'xN = \phi^{\tau}_{(n)}(pr^{\tau}_{(n)}(E))xN = pr^{\tau}_{(n)}(E) + S^{\tau}_{(n)}$$

y por otra parte

$$F_{n}(E) \subseteq N^{n} \setminus E \subseteq N^{n} \setminus (E^{i_n}_{(n)} + S^{\tau}_{(n)})$$

luego

$$F_{n}(E) \subseteq (pr^{\tau}_{(n)}(E) + S^{\tau}_{(n)}) \cap (N^{n} \setminus (E^{i_n}_{(n)} + S^{\tau}_{(n)})) =$$

$$= \Big[pr^{\tau}_{(n)}(E) \cup pr^{\tau}_{(n)}(E) + (0,\dots,0,1) \cup \dots \cup pr^{\tau}_{(n)}(E) + (0,\dots,0,i_{n}-1) \cup$$

$$\bigcup pr^{\tau}_{(n)}(E)+(0,\ldots,0,i_n)+S^{\tau}_{(n)}\Big]\cap\Big[N^n\setminus(E^{i_n}_{(n)}+S^{\tau}_{(n)})\Big]\subseteq\bigcup_{j=0}^{i_n-1}N^{n-1}x(j).$$

Se demuestra de manera análoga que

$$F_n(E)\subseteq\bigcup_{j=0}^{i_k-1}N^{k-1}x(j)xN^{n-k}\quad,\quad i_k\in N,\ 1\le k\le n-1$$

y por tanto

$$F_n(E)\subseteq\prod_{k=1}^{n}([0,\ i_k-1]\cap N).$$

4.3.6. NOTACION.-

Sea E un ideal de N^n. La función de Hilbert-Samuel de E, que notaremos H_E, está definida por

$$H_E(k)=\text{card}\left\{\alpha\in N^n\setminus E/\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n\le k\right\}.$$

La función H_E toma, para $k\gg 0$, los mismos valores que un polinomio, con coeficientes racionales, que también notaremos H_E.

4.3.7. TEOREMA.-

Sea E un ideal de N^n. Entonces

$$H_E(k)=e(E)\frac{k^{d(E)}}{d(E)!}+h_E(k)\quad,\quad k\gg 0$$

donde h_E es un polinomio, con coeficientes racionales, de grado menor que $d(E)$.

Prueba.- Conservamos las notaciones de 4.3.0..

Es evidente que

$$cd(E) = \min \{ card(\sigma) / \; G^{\sigma}_{(n)}(E) \neq \emptyset \quad .$$

Aplicando 4.3.3. se puede escribir

$$N^n \setminus E = \bigsqcup_{\sigma \in P'(n)} G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}.$$

Notaremos $\Delta^k_n = \{\alpha \in N^n / \; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k\}$ y P_n la función de Hilbert-Samuel de $C[[X_1,\ldots,X_n]]$ (Cf.[BOU] A.C. Chap.8).

$$H_E(k) = card(\bigsqcup_{\sigma \in P'(n)} ((G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}) \cap \Delta^k_n)$$

y

(I)
$$\left\{ \begin{array}{l} card((G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}) \cap \Delta^k_n = \\ = \displaystyle\sum_{\underline{a}^{\sigma} \in G^{\sigma}_{(n)}(E)} card((\underline{a}^{\sigma} + S^{\sigma}_{(n)}) \cap \Delta^k_n) = \\ = \displaystyle\sum_{\underline{a}^{\sigma} \in G^{\sigma}_{(n)}(E)} P_{n-||\sigma||}(k - |\underline{a}^{\sigma}|). \end{array} \right.$$

(II)
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si} \quad \sigma, \tau \in P'(n), \text{ se tiene:} \\ (G^{\sigma}_{(n)}(E) + S^{\sigma}_{(n)}) \cap (G^{\tau}_{(n)}(E) + S^{\tau}_{(n)}) = \\ = \displaystyle\bigsqcup_{\substack{\underline{a}^{\sigma} \in G^{\sigma}_{(n)}(E) \\ \underline{b}^{\tau} \in G_{(n)}(E)} \Big/ \substack{a_i = b_i \\ \forall i \in \sigma \cap \tau}} (\underline{a}^{\sigma} \vee \underline{b}^{\tau} + S^{\sigma \cup \tau}_{(n)}) \end{array} \right.$$

donde $\underline{a}^{\sigma} \vee \underline{b}^{\tau}$ es el elemento $\underline{c}$ de $T_{(n)}^{\sigma\cup\tau}$ tal que

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin \sigma \cup \tau \\ a_i & \text{si} \quad i \in \sigma \\ b_i & \text{si} \quad i \in \tau . \end{cases}$$

Para cada $\sigma \in P'(n)$ notaremos

$$\underline{u}^{\sigma} = (u_1^{\sigma}, \dots, u_n^{\sigma}) \quad \text{con} \quad u_i^{\sigma} = \begin{matrix} 1 & \text{si} & i \in \sigma \\ \\ 0 & \text{si} & i \notin \sigma . \end{matrix}$$

La relación, que notaremos $<$, definida sobre $P'(n)$ por

$$\sigma < \tau \iff \begin{cases} ||\sigma|| < ||\tau|| \\ \\ ||\sigma|| = ||\tau|| \quad \text{y} \quad \underline{u}^{\sigma} <_{lex} \underline{u}^{\tau} \end{cases}$$

(donde $<_{lex}$ denota el orden lexicográfico inverso sobre N^n) es una relación de orden total sobre $P'(n)$. Se tiene:

$$N^n \setminus E = \bigsqcup_{||\sigma||=cd(E)} ((G_{(n)}^{\sigma}(E)+S_{(n)}^{\sigma}) \setminus (\bigcup_{\tau<\sigma} G_{(n)}^{\tau}(E) + S_{(n)}^{\tau})) \cup$$

$$\cup \bigsqcup_{||\sigma||>cd(E)} ((G_{(n)}^{\sigma}(E)+S_{(n)}^{\sigma}) \setminus (\bigcup_{\tau<\sigma} G_{(n)}^{\tau}(E) + S_{(n)}^{\tau})).$$

Así pues, de (I) y de (II) se concluye que el término de mayor grado de H_E coincide con el de

$$\sum_{||\sigma|| = cd(E)} \text{card}(G_{(n)}^{\sigma}(E)).P_{n-||\sigma||}$$

Finalmente se tiene:

$$\mathrm{card}(G^{\sigma}_{(n)}(E)) = \mathrm{card}\{\alpha \in T^{\sigma}_{(n)} / (\alpha + S^{\sigma}_{(n)}) \cap E = \emptyset\} = e_{\sigma}(E).$$

4.3.8. NOTA.-

El teorema 4.3.1. es un corolario del teorema 4.3.7. pues la función de Hilbert-Samuel del módulo $C[[X]]/\mathfrak{a}$ coincide con $H_{E(\mathfrak{a})}$. En efecto: Notemos H la función de Hilbert-Samuel de $C[[X]]/\mathfrak{a}$. Por definición (Cf. [BOU] A.C. Chap. 8) se tiene:

$$H(k) = \dim_C(C[[X]]/(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{k+1})) = \mathrm{card}(N^n \setminus E(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{k+1}))$$

(la segunda igualdad de la línea anterior es una consecuencia directa del teorema de división por una base de división del ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{k+1}$ (Cf. 1.1.0.)). Ahora bien, $E(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^{k+1}) = E(\mathfrak{a}) \cup E(\mathfrak{m}^{k+1})$, pues si $f \in \mathfrak{a}$ y $g \in \mathfrak{m}^{k+1}$, entonces, o bien $|\exp(f)| \geq k+1$ (y por tanto $f \in \mathfrak{m}^{k+1}$, $f+g \in \mathfrak{m}^{k+1}$ y $\exp(f+g) \in E(\mathfrak{m}^{k+1})$), o bien $|\exp(f)| < k+1$ y $\exp(f+g) = \exp(f)$ (Cf.1.0.8.a)) y por tanto $\exp(f+g) \in E(\mathfrak{a})$. Así pues:

$$H(k) = \mathrm{card}((N^n \setminus E(\mathfrak{a})) \cap (N^n \setminus E(\mathfrak{m}^{k+1})) =$$

$$= \mathrm{card}\{\alpha \in N^n \setminus E(\mathfrak{a}) / \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k\} = H_{E(\mathfrak{a})}(k).$$

4.4. MULTIPLICIDADES GENERICAS DE UN $\mathcal{D}$-MODULO $\mathcal{D}/I$, SIENDO I UN IDEAL CON CRUZAMIENTOS NORMALES.-

Denotaremos por $\mathcal{D}$ el haz de los operadores diferenciales lineales holomorfos sobre C^n (Cf. [PHA]) y por $\mathcal{D}_0$ la fibra de $\mathcal{D}$ en $\underline{0} \in C^n$.

Sea I un ideal (a la izquierda) de $\mathcal{D}_0$. A I se le asocia, en un entorno abierto U de $\underline{0}$, un haz de ideales de $\mathcal{D}$, que denotaremos por $\mathcal{J}$. Así pues $\mathcal{D}_U/\mathcal{J}$ es un $\mathcal{D}_U$-módulo coherente cuya fibra en cada punto de U es isomorfa a $\mathcal{D}_0/I$. Si $(\underline{x},\underline{a})$ es un punto de $T^*(U)$ escribiremos $e_{(\underline{x},\underline{a})}(\mathcal{D}_0/I)$ en lugar de $e_{(\underline{x},\underline{a})}(\mathcal{D}_U/\mathcal{J})$ (Cf. 4.1.3.).

4.4.0. DEFINICION.-

Sea I un ideal (a la izquierda) de $\mathcal{D}_0$. Se dice que I es un ideal con cruzamientos normales si

$$\sqrt{gr(I)} \supseteq (X_1\xi_1,\ldots,X_n\xi_n)gr(\mathcal{D}_0).$$

4.4.1. NOTACION.-

1) Notaremos $P(n)$ el conjunto de las partes de $\{1,\ldots,n\}$.

2) Si $\sigma \in P(n)$ notaremos:

-) $C_\sigma = T^*_{Z_\sigma}(U)$ (el espacio conormal a Z_σ en U, donde $Z_\sigma = \{\underline{z} \in U/z_i=0 \text{ si } i \in \sigma\}$.

-) $\underline{u}^{\sigma}=(u_1^{\sigma},\dots,u_n^{\sigma})$ donde $u_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \sigma \\ 0 & \text{si } i \notin \sigma . \end{cases}$

-) $\underline{w}^{\sigma}=(w_1^{\sigma},\dots,w_n^{\sigma})$ donde $w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \notin \sigma \\ 0 & \text{si } i \in \sigma . \end{cases}$

-) $b_\sigma = e_{(\underline{w}^\sigma,\underline{u}^\sigma)}(\mathcal{D}_o/I)$.

Si I es un ideal de $\mathcal{D}_o$ con cruzamientos normales entonces

$$V(\mathcal{D}_o/I) = V(\sqrt{gr(I)}) \subseteq \bigcup_{\sigma\in P(n)} T^*_{Z_\sigma}(U) = \bigcup_{\sigma\in P(n)} C_\sigma \,.$$

4.4.2. PROPOSICION.-

Con las notaciones anteriores, sea I un ideal de con cruzamientos normales. Entonces:

i) $b_\sigma = 0$ si y solo si C_σ no es una componente irreducible de $V(\mathcal{D}_o/I)$.

ii) Si C_σ es una componente irreducible de $V(\mathcal{D}_o/I)$, la multiplicidad genérica de $\mathcal{D}_o/I$ en esa componente es igual a b_σ.

Prueba.-

Es suficiente demostrar ii). Si C_σ es una componente irreducible de $V(\mathcal{D}_o/I)$ entonces

$$(\underline{w}^\sigma,\underline{u}^\sigma) \in C_\sigma \setminus (\bigcup_{\substack{\tau\in P(n)\\ \tau\neq\sigma}} C_\tau)$$

y por tanto $(\underline{w}^{\sigma},\underline{u}^{\sigma})$ es un punto liso de $C_{\sigma}\setminus\overline{(V(\mathcal{D}_c/I)\setminus C_{\sigma})}$. El resultado sigue ahora de 4.1.7..

Los siguientes lemas son útiles para el cálculo de multiplicidades (Cf. 4.5.).

4.4.3. LEMA.-

Sea A un anillo local noetheriano y

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_r\cap\mathfrak{q}_{r+1}\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_{r+s}$$

una descomposición primaria reducida (Cf.[BOU] Chap.4) de un ideal $\mathfrak{a}$ de A, donde $(\mathfrak{q}_i)_{1\le i\le r}$ son las componentes primarias aisladas de $\mathfrak{a}$. Entonces

$$e(A/\mathfrak{a}) = e(A/\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_r)$$

Prueba.-

Escribamos $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ $(1\le i\le r)$. $(\mathfrak{p}_i)_{1\le i\le r}$ son los ideales primos minimales asociados a $\mathfrak{a}$. En virtud de([BOU] A.C. Chap.8 §7) se tiene:

$$e(A/\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p}\in\Phi} \operatorname{long}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})e(A/\mathfrak{p})$$

donde $\Phi = \{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})/\ \mathfrak{p}$ es minimal y $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{a})$.

Por localización de una descomposición primaria (Cf. [BOU] A.C. Chap. 4 §4.4) se tiene $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{p}_i}$ $(1\le i\le r)$ y por tanto

$$e(A/\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p}_i/\dim(A/\mathfrak{p}_i)=\dim(A/\mathfrak{a})} \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(A_{\mathfrak{p}_i}/(\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{p}_i})e(A/\mathfrak{p}_i)$$

y esto demuestra el lema.

4.4.4. LEMA.-

Sea A un anillo local noetheriano. Sea $(\mathfrak{a}_i)_{1\leq i\leq r}$ $(r\geq 1)$ una familia de ideales de A verificando

i) $\dim_A(A/\mathfrak{a}_i) = d$, $1\leq i\leq r$ $(d\in N)$;

ii) $\dim_A(A/(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j)) < d$ $1\leq i<j\leq r$.

Entonces

$$\dim_A(A/\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i) = d \quad \text{y} \quad e(A/\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i)) = \sum_{i=1}^{r} e(A/\mathfrak{a}_i).$$

Prueba.-

Por inducción sobre r. Si $r=2$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A/(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)) \longrightarrow A/\mathfrak{a}_1 \oplus A/\mathfrak{a}_2 \longrightarrow A/(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2) \longrightarrow 0$$

como $\dim(A/\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2) < d$, entonces $\dim(A/\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2) = \dim(A/\mathfrak{a}_1 \oplus A/\mathfrak{a}_2) = d$ y en virtud de ([SE-1] II-B,4)

$$e(A/\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2) = e(A/\mathfrak{a}_1) + e(A/\mathfrak{a}_2).$$

El resultado se obtiene aplicando la hipótesis de inducción a la sucesión exacta

$$0 \to A/\Big(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{G}_i\Big) \cap \mathfrak{G}_r \longrightarrow A/\Big(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{G}_i\Big) \oplus A/\mathfrak{G}_r \longrightarrow A/\Big(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{G}_i\Big) + \mathfrak{G}_r \longrightarrow 0$$

4.5. EJEMPLOS.-

4.5.0.

En este ejemplo se calculan las multiplicidades genéricas de $\mathcal{D}/I$, donde $I=(P_1,P_2)$ y $P_1 = yD_x -1$, $P_2 = yD_y +(x-y)D_x-1$ (n=2).

1°) Cálculo de una base de división de I.

Aplicamos 3.0.15. para calcular una base de división de I.

$$\exp(P_1) = (0,1,1,0)$$

$$\exp(P_2) = (1,0,1,0)$$

$$E^2 = ((\exp(P_2)+N^4) \setminus E^1) = (1,0,1,0) + N x (0) x N^2.$$

$$N^4 \setminus \hat{E}^2 = (0,1,0,0) + N^4.$$

$$yP_2 = (x-y)P_1 + y^2D_y -2y +x$$

y escribimos

$$P_3 = y^2D_y -2y +x$$

$$\exp(P_3) = (0,2,0,1)$$

$$E^3 = ((\exp(P_3)+N^4) \setminus (E^1 \cup E^2)) = (0,2,0,1) + N^2 x (0) x N$$

$$N^4 \setminus \hat{E}^3 = (0,0,1,0) + N^4$$

$$D_xP_3 = (yD_y -2)P_1 + P_2$$

y por tanto $\{P_1,P_2,P_3\}$ es una base de división de I y

$\{y\xi,\ (x-y)\xi + y\eta,\ y^2\eta\}$ es una base de división de $gr(I)$.

A la vista de las ecuaciones de $gr(I)$ es evidente que I es un ideal con cruzamientos normales.

2°) Cálculo de multiplicidades.

Aplicamos 4.4.2. y 4.2. para calcular las multiplicidades genéricas de $\mathcal{D}/I$.

-) $e_{(1,1,0,0)}(\mathcal{D}/I)$.

Hay que calcular una base de división del ideal $\mathfrak{a}$ de $C[[x,y,\xi,\eta]]$ donde

$$\mathfrak{a} = ((y+1)\xi = f_1,\ (x-y)\xi + (y+1)\eta = f_2,\ (y+1)^2\eta = f_3).$$

En este caso es fácil ver que $\mathfrak{a} = (\xi,\eta)C[[x,y,\xi,\eta]]$ y aplicando 4.3.1. se obtiene

$$e_{(1,1,0,0)}(\mathcal{D}/I) = 1.$$

-) $e_{(0,1,1,0)}(\mathcal{D}/I)$.

El ideal $((y+1)(\xi+1),\ (x-y-1)(\xi+1)+(y+1)\eta,\ (y+1)^2\eta)$ es igual al anillo $C[[x,y,\xi,\eta]]$ y por tanto

$$e_{(0,1,1,0)}(\mathcal{D}/I) = 0.$$

-) $e_{(1,0,0,1)}(\mathcal{D}/I)$.

Hay que calcular una base de división del ideal

$(y\xi = f_1,\ (x+1-y)\xi + y(\eta+1) = f_2,\ y^2(\eta+1) = f_3) = (f_1, f_2, y^2 = g_3)$. Aplicando 3.0.15. se obtiene $(f_1, f_2, g_3,\ (x+1)\xi^2)$ como base de división y en virtud de 4.3.1.

$$e_{(1,0,0,1)}(\mathcal{D}/I) = 2.$$

-) $e_{(0,0,1,1)}(\mathcal{D}/I)$.

El ideal $(y(\xi+1),\ (x-y)(\xi+1)+y(\eta+1),\ y^2(\eta+1))C[[x,y,\xi,\eta]]$ es igual al ideal $(x,y)C[[x,y,\xi,\eta]]$ y en virtud de 4.3.1.

$$e_{(0,0,1,1)}(\mathcal{D}/I) = 1.$$

4.5.1.

En este ejemplo se calculan las multiplicidades genéricas de $\mathcal{D}/I$, donde $I=(P_1,P_2)$ y $P_1= 2xD_y +3y^2D_x$, $P_2=3xD_x +2yD_y +6$

1°) Cálculo de una base de división de I.

Se procede como en 3.0.15.

$\exp(P_1) = (1,0,0,1)$

$\exp(P_2) = (1,0,1,0)$

$E^2 = (1,0,1,0) + N^3x(0)$

$N^4 \setminus \hat{E}^2 = (0,0,0,1) + N^4$

$2D_yP_2 = 3D_xP_1 + 4yD_y -9y^2D_x +10D_y$

y escribimos

$P_3 = 4yD_y -9y^2D_x +10D_y$

$\exp(P_3) = (0,1,0,2)$

$E^3 = (0,1,0,2) + (0)xN^3$

$N^4 \setminus \hat{E}^3 = (1,0,0,0) + N^4$

$$xP_3 = (2yD_y + 5)P_1 + (-3y^2D_x)P_2$$

y por tanto $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de división de I y $(2x\eta + 3y^2\xi\ ,\ 3x\xi + 2y\eta,\ 4y\eta^2 - 9y^2\xi^2\ )$ es una base de división de gr(I)

A la vista de las ecuaciones de gr(I) es evidente que I <u>no</u> es un ideal con cruzamientos normales. De hecho se demuestra fácilmente que la variedad característica de $\mathcal{D}/I$ es igual a $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde

$$C_1 = T^*_{C^2}(C^2)$$

$$C_2 = \overline{T^*_{((x^2-y^3)\setminus(0,0))}(C^2)}$$

$$C_3 = T^*_{(0,0)}(C^2).$$

En esta situación el punto $(1,0,0,0) \in (C_1 \setminus \overline{(V(\mathcal{D}/I)\setminus C_1)})$ y es un punto liso, por tanto $e_{(1,0,0,0)}(\mathcal{D}/I) = e_{C_1}(\mathcal{D}/I)$ (Cf. 4.1.7.).

Por otra parte $e_{(1,1,0,0)}(\mathcal{D}/I) = e_{C_1}(\mathcal{D}/I) + e_{C_2}(\mathcal{D}/I)$ (pues $(1,1,0,0) \in C_1 \cup C_2$, $(1,1,0,0)$ es un punto liso de C_2 y se aplica el lema 4.4.4.).

Finalmente $e_{(0,0,1,1)}(\mathcal{D}/I) = e_{C_3}(\mathcal{D}/I)$ (Cf. 4.1.7.) (pues $(0,0,1,1) \in (C_3 \setminus \overline{(V(\mathcal{D}/I) \setminus C_3)})$ y es un punto liso de C_3).

2°) Cáculo de las multiplicidades.

-) $e_{(1,0,0,0)}(\mathcal{D}/I)$.

Hay que calcular una base de división del ideal

$(2(x+1)\eta +3y^2\xi =f_1,\ 3(x+1)\xi +2y\eta =f_2,\ 4y\eta^2 -9y^2\xi^2 =f_3) = (f_1(x+1)^{-1}=g_1,$

$f_2(x+1)^{-1} =g_2,\ f_3=g_3).$

Aplicamos 3.0.15.:

$$g_2 = g_2g_1 -(3y^2/2(x+1))g_2$$

$$g_3 = 2yg_1 -3y^2g_2$$

Así pues $(g_1,\ g_2,\ g_3)$ es una base de división del ideal en cuestión y en virtud de 4.3.1. se obtiene

$$e_{C_1}(\mathcal{D}/I) = 1.$$

-) $e_{(1,1,0,0)}(\mathcal{D}/I)$.

Se aplica 3.0.15. para comprobar que una base de división del ideal

$(2(x+1)\eta +3(y+1)^2\xi =f_1,\ 3(x+1)\xi +2(y+1)\eta =f_2,\ 4(y+1)\eta^2-9(y+1)^2\xi^2 =f_3)$

es $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ (y+1)^3x\eta)$.

En virtud de 4.3.1. se tiene que

$e_{(1,1,0,0)}(\mathcal{D}/I)=2$ y por tanto $e_{C_2}(\mathcal{D}/I) =1.$

-) $e_{(0,0,1,1)}(\mathcal{D}/I)$.

Se procede como en 3.0.15. para calcular una base de división del ideal

$=((2x(\eta+1)+3y^2(\xi+1)=f_1,\ 3x(\xi+1)+2y(\eta+1)=f_2,\ 4y(\eta+1)^2-9y^2(\xi+1)^2=f_3)$.

Se tiene

$$xf_3 = 2y(\eta+1)f_1 - 6y^3(\eta+1)(\xi+1) - 9xy^2(\xi+1)^2 =$$

$$= 2y(\eta+1)f_1 - (6/4)y^2((\xi+1)/(\eta+1))f_3 - (9/2)y^2((\xi+1)^2/(\eta+1))f_1$$

lo cual demuestra que (f_1, f_2, f_3) es una base de división de $\mathcal{G}$.

Así pues $E(\mathcal{G}) = ((1,0,0,0) \cup (0,1,0,0)) + N^4$ y aplicando 4.3.1. se obtiene

$$e_{(0,0,1,1)}(\mathcal{D}/I) = 1.$$

4.5.2. Cálculo de una resolución libre del $\mathcal{D}$-módulo considerado en el ejemplo anterior.

Se considera la sucesión exacta

$$\mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_1(Q_1,Q_2,Q_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i\ P_i$ ($\{P_1,P_2,P_3\}$ la base de división obtenida en 4.5.1.). Por 3.0.13. un sistema de generadores de $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ es la familia formada por los dos elementos siguientes:

$$\underline{R}_1 = (3D_x,\ -2D_y,\ 1)$$

$$\underline{R}_2 = (2yD_y+5,\ -3y^2D_x,\ -x)$$

aplicamos 3.0.15. para construir una base de división de $\operatorname{Ker}(\varphi_1)$

Se tiene

$$3D_xR_2 = (2yD_y+5)R_1 + (0, -9y^2D_x^2 +4yD_y^2 +10D_y, -3xD_x -2yD_y -8)$$

y se escribe

$$\underline{R}_3 = (0, -9y^2D_x^2 +4yD_y^2 +10D_y, -3xD_x -2yD_y -8).$$

Como $\exp(R_1) = (0,0,1,0;1)$, $\exp(R_2) = (0,1,0,1;1)$ y $\exp(R_3) = (0,1,0,2;2)$, de 3.0.12. se deduce que $\{R_1, R_2, R_3\}$ es una base de división de $\operatorname{Ker}(\varphi_1)$ y se puede escribir la sucesión exacta

$$\mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_2(Q_1, Q_2, Q_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_iR_i$.

Por 3.0.13. un sistema de generadores de $\operatorname{Ker}(\varphi_2)$ es el elemento $\underline{S} = (2yD_y +5, -3D_x, 1)$. Por tanto la resolución construida es

$$0 \to \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_3} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_3(Q) = Q.\underline{S}$.

<u>4.5.3.</u> Cálculo de una resolución libre del $\mathcal{D}$-módulo considerado en el ejemplo 4.5.0.

Se considera la sucesión exacta

$$\mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_1(Q_1,Q_2,Q_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i.P_i$ ($\{P_1,P_2,P_3\}$ la base de división del ideal I construida en 4.5.0.). Por 3.0.13. un sistema de generadores de $Ker(\varphi_1)$ está formado por

$$\underline{R}_1 = (x-y,\ y\ ,1)$$

$$\underline{R}_2 = (yD_y -2,\ 1,\ -D_x).$$

Se aplica 3.0.15. para construir una base de división de Ker( ). Se tiene:

$$\underline{R}_2 = -D_x\underline{R}_1 + \underline{R}_3$$

donde

$$\underline{R}_3 = (yD_y +(x-y)D_x -1,\ yD_x +1,\ 0)$$

De 3.0.12. se deduce que $\{R_1,\ R_2,\ R_3\}$ es una base de división de $Ker(\varphi_1)$ y se puede por tanto escribir la sucesión exacta

$$\mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_2(Q_1,Q_2,Q_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i.R_i$.

Por 3.0.13. un sistema de generadores de $Ker(\varphi_2)$ es el elemento $\underline{S} = (-D_x,\ 1,\ -1)$ y por tanto la resolución libre obtenida es

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_3} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{D}^3 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/I \longrightarrow 0$$

donde $\varphi_3(Q) = Q.\underline{S}$.

REFERENCIAS

[A-H-V] AROCA, J.M.- HIRONAKA, H.- VICENTE, J.L.- The theory of maximal contact. Mem. Mat. Inst. Jorge Juan 29. CSIC. Madrid (1975).

[BER] BERNSTEIN, I.N.- Modules over the ring of diff. operators. A study of the fundamental solution of equations with constant coeff. Funz. Anal. Akademia CCCR 5 (2) 1971. 1-16 pp.

[BJO] BJORK, J.E.- Rings of Differential Operators. North Holland (1979).

[BOU] BOURBAKI, N.- Algèbre Commutative. Chaps. 3,4,8, y 9.

[BR] BRIANCON, J.- Weierstrass préparé à la Hironaka. Asterisque 7-8 (1973) pp. 67-73.

[BR-M] BRIANÇON, J.- MAISONOBE, PH.- Idéaux des germes d'opérateurs différentiels. Enseignements Mathématiques. (Por aparecer).

[GA-1] GALLIGO, A.- Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale. Ann. Institut Fourier (Grenoble) 29 (1979) pp. 107-184.

[GA-2] __________.- Algorithmes de calcul de base standards. Prepublication de l'Université de Nice. N°9 (1983).

[H] HIRONAKA, H.- Idealistic exponents of singularity. John Hopkins (Baltimore).

[KAS-1] KASHIWARA, M.- Algebraic study of systems of partial diff. equations. Master Thesis. University of Kyoto. (1971).

[KAS-2] __________.- Systems of microdifferential equations. Progress in Mathematics. n°34. Birkhauser.

[LE-M] LÊ D.T.- MEBKHOUT, Z.- Introduction to linear differential systems. Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol. 40 (1983) Part 2.

[MAT] MATSUMURA, H.- Commutative algebra. W.A. Benjamin New York, (1970).

[PHA] PHAM, F.- Singularités des systemes différentiels de Gauss-Manin. Progress in Mathematics 2; Birkhauser (1979).

[SC] Seminaire H. Cartan. "Familles d'espaces complexes". E.N.S. exposé n°19 par C. Houzel.

[SCH] SCHAPIRA, P.- Une introduction à l'étude des systèmes d'équations microdifférentielles. Cours à Paris VII. 1980-1981.

[SE-1] SERRE, J.P.- Algèbre Locale. Multiplicités. Troisième édition. Lectures Notes in Math. 11 (1975).

[SE-2] __________.- Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. 61, 197-278 (1955).

[SG] "Séminaire sur les opérateurs différentiels". Grenoble (1975-1976).

[S-Z] SAMUEL, P.- ZARISKI, O.- Commutative Algebra. Vol II. Van Nostrand (1958).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

Francisco Jesús Castro Jiménez

titulada "Teorema de división para los operadores diferenciales y cálculo de multiplicidades de D-Modelos"

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Sevilla, 31 de octubre 1.984

El Vocal, El Vocal, El Vocal

El Presidente, El Secretario, El Doctorado