

Teoremas de Kuratowski en bosques de esferas y planos proyectivos

L. Boza¹M.T. Dávila²R. Moyano²

Resumen

En este artículo, probaremos que todas las pseudosuperficies denominadas bosques y formadas por esferas y planos proyectivos poseen los mismos grafos 2-conexos prohibidos, esto es, los 90 grafos 2-conexos prohibidos para el plano proyectivo [1, 3]. Caracterizaremos, además, los bosques cuyos grafos prohibidos pueden ser obtenidos usando el orden $<_2$ para terminar formulando la siguiente conjetura: *todo bosque de esferas y planos proyectivos tiene un Teorema de Kuratowski finito*. A modo de ejemplo, lo explicitaremos para algunos bosques en concreto.

1 Introducción

En 1930 Kuratowski [5] demostró que las únicas obstrucciones básicas para la planaridad son K_5 y $K_{3,3}$. Más tarde Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [1, 3] encontraron el conjunto de obstrucciones minimales para el plano proyectivo $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

Entendemos por obstrucción minimal un grafo que no puede ser contenido, en un cierto sentido, por otro grafo para que éste último admita una inmersión en una superficie dada. Por ello, las obstrucciones están referidas a un cierto orden parcial en el conjunto de grafos.

Sean G y H dos grafos. H es un *menor topológico* de G si una subdivisión de H es un subgrafo de G . H es un menor de G si H se obtiene de G borrando vértices o aristas, o bien contrayendo aristas. Denotamos $H <_1 G$ si H es un menor topológico de G y $H <_2 G$ si H es un menor de G .

Considerando ambos órdenes, el conjunto de obstrucciones minimales para el plano tiene dos elementos. Sin embargo, en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$, tiene 103 elementos usando $<_1$, y 35 elementos si usamos $<_2$.

¹Dpto. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. e-mail:boza@us.es

²Dpto. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. e-mail:rmfymdt@teleline.es

Denotamos por $\mathcal{M}_1(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}))$ al primero de los conjuntos y por $\mathcal{M}_2(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}))$ al segundo.

En [6], Robertson y Seymour demostraron que toda superficie cerrada tiene un conjunto de obstrucciones minimales finito. Podemos extender de forma natural esta cuestión a pseudosuperficies preguntándonos si el resultado anterior seguirá siendo válido en ellas. La respuesta es afirmativa para pseudosuperficies que contienen exactamente un punto singular (véase [2]).

Sin embargo, si la pseudosuperficie tiene dos o más puntos singulares, el conjunto de grafos prohibidos puede no ser finito. De hecho Širáň y Gvozdjak [7] dieron una familia infinita de grafos prohibidos para una superficie con dos puntos singulares, la *bananas surface*, consistente en dos esferas con exactamente dos puntos en común.

En este artículo todos los grafos son no dirigidos, sin bucles ni aristas múltiples. Seguiremos la terminología estándar en Teoría de Grafos (véase, por ejemplo, [4]).

Llamaremos *célula* al espacio topológico resultante de efectuar un número finito de identificaciones de un número finito de puntos cada una en una superficie conexa y compacta. *Pseudosuperficie* es el espacio topológico que resulta al realizar un número finito de identificaciones de un número finito de puntos cada una en una colección de células. Cada uno de los puntos obtenidos mediante tales identificaciones es un *punto singular*.

Diremos que un grafo G es prohibido para una (pseudo)superficie S dada respecto a un orden parcial $<$ si G no admite una inmersión en S pero H sí la admite, para todo grafo H tal que $H < G$.

Un *bosque* es una pseudosuperficie en la que toda curva cerrada simple de Jordan está contenida en una sola célula. Un $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - S_2 bosque es un bosque en el que toda célula es una esfera o un plano proyectivo.

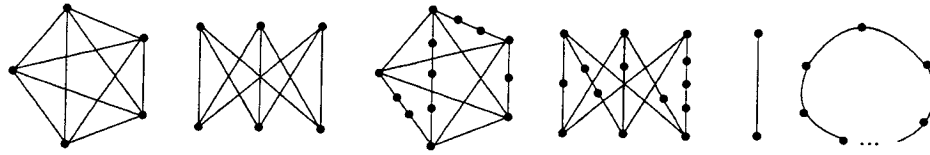


Figura 1: Algunos bloques de grafos prohibidos no 2-conexos.

Hemos elegido $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosques para evitar cualquier configuración similar a la de la bananas surface. Además, $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y S_2 son las únicas superficies con un Teorema de Kuratowski explícito.

Proponemos la siguiente conjetura en base a los resultados obtenidos en este trabajo.

Conjetura 1 *Todo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque tiene un conjunto de grafos prohibidos finito.*

En adelante, vamos a usar la siguiente notación: denotamos por $A \vee B$ a la pseudosuperficie obtenida identificando un punto de A con exactamente un punto de B , donde A y B son células. $G_1 \vee G_2$ es el grafo obtenido identificando un vértice del grafo G_1 con un vértice del grafo G_2 . Si el grafo resultante depende de los vértices identificados, éstos se explicitan. $G_1 \cap G_2 = G_1 \vee K_2 \vee G_2$ y $G_1 \nabla G_2 = G_1 \vee K_3 \vee G_2$.

2 Grafos 2-conexos prohibidos

Es evidente que el conjunto de obstrucciones minimales para cualquier S_2 -bosque es $\{K_5, K_{3,3}\}$, esto es, el conjunto de obstrucciones minimales para el plano. Por tanto, podemos suponer que al menos una célula de cada $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque es un plano proyectivo.

Para demostrar nuestro resultado principal vamos a distinguir grafos minimales prohibidos 2-conexos y no 2-conexos. El siguiente resultado nos muestra cuáles son los grafos minimales 2-conexos prohibidos en todo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque. Para demostrarlo necesitamos varios lemas previos.

Lema 2 *Sea G un grafo 2-conexo y sea \mathcal{B} un $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque tal que al menos una de sus células es un plano proyectivo. Entonces G admite una inmersión en \mathcal{B} si y sólo si G admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.*

Demostración: \Leftarrow Es evidente puesto que al menos una de las células de \mathcal{B} es un plano proyectivo.

\Rightarrow Supongamos que G no admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Consideremos una inmersión de G en \mathcal{B} . En dicha inmersión ha de haber necesariamente dos vértices de G en dos células distintas de \mathcal{B} . Puesto que G es 2-conexo, por el Teorema de Menger ha de haber dos caminos disjuntos de G que conectan los dos vértices anteriores. Por tanto hay un ciclo que pasa por dos células de \mathcal{B} con lo que llegamos a contradicción pues \mathcal{B} es un bosque. ■

A continuación presentamos otro resultado previo.

Lema 3 *Sea G un grafo 2-conexo no sumergible en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Entonces existe $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ tal que H es 2-conexo y $H <_1 G$.*

Demostración: Puesto que G no es sumergible en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ existe $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ tal que $H <_1 G$. Si H es 2-conexo se tiene el enunciado, luego supongamos que H no es 2-conexo.

La demostración de este resultado concluye tomando de forma exhaustiva todos los grafos 0-conexos y 1-conexos de $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$, transformándolos en 2-conexos añadiendo aristas (o caminos) vértice-vértice, vértice-arista o arista-arista, y comprobando que en todos los casos los grafos obtenidos contienen como menor topológico a algún 2-conexo de $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$.

Los grafos 0-conexos y 1-conexos de $\mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ son $K_5 \cup K_5$, $K_5 \cup K_{3,3}$, $K_{3,3} \cup K_{3,3}$ o bien $H_1 \vee H_2$, donde H_i , con $i = 1, 2$, es K_5 , $K_{3,3}$ o bien cualquiera de ellos con una arista subdividida. En este caso pegamos el vértice que subdivide a la arista. Se obtienen 13 grafos en total (véase [1, 3]). ■

Teniendo en cuenta los resultados anteriores ya podemos enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4 Sea \mathcal{B} un $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque tal que al menos una de sus células es un plano proyectivo. G es un grafo 2-conexo prohibido en \mathcal{B} si y sólo si G es un grafo 2-conexo prohibido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Demostración: \Leftarrow Sea G un grafo minimal 2-conexo prohibido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Por el Lema 2, G no admite una inmersión en \mathcal{B} . Sea H un grafo tal que $H <_1 G$. Por ser G minimal en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, H admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y, por el Lema 2, en \mathcal{B} . De ambas se obtiene que G es un grafo 2-conexo prohibido en \mathcal{B} .

\Rightarrow Supongamos que G es un grafo 2-conexo prohibido en \mathcal{B} . Por el Lema 2, G no admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Usando el Lema 3 se tiene que existe $H \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ con H 2-conexo y $H <_1 G$. Supongamos que $H \neq G$. Puesto que H no admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, por el Lema 2, H tampoco es sumergible en \mathcal{B} . Puesto que H es un menor topológico de G , llegamos a contradicción con la minimalidad de G en \mathcal{B} .

Por tanto $H = G$ con lo que G es un subgrafo 2-conexo prohibido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. ■

3 Bosques caracterizables por menores

Observemos que no todos los conjuntos de obstrucciones minimales en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosques pueden ser obtenidos usando el orden $<_2$. Por ejemplo, $K_5 \frown K_5$ admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $K_5 \vee K_5$ no la admite. Sin embargo $K_5 \vee K_5 <_2 K_5 \frown K_5$ (véase Figuras 2 y 4). Para abreviar, diremos que un bosque es caracterizable por menores en vez de afirmar que el conjunto de obstrucciones minimales en dicho bosque puede obtenerse usando el orden $<_2$.

A continuación veamos cuáles son los $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosques caracterizables por menores.

Sea \mathcal{B} un $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque y S una esfera célula de \mathcal{B} . Diremos que S es una esfera *secundaria* de \mathcal{B} si para todo γ arco de Jordan que conecta dos puntos de dos planos proyectivos cualesquiera distintos de \mathcal{B} se tiene que $S \cap \gamma$ es, a lo más, un punto.

Necesitamos un lema previo cuya demostración es inmediata.

Lema 5 Sea \mathcal{B} un $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque y G un grafo. Son equivalentes:

- G admite una inmersión en \mathcal{B} .
- G admite una inmersión en $\mathcal{B} \cup S$.
- G admite una inmersión en $\mathcal{B} \vee S$, sea cual sea el punto de \mathcal{B} en que se pegue S .

Como consecuencia de este resultado tenemos que \mathcal{B} es caracterizable por menores si y sólo si $\mathcal{B} \cup S$ y $\mathcal{B} \vee S$ son caracterizables por menores.

Teorema 6 Sea \mathcal{B} un $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque y \mathcal{B}' el $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque que resulta de eliminar todas las esferas secundarias de \mathcal{B} . Entonces \mathcal{B} es caracterizable por menores si y sólo si cada componente conexa de \mathcal{B}' tiene, a lo más, un punto singular.

Demostración: Como consecuencia del Lema 5 basta probar que \mathcal{B}' es caracterizable por menores.

Si cada componente conexa de \mathcal{B}' tiene a lo más un punto singular el resultado se tiene pues la inmersión de un grafo en \mathcal{B}' induce la de cualquier menor suyo.

Supongamos, por tanto, que \mathcal{B}' tiene una componente conexa con dos o más puntos singulares. Vamos a construir un grafo H con tantas componentes conexas como \mathcal{B}' de la forma siguiente: tomamos un vértice por cada punto singular y por cada célula; añadimos aristas que unen cada vértice proveniente de una célula con los que provienen de sus puntos singulares correspondientes. Por último, en cada vértice proveniente de una célula pegamos un K_5 si dicha célula es un plano proyectivo. La Figura 3 nos muestra un ejemplo.

Por construcción H admite una inmersión en \mathcal{B}' . Sin embargo el grafo H' obtenido de contraer en todas las componentes conexas todas las aristas de H no pertenecientes a ningún K_5 no puede sumergirse en \mathcal{B}' .

Observemos que el grafo H' está formado por tantas componentes conexas como \mathcal{B} , cada una de las cuales está formada por varios K_5 pegados por un punto. Supongamos que H' puede sumergirse en \mathcal{B} . Puesto que hay más de un punto singular en una de las componentes de \mathcal{B} y no hay esferas secundarias, al menos hay una arista no perteneciente a ningún K_5 lo que significa que, al efectuar la contracción, en algún plano proyectivo tendríamos que dibujar $K_5 \vee K_5$ que es prohibido para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. ■

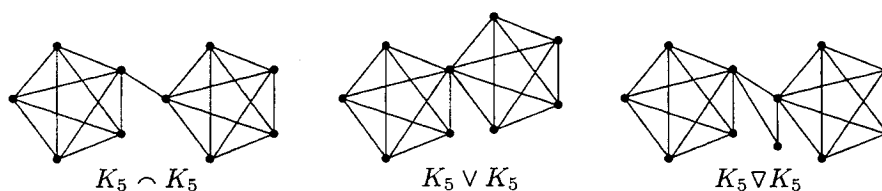


Figura 2: Los grafos $K_5 \sim K_5$, $K_5 \vee K_5$ y $K_5 \nabla K_5$.

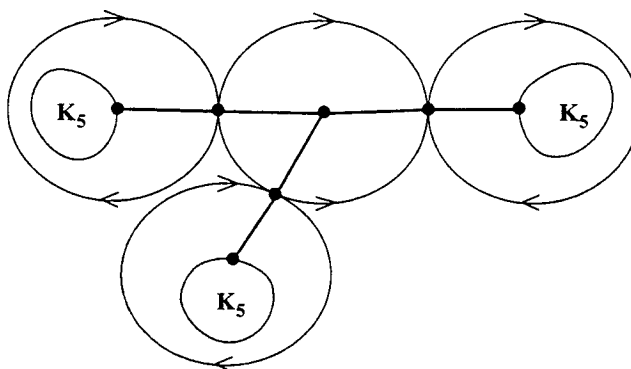


Figura 3: Construcción del grafo H .

4 Grafos no 2-conexos prohibidos

El conjunto de grafos prohibidos no 2-conexos depende de cada $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque en particular. Algunos de los bloques que los forman son los siguientes: K_5 , $K_{3,3}$, subdivisiones de K_5 y $K_{3,3}$, K_2 y C_n (véase Figura 1).

Como ejemplo, observemos que $K_5 \nabla K_5$ es un grafo minimal prohibido para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee S_2 \vee S_2 \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, y $K_5 \sim K_5$ es un grafo minimal prohibido para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ambos usando el orden $<_1$ (véase Figura 2).

Aún cuando cada bosque en particular tenga distintos grafos no 2-conexos prohibidos, proponemos la siguiente conjetura:

Conjetura 7 *Todo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosque tiene un conjunto de grafos no 2-conexos prohibidos finito.*

Una idea de la demostración sería la siguiente: puesto que las células de mayor género son planos proyectivos, los bloques no planos de los grafos

prohibidos tienen género, a lo más, 1 pues de lo contrario contendrían a un 2-conexo prohibido en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Por minimalidad, estos bloques han de ser K_5 , $K_{3,3}$ o subdivisiones de éstos. Puesto que el bosque tiene una cantidad finita de células, el número de bloques no planos ha de ser finito también.

Por otra parte, el resto del grafo, que es plano, ha de ser tal que al quitar un elemento, tome una forma parecida a un árbol en el que se han sustituido algunos vértices por ciclos, no mucho mayores que el número de células adyacentes a una dada, para que los bloques no planos del grafo resultante puedan ser llevados a planos proyectivos y el grafo resultante pueda sumergirse en el bosque. De ambos razonamientos se obtendría el enunciado.

Observemos que, de probarse esta conjetura, y usando el Teorema 4 se tendría la Conjetura 1.

Finalmente, como caso particular, el siguiente resultado nos muestra los menores minimales no 2-conexos prohibidos para dos $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosques: $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (véase Figura 5).

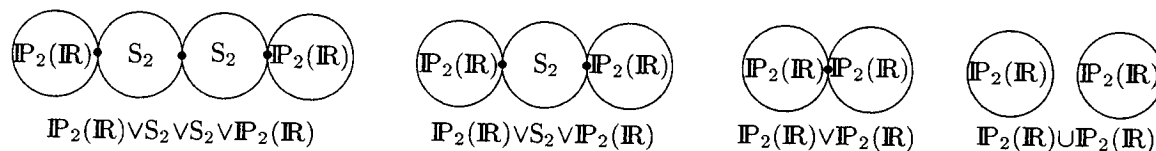


Figura 4: Algunos $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ - S_2 -bosques.

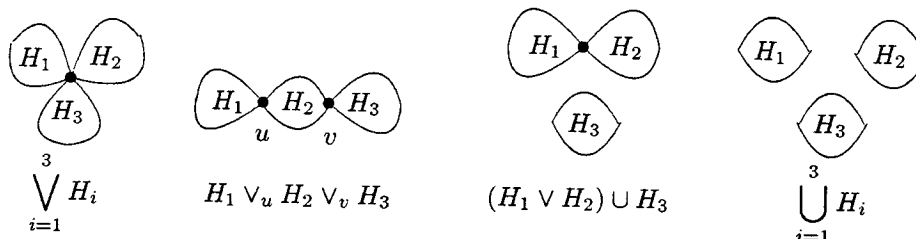


Figura 5: Menores prohibidos no 2-conexos.

Teorema 8 Se verifican los siguientes enunciados.

- a) Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ son $\{(H_1 \vee H_2) \cup \bigcup_{i=1}^3 H_i\}$ donde $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ con $i = 1, 2, 3$.
- b) Los menores minimales no 2-conexos prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ son $\{(H_1 \vee H_2) \cup H_3\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \left\{ \bigvee_{i=1}^3 H_i \right\} \cup \{H_1 \vee_u H_2 \vee_v H_3\}$ donde $H_i \in \{K_5, K_{3,3}\}$ con $i = 1, 2, 3$.

Demostración: Es fácil ver que los grafos dados no admiten una inmersión en ninguno de los dos bosques y los grafos que resultan de quitarles un elemento o efectuar una contracción sí la admiten.

Por otra parte se comprueba que las listas están completas de forma exhaustiva, es decir, tomamos un grafo H no 2-conexo prohibido y, distinguiendo casos, se llega a que H es uno de los grafos arriba enumerados. ■

Como consecuencia, $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ tiene 49 menores minimales prohibidos y $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \cup \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ tiene 36.

Referencias

- [1] D. Archdeacon. A Kuratowski Theorem for the Projective Plane. *Journal of Graph Theory*, 5:243-246, 1981.
- [2] B. Bodendiek y K. Wagner. Solution to König's graph embedding problem. *Math. Nachr.*, 140:251-272, 1989.
- [3] H. H. Glover, J. P. Huneke, y C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *Journal of Combinatorial Theory*, 27(3):332-370, 1979.
- [4] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [5] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271-283, 1930.
- [6] N. Robertson y P. D. Seymour. Graph Minors. VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces. *J. Combinatorial Theory. Serie B.*, 48:255-288, 1990.
- [7] J. Širáň y P. Gvozdjak. Kuratowski-Type Theorems Do Not Extend to Pseudosurfaces. *J. combinatorial Theory Ser. B*, 54:209-212, 1992.