

# Inmersiones celulares no caracterizables por menores

L. Boza<sup>1</sup>M.T. Dávila<sup>2</sup>R. Moyano<sup>2</sup>

## Resumen

En este artículo, probaremos que los grafos que admiten una inmersión en la pseudosuperficie  $B_1 \# B_1$  no pueden caracterizarse mediante una lista de menores prohibidos, donde  $B_1$  es el toro estrangulado. Asimismo probaremos este resultado para generalizaciones de dicha pseudosuperficie.

## 1 Introducción

En [6], Robertson y Seymour probaron que toda superficie cerrada admite un teorema de Kuratowski finito como consecuencia de que los grafos sumergibles en ella pueden caracterizarse por menores prohibidos. El mismo razonamiento sigue siendo válido para pseudosuperficies con un solo punto singular (ver [2]).

Sin embargo, si la pseudosuperficie tiene dos o más puntos singulares, el conjunto de grafos minimales prohibidos puede que no sea finito. Širáň y Gvozdjak [7] encontraron una familia infinita de grafos minimales prohibidos para  $B_2$  y Boza, Dávila, Fedriani y Moyano encontraron familias infinitas de grafos minimales prohibidos para toda pseudosuperficie obtenida identificando dos superficies de género cualquiera por una cantidad finita de puntos ([4]).

Cuando la pseudosuperficie consta de una única célula con dos o más puntos singulares, no sabemos si posee un teorema de Kuratowski finito; pero en este trabajo demostramos que los grafos que admiten inmersiones en dichas pseudosuperficies no son caracterizables por menores.

## 2 El doble toro estrangulado

El siguiente resultado, publicado en [3], caracteriza a los grafos que admiten una inmersión en  $B_1$ .

**Teorema 1** *Un grafo admite una inmersión en  $B_1$  si y sólo si algún corte suyo es plano.*

A partir de este teorema podemos enunciar el siguiente lema.

**Lema 2** *Sea  $H = C_4 \times K_2 + K_1$  y sea  $u \in V(H)$  el vértice inducido por  $K_1$ . Entonces toda inmersión de  $H$  en  $B_1$  lleva necesariamente a  $u$  en el punto singular.*

*Demostración:* Sea  $v_i$  con  $i = 1, \dots, 8$  cada uno de los vértices de  $H$  distintos de  $u$ .

Por el Teorema 1 se puede ver que  $H$  admite una inmersión en  $B_1$  sin más que cortar el vértice  $u$  en dos vértices  $u_1$  y  $u_2$ , ambos de valencia 4, tal como muestra la Figura 1 (a), y verificar que el grafo resultante es plano.

Supongamos que  $H$  admite una inmersión en  $B_1$  sin estar  $u$  en el punto singular. Si la inmersión lleva un vértice  $v$  de  $H$  en el punto singular distinto de  $u$ , el grafo inducido por el corte del punto singular en la pseudosuperficie debe ser plano y contiene como subgrafo a  $H - v$ , con lo que  $H - v$  también debe ser plano.

Si la inmersión lleva un punto interior de una arista  $e$  de  $H$  en el punto singular, sea  $v$  un extremo de  $e$  distinto de  $u$ . El grafo inducido por el corte del punto singular en la pseudosuperficie debe ser plano y contiene como subgrafo a  $H - v$ .

Pero si  $v$  es un vértice distinto de  $u$ , es fácil observar que  $H - v$  contiene una subdivisión de  $K_5$ , con lo cual no es plano y llegamos a contradicción con la hipótesis de partida. ■

A partir de este lema se tiene el siguiente resultado.

<sup>1</sup>Dpto. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla.  
e-mail:boza@us.es

<sup>2</sup>Dpto. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla.  
e-mail:rmfymdt@teleline.es

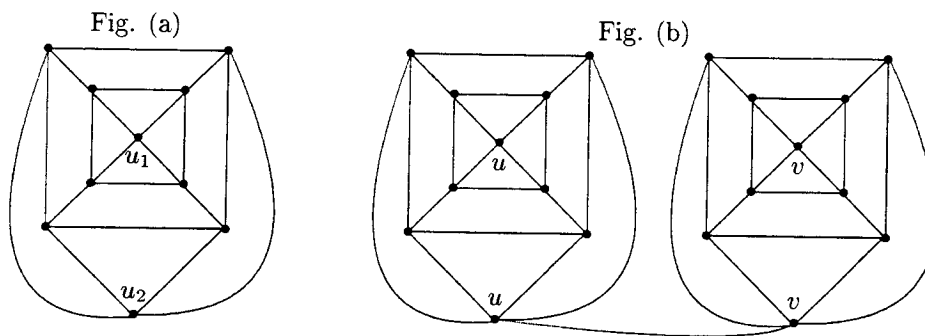


Figura 1: Inmersiones en  $B_1$  y  $B_1 \# B_1$ .

**Teorema 3** Los grafos que admiten una inmersión en  $B_1 \# B_1$  no son caracterizables por menores.

*Demostración:* Consideremos  $H = (C_4 \times K_2 + K_1) + e + (C_4 \times K_2 + K_1)$ , donde  $e = \{u, v\}$  siendo  $u$  y  $v$  los grafos inducidos por  $K_1$  en cada una de las copias de  $C_4 \times K_2 + K_1$  (véase la Figura 1 (b)). A partir de la inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $B_1$  que nos muestra la Figura 1 (a) es fácil construir una de  $H$  en  $B_1 \# B_1$  sin más que considerar dos copias de la misma y añadir  $e$ , por ejemplo, por la cara exterior (Figura 1 (b)). Por tanto  $H$  admite una inmersión en  $B_1 \# B_1$ .

Sin embargo  $H/e$  no admite una inmersión en  $B_1 \# B_1$  ya que, elegidos dos vértices cualesquiera de  $H/e$  y cortados ambos una vez de forma cualquiera el grafo resultante no es plano al contener una subdivisión de  $K_5$ . Puesto que  $H/e$  es un menor de  $H$ , se tiene el resultado. ■

### 3 Generalización a otras pseudosuperficies

#### 3.1 Pseudosuperficies esféricas

En general se conoce con el nombre de pseudosuperficie esférica a aquella pseudosuperficie que resulta de efectuar un número finito de identificaciones de puntos en una cantidad finita de esferas.

Llamaremos  $C_n$  a la pseudosuperficie obtenida identificando  $n$  puntos distintos de una esfera entre sí, para  $n \geq 2$ . Por tanto  $B_1 = C_2$ .

La pseudosuperficie  $C_n$  puede obtenerse también de la siguiente forma: consideremos en  $\mathbb{T}_{n-1}$ , la suma conexas de  $n-1$  toros,  $n-1$  meridianos dis-

tintos tales que su intersección es un único punto  $P$  y cada meridiano pasa por una única asa. Entonces  $C_n$  resulta de contraer los  $n-1$  meridianos anteriores al punto  $P$  (véase como ejemplo la Figura 2).

A partir de esta construcción obtenemos un resultado interesante que usaremos posteriormente.

**Lema 4** Toda inmersión de un grafo en  $C_n$  induce otra en  $\mathbb{T}_{n-1}$ , con  $n \geq 2$ .

Puesto que  $C_n$  tiene un solo punto singular, los grafos que admiten una inmersión en esta pseudosuperficie son caracterizables por menores [2].

Consideremos ahora la pseudosuperficie  $C_{p,q} = C_p \# C_q$ , para  $p, q \geq 2$ . Observemos que  $B_1 \# B_1 = C_{2,2}$ . El siguiente resultado nos muestra que esta pseudosuperficie no admite una caracterización por menores.

**Teorema 5** Los grafos que admiten una inmersión en  $C_{p,q}$  no son caracterizables por menores, con  $p, q \geq 2$ .

*Demostración:* Consideremos  $p+q-2$  copias del grafo  $C_4 \times K_2 + K_1$  y sean  $u_1, \dots, u_{p-1}$  y  $v_1, \dots, v_{q-1}$  los vértices inducidos por  $K_1$  en las  $p-1$  primeras copias y en las  $q-1$  siguientes respectivamente. Consideremos los grafos  $H_p$  y  $H_q$  obtenidos respectivamente pegando los  $u_1, \dots, u_{p-1}$  en un nuevo vértice que llamaremos  $u$  y los  $v_1, \dots, v_{q-1}$  en un nuevo vértice que llamaremos  $v$ . Definimos el grafo  $H(p, q) = H_p + e + H_q$  donde  $e = \{u, v\}$ .

Por construcción el grafo  $H(p, q)$  es sumergible en  $C_{p,q}$ . Sea  $\tilde{H}$  la inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $B_1$  que nos muestra la Figura 1(a). Pegando respectivamente  $p-1$  y  $q-1$  copias de  $\tilde{H}$  por los vértices resultantes del corte de los  $u_i$  y  $v_i$  que quedan en

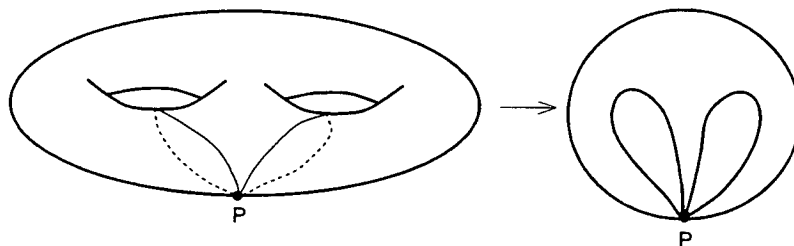


Figura 2: Construcción de  $C_3$  a partir de  $T_2$ .

la cara exterior y añadiendo la arista  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$  donde  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  son los dos vértices que quedan al realizar los pegamientos anteriores, obtenemos una inmersión de  $H(p, q)$  en  $C_{p, q}$ . La Figura 1(b) muestra esta inmersión en el caso  $p = q = 2$ .

Para concluir la demostración, consideremos el grafo  $H(p, q)/e = H_{p+q-1}$ . Vamos a probar a continuación que el grafo  $H(p, q)/e$  no admite una inmersión en  $C_{p, q}$ , con lo que se tiene el resultado ya que  $H(p, q)/e$  es un menor de  $H(p, q)$ . Supongamos lo contrario. Vamos a llamar  $\alpha$  y  $\beta$  a los dos puntos singulares de  $C_{p, q}$ , de entornos homeomorfos al pegamiento por un punto de  $p$  y  $q$  discos abiertos respectivamente, y  $w \in V(H(p, q)/e)$  al vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H(p, q)$ .

Consideremos una inmersión de  $H(p, q)/e$  en  $C_{p, q}$  y supongamos que  $\beta$  es un punto singular en el que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. El grafo inducido en  $H(p, q)/e$  por el corte de  $\beta$  contiene a  $H'$ , grafo resultante de borrar un vértice en  $H(p, q)/e$  distinto de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $C_p$ . De ello tenemos, aplicando el Lema 4, que  $H'$  admite una inmersión en  $T_{p-1}$ . Sin embargo,  $H'$  tiene  $p+q-2$  bloques cada uno de los cuales contiene un  $K_5$  por lo que  $\gamma(H') \geq p+q-2$ , mientras que  $\gamma(T_{p-1}) = p-1$ . Puesto que  $q \geq 2$  llegamos a contradicción. ■

Una generalización de la pseudosuperficie anterior es la que definimos a continuación.

Sean  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$  números naturales con  $p_i \geq 2$  para  $i = 1, \dots, r$ . Definimos  $C_{p_1, \dots, p_r} = C_{p_1} \# \dots \# C_{p_r}$  (ver Figura 3).

Los grafos sumergibles en esta pseudosuperficie tampoco admiten una caracterización por menores.

**Teorema 6** *Los grafos que admiten una inmersión en  $C_{p_1, \dots, p_r}$  no son caracterizables por menores, donde  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 2$ .*

*Demostración:* Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r-2)K_5$  donde  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración del Teorema 5 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración. Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $C_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $C_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración del Teorema 5 y de una de  $K_5$  en  $C_2$ . La Figura 4 nos muestra una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5$  en  $C_{2, 2, 2}$ .

Al igual que en las anteriores demostraciones concluiremos probando que  $H/e$  no admite una inmersión en  $C_{p_1, \dots, p_r}$ . Supongamos lo contrario. Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $C_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ . Consideremos el grafo inducido por el corte de  $r-1$  puntos singulares de  $C_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r-1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $C_{p_1}$  y, por el Lema 4, en  $T_{p_1-1}$ . Sin embargo  $H'$  contiene al menos  $p_1 + p_2 - 2$  bloques con un  $K_5$  en cada uno de ellos, por lo que  $\gamma(H') \geq p_1 + p_2 - 2$  mientras que  $\gamma(T_{p_1-1}) = p_1 - 1$ . Como  $p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción. ■

### 3.2 Pseudosuperficies no esféricas

Una pseudosuperficie no esférica resulta de efectuar un número finito de identificaciones de puntos en una colección de superficies al menos una de las cuales tiene género (orientable o no) mayor que uno. Denotamos por  $\gamma(G)$  al género orientable

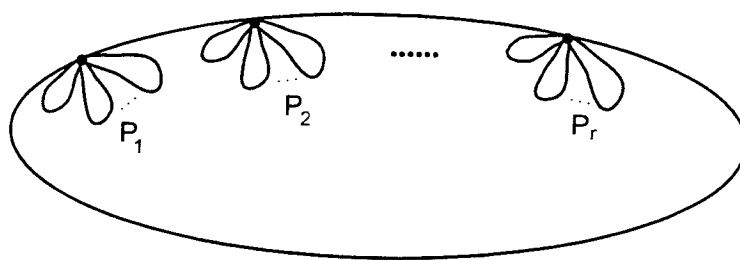


Figura 3: La pseudosuperficie  $C_{p_1, \dots, p_r}$ .

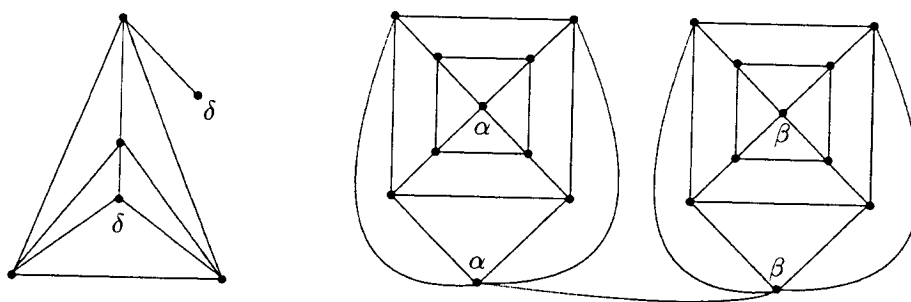


Figura 4: Una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5$  en  $C_{2,2,2}$ .

de un grafo  $G$  y por  $\tilde{\gamma}(G)$  al género no orientable de  $G$ .

El género orientable de un grafo es la suma del género de cada uno de sus bloques (véase [1]). Esto no es cierto en general en el caso no orientable. No obstante se verifica el siguiente resultado.

**Lema 7** Sea  $G$  un grafo y sean  $G_i$  con  $i = 1, \dots, n$  sus bloques. Supongamos que  $\gamma(G_i) = 1$  y  $\tilde{\gamma}(G_i) = 1$  ó  $2$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $\tilde{\gamma}(G) = \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i)$ .

*Demostración:* En las hipótesis del enunciado, ningún bloque de  $G$  verifica la relación  $\tilde{\gamma} = 2\gamma + 1$ . En este caso  $\tilde{\gamma}(G) = 2n - \sum_{i=1}^n \mu(G_i)$  con  $\mu(G_i) = \max\{2 - 2\gamma(G_i), 2 - \tilde{\gamma}(G_i)\}$  (véase [8]).

Sean  $G_1, \dots, G_k$  los bloques de  $G$  con género no orientable 1 y  $G_{k+1}, \dots, G_n$  los bloques de  $G$  con género no orientable 2. Entonces  $\mu(G_i) = 1$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $\mu(G_i) = 0$  para  $i = k + 1, \dots, n$ . Por tanto  $\tilde{\gamma}(G) = 2n - k$ .

Por otra parte  $\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i) = k + 2(n - k) = 2n - k$ . De ambas igualdades se tiene el resultado. ■

Observemos que  $\gamma(K_6) = \tilde{\gamma}(K_6) = 1$ ; sin embargo  $K_6$  no admite una inmersión en  $B_1$  según el Lema 1, ya que ningún corte suyo es plano. Asimismo  $\gamma(C_4 \times K_2 + K_1) = 1$  ya que es sumergible en  $B_1$ . Sin embargo  $\tilde{\gamma}(C_4 \times K_2 + K_1) = 2$ , pues admite una inmersión en la Botella de Klein ( $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ ) según muestra la Figura 5(a) pero no la admite en  $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ , al contener a uno de los subgrafos prohibidos que nos muestra la Figura 5(b) (véase [5]).

Sean  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$  números naturales con  $p_i \geq 2$  para  $i = 1, \dots, r$ . Consideremos la pseudosuperficie  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$ , donde  $S$  es una superficie, orientable o no, de género al menos uno. El siguiente resultado nos muestra que esta pseudosuperficie tampoco es caracterizable por menores.

**Teorema 8** Los grafos que admiten una inmersión en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  no son caracterizables por menores, donde  $S$  es una superficie y  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \geq$

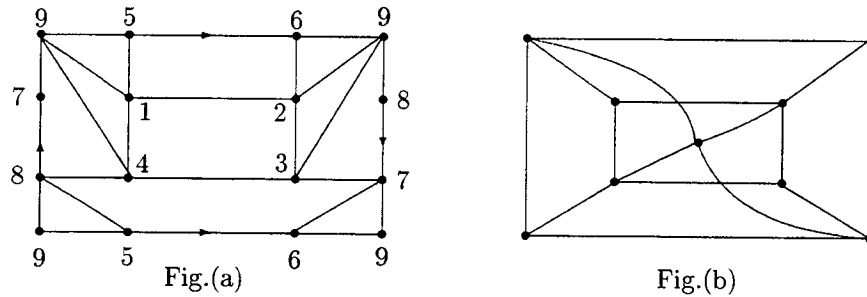


Figura 5: Inmersión de  $C_4 \times K_2 + K_1$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  y uno de los subgrafos prohibidos para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

$$p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 2.$$

*Demostración:* Vamos a distinguir dos casos, según sea  $S$  orientable o no orientable.

**Caso I.  $S$  orientable:** Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r - 2)K_5 \cup gK_6$  donde  $g$  es el género de  $S$ ,  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración del Teorema 5 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración. Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $C_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración del Teorema 5 y sabiendo que  $K_5$  es sumergible en  $C_2$  y que  $gK_6$  es sumergible en  $S$  por el Lema 7. La Figura 6 nos muestra una inmersión de  $H(2, 2) \cup K_5 \cup K_6$  en  $\mathbb{T} \# C_{2, 2, 2}$ .

A continuación probaremos que  $H/e$  no admite una inmersión en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$ . Supongamos lo contrario. Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ . Consideremos el grafo inducido por el corte de  $r - 1$  puntos singulares de  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r - 1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $S \# C_{p_1}$  y, por el Lema 4 y el Teorema de clasificación de superficies de Brahana [9], en  $S \# \mathbb{T}_{p_1 - 1}$ . Sin embargo  $H'$  contiene al menos  $g + p_1 + p_2 - 2$  bloques con un  $K_5$  en cada uno de ellos, por lo que  $\gamma(H') \geq g + p_1 + p_2 - 2$  mientras que  $\gamma(S \# \mathbb{T}_{p_1 - 1}) = g + p_1 - 1$ . Como  $p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción.

**Caso II.  $S$  no orientable:** Consideremos el grafo  $H = H(p_1, p_2) \cup (r - 2)(C_4 \times K_2 + K_1) \cup \tilde{g}K_6$  donde  $\tilde{g}$  es el género no orientable de  $S$ ,  $H(p_1, p_2)$  es el grafo definido en la demostración del Teorema 5 y  $u, v \in V(H(p_1, p_2))$  y  $e \in A(H(p_1, p_2))$  se definen también en dicha demostración. Podemos construir una inmersión de  $H$  en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  a partir de la de  $H(p_1, p_2)$  en  $C_{p_1, p_2}$  que nos muestra la demostración del Teorema 5 y sabiendo que  $C_4 \times K_2 + K_1$  es sumergible en  $C_2$  (Figura 1) y que  $\tilde{g}K_6$  es sumergible en  $S$  por el Lema 7.

Supongamos que  $H/e$  no admite una inmersión en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$ . Consideremos una inmersión de  $H/e$  en  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  y sea  $w \in V(H/e)$  el vértice que resulta de la contracción de la arista  $e$  en  $H$ . Consideremos el grafo inducido por el corte de los  $r - 1$  puntos singulares de  $S \# C_{p_1, \dots, p_r}$  en los que no es llevado  $w$  por dicha inmersión. Este grafo contiene al grafo  $H'$  que resulta de borrar  $r - 1$  vértices de  $H/e$  distintos de  $w$ . Por tanto  $H'$  admite una inmersión en  $S \# C_{p_1}$  y, por el Lema 4 y el Teorema de clasificación de superficies de Brahana [9], en  $S \# \mathbb{T}_{p_1 - 1}$  que, al ser  $S$  no orientable, es homeomorfa a la suma conexa de  $S$  y  $2p_1 - 2$  planos proyectivos, cuyo género no orientable es  $\tilde{g} + 2p_1 - 2$ .

Sin embargo  $H'$  está formado, en el peor de los casos, por  $\tilde{g} + 1$  bloques de género orientable y no orientable 1 y  $p_1 + p_2 - 3$  bloques de género orientable 1 y no orientable 2. Por el Lema 7,  $\tilde{\gamma}(H') = \tilde{g} + 2p_1 + 2p_2 - 5$ . Por tanto  $\tilde{g} + 2p_1 + 2p_2 - 5 \leq \tilde{g} + 2p_1 - 2$  de donde  $2p_2 \leq 3$ . Como

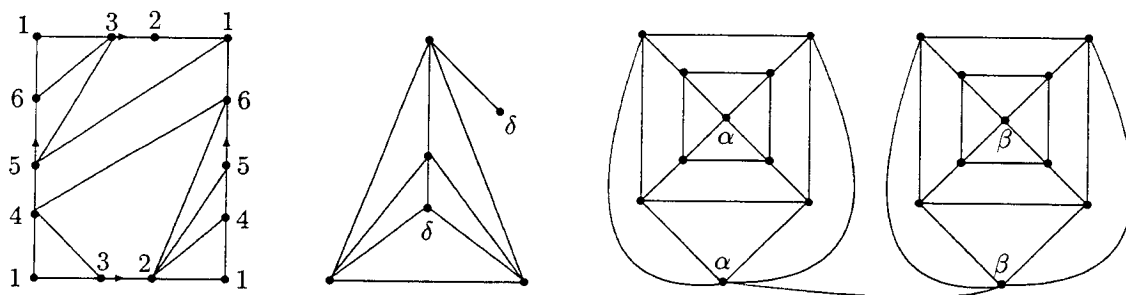


Figura 6: Una inmersión de  $H(2,2) \cup K_5 \cup K_6$  en  $\mathbb{T}\#\mathcal{C}_{2,2,2}$ .

$p_2 \geq 2$  llegamos a contradicción.

- [9] A. T. White y L. W. Beineke. Topological graph theory. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pp. 15–49, Academic Press, 1978.

## Referencias

- [1] J. Battle, F. Harary, Y. Kodama y J. W. T. Youngs. Additivity of the genus of a graph. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:565–568, 1962.
- [2] B. Bodendiek y K. Wagner. Solution to König's graph embedding problem. *Math. Nachr.*, 140:251–272, 1989.
- [3] B. Bodendiek y K. Wagner. The Fascination of Minimal Graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 41:39–52, 1989.
- [4] L. Boza, M.T. Dávila, E. M. Fedriani y R. Moyano. On Infinite Kuratowski Theorem. *Por aparecer en Combinatorica*
- [5] H. H. Glover, J. P. Huneke y C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *Journal of Combinatorial Theory*, 27(3):332–370, 1979.
- [6] N. Robertson y P. D. Seymour. Graph Minors. VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces. *J. Combinatorial Theory. Serie B.*, 48:255–288, 1990.
- [7] J. Širáň y P. Gvozdjak. Kuratowski-Type Theorems Do Not Extend to Pseudosurfaces. *J. combinatorial Theory Ser. B*, 54:209–212, 1992.
- [8] S. Stahl y L. W. Beineke. Blocks and the Nonorientable Genus of Graphs. *Journal of Graph Theory*, 1:75–78, 1977.