

T.R. 23.625

LBS 1141296

043
261

3010

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA I

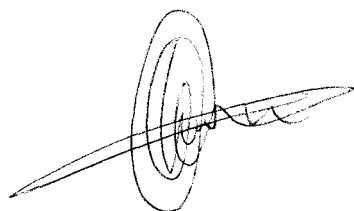
**INMERSIONES DE GRAFOS
EN SUPERFICIES TUBULARES
DE GÉNERO FINITO**

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICA
82
22 SET. 1998
Sevilla

María Pastora Revuelta Marchena

María Pastora Revuelta Marchena
TESIS DOCTORAL

Memoria presentada por María Pastora Revuelta Marchena para optar al
grado de
Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.



V^o B^o de los Directores:

Handwritten signature of L. Boza Prieto.

Fdo: L. Boza Prieto

Handwritten signature of A. Márquez Pérez.

Fdo: A. Márquez Pérez

Sevilla, Julio de 1998

A José Carlos y Marta

Agradecimientos

Me he parado a pensar y cuántas han sido las personas que de una u otra forma han contribuido a la realización de este trabajo: mi familia, mis amigos y mis compañeros. Y que conste en este punto, que estos tres grupos tienen intersección no vacía.

Son muchas las veces que mientras escribía este trabajo he recordado a mi maestro de la escuela, Juan Manuel, que me enseñó muchas cosas, entre ellas a escribir a máquina, qué gran ayuda para esta ocasión.

¿Desde cuándo me gustan las Matemáticas? Rápidamente viene a mi mente Julian (profesor de Matemáticas) y su: *chica, si sigues por ese camino te perderás, hazme caso* y mi amigo Juan Carlos, compañero de estudios casi de toda la vida, ahora de trabajo también: *¡Oye, en el próximo examen un 10, yo no sé tú, pero yo un 10!*. Sigo pensando y aparece Alberto, profesor recién estrenado de Topología I, me cayó bien. Se ofrece a resolvernos dudas (y cuántas teníamos). No importaba los días: vacaciones, sábados ..., ¡qué gesto, ¿no?!

Tantas horas en la sala de estudios de Matemáticas: Chari, Yolanda, Jota, Herminio ... y los aviones de papel en el techo, inolvidables. Muchas noches estudiando en mi piso de Las Cruzadas: Adela, Nieves, Jose ...

Pasa el tiempo y de pronto otra vez Alberto. Ahora él va a impartirnos un curso de doctorado sobre Teoría de Grafos en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva. ¡Qué cosa más bonita, apasionante!. Es en este momento cuando empieza mi trabajo de investigación con Rafa, Maite, Manolo y un poco más tarde con Luis y Pepe, buenos compañeros y amigos y de gran ayuda en muchos sentidos. Mientras tanto, mis hijos: José Carlos y Marta que incluso antes de que nacieran ya su mamá les contaba cosas de grafos (¡lo que han tenido que aguantarme!). Luego llego a Sevilla, a mi Departamento actual, y que más puedo decir que muchas gracias a todos y en particular a mis compañeros de Aparejadores por su gran apoyo en todo momento. Otras personas, aunque ya incluídas pero que quiero resaltar por su colaboración indispensable para mí en el día

a día: María José, Yoli, Clari, Carmen, Mari Ángeles, Charo, Jorge, Criel y Juan. Por último, aunque ya son varias las veces que los he mencionado, mis más sinceros agradecimientos a Luis y Alberto, compañeros, amigos y ya hasta de la familia.

Gracias a todos por vuestra colaboración.

Índice

1	Introducción	1
2	Preliminares	11
2.1	Nociones básicas	11
2.2	Planaridad	15
2.3	Periplanaridad	21
2.4	Superficies	25
I	Inmersiones de grafos sin acumulación	35
3	Inmersiones de grafos infinitos sin acumulación de vértices	39
3.1	Introducción	40
3.2	Equivalencia entre grafos VAP-S(n) y n-W-S-representables . .	41
3.3	Un Teorema de Halin para superficies abiertas	51
3.4	Caracterización de los grafos VAP-S(1)	64
3.4.1	Caracterización de los grafos con una inmersión sin acumulación de vértices en la Banda de Möbius	65
3.5	Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$	71
3.6	Conclusiones y problemas abiertos	78
4	Grafos recubridores de $S(n)$	81
4.1	Introducción	81

4.2	Triangulaciones infinitas en $S(n)$	87
4.3	Conclusiones y problemas abiertos	94
II Inmersiones de Grafos Dinámicos		95
5	Grafos dinámicos en el cilindro	99
5.1	Introducción	99
5.2	Notación básica	105
5.3	Grafos Dinámicos Cilíndricos	107
5.4	Grafos Dinámicos VAP-cilíndricos	109
5.5	Grafos Dinámicos EAP-cilíndricos	114
5.6	Grafos Pattern	116
5.7	Conclusiones	117
6	Condiciones Métricas	119
6.1	Introducción	119
6.2	Inmersiones de grafos con áreas de las caras acotadas	120
6.3	Inmersiones de grafos con longitud de aristas acotadas	130
6.4	Conclusiones y problemas abiertos	139
A		141
A.1	Obtención de subgrafos prohibidos a partir de menores pro- hibidos	141
A.2	Descripción del procedimiento de obtención de subgrafos pro- hibidos	141
Referencias		146

Capítulo 1

Introducción

El matemático alemán Euler (1707-1782) resolvió en 1736 [20] el famoso problema de los puentes de Königsberg. Dicha ciudad estaba dividida en cuatro partes, conectadas por siete puentes, al pasar por ella un río (ver Figura 1.1).

El problema planteado era el siguiente: empezando a andar en un punto cualquiera de la ciudad ¿es posible volver al punto de partida habiendo cruzado los siete puentes tan sólo una vez?. La respuesta de Euler fue NO y basó su negativa en el siguiente razonamiento: prescindiendo de la geografía peculiar de la ciudad y su entorno, puede trazarse un esquema de la misma mediante cuatro puntos A, B, C, D (que se correspondan con cada una de las partes de la ciudad) y unir con curvas arbitrarias aquellos puntos conectados en la realidad por los puentes (ver Figura 1.2).

El problema inicial es, de hecho, equivalente al problema (basado en la figura adjunta) de si partiendo de uno de los cuatro puntos puede trazarse un itinerario que englobe a todas las curvas una sola vez. Si ello fuese posible el número de líneas por cada punto debería ser par y en cambio todos los puntos tienen un número impar de líneas. Por tanto el problema no tiene solución. Los puentes de Königsberg fueron destruidos durante la segunda guerra mundial, pero la resolución del problema por parte de Euler, fue el principio de una teoría matemática de gran utilidad y brillantez: *la Teoría de*

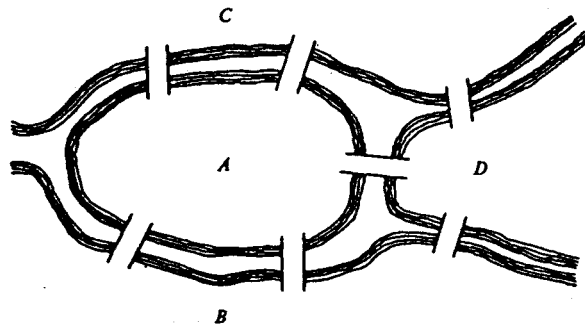


Figura 1.1:

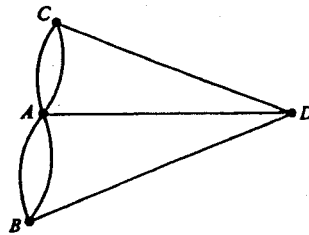


Figura 1.2:

Grafos. Antes de llegar a la formulación precisa de dicha teoría fueron muchos los científicos que de forma totalmente independiente utilizaron conceptos que a posteriori se han visto unificados con la Teoría de Grafos.

Kirchhoff [37] en 1847, manejó esquemas sobre circuitos electrónicos; Cayley en 1869 [12] estudió la enumeración de los isómeros del compuesto orgánico C_nH_{2n+2} usando esquemas donde cada punto estaba unido con una o cuatro líneas correspondientes a las valencias de enlace; Jordan [35], en 1869, estudió estructuras arborescentes de forma abstracta. En 1859, Hamilton ideó el siguiente juego: dado un dodecaedro, si en cada uno de sus 20 vértices se pone el nombre de una ciudad, ¿es posible encontrar un circuito cerrado a través de las aristas del dodecaedro que pase por cada ciudad una sola vez? Dicho juego dio lugar a la teoría de grafos hamiltonianos, de múltiples aplicaciones como para resolver problemas de circulación. En tiempos más recientes surgió el problema de colorear mapas de forma que países con frontera común tuviesen coloración diferente. Lewin introdujo en Psicología [41] esquemas como los anteriores al representar personas por puntos y unir aquellos puntos si las personas representadas tenían relaciones personales. Whlenbeck, Lee y Young, en Física usaron esquemas con puntos y líneas al simbolizar estructuras moleculares y sus interacciones ... etc.

Lo común en todos los casos es el *llegar a simbolizar un problema concreto mediante un esquema gráfico o grafo, formado por puntos y líneas que los unen, y estudiar entonces soluciones al problema inicial planteado mediante reflexiones sobre el esquema gráfico asociado.*

Como situaciones totalmente dispares pueden dar lugar a los mismos esquemas gráficos, estudiando éstos en general se obtienen soluciones a problemas múltiples.

Por supuesto la elaboración de un grafo representa siempre una renuncia a muchas condiciones y características, pues el grafo como tal debe ser un esquema simple. Nótese también que el *trazado de un grafo no es un problema de geometría métrica*, es decir, la forma de las líneas que unen puntos es cualquiera: interesa visualizar las relaciones, las conexiones, las intera-

cciones,... no hacer una fotografía del trazado. El estudio de este tipo de representaciones, de su existencia y de su clasificación, es lo que se conoce como *Teoría de Grafos Topológicos*.

Este tipo de cuestiones tiene una gran aplicabilidad en campos como la Arquitectura, el diseño de redes de comunicación o el diseño de circuitos integrados, por citar algunos (ver [22] para más detalles). Voy a permitirme hacer un pequeño inciso en su aplicación a la Arquitectura, ya que una convicción personal casi me lo exige que es la siguiente: mi labor en la Universidad es Docente e Investigadora y no me gustan que vayan por separado, sobre todo en un caso como éste que tan claramente pueden ir unidos.

En las diferentes etapas de concreción de un proyecto arquitectónico la Teoría de Grafos Topológicos aporta un eslabón clave. Una vez perfiladas las partes o elementos que formarán el proyecto, y antes de proceder al trazado de los primeros croquis predimensionales, es sumamente clarificador trazar el grafo de relaciones entre los elementos prefijados. Por supuesto, diferentes tipos de relaciones: acceso físico (puertas), acceso visual (ventanas, cristal,...), pared común,... etc., llevan a realizar diversos grafos sobre un mismo conjunto de elementos: tantos grafos como tipos de relaciones. Si simbolizamos por puntos los elementos y trazamos como aristas entre estos puntos segmentos que simbolicen la relación *acceso a* obtenemos un grafo. Si éste pone de manifiesto la existencia de un ciclo eso nos viene a decir que es posible establecer un circuito entre dos elementos cualesquiera (ver Figura 1.3).

A un grafo plano de adyacencias pueden corresponder diversos croquis. A cada croquis le corresponde (salvo isomorfismo) un grafo de adyacencias. Un grafo de adyacencias no plano no puede corresponder a una distribución real en planta.

Una vez realizado un grafo de adyacencias y un croquis dimensionado, a dicho croquis puede asociarse un grafo evaluado de dimensiones con el siguiente criterio. Se marcan tantos vértices como trozos de paredes horizontales haya, más dos vértices especiales (al principio y al final), escalando

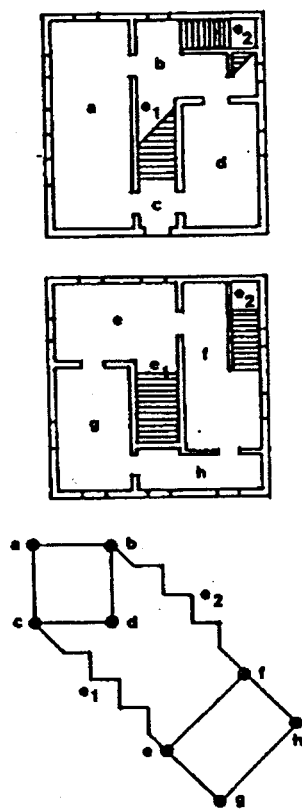


Figura 1.3:

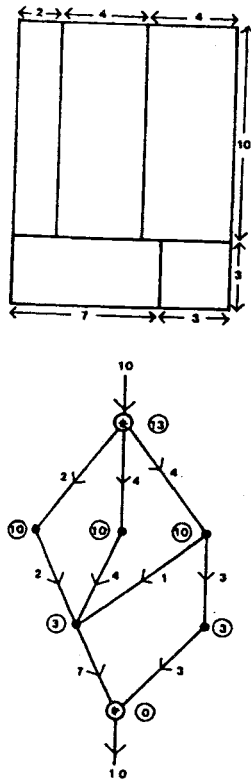


Figura 1.4:

todos los vértices de arriba abajo; de cada vértice salen aristas (dirigidas hacia abajo) donde se coloca el dimensionado de las paredes horizontales. En cada vértice se sitúa en un círculo el dimensionado vertical que queda entre la pared asociada al vértice y la siguiente por debajo. En el vértice final la dimensión vertical debe ser cero y la arista saliente debe tener la dimensión horizontal total. Nótese que el grafo no es correcto si la suma de valores salientes en cada vértice no es igual a la suma de los valores entrantes. El interés de estos grafos dimensionales es verificar si la repartición de dimensiones interiores es correcta (ver Figura 1.4).

Otro problema abierto de Teoría de Grafos, cuya motivación ha sido ar-

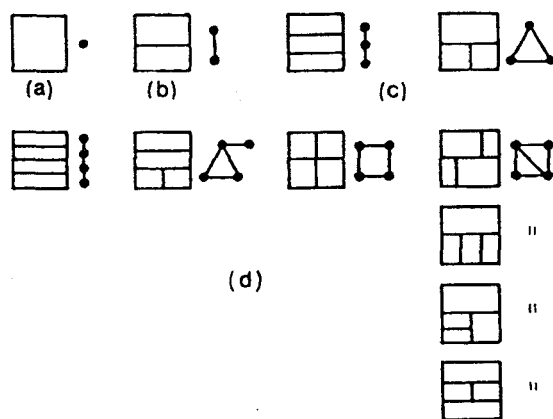


Figura 1.5:

quitectónica, es el de la disección exacta de un cuadrado en subrectángulos trazando sólo líneas horizontales y verticales determinando en cada caso todas las subdivisiones posibles y no isomorfas (ver Figura 1.5).

Nótese que este problema no es el de encontrar todos los grafos finitos posibles sino aquellos que correspondan a una disección plana pausable. Por ejemplo los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no se corresponden con ninguna disección de este tipo. Si n indica el número de rectángulos en que se quiere dividir el cuadrado, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 se ha calculado que existen, respectivamente, 1, 1, 2, 7, 22 y 117 formas diferentes de subdivisiones no equivalentes topológicamente. Para $n \geq 7$ el problema de la descripción exhaustiva de tales subdivisiones está aún abierto. Este tipo de problemas se relaciona hoy con la creación de algoritmos capaces de resolver la cuenta de todas las posibles soluciones mediante el uso de ordenadores y plotters acoplados.

A lo largo de la memoria hablaremos de Superficies Tubulares de Género Finito, con respecto a éstas me gustaría mencionar la aplicación práctica que en las nuevas tendencias en la Arquitectura tienen estas superficies utilizadas como soporte en la construcción de diferentes tipos de cúpulas.

Y principalmente hablaremos de inmersiones de grafos infinitos en estas superficies. Cabe preguntarse en este punto, ¿por qué grafos infinitos? Primero porque los grafos infinitos son estructuras matemáticas y por tanto merece la pena su estudio, además existen muchas relaciones entre otras ramas de las matemáticas como Álgebra, Teoría de Grupos, Geometría, Lógica, etc. y la Teoría de Grafos y en estos campos las estructuras infinitas son muy comunes. Segundo, porque un grafo infinito puede ser considerado como un grafo finito del cual no se sabe exactamente su tamaño. Por último, pero no por ello menos importante, los grafos infinitos son una sucesión creciente de grafos finitos (lo que en la literatura se conoce como *Grafos Universales*).

Esta memoria está estructurada de la siguiente forma:

Comenzamos con una breve introducción sobre la Teoría de Grafos, para seguir con un capítulo dedicado a las nociones y conceptos básicos que necesitaremos para el desarrollo y una mejor comprensión de los contenidos que a lo largo de las dos partes que forman este trabajo vamos a presentar.

La primera parte estudia inmersiones de grafos infinitos, numerables y localmente finitos en superficies abiertas de género finito y está compuesta por dos capítulos (3 y 4). En el Capítulo 3 hablaremos y, desde un punto de vista teórico, caracterizaremos los grafos sin un punto de acumulación de vértices en tales superficies, encontrando una lista de subgrafos prohibidos para esta propiedad en el cilindro (problema éste propuesto por Thomassen en su visita a nuestro Departamento en 1994). En el Capítulo 4 centraremos nuestra atención en el caso de superficies abiertas planas sobre las cuales generalizaremos los resultados obtenidos por Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero [5] para grafos mosaicos planos, así como otros obtenidos por Thomassen en [58] sobre representaciones planas por segmentos rectilíneos a dichas superficies.

En la segunda parte de la memoria, hablaremos de inmersiones de grafos infinitos, numerables, localmente finitos y dinámicos; lo que nos va a permitir no sólo encontrar resultados teóricos sino también algorítmicos, debido a la estructura repetitiva que tienen estos grafos. En el Capítulo 5 estudiaremos cuando las inmersiones de estos grafos en el cilindro presentan algún tipo de acumulación de puntos, siguiendo la línea de trabajo abierta por Dana [16] en su Tesis Doctoral. Y por último, concluimos esta parte planteándonos el estudio de ciertas propiedades métricas estrechamente relacionadas con las inmersiones de grafos por segmentos rectilíneos que presentan puntos de acumulación, abriendo una nueva línea de investigación, también propuesta por Thomassen en su visita y donde proponemos interesantes problemas abiertos.

Para finalizar este trabajo de investigación, presentamos un Apéndice donde damos un procedimiento para obtener los subgrafos prohibidos que verifican cierta propiedad a partir de los menores prohibidos que verifican la misma y las referencias bibliográficas más significativas consultadas para elaborar esta memoria.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo presentaremos las definiciones y nociones básicas que se utilizarán a lo largo de la memoria, las cuales podemos encontrar explícitamente en cualquier libro introductorio de Teoría de Grafos, como el de Harary [30] para grafos finitos y los surveys de Thomassen [54] y Nash-Williams [44] para grafos infinitos.

2.1 Nociones básicas

Comenzamos introduciendo terminología clásica en Teoría de Grafos.

Se define un *grafo* G como un par (V, A) , donde V es el conjunto de *vértices* de G y A es el conjunto de *aristas*. Una arista es un par no ordenado de vértices distintos de G . A los vértices que forman una arista se les denomina *extremos* de la arista. En un grafo no existen varias aristas con los mismos extremos. Si no imponemos esta última restricción, entonces hablaremos de un *multigrafo*.

Dos vértices de un grafo G son *adyacentes* si existe una arista formada por esos dos vértices. Dos aristas son *incidentes* si tienen un vértice en común. Un vértice y una arista también se dicen *incidentes* si el vértice es un extremo de la arista.

Si u es un vértice de G , denotaremos por $\delta(u)$ a su valencia en G , que es

el número de aristas de G incidentes con u . Representaremos el cardinal de un conjunto A por $|A|$. Consideraremos dos tipos diferentes de grafos: los que tienen una cantidad finita de vértices que llamaremos *grafos finitos* y los que tienen una cantidad numerable de vértices cada uno de ellos con valencia finita, que denominaremos *grafos infinitos numerables localmente finitos*.

Sea G un grafo y u y v dos vértices suyos. Un *camino* en G que une u y v es un conjunto ordenado de vértices distintos incidentes con el anterior y el siguiente, $P = \{u = u_1, u_2, \dots, u_n = v\}$.

Definimos la *longitud* de P como el número de vértices que tiene menos uno. También se llama camino en G que une a u y v a una sucesión de aristas de la forma $\{\{u = u_1, u_2\}, \dots, \{u_{n-1}, u_n = v\}\}$. La longitud de este camino es la misma que la de P , que equivale al número de aristas que lo componen.

Un camino como el anteriormente descrito, se dirá que es un *ciclo* si el vértice inicial y final coinciden.

Si G es un grafo y u un vértice suyo, denotaremos por $G - \{u\}$ al grafo formado por todos los vértices de G excepto u y todas sus aristas excepto las incidentes con u ; en este caso diremos que $G - \{u\}$ se ha obtenido a partir de G *borrando* un vértice. Al grafo que se obtiene a partir de G , borrando sucesivamente los vértices u_1, u_2, \dots, u_n lo denotaremos por $G - \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Si x es una arista de G , también podremos hablar del grafo donde se ha *borrado* una arista, denotado por $G - \{x\}$, que es el grafo formado por todos los vértices de G y todas sus aristas excepto x . Si del grafo G se borran sucesivamente las aristas x_1, x_2, \dots, x_n obtendremos un grafo que denotaremos por $G - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Sean G y H dos grafos. Diremos que H es un *subgrafo* de G y lo denotaremos por $H \subseteq G$ si se ha obtenido mediante una sucesión de borrados de vértices y/o aristas de G . Si además el grafo H no es igual a G y contiene a algún vértice, entonces diremos que H es un *subgrafo propio* de G . Análogamente se define un *submultigrafo*. Dado un subconjunto de vértices W de G , denotaremos por $\langle W \rangle$ al grafo que tiene como vértices los elementos de G , y como aristas, todas aquellas que existían en G entre vértices

de W . Diremos que $\langle W \rangle$ es el *subgrafo de G inducido por W* . Dado un vértice u de un grafo G , el subgrafo inducido por u y sus adyacentes se denota por $Ady_G(u)$.

Si G es un grafo y $x = \{u, v\}$ una arista suya, denotaremos por G/x al grafo que contiene todos los vértices de G excepto u y v más un nuevo vértice w que es adyacente con todo aquél vértice que sea adyacente con u ó v en G . Diremos que G/x se ha obtenido a partir de G por *contracción* de la arista x , o bien que G se ha construido a partir de G/x por *división* del vértice w .

Sean G y H dos grafos de manera que H se ha obtenido a partir de G mediante una secuencia de borrados de vértices y aristas y contracciones de aristas. Diremos que H es un *menor de G* . Si además, H no es igual a G y contiene a algún vértice, entonces diremos que es un *menor propio de G* .

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ y $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$. Si Φ es inyectiva y tal que dados dos vértices adyacentes u y v de G_1 se tiene que $\Phi(u)$ y $\Phi(v)$ son adyacentes en G_2 , entonces se dice que Φ es una *inmersión de G_1 en G_2* . Si Φ es una inmersión de G_1 en G_2 biyectiva tal que Φ^{-1} es una inmersión de G_2 en G_1 , entonces Φ es un *isomorfismo* entre los grafos G_1 y G_2 que a su vez se dicen *isomorfos*.

Sea una arista $x = \{u_1, u_2\}$. Llamaremos *subdivisión* de x a, o bien un conjunto finito de aristas $P = \{\{u_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, u_2\}\}$ con todos los vértices distintos, o bien a la misma arista x . Si G es un grafo, llamaremos *subdivisión de G* al grafo obtenido al sustituir las aristas de G por particiones suyas, de manera que los vértices que están en los interiores de las particiones de una arista son distintos entre sí y distintos de los vértices de G . Diremos que dos grafos G_1 y G_2 son *homeomorfos* si existe un grafo G_3 que sea subdivisión de G_1 y G_2 .

Sean G_1 y G_2 dos grafos. Decimos que Θ es un *morfismo* entre G_1 y G_2 si existe una subdivisión G_3 de G_2 tal que Θ transforme vértices de G_1 en vértices de G_3 manteniendo las adyacencias y si $\{u, v\}$ es una arista de G_3 , entonces existen dos vértices u_1 y u_2 adyacentes en G_1 , tales que $\Theta(u_1) = u$ y $\Theta(u_2) = v$. Si además la elección de los vértices u_1 y u_2 es única entonces

se dirá que el morfismo es *inyectivo en las aristas*.

Un *1-camino* W en un grafo infinito G es un subgrafo W de G tal que existe un morfismo $\Phi : J \rightarrow W$, siendo J un grafo homeomorfo a la semirrecta de los números reales no negativos \mathcal{R}^+ , tal que induce una biyección en las aristas.

Un grafo G se dirá *conexo* si para cualesquiera dos vértices de G , existe un camino que los une. Si G es un grafo no conexo, se puede definir \mathcal{R} , la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de los vértices: $u\mathcal{R}v$ si existe un camino que los une. Llamaremos *componentes conexas* de G a las clases de equivalencia del conjunto cociente G/\mathcal{R} . Es claro que un grafo es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa.

Un vértice v de un grafo G se dice que es un *punto de corte* si el grafo inducido por $G - \{v\}$ posee un número superior de componentes conexas que el grafo G . Un grafo conexo que no posee puntos de corte se dice que es un grafo *2-conexo*. Dos vértices u y v de G forman una *pareja de corte* si $G - \{u, v\}$ tiene un número superior de componentes conexas que el grafo G . Dentro de los grafos conexos, vamos a distinguir varias situaciones. Un grafo G se dice *n -conexo* si se necesitan borrar al menos n vértices para desconectar el grafo. Hay que hacer notar que un grafo no conexo es 0-conexo y que si un grafo es n -conexo, también es m -conexo con $m \leq n$.

Un resultado muy utilizado relativo al grado de conexión de un grafo es el siguiente, conocido como el Teorema de Menger [28].

Teorema 2.1 *Dado un grafo conexo y dos vértices suyos u y v no adyacentes, el número mínimo de vértices cuyo borrado desconecta a u y v es el máximo número de caminos disjuntos que los unen.*

Un subgrafo H del grafo G se dice una *3-componente* (respectivamente *2-componente* y *1-componente*) si H es 3-conexo maximal (resp. 2-conexo y 1-conexo) es decir, no se le puede añadir aristas o vértices de G sin que H deje de ser 3-conexo (resp. 2-conexo y 1-conexo).

Sea G un grafo con una pareja de corte $\{u, v\}$ y sean H_1, \dots, H_n las componentes conexas de $G - \{u, v\}$. Diremos que G queda dividido mediante

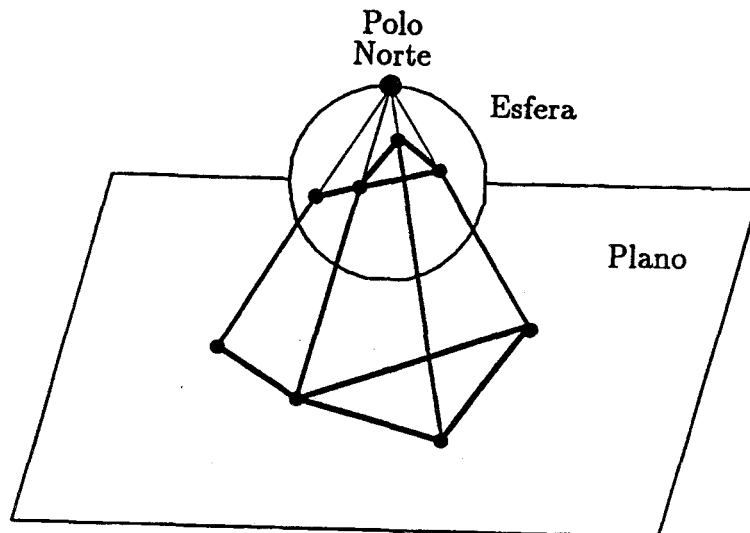


Figura 2.1:

$\{u, v\}$ en los grafos G_1, \dots, G_n donde cada G_i es el subgrafo de G inducido por $V(H_i) \cup \{u, v\}$ al que se le ha añadido la arista $\{u, v\}$. A dichos grafos también los llamaremos $\{u, v\}$ – bloques.

2.2 Planaridad

Un grafo G se dice *sumergible en una superficie S* si existe un grafo isomorfo que puede dibujarse sobre S de forma que las aristas sólo se intersecten en los vértices. Un *grafo plano* es aquel que es sumergible en un plano. Teniendo en cuenta la proyección estereográfica, es fácil ver que un grafo es plano si y sólo se puede sumergir en la esfera (ver Figura 2.1).

Consideremos los grafos G_1 y G_2 de la Figura 2.2. En ambos casos los dibujos que representan a G_1 y G_2 tienen el inconveniente de que las aristas se cortan en puntos que no son vértices. Sin embargo, podemos hallar dos

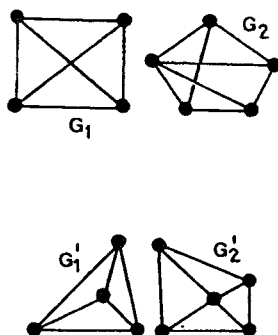


Figura 2.2:

grafos G'_1 y G'_2 , isomorfos respectivamente a los anteriores, en los que esto no suceda. Por tanto podemos concluir que tanto G_1 como G_2 son grafos planos.

La representación plana de un grafo divide al plano en regiones, que llamaremos *caras* del grafo. A una cara no acotada de un grafo la llamaremos *cara exterior*.

El problema inmediato es estudiar si todos los grafos son planos y cómo puede darse un método rápido para reconocer la planaridad o no de un grafo, sin recurrir a la casuística de sus representaciones isomorfas.

Existen diversas referencias de que en el siglo pasado algunos matemáticos eran conscientes que lo que hoy llamamos K_5 no admite una inmersión en el plano. De hecho, la demostración de la imposibilidad de encontrar tal inmersión se deduce inmediatamente a partir de la fórmula de Euler que nos relaciona el número de vértices n , aristas m y caras f de un poliedro esférico: $n - m + f = 2$. En este punto, cabe aclarar, que aunque de todos es conocida como la fórmula de Euler, son varios los autores que hay que citar al hablar de ésta. En 1750 Euler escribió una carta a Goldbach comunicándole que había encontrado dicha fórmula pero que no había sido capaz de probarla. La carta completa se puede encontrar en [36].

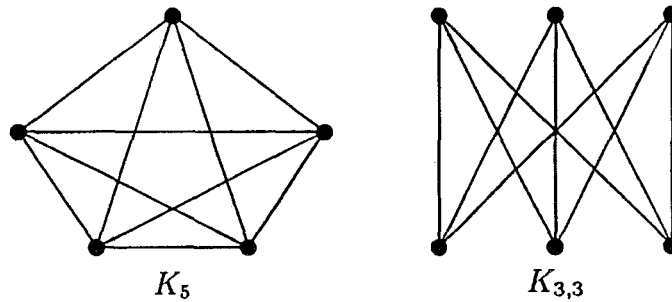


Figura 2.3:

Obviamente, K_5 y $K_{3,3}$ no son los únicos grafos no planos, sin embargo, en 1930 Kuratowski [39] resolvió todas las cuestiones planteadas anteriormente demostrando uno de los teoremas más importantes en Teoría de Grafos:

Teorema 2.2 *Un grafo es plano si y sólo si no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ó a $K_{3,3}$ (ver Figura 2.3).*

Un resultado como el anterior se conoce como una *caracterización de tipo Kuratowski* o bien diremos que los grafos planos se han caracterizado en términos de *grafos prohibidos* o que los grafos no planos están caracterizados mediante *grafos minimales*. Gran parte de los resultados obtenidos a lo largo de la memoria son de esta naturaleza.

Las aplicaciones del Teorema de Kuratowski son numerosas, tocando ramas como la Ingeniería, la Arquitectura y otras mucho más exóticas (ver [22] como una buena referencia para aplicaciones de la Teoría de Grafos en general).

Un paso decisivo para la automatización del Teorema de Kuratowski, fue su versión algorítmica efectiva dada por Hopcroft y Tarjan en 1974 [31] consiguiendo un algoritmo que, en tiempo lineal, decide si un grafo es plano o no. El siguiente avance fue dado por Nishizeki y Chiba [45], consiguiendo

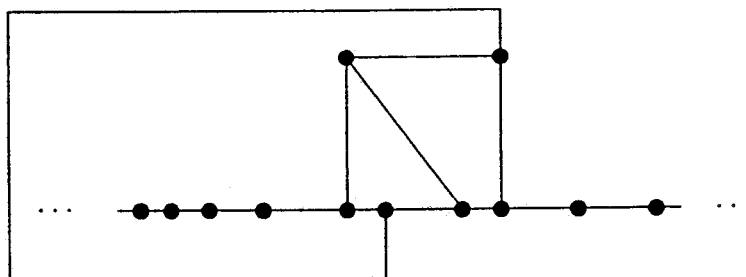


Figura 2.4:

un algoritmo, que también en tiempo lineal, da una inmersión en el plano de un grafo si éste es plano.

La caracterización obtenida por Kuratowski es válida tanto para grafos finitos como para grafos infinitos [17, 61] (los resultados teóricos no los algorítmicos). En el caso infinito, varios autores (ver [29, 58]) han señalado la importancia de asegurar representaciones planas sin acumulación de vértices o sin acumulación de aristas.

Un *punto de acumulación de vértices* de una representación plana de un grafo plano infinito es un punto p del plano tal que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, la bola de centro p y radio ε contiene infinitos vértices de dicha inmersión. Un grafo diremos que es *VAP-plano* si no contiene ningún punto de acumulación de vértices. No siempre es posible encontrar una representación con esas características para cualquier grafo, aunque sea plano como en el ejemplo de la Figura 2.4.

Parece pues natural preguntarse si existe alguna caracterización para los grafos con representaciones VAP-planas. En este sentido, Halin en [29] caracterizó los grafos isomorfos a los grafos planos localmente finitos sin puntos de acumulación del conjunto de vértices, añadiendo cuatro nuevos grafos prohibidos a los de Kuratowski.

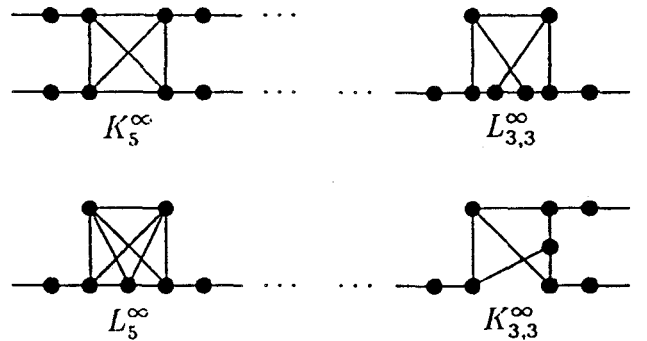


Figura 2.5:

Teorema 2.3 *Un grafo infinito plano tiene una representación VAP-plana si y sólo si no contiene un subgrafo homeomorfo de los grafos K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, $K_{3,3}^\infty$ y L_5^∞ (ver Figura 2.5).*

Existen grafos que aún siendo VAP-planos, sin embargo presentan otro tipo de acumulación de puntos.

Un *punto de acumulación de aristas* de una representación plana de un grafo plano infinito es un punto p del plano tal que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, la bola de centro p y radio ε interseca infinitas aristas de dicha inmersión. Un grafo diremos que es *EAP-plano* si no contiene ningún punto de acumulación de aristas.

Imaginemos, por ejemplo, un grafo que tiene dos componentes conexas: una cuadrícula infinita y un subgrafo homeomorfo a \mathbf{R} . Es posible dar una representación sin acumulación de vértices pero existe acumulación en los puntos interiores de las aristas, como podemos ver en la Figura 2.6.

Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero [5] caracterizaron los grafos planos localmente finitos sin puntos de acumulación ni de vértices ni de aristas añadiendo dos nuevos grafos prohibidos a los considerados por Halin.

Teorema 2.4 *Un grafo infinito VAP-plano es EAP-plano si y sólo si no*

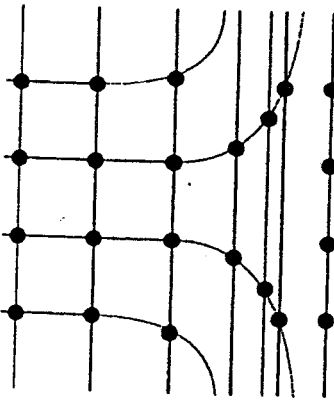


Figura 2.6:

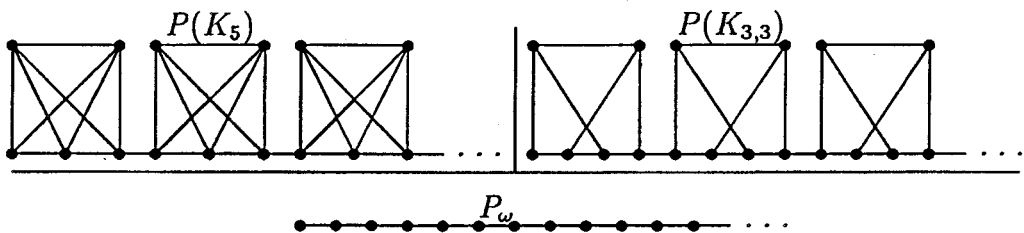


Figura 2.7:

contiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_5) \cup P_\omega$ ó $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$ (ver Figura 2.7).

Aunque pudiera parecer que por la naturaleza infinita, no tiene sentido plantearse estos problemas desde un punto de vista algorítmico, la realidad es que en diseño VLSI el investigador se encuentra ante la necesidad de decidir si un grafo de tamaño ilimitado (infinito) pero con un periodo regular es plano, VAP-plano o EAP-plano tal y como señalan Iwano y Steiglitz en [33]. Dichos autores dan en [34] un algoritmo que reconoce cuando un grafo periódico es

VAP-plano, aunque, por desgracia sus resultados se basan en diversos preliminares que son falsos, con lo cual la validez de sus métodos no quedan claros hasta que Dana en [16] encuentra algoritmos lineales que caracterizan la planaridad, VAP-planaridad y EAP-planaridad de grafos periódicos, obteniéndose los métodos de Iwano y Steiglitz como casos particulares de los empleados por Dana. En este sentido, en esta memoria nosotros trataremos estas mismas propiedades para inmersiones de grafos en superficies abiertas con n finales de Freudenthal y desde el punto de vista algorítmico nos centraremos más específicamente en grafos periódicos o dinámicos en el cilindro.

2.3 Periplanaridad

Supongamos que tenemos que construir un cierto circuito impreso que representamos como un grafo, donde los vértices son las terminales del circuito y las aristas, las conexiones entre las terminales. Si ese circuito es parte de un sistema más complejo, y sus terminales deben conectarse a su vez con otras partes del sistema, se comprende fácilmente que dichas terminales deben situarse en la periferia de la placa, o dicho de otra manera, el grafo que lo modeliza, debe de ser *periplano*.

Un grafo se dice *periplano* si tiene una representación plana tal que todos los vértices están en la misma cara. Por ejemplo, K_4 no es periplano, ya que si lo fuera podríamos obtener una inmersión plana de K_5 . Se pueden contar multitud de aplicaciones de los grafos periplanos, desde la Arquitectura [50], el diseño de circuitos impresos [42] o el diseño de redes de comunicaciones [23].

Los grafos periplanos fueron introducidos y caracterizados por Chartrand y Harary en [13]. Desde entonces, han aparecido muchas aplicaciones de ellos tanto en Matemáticas como en otras disciplinas. Esto es debido a que, aunque es una familia relativamente pequeña entre los grafos planos, posee muy buenas propiedades desde el punto de vista topológico (por ejemplo, un grafo periplano maximal es la triangulación de un polígono) o computacional

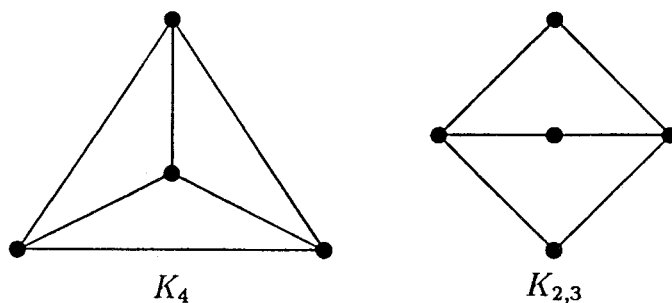


Figura 2.8:

(el cálculo de árboles de Steiner sobre grafos periplanos se puede resolver en tiempo polinomial [63] mientras que en el caso general es un problema NP).

Chartrand y Harary nos proporcionaron la siguiente caracterización en términos de subgrafos prohibidos:

Teorema 2.5 [13] *Un grafo es periplano si y sólo si no tiene un subgrafo que se obtenga a partir de K_4 ó $K_{2,3}$ mediante subdivisión de aristas (ver Figura 2.8).*

Buena parte del interés en el estudio de los grafos periplanos se ha centrado en encontrar conceptos más amplios que la periplanaridad que de alguna manera heredan ciertas propiedades que son consideradas interesantes. A continuación vamos a presentar algunas de estas extensiones.

En primer lugar, es necesario hablar de los grafos W -periplanos. Siendo G un grafo plano y W un subconjunto de sus vértices diremos que G es W -periplano si tiene una representación plana tal que los vértices de W están en la cara exterior. Claramente si $W = V(G)$ entonces G es periplano y si W tiene un único vértice basta con que G sea plano. Este conjunto de grafos fue definido y estudiado por Oubiña y Zucchello [?] dando la siguiente caracterización:

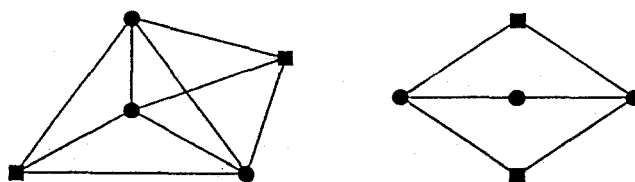


Figura 2.9:

Teorema 2.6 Sea G un grafo conexo y W un subconjunto no vacío de sus vértices. G es W -periplano si y sólo si G no contiene un subgrafo K homeomorfo a K_4 y $K_{2,3}$ tal que los vértices distinguidos de K ($V(K_4)$ y los vértices de valencia 2 de $K_{2,3}$) pertenecen a W o están K -periconectados con vértices de W .

Si K es un subgrafo de G , un vértice u de K está K -periconectado con un vértice v de $G - K$ si existe un camino entre ellos que no contiene ningún vértice de K excepto u .

En la Figura 2.9 podemos ver como el grafo de la izquierda no es W -periplano mientras el de la derecha sí, donde los vértices de W son los marcados con un cuadrado.

Otra extensión de la periplanaridad es la dada por Sedláček en [51]. En dicho trabajo, el autor definía el concepto de grafo *periplano generalizado* que es un grafo con una representación plana donde cada arista tiene al menos un extremo en la cara exterior (K_4 es un grafo periplano generalizado) y daba una caracterización de éstos mediante grafos prohibidos.

Al igual que ocurría con los grafos planos, también es válido el Teorema de Chartrand y Harary para grafos infinitos pero haciendo una salvedad que es importante asegurar además que no haya puntos de acumulación en la representación plana correspondiente. En este sentido, Boza, Diánez y Márquez [9] fijan y caracterizan los grafos p -periplanos es decir, los grafos

infinitos que tienen una representación plana sin acumulación de vértices ni de aristas tal que todos los vértices están situados en una cara.

Cáceres en su Tesis Doctoral [10] recoge también otras generalizaciones de grafos periplanos muy interesantes.

La primera de ellas surge de manera natural al hacerse la siguiente pregunta: ¿cuántas caras de un grafo se necesitan como mínimo para recubrir a todos los vértices? Llamaremos *grafo n -periplano* (con $n \in \mathbb{N}$) a un grafo plano tal que existen n caras que contienen a todos los vértices en alguna de sus representaciones planas. Así por ejemplo, los grafos 1-periplanos prohibidos son los grafos periplanos de Chartrand y Harary. Existen varios trabajos que proporcionan una caracterización de todas estas familias. Bienstock y Monma en [7] dan un algoritmo que reconoce cuando un grafo es n -periplano. Existe un buen motivo por el cual una caracterización mediante grafos minimales n -periplanos es interesante y que pasamos a detallar en el caso $n = 1$ y $n = 2$. No es difícil comprobar que los grafos de Halin se pueden construir a partir de unos grafos 1-periplanos prohibidos a los que se les ha unido algunos 1-caminos en ciertos vértices. Recordemos que los grafos de Halin son los mínimos grafos infinitos cuyas representaciones planas tienen al menos un punto de acumulación de vértices. En este contexto Cáceres encuentra una lista de grafos minimales prohibidos 2-periplanos que están relacionados con los grafos infinitos que tienen una representación en el cilindro con al menos un punto de acumulación de vértices sin más que añadir 1-caminos en ciertos vértices.

Otra generalización recogida en la Tesis de Cáceres [10] es la extensión del Teorema de Oubiña y Zucchello a cualquier superficie en los siguientes términos.

Sea G un grafo, $W \subseteq V(G)$ y S una superficie. Diremos que G es S -representable si existe una inmersión de G en S y que es W - S -representable si existe una inmersión de G en S de forma que todos los vértices de W estén en la misma cara. Denotaremos por G^W al cono de G , es decir, el grafo formado al añadir a G un nuevo vértice v y las aristas que

unen v con cada vértice de W .

Teorema 2.7 *En las condiciones anteriores, G es W - S -representable si y sólo si G^W es S -representable.*

En esta memoria nosotros ampliaremos este concepto y hablaremos de los grafos n - W - S -representables.

2.4 Superficies

El diseño de circuitos impresos es un claro incentivo para la representación de grafos en distintas superficies. Importantes resultados se han derivado al considerar multitud de cuestiones sobre los dibujos planos de grafos. Un lugar, no menos importante, ha sido ocupado por las investigaciones realizadas sobre otras superficies.

En esta sección vamos a fijar los conceptos sobre superficies e inmersiones de grafos, con los que vamos a trabajar a lo largo de la memoria.

Entre los primeros espacios considerados por los matemáticos destacan las superficies de objetos sólidos: esferas, conos, poliedros, etc. Todos ellos tienen como propiedad común que alrededor de cada punto se puede localizar un pequeño disco abierto (aunque posiblemente deformado).

Las superficies aparecen como descripciones de observaciones físicas y astronómicas. El desarrollo de la Dinámica resaltó el papel de las superficies, al aparecer éstas como representaciones de los llamados espacios de fases de sistemas dinámicos. Es decir, las posibles configuraciones de un sistema dinámico junto con las velocidades de los distintos puntos que lo forman. Un ejemplo muy sencillo consiste en un punto que se mueve libremente por una circunferencia. Entonces la variedad de estados de este sistema es claramente un cilindro infinito.

Dentro de las Matemáticas las superficies son objetos estudiados desde el punto de vista del Análisis Matemático (áreas y volúmenes) y de la Geometría Diferencial (curvatura, líneas geodésicas, etc.).

Por su extensa utilización, las superficies son los espacios topológicos más importantes en dimensión 2. Supongamos conocidos conceptos básicos como espacio topológico, compacidad, conexión por arcos, espacio de Hausdorff, homeomorfismo, etc. En este contexto decimos que una *superficie* S es un espacio topológico compacto, de Hausdorff, conexo por arcos y localmente homeomorfo a un disco. Esto es, para cada punto p de S existe un conjunto abierto de S conteniendo a p , el cual es homeomorfo a un disco abierto del plano. Una superficie se puede obtener de la siguiente forma: tomamos una colección de polígonos convexos en el plano disjuntos dos a dos (y sus interiores) con lados de longitud uno e identificamos cada lado con otro, posiblemente en el mismo polígono. Esto da lugar a un espacio topológico S y a un grafo G , cuyos vértices son los de los polígonos y cuyas aristas son los lados. Si G es conexo, S es conexo por arcos y si S es localmente homeomorfo a un disco en cada uno de los vértices de G , entonces S es una superficie. Decimos que G es una *inmersión 2-celular* de S .

Si todos los polígonos son triángulos y ningún lado de un triángulo es identificado con un lado del mismo triángulo entonces decimos que G es una *triangulación* de S y que S es una superficie *triangularizable*.

A continuación vamos a definir las superficies S_g y N_h .

Denotaremos por S_0 a la esfera. Si recortamos dos discos abiertos disjuntos de S_0 e identificamos sus fronteras de tal forma que las orientaciones en el sentido de las agujas del reloj de éstas no coincidan, estamos añadiendo un *asa* a S_0 . Si añadimos g asas obtenemos la *superficie orientable* S_g . S_1 representa la superficie tórica y S_2 el doble toro. Al número de asas de una superficie S se le llama *género de S* . Si lo que hacemos es recortar dos discos abiertos disjuntos de S_0 e identificamos cualquier par de puntos opuestos de sus fronteras lo que hacemos es añadir un *plano proyectivo* a la esfera. Si hacemos esto h veces pues obtenemos la *superficie no orientable* N_h . Por ejemplo N_2 es la botella de Klein.

En general, podemos definir una *variedad de dimensión n* como un espa-

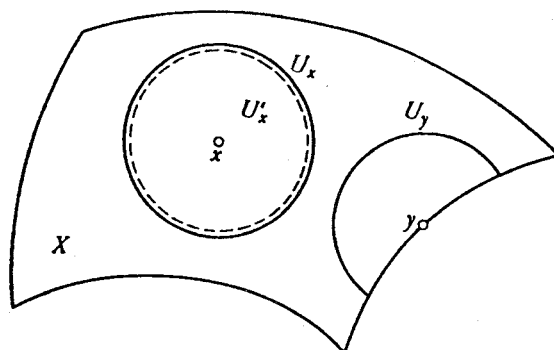


Figura 2.10:

cio topológico de Hausdorff en el que cada punto admite un entorno abierto homeomorfo a R^n . De este modo, una superficie es una variedad de dimensión 2.

El conjunto de puntos x en una variedad de dimensión n , X , para el cual existe un conjunto $U \subset X$ homeomorfo a una bola abierta n -dimensional tal que $x \in \text{int}U$, es llamado *interior de la variedad X* y es denotado por $\text{int}X$. Al complemento $X \setminus \text{int}X$ se le llama *frontera de la variedad X* y se denota por $\text{bd}X$. Una variedad cuya frontera es vacía le llamaremos *variedad sin frontera*.

Por ejemplo, sean los puntos x e y pertenecientes a una variedad de dimensión 2, X , o sea, una superficie, tal que existen unos conjuntos U_x y U_y homeomorfos a bolas cerradas de dimensión 2 con $x \in \text{int}U_x$ e $y \in \text{int}U_y$. Además supongamos que x está en el interior del $\text{int}X$, es decir, que existe un conjunto U'_x homeomorfo a una bola abierta con $x \in \text{int}U'_x$ y que el punto y no tiene esa propiedad, en este caso diremos que $y \in \text{bd}X$ (ver Figura 2.10).

Sabemos que si X e Y son variedades de dimensión n y m respectivamente

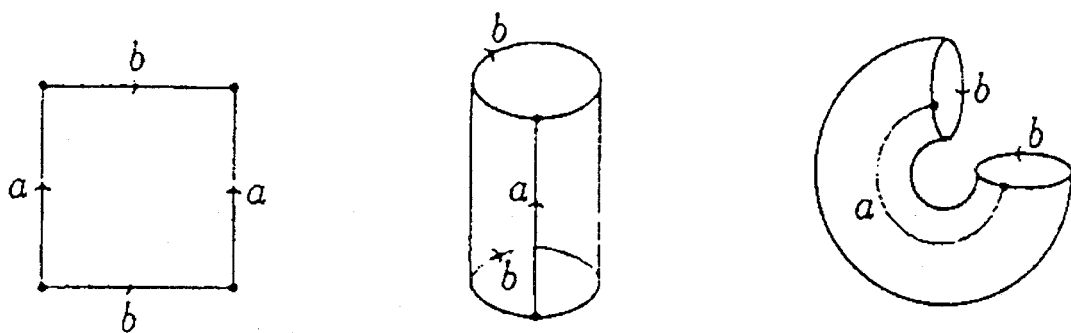


Figura 2.11:

entonces el producto métrico $X \times Y$ en una variedad de dimensión $n + m$ y tal que $\text{int}(X \times Y) = \text{int}X \times \text{int}Y$ y $\text{bd}(X \times Y) = ((\text{bd}X) \times Y) \cup (X \times \text{bd}Y)$.

En la Figura 2.11 podemos ver como el toro es una variedad de dimensión 2 sin frontera y en cambio el cilindro (ver Figura 2.12) es una variedad de dimensión 2 cuya frontera son dos círculos.

Además, sabemos que si la frontera de una variedad de dimensión n es no vacía, entonces dicha frontera es una variedad de dimensión $n - 1$ sin frontera.

Así pues, podemos decir que una *variedad de dimensión n con frontera* es un espacio topológico tal que cada punto tiene un entorno topológicamente equivalente o a una bola abierta de dimensión n o a media bola.

Consideremos S_1 y S_2 dos superficies. Quitamos un pequeño disco de cada una de ellas y pegamos los círculos frontera de esos discos juntos formando una nueva superficie que llamamos *suma conexa de S_1 y S_2* .

En la Figura 2.13 podemos observar la construcción de la suma conexa del doble toro y la suma conexa de dos planos proyectivos en la Figura 2.14.

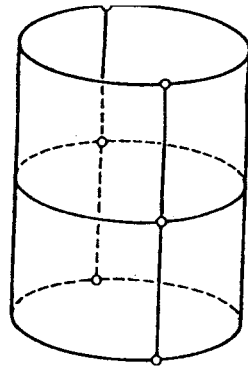


Figura 2.12:

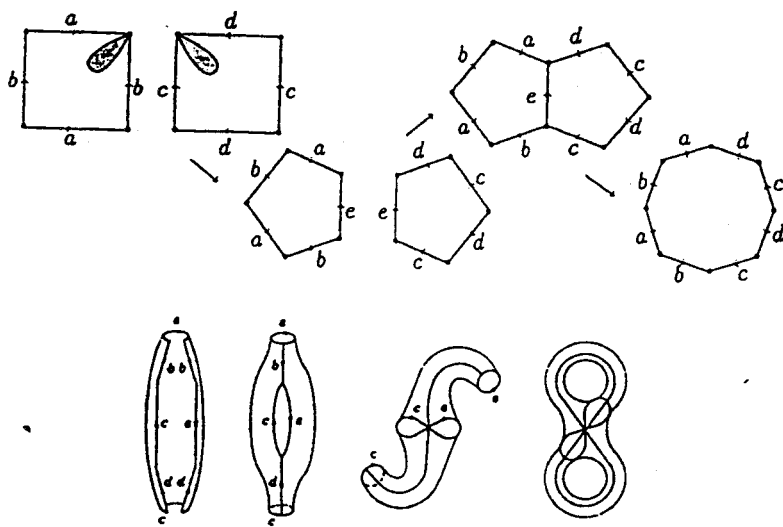


Figura 2.13:

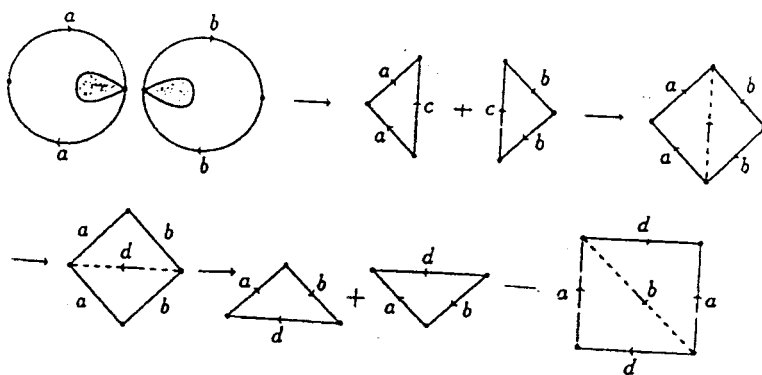


Figura 2.14:

Cada superficie compacta conexa sin frontera es homeomorfa a la esfera, a la suma conexa de n toros, o a la suma conexa de n planos proyectivos. En las Figuras 2.15 y 2.16 podemos ver las representaciones planas de un toro con n asas y la suma conexa de n planos proyectivos respectivamente.

Una superficie compacta conexa con frontera (Figura 2.17) es topológicamente equivalente a la esfera, a la suma conexa de n toros, o la suma conexa de n planos proyectivos, con un número finito de discos borrados (ver para más detalles [19]).

A lo largo de la memoria las superficies con las que vamos a trabajar son unas superficies abiertas cuya construcción pasamos a definir a continuación: *superficies no compactas con una cantidad finita de finales de Freudenthal*.

Al ser estas superficies no compactas, una noción fundamental a estudiar en ellas es el concepto de *final de Freudenthal* introducido por éste en [24].

Consideramos X un espacio no compacto, σ -compacto y localmente compacto, entonces podemos encontrar una sucesión creciente $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ de subconjuntos compactos tales que $K_i \subseteq \text{int}K_{i+1}$ para todo $n \geq 1$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ y que para todo $n \geq 1$ las componentes de $X - K_n$ no sean acotadas. Tal sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$ se denomina *sucesión exhaustiva* del espacio

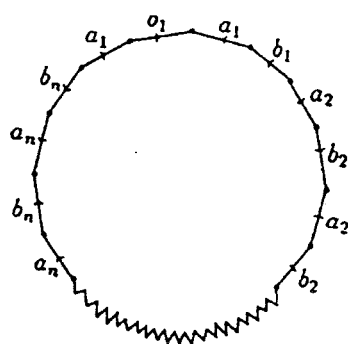


Figura 2.15:

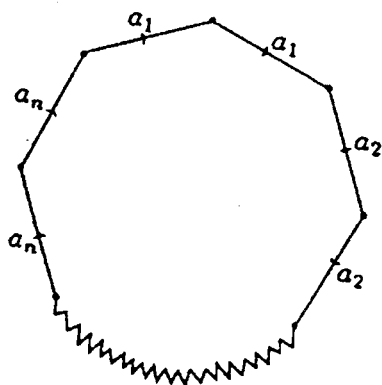


Figura 2.16:

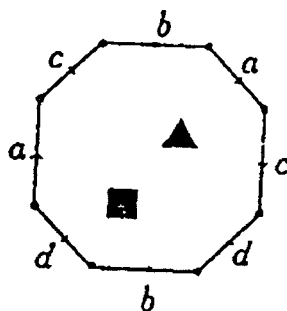


Figura 2.17:

X . Para cada $n \geq 1$ denotamos por $\pi_0(X - K_n)$ el conjunto de componentes conexas de $X - K_n$. Evidentemente la inclusión $K_n \subseteq K_{n+1}$ nos da una sucesión inversa

$$\pi_0(X) = * \leftarrow \pi_0(X - K_1) \leftarrow \dots \leftarrow \pi_0(X - K_n) \leftarrow \dots$$

Un final de Freudenthal del espacio no compacto X es un elemento del límite inverso $F(X) = \varprojlim \pi_0(X - K)$ donde K toma valores en la familia de los conjuntos compactos de X , lo cual nos viene a decir que el conjunto $F(X)$ no depende de la sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n \geq 1}$ usada en la definición y π_0 indica el número de componentes conexas no acotadas.

Ejemplo 2.8 La semirecta euclídea $R_+ = [0, +\infty)$ posee exactamente un final de Freudenthal y la recta euclídea dos. Todos los espacios euclídeos R^n con $n \geq 2$ tienen exactamente un final de Freudenthal.

Ejemplo 2.9 Sea $X = R_+ \times \{0\} \cup N \times R_+ \subseteq R^2$. Entonces $F(X)$ es homeomorfo a la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ junto con su límite 0.

Ejemplo 2.10 El árbol binario de Cantor T_C es un subespacio de R^2 . Los vértices en el nivel $\frac{n-1}{n}$ ($n \geq 1$) corresponden a los puntos medios de los

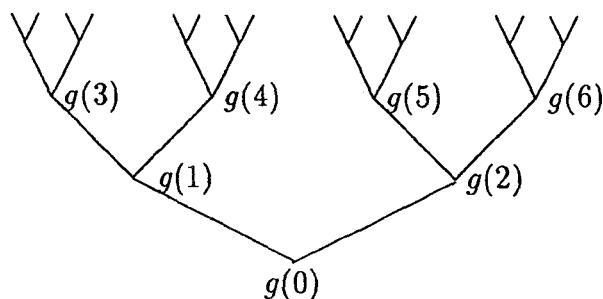


Figura 2.18:

2^{n-1} intervalos que son quitados en el n -ésimo paso de la construcción del conjunto de Cantor C (ver [19] para más detalles). El espacio de finales del árbol binario de Cantor, $F(T_C)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor C (ver Figura 2.18).

Pasamos ahora a detallar la construcción de las *superficies no compactas con una cantidad finita de finales de Freudenthal* que vamos a utilizar a lo largo de la memoria.

Estas superficies se construyen a partir de una superficie compacta a la que se le reemplazan un número finito de círculos por la misma cantidad de semicilindros. Si la superficie compacta original es S y el número de semicilindros es n , notaremos por $S(n)$ a la superficie obtenida. Por tanto $S(n)$ tiene n finales de Freudenthal. Como ejemplos, si S es la esfera, tenemos el plano y el cilindro para $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente. A estas superficies les llamaremos *superficies tubulares de género finito*.

El cardinal de $F(X)$ lo denotaremos por $e(X)$.

Cuando X representa a un grafo conexo, numerable y localmente finito, también podemos trabajar con el concepto de *final de Freudenthal* de dicho grafo ya que tenemos una sucesión numerable $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq \dots$ de subgrafos finitos (compactos) para obtener $F(X)$ (ver [6] para más detalles).

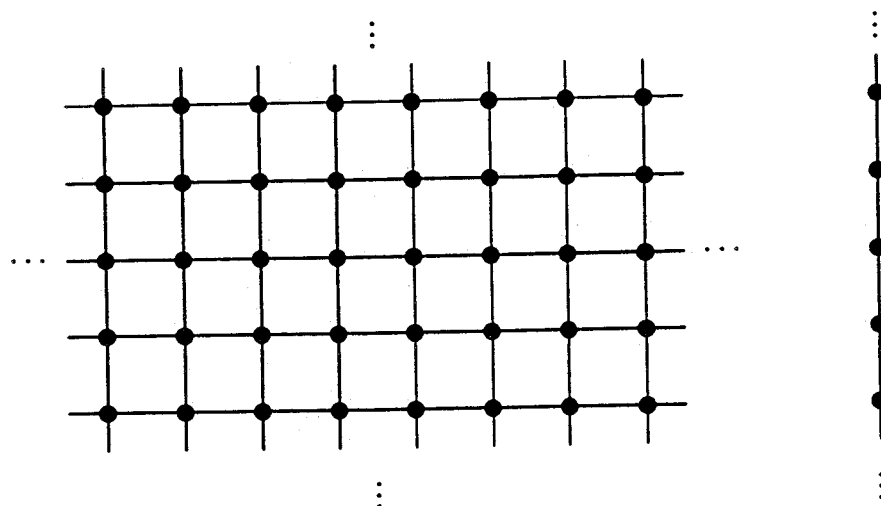


Figura 2.19:

Consideremos G un grafo numerable, localmente finito y conexo, sea W el conjunto de todos los 1 -caminos de G . En este conjunto se define la siguiente relación de equivalencia: dos 1 -caminos W_1 y W_2 están relacionados si para todo subgrafo finito K de G , hay vértices de W_1 y W_2 en la misma componente conexa de $G - K$. Cada una de las clases de equivalencia de W obtenidas con esta relación, define un *final de Freudenthal*.

En este contexto, un final definido por W es *estable* si para cualquier compacto K subconjunto de G , la componente conexa de $G - K$ definida por W es un árbol, en otro caso se dice que el final es *inestable*. En la Figura 2.19 podemos ver a la izquierda la cuadrícula que tiene un final de Freudenthal inestable y a la derecha un 2 -camino que tiene dos finales estables.

Parte I

Inmersiones de grafos sin acumulación

En 1994 Thomassen visitó nuestro Departamento y nos propuso el problema de *caracterizar los grafos que admiten una inmersión en el cilindro sin puntos de acumulación de vértices*. Al tratar éste han ido surgiendo una serie de subproblemas, estrechamente relacionados con él como la caracterización de los grafos *2-periplanos*, que son aquellos grafos que admiten una inmersión en el plano tales que todos sus vértices se pueden cubrir con 2 caras, que podemos encontrar resuelto en la Tesis Doctoral de Cáceres [10]. Nosotros nos proponemos en la primera parte de esta memoria un objetivo mayor, en el sentido de que no sólo nos limitaremos a inmersiones de grafos sin acumulación de vértices en el cilindro, sino en general a superficies abiertas de género finito con un número finito de finales de Freudenthal. Además en el caso de que estas superficies abiertas sean planas caracterizamos las inmersiones de grafos sin ningún tipo de acumulación.

Capítulo 3

Inmersiones de grafos infinitos sin acumulación de vértices

En este capítulo veremos que el problema de caracterizar los grafos que admiten una inmersión en $S(n)$ sin un punto de acumulación de vértices, problema de naturaleza infinita, es equivalente a caracterizar los grafos finitos que admiten una inmersión en la superficie compacta S de tal forma que un conjunto W de vértices del grafo se pueden cubrir con n caras, pudiéndose dar ésta en términos de menores prohibidos. Teniendo en cuenta esta equivalencia, hemos obtenido que la lista de menores que no admiten una inmersión en $S(n)$ sin acumulación de vértices es finita salvo isomorfismos.

En el caso de $n = 1$ conseguimos otra forma de obtener los grafos prohibidos, añadiendo a los grafos minimales que no admiten una inmersión en la superficie S , los grafos infinitos obtenidos al llevar un punto de dichos grafos, que puede ser un vértice o un punto interior de una arista, al infinito. Con esta técnica conseguimos obtener otra forma de caracterizar los grafos que admiten una inmersión en $S(n)$ sin un punto de acumulación de vértices en términos de subgrafos prohibidos.

3.1 Introducción

En 1930 Kuratowski [39] caracterizó los grafos finitos planos en términos de grafos prohibidos.

Dos de los resultados centrales sobre Teoría de Grafos Infinitos son *el Lema de König* [38] y *el Teorema de Selección de Rado* [48]. El primero de ellos es frecuentemente usado para pasar de grafos finitos a grafos infinitos numerables y como una elegante aplicación de él, Dirac y Schuster [17] generalizaron el Teorema de Kuratowski para grafos numerables. Sin embargo, éste es insuficiente para el paso de grafos finitos a grafos infinitos no numerables, es precisamente en estos casos cuando se necesita del Teorema de Selección de Rado, considerado como una de las más importantes herramientas en combinatoria infinita y con su aplicación Wagner [61] caracterizó todos los grafos planos.

Otras representaciones de grafos infinitos planos satisfaciendo ciertas propiedades adicionales han sido estudiadas. Halin en [29] caracterizó los grafos planos, infinitos numerables, localmente finitos sin un punto de acumulación en el conjunto de vértices, añadiendo cuatro nuevos grafos prohibidos a los de Kuratowski. Este resultado fue mas tarde extendido a todos los grafos por Schmidt [52] (excluyendo todos los subgrafos con vértices de valencia infinita) como aplicación, de nuevo, del Teorema de Selección de Rado.

Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero [5] caracterizaron los grafos infinitos numerables, planos y localmente finitos sin puntos de acumulación (ni de vértices ni de aristas) añadiendo dos nuevos grafos prohibidos a los considerados por Halin.

El resultado de Dirac y Shuster que extiende el Teorema de Kuratowski a grafos infinitos numerables es extendido a cualquier superficie por Hutchison y Wagon en [32], demostrando que un grafo infinito numerable admite una inmersión en una superficie de género finito si y sólo si todo subgrafo suyo admite una inmersión en dicha superficie, por lo que este problema está totalmente cerrado.

En cuanto a la caracterización de los grafos infinitos, numerables, local-

mente finitos sin puntos de acumulación de vértices en superficies abiertas con un número finito n de finales de Freudenthal, $S(n)$, que es el propósito de este capítulo, hacer hincapié que en el caso de que S sea la esfera y $n = 2$ estaremos tratando el tema de caracterizar lo que llamaremos los grafos VAP-cilíndricos, problema que nos fue propuesto por Thomassen en su visita a nuestro Departamento en 1994.

3.2 Equivalencia entre grafos VAP- $S(n)$ y n -W-S-representables

Introduciremos la notación necesaria para establecer la equivalencia entre estos dos problemas, siendo el primero de grafos infinitos y el segundo de grafos finitos. Consideraremos como grafos infinitos a aquellos grafos que tienen un conjunto numerable de vértices y que son *localmente finitos*, es decir, que el grado de cada uno de los vértices es finito.

Se consideran *grafos VAP-planos* a aquellos que tienen una inmersión en el plano sin un punto de acumulación de vértices. Halin en [29] da la siguiente caracterización de los grafos VAP-planos en términos de subgrafos prohibidos, como antes hemos enunciado en el Teorema 2.3.

Vamos a considerar la generalización del teorema de Halin a otras superficies abiertas. Sea S una superficie compacta y sea n un entero positivo, consideramos la superficie no compacta $S(n)$, reemplazando en S , n círculos por n semicilindros.

Diremos que un grafo es VAP- $S(n)$ si tiene una inmersión en $S(n)$ sin puntos de acumulación de vértices.

Consideraremos S la esfera y $P_2(R)$ el plano proyectivo, entonces $S(1)$

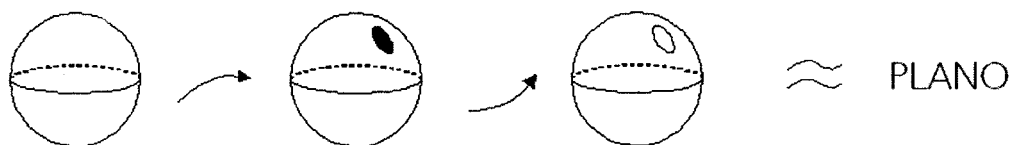


Figura 3.1:

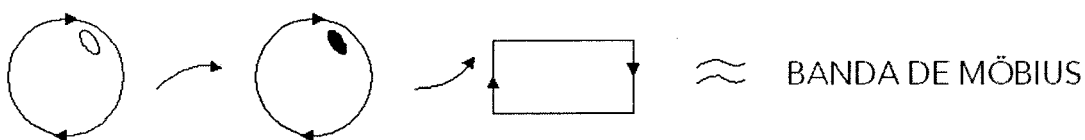


Figura 3.2:

es homeomorfo al plano. Por lo tanto, el Teorema de Halin nos da la caracterización de los grafos $VAP - S(1)$. También, $S(2)$ es homeomorfo a un cilindro y $(P_2(\mathbb{R}))(1)$ es homeomorfo a la Banda de Möbius (ver Figuras 3.1 y 3.2).

Claramente, si G es un menor de G' y G' es $VAP - S(n)$, entonces G es $VAP - S(n)$, así la caracterización de los grafos $VAP - S(n)$ se puede dar en términos de menores prohibidos.

Vamos a denotar por $B(n, S)$ el conjunto de menores prohibidos para las inmersiones $VAP - S(n)$, es decir, un grafo G está en $B(n, S)$ si no admite una inmersión $VAP - S(n)$ y si H es un menor de G y G no es un menor de H , entonces H tiene una inmersión $VAP - S(n)$.

Gracias al razonamiento anterior, podemos concluir con el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Sea S una superficie compacta y sea n un entero positivo. Un*

grafo G no admite una inmersión VAP-S(n) si y sólo si existe $G' \in B(n, S)$ tal que G' es un menor de G .

Diremos que un grafo infinito G es *fuertemente estable* si existe un subgrafo finito H tal que cada componente de $G - H$ es un rayo homeomorfo a una semirrecta y los rayos de G empiezan en diferentes vértices.

Si G es un grafo finito y W es el conjunto de vértices de G , denotaremos por G_W el grafo fuertemente estable construido desde G , añadiéndole un rayo en cada vértice de W . Por lo tanto, un grafo G' es fuertemente estable si y sólo si G y W existen de tal modo que G' es isomorfo a G_W .

Por otra parte, Oubiña y Zucchello en [47] definieron los grafos W -periplanos, donde W es un subconjunto de vértices del grafo y el grafo admite una inmersión en el plano de tal forma que todos los vértices de W están en la misma cara. Ellos dan una caracterización de éstos en el artículo citado anteriormente.

Para enunciar el Teorema de Oubiña y Zucchello, vamos a denotar algunas relaciones elementales sobre el conjunto L de pares (G, W) , donde G es un grafo y W es el subconjunto de vértices de G del siguiente modo:

1. $(G_2, W_2)R_1(G_1, W_1)$ si G_1 es un subgrafo de G_2 , W_1 es un subconjunto de W_2 y además $(G_2, W_2) \neq (G_1, W_1)$ (ver Figura 3.3).
1. $(G_2, W_2)R_2(G_1, W_1)$ si G_1 se puede obtener de G_2 al contraer una arista $\{u, v\}$ en un nuevo vértice w y si $u, v \notin W_2$ entonces W_1 es W_2 y si lo que ocurre es que u ó v están en W_2 , entonces W_1 coincide con $(W_2 \cap V(G_1)) \cup \{w\}$ (ver Figura 3.4).
1. $(G_2, W_2)R_3(G_1, W_1)$ si existe un vértice $w \in W_2$ tal que G_1 es $G_2 - v$ y W_1 es la unión de $W_2 \cup \{w\}$ y el conjunto de vértices adyacentes de w (ver Figura 3.5).

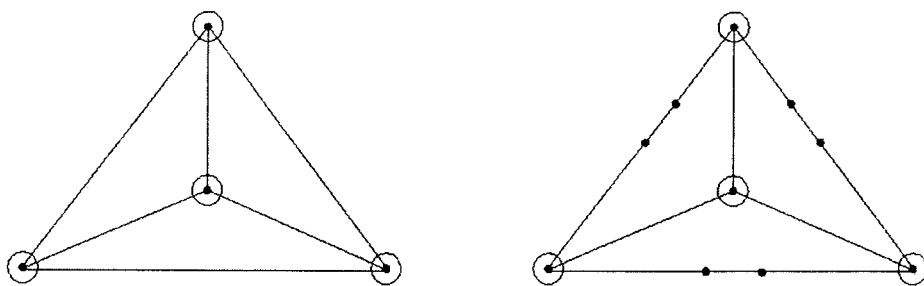


Figura 3.3:

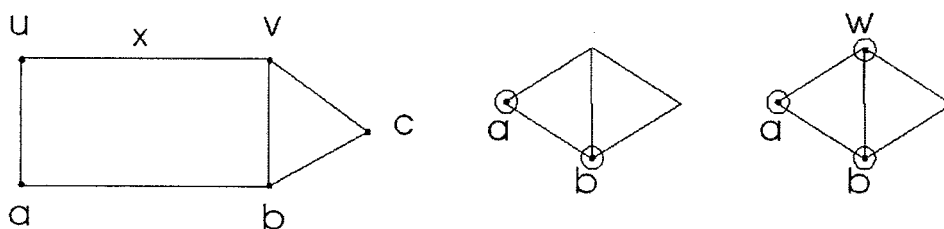


Figura 3.4:

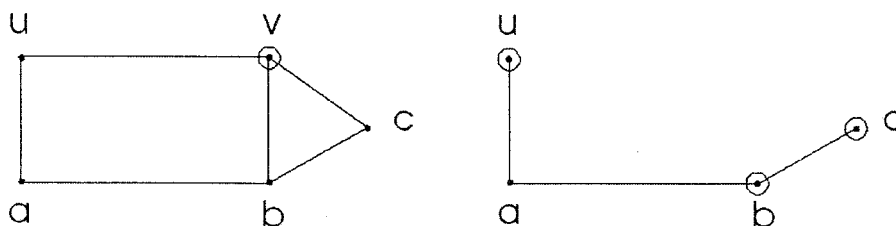


Figura 3.5:

Ahora pasamos a definir la relación $>_i$, $i = 1, 2$ del siguiente modo:

Sean (G, W) y (G', W') dos elementos arbitrarios de L .

Entonces:

$$\begin{aligned} & (G, W) >_i (G', W') \\ & \text{si existe una sucesión} \\ & (G_1, W_1), (G_2, W_2), \dots, (G_n, W_n) \\ & \text{de elementos de } L \text{ con} \\ & (G_1, W_1) = (G, W), (G_n, W_n) = (G', W') \\ & \text{tales que} \\ & (G_k, W_k) R_{h_k} (G_{k+1}, W_{k+1}) \text{ con } h_k \in \{1, \dots, i+1\} \\ & \text{para cada } k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Denotaremos por

$(G, W) \geq_i (G', W')$ si $(G, W) = (G', W')$ ó $(G, W) >_i (G', W')$.

Claramente tenemos, que si

$(G, W) >_1 (G', W')$ entonces se verifica que $(G, W) >_2 (G', W')$.

El Teorema de Oubiña y Zucchello puede ser formulado en los siguientes términos:

Teorema 3.2 *Un grafo G no es W -periplano si y sólo si $(G, W) \geq_2 (K_4, V(K_4))$ ó $(G, W) \geq_2 (K_{2,3}, \{a, b, c\})$, donde a, b y c son los vértices del $K_{2,3}$ con grado 2 (ver Figura 3.6).*

Del anterior teorema es fácil deducir como corolario:

Corolario 3.3 *Un grafo G no es W -periplano si y sólo si $(G, W) \geq_1 (K_4, V(K_4))$ ó $(G, W) \geq_2 (K_{2,3}, \{a, b, c\})$, donde a, b y c son los vértices del $K_{2,3}$ con valencia 2, $(G, W) \geq_1 (K_5 - K_2, \{a, b\})$, donde a y b son los vértices de $K_5 - K_2$ con grado 3, ó $(G, W) \geq_1 (K_{3,3} - K_2, \{a, b\})$, donde a y b son los vértices de $K_{3,3} - K_2$ con valencia 2 (ver Figura 3.7).*

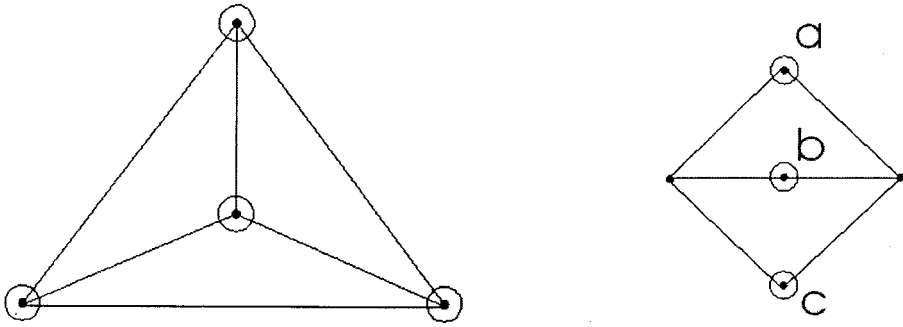


Figura 3.6:

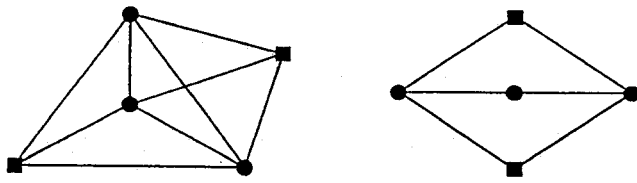


Figura 3.7:

Sea S una superficie compacta, W un conjunto de vértices y sea n un entero positivo, decimos que un grafo es $n - W - S$ -representable si tiene una inmersión en S tal que todos los vértices de W están en n caras.

El Teorema de Oubiña y Zucchello nos da la caracterización de los grafos $1 - W - S$ -representables cuando S es la esfera.

Es fácil ver que si

$$(G, W) R_k (G', W'), \text{ con } k = 1, 2, 3,$$

$$\text{y } G \text{ es } n - W - S\text{-representable,}$$

$$\text{entonces } G' \text{ es } n - W' - S\text{-representable.}$$

Por lo tanto, si

$$(G, W) >_i (G', W'), \text{ con } i = 1, 2$$

$$\text{y } G \text{ es } n - W - S\text{-representable,}$$

$$\text{entonces } G' \text{ es } n - W' - S\text{-representable.}$$

Por lo tanto, la caracterización de los grafos $n - W - S$ -representables puede darse en términos de los elementos minimales de L en el orden $>_i$. En el sentido que si

$$(G, W) \text{ es minimal si } G \text{ no es } n - W - S\text{-representable}$$

$$\text{y si } (G, W) >_i (G', W') \text{ entonces}$$

$$G' \text{ es } n - W' - S\text{-representable.}$$

Nosotros denotaremos por $L_i(n, S)$, con $i = 1, 2$, el conjunto de los elementos minimales en el orden $>_i$.

Así pues, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Sea S una superficie compacta, sea n un entero positivo y sea $i = 1$ ó 2 . Un grafo G no es n - W - S -representable si y sólo si existe $(G', W') \in L_i(n, S)$ tal que $(G, W) \geq_i (G', W')$.*

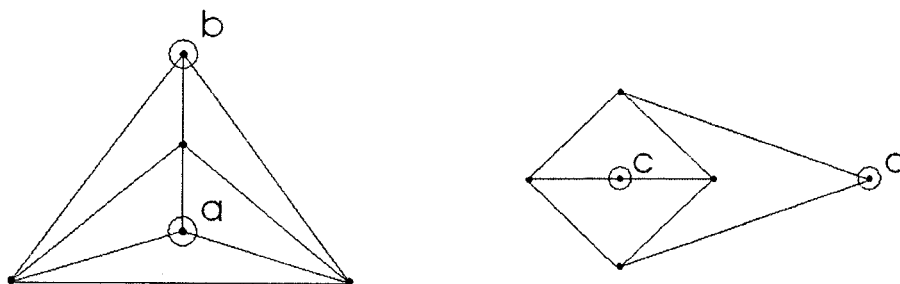


Figura 3.8:

Cuando S es la esfera tenemos que $L_2(1, S)$ es $\{(K_4, V(K_4)), (K_{2,3}, \{a, b, c\})\}$,
 donde a, b y c son los vértices del $K_{2,3}$ con valencia 2
 y $L_1(1, S)$ es $L_2(1, S) \cup \{(K_5 - K_2, \{a, b\}), (K_{3,3} - K_2, \{c, d\})\}$,
 donde a y b son los vértices de $K_5 - K_2$ con valencia 3,
 y c y d son los vértices de $K_{3,3} - K_2$ con valencia 2 (ver Figura 3.8).

Cáceres en [10] dió el conjunto de 119 elementos de $L_2(1, P_2(R))$.

Podemos ver que los cuatro grafos del Teorema de Halin son los grafos G_W , donde (G, W) son los elementos de $L_2(1, S)$ cuando S es la esfera.

Ahora vamos a generalizar esta relación, probando que, para cada $n \in N$ y para cada S , caracterizar los grafos $VAP - S(n)$ es equivalente a caracterizar los grafos $n - W - S$ -representables, relacionando los conjuntos $B(n, S)$ y $L_1(n, S)$.

El principal resultado de esta sección es, por tanto, el siguiente:

Teorema 3.5 *Para cada $n \in N$ y para cada superficie compacta S , $B(n, S)$ es el conjunto $\{G_W : (G, W) \in L_1(n, S)\}$.*

Para probar nuestro resultado principal, necesitamos los siguientes lemas previos:

Lema 3.6 *Sea G un grafo de $B(n, S)$. Entonces G es fuertemente estable.*

Demostración

Supongamos, por reducción al absurdo, que para cada subgrafo finito H de G existe una componente infinita de $G - H$ diferente a un rayo. Consideraremos la sucesión $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de grafos finitos tales que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, G_k es un menor de G_{k+1} y $\lim_{k \rightarrow +\infty} G_k = G$.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, sea W_k un conjunto de vértices de G_k tales que para cualquier componente infinita de $G - G_k$ incidente con G_k , existe un vértice de W_k . Entonces, el grafo $(G_k)_{W_k}$ es fuertemente estable y un menor de G . Como $G \in B(n, S)$, $(G_k)_{W_k}$ es VAP - $S(n)$.

Cada inmersión sin acumulación de vértices de $(G_k)_{W_k}$ en $S(n)$ induce una inmersión sin acumulación de vértices de $(G_1)_{W_1}$ en $S(n)$ (porque existe un número finito de diferentes inmersiones de G_1 en $S(n)$), hay una subsucesión de $\{(G_k)_{W_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que todos sus elementos inducen la misma inmersión VAP-S(n) de $(G_1)_{W_1}$. Si nosotros llamamos a esta subsucesión $\{(G_k)_{W_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y usamos el mismo argumento con G_2, \dots, G_k, \dots , entonces construimos una inmersión VAP-S(n) de G y llegamos a una contradicción.

Ahora, suponemos que existe un subgrafo finito H tal que cada componente de $G - H$ es un rayo y al menos dos de ellos comienzan en el mismo vértice. Consideraremos el grafo G' obtenido de G borrando un rayo tal que exista otro rayo empezando en el mismo vértice. G' es un subgrafo de G y G no es un subgrafo de G' , entonces, como $G \in B(n, S)$, G' tiene una inmersión VAP - $S(n)$. Pero una inmersión sin acumulación de vértices de G' en $S(n)$ induce una inmersión VAP - $S(n)$ de G , con lo cual llegamos a una contradicción. ■

Lema 3.7 *Sea (G, W) un elemento de L . G tiene una inmersión n-W-S-representable si y sólo si G_W tiene una inmersión VAP-S(n).*

Demostración

Consideremos una inmersión de G en S tales que los vértices de W estén en n caras. En estas n caras, reemplazaremos un círculo por un cilindro y unimos un rayo con cada vértice de W en el cilindro. Debido a esto, obtenemos una inmersión sin acumulación de vértices de G en $S(n)$.

Consideraremos una inmersión sin acumulación de vértices de G_W en $S(n)$. Los rayos están en los cilindros de $S(n)$. Si cortamos los rayos en los vértices de W y reemplazamos los cilindros por círculos, entonces obtenemos una inmersión de G en S tal que los vértices de W están en n caras. ■

Ahora, vamos a probar el teorema principal de esta sección:

Demostración del Teorema 3.5

Sea (G, W) un elemento de $L_1(n, S)$. Por el Lema 3.7 se tiene que G_W no es $VAP - S(n)$. Sea H un menor de G_W tal que G_W no sea un menor de H . Podemos suponer que H se obtiene de G_W al contraer o borrar una arista.

Si H se obtiene de G_W al contraer una arista $x = \{u, v\}$ de G , sea G/x el grafo obtenido de G al contraer la arista x y sea w el nuevo vértice donde x es contraída. Consideraremos los siguientes casos:

- Si ningún vértice de x está en W , entonces H es $(G/x)_W$ y, como $(G, W)R_2(G/x, W)$, G/x es $n - S$ -representable, y por el Lema 3.7 se tiene que H es $VAP - S(n)$.
- Si un vértice u de x está en W , entonces H es $(G/x)_{W - \{u\} \cup \{w\}}$ y, como $(G, W)R_2(G/x, W - \{u\} \cup \{w\})$, se tiene que H es $VAP - S(n)$.
- Si u y v están en W , tenemos que $(G, W)R_2(G/x, W - \{u, v\} \cup \{w\})$, $(G/x)_{W - \{u, v\} \cup \{w\}}$ es $VAP - S(n)$ y, como H es la unión de $(G/x)_{W - \{u, v\} \cup \{w\}}$ con un segundo rayo que empieza en w , la inmersión sin acumulación de vértices de $(G/x)_{W - \{u, v\} \cup \{w\}}$ en $S(n)$ induce una inmersión sin acumulación de vértices de H , por lo tanto se tiene que H es $VAP - S(n)$.

- Si H se obtiene de G_W al borrar una arista $x = \{u, v\}$ de G , H es $(G - x)_W$ y, como $(G, W)R_1(G - x, W)$, $G - x$ es $n - S$ -representable, y por el Lema 3.7 se tiene que H es $VAP - S(n)$.

- Si H se obtiene de G_W al borrar una arista x de un rayo empezando por un vértice $w \in W$, como $(G, W)R_1(G, W - \{w\})$, $G_{W - \{w\}}$ es $VAP - S(n)$ y, como H es la unión de un rayo y $(G/x)_{W - \{w\}}$ con una cadena finita empezando en w , la inmersión sin acumulación de vértices de $G_{W - \{w\}}$ en $S(n)$ induce una inmersión $VAP - S(n)$ de H , por lo tanto se tiene que H es $VAP - S(n)$.

Así pues, tenemos que G_W está en $B(n, S)$.

Ahora, consideraremos H un grafo de $B(n, S)$. Por el Lema 3.6 tenemos que H es fuertemente estable, debido a que existe G y W tal que H es G_W . Por el Lema 3.7 tenemos que G no es $n - W - S$ -representable. Sea (G', W') un elemento de L tal que $(G, W)R_i(G', W')$ con $i = 1$ ó 2 .

En cualquier caso $G'_{W'}$ es un menor de H y H no es menor de $G'_{W'}$, debido a esto tenemos que $G'_{W'}$ es $VAP - S(n)$ y por el lema anterior tenemos que G' es $n - W' - S$ -representable y que por lo tanto $(G, W) \in L_2(n, S)$. ■

3.3 Un Teorema de Halin para superficies abiertas

En esta sección demostraremos que la lista de menores prohibidos para las inmersiones sin acumulación de vértices en las superficies tubulares con n finales de Freudenthal es finita. Lo obtendremos como consecuencia del importante resultado de Robertson y Seymour [49] sobre la finitud de la lista de menores prohibidos en cualquier superficie compacta y la equivalencia que hemos probado en la sección anterior entre la caracterización de los $VAP - S(n)$ y los grafos $n - W - S$ -representables.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el Teorema de Kuratowski nos asegura que un grafo es plano si y sólo si no *contiene topológicamente* a K_5 ó $K_{3,3}$. Un grafo G *contiene topológicamente* a H si podemos obtener un grafo isomorfo a H desde algún subgrafo de G suprimiendo los vértices de valencia dos y añadiendo la arista entre los vértices adyacentes. A partir de 1930 se empezaron a buscar resultados paralelos al de Kuratowski en otras superficies.

Si S es una superficie, llamaremos $T(S)$ a la clase de todos los grafos que no se pueden dibujar en S y son mínimos con esta propiedad bajo la contención topológica. Si S es el plano o la esfera entonces los miembros de $T(S)$ son precisamente los grafos isomorfos a K_5 ó $K_{3,3}$ (esto sería otra forma de establecer el Teorema de Kuratowski). En general, un grafo admite una inmersión en S si y sólo si no contiene topológicamente miembros de $T(S)$. Luego parece interesante determinar explícitamente $T(S)$.

Esto es bastante dificultoso, y de hecho se han producido pocos progresos hasta 1979, cuando Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [3, 26] determinaron $T(S)$ cuando S es el plano proyectivo. Ellos encontraron que en este caso $T(S)$ tiene 103 elementos.

Uno puede darse cuenta que para superficies de género mayor, $T(S)$ tiene un número elevado de elementos no isomorfos, y no es evidente que sólomente tenga una cantidad finita de elementos. El problema de la finitud de $T(S)$ fue propuesto por Erdős en 1930, pero no se han obtenido avances hasta 50 años más tarde. En 1980 Archdeacon y Huneke [4] probaron que $T(S)$ es finito cuando S representa a superficies no orientables y en 1990 Robertson y Seymour prueban el resultado para cualquier superficie. En realidad ellos obtienen ese resultado como consecuencia de otro más general sobre *menores*. Un grafo H es *menor* de un grafo G si H puede ser obtenido desde un subgrafo de G al contraer aristas. La relación menor es diferente de la contención topológica. Es evidente que si H está contenido topológicamente en G entonces es isomorfo a un menor de H , pero lo contrario no es necesariamente cierto, como se puede comprobar fácilmente. Por lo tanto el

problema de Erdős puede ser reformulado en términos de menores. Esta idea de formular el problema de Erdős con menores data de 1960 y fue propuesta por Wagner en los siguientes términos:

Se elige un representante de cada clase de isomorfismo de la clase de grafos menores-minimales que no pueden ser dibujados en la superficie S y a la clase de grafos así obtenidos le llamamos A . Ahora A tiene la propiedad deseada que es una *anticadena*, es decir, que ningún miembro de A es isomorfo a un menor de otro. Esto se debe a que los elementos de A son menores-minimales con una cierta propiedad. Wagner conjeturó lo siguiente: *Cada anticadena de grafos es finita.*

Entre 1980-1990 Robertson y Seymour intentando resolver la conjetura de Wagner probaron que dada cualquier superficie, la clase de grafos menores-minimales que no pueden ser dibujados en la superficie es finita salvo isomorfismo.

Dada P una propiedad de grafos tal que si G tiene dicha propiedad y H es isomorfo a un menor de G entonces H tiene la propiedad P , en este caso decimos que la propiedad P es *hereditaria*. Por ejemplo, si S es una superficie, la propiedad G admite una *inmersión en S* es hereditaria. Sea $T(P)$ la clase de todos los grafos, minimales bajo la contención topológica, sin la propiedad P , y sea $M(P)$ la clase de todos los grafos, minimales bajo la contención de menores, sin la propiedad P . Robertson y Seymour demuestran:

Teorema 3.8 [49] *Para cada propiedad hereditaria P , $T(P)$ es finito salvo isomorfismo si y sólo si $M(P)$ es finito.*

Para obtener de este resultado la reformulación del problema de Erdős ellos toman como propiedad P *ser sumergible en la superficie S* .

Sea e una arista de un grafo G_1 con distintos finales, ambos con valencia al menos 3. Consideremos G_2 el grafo obtenido desde G_1 al contraer la arista e . En ese caso se dice que G_1 se obtiene de G_2 *descontrayendo un vértice*. Se

dice que G_1 se obtiene de G_2 *descontrayendo vértices* si existe una sucesión de grafos H_i , $1 \leq i \leq k$ tal que $G_2 = H_0, H_1, H_2, \dots, H_k = G_1$, donde H_i se obtiene de H_{i-1} descontrayendo un vértice.

A continuación vamos a probar que la lista de menores prohibidos que no se pueden dibujar en superficies tubulares de género finito es finita. Para ello tendremos en cuenta la equivalencia que hemos obtenido en la sección anterior entre dos problemas uno de naturaleza infinita: *encontrar la lista de menores prohibidos que no admiten una inmersión en una superficie con n finales de Freudenthal sin acumulación de vértices* y otro de naturaleza finita: *encontrar la lista de menores prohibidos n - W - S -representables*.

Sea S una superficie compacta y sea n un entero positivo. Recordemos que hemos definido la superficie no compacta $S(n)$, reemplazando en S , n círculos por n semicilindros y hemos dicho que un grafo es VAP - $S(n)$ si tiene una inmersión en $S(n)$ sin puntos de acumulación de vértices.

Claramente, si G es un menor de G' y G' es $VAP - S(n)$, entonces G es $VAP - S(n)$, por lo tanto, la caracterización de los grafos $VAP - S(n)$ se puede dar en términos de menores prohibidos. Hemos denotado por $B(n, S)$ el conjunto de menores prohibidos para las inmersiones $VAP - S(n)$, es decir, un grafo G está en $B(n, S)$ si no admite una inmersión $VAP - S(n)$ y si H es un menor de G y G no es un menor de H , entonces H tiene una inmersión $VAP - S(n)$.

Sea S una superficie compacta, sea W un conjunto de vértices y sea n un entero positivo, recordemos que un grafo es $n - W - S$ -representable si tiene una inmersión en S tal que todos los vértices de W están en n caras.

La caracterización de los grafos $n - W - S$ -representable hemos visto que puede darse en términos de los elementos minimales de L en el orden $>_i$, en el sentido que si (G, W) es minimal si G no es $n - W - S$ -representable y si $(G, W) >_i (G', W')$ entonces G' es $n - W' - S$ -representable. En la sección anterior hemos denotado por $L_i(n, S)$, con $i = 1, 2$, el conjunto de los elementos minimales en el orden $>_i$.

Hemos visto que, para cada $n \in N$ y para cada S , caracterizar los grafos $VAP-S(n)$ es equivalente a caracterizar los grafos $n-W-S$ -representables, relacionando los conjuntos $B(n, S)$ y $L_1(n, S)$.

Antes de pasar a demostrar la finitud de la lista de menores prohibidos para las inmersiones sin acumulación de vértices en $S(n)$, veamos algunos resultados previos:

Lema 3.9 *Los grafos de $L_1(n, S)$ no tienen hojas.*

Demostración

Realizaremos la prueba de este lema por reducción al absurdo, es decir, supongamos que los grafos de $L_1(n, S)$ tienen al menos una hoja. En ese caso ocurre una y sólo una de las siguientes suposiciones: que el vértice de valencia uno no esté distinguido o que sí lo esté.

1. Supongamos que el vértice de valencia uno no está distinguido.

Eliminando esa arista, el grafo que nos queda es más pequeño y por tanto existiran n caras que cubren los vértices de W .

Volviendo a dibujar en dicha inmersión la arista que antes hemos eliminado, tendríamos que el grafo de partida es $n-W-S$ -representable. Así llegamos a una contradicción (ver Figura 3.9).

1. Supongamos que el vértice de valencia uno está distinguido.

Contraemos la arista y distinguimos el vértice adyacente, como el grafo así obtenido es más pequeño, existirán n caras que cubren todos los vértices de W , en particular el nuevo vértice distinguido. Considerando esa inmersión volvemos a dibujar la hoja en la cara que contiene al nuevo vértice distinguido, con lo cual obtendríamos que el grafo sería $n-W-S$ -representable y de nuevo llegamos a contradicción (ver Figura 3.10). ■

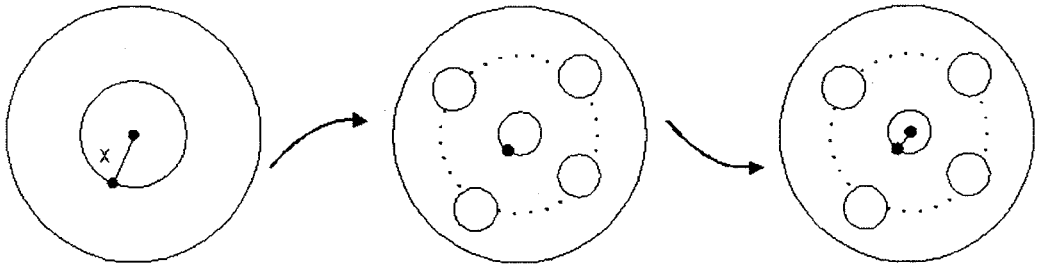


Figura 3.9:

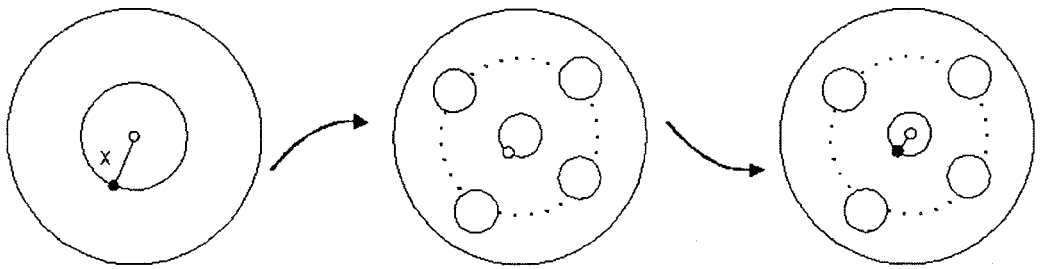


Figura 3.10:

Lema 3.10 *Los grafos de $L_1(n, S)$ no tienen vértices aislados.*

Demostración

Supongamos por reducción al absurdo que los grafos de $L_1(n, S)$ tienen vértices aislados. El vértice aislado no está distinguido o sí lo está.

1. Supongamos que el vértice no está distinguido.

Eliminándolo, el grafo que nos queda es más pequeño, luego existirán n caras que cubren los vértices de W .

Volviendo a dibujar en esa inmersión dicho vértice, tendríamos que el grafo de partida es $W - S$ -representable. Así llegamos a una contradicción.

2. Supongamos que el vértice es distinguido.

De nuevo, eliminándolo el grafo así obtenido es más pequeño, existirán n caras que cubran todos los vértices de W . Considerando esa inmersión volvemos a dibujar el vértice aislado distinguido en una de las n caras, con lo cual obtendríamos que el grafo sería $n - W - S$ -representable y de nuevo llegamos a contradicción. ■

Por tanto podemos considerar que los grafos de $L_1(n, S)$ no tienen ni hojas ni vértices aislados.

Sea $(G, W) \in L_1(n, S)$. G es mínimo tal que los vértices de W no se pueden cubrir con n caras. Por el Lema 3.9 G no tiene hojas. A partir de G vamos a construir un grafo H de la siguiente forma: H es un grafo que se obtiene de G añadiendo en cada vértice distinguido de G una hoja y sin distinguir vértices. Como no hay hojas en el grafo original G , todos los vértices distinguidos dan lugar a una hoja y al contrario también, es decir, de H con n hojas se puede pasar a G contrayendo la hoja y distinguiendo n vértices (ver Figura 3.11).

Al conjunto de grafos finitos que se obtienen con el proceso anterior denotémoslo por $M(n, S)$.

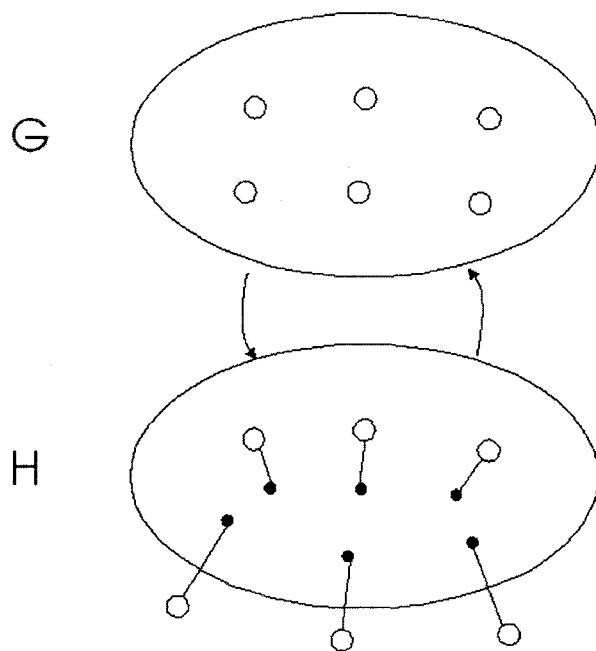


Figura 3.11:

Como consecuencia del Lema 3.10 se tiene claramente que los grafos de $M(n, S)$ no tiene vértices aislados. Además, también se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.11 $|L_1(n, S)| = |B(n, S)| = |M(n, S)|$

Veamos que ningún grafo de $M(n, S)$ es un menor de otro.

Teorema 3.12 *Sea S una superficie compacta, sea n un entero positivo. Un grafo $H \in M(n, S)$ si y sólo si no existe $H' \in M(n, S)$ tal que $H >_1 H'$.*

Demostración

Supongamos que H_1 y $H_2 \in M(n, S)$ y que H_1 es menor de H_2 .

Podemos distinguir dos casos:

- Que exista $x \in A(H_2)$ tal que H_1 es un menor (o isomorfo) de $H_2 - x$
- Que exista $x \in A(H_2)$ tal que H_1 es un menor (o isomorfo) de H_2/x

En cada uno de los casos puede ocurrir que x sea una hoja o que no lo sea, pero teniendo el cuenta que los grafos G tales que (G, W) están en $L_1(n, S)$ no tiene vértices aislados, uno de los casos se puede reducir de la siguiente forma:

Si H_1 es un menor (o isomorfo) de $H_2 - x$, entonces $H_2 - x = H_2/x \cup \{v\}$, pero como no tiene vértices aislados, tenemos que H_1 es un menor de H_2/x , así pues nos quedamos con los tres casos siguientes:

1. H_1 es un menor (o isomorfo) de $H_2 - x$ y x no es una hoja.
2. H_1 es un menor (o isomorfo) de H_2/x y x no es una hoja.
3. H_1 es un menor (o isomorfo) de H_2/x y x es una hoja.

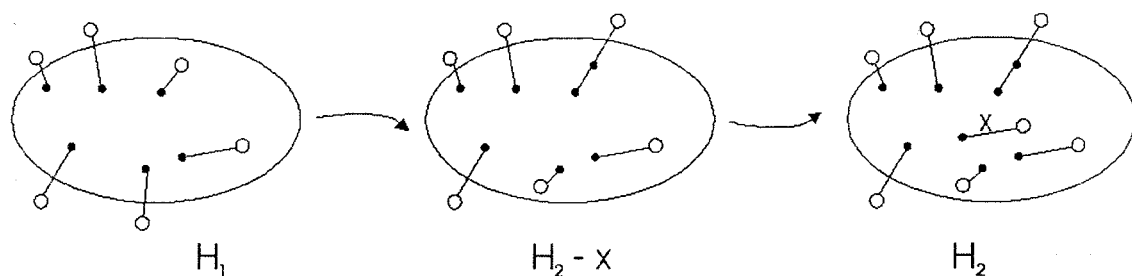


Figura 3.12:

Caso 1

Consideramos que H_1 es un menor de $H_2 - x$ y x no es una hoja. Contrayendo todas las hojas y distinguiendo los vértices obtenidos de las contracciones obtenemos los grafos G_1 , $G_2 - x$ y G_2 de los cuales tenemos que (G_1, W_1) y $(G_2, W_2) \in L_1(n, S)$ (ver Figuras 3.12 y 3.13).

$G_2 - x <_1 G_2$ trivialmente ya que no contiene a la arista x .

Veamos que se verifica que $G_1 \leq_1 G_2 - x$.

Podemos dar una inmersión de $G_2 - x$ en S con todos los vértices distinguidos en n caras, así pues podemos dar una inmersión de $H_2 - x$ de tal forma que todas las hojas esten en n caras. Esta inmersión induce una inmersión de H_1 con todas las hojas en n caras ya que H_1 es un menor de $H_2 - x$.

La inmersión de H_1 induce una de G_1 , por lo tanto tenemos una inmersión de G_1 con todos los vértices en n caras, lo cual es una contradicción ya que $G_1 \in L_1(n, S)$ (ver Figura 3.14).

Caso 2

Consideramos que H_1 es un menor de H_2/x y x no es una hoja. El razonamiento es similar al caso 1, incluso con menos dificultad ya que al contraer no se producen nuevas hojas.

Caso 3

Consideremos que H_1 es un menor de H_2/x y x es una hoja (ver Figura

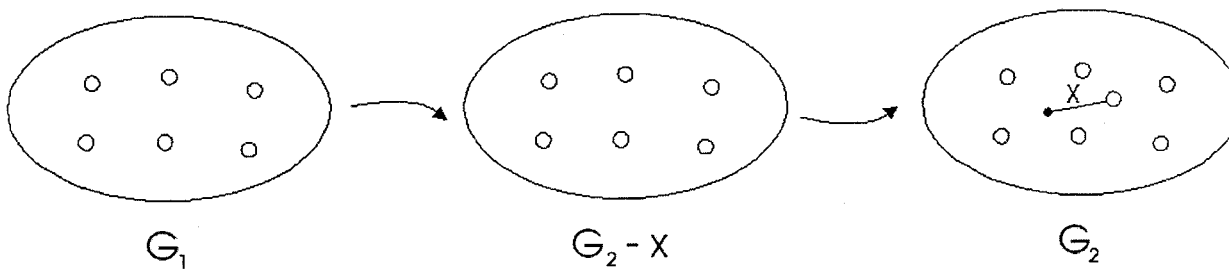


Figura 3.13:

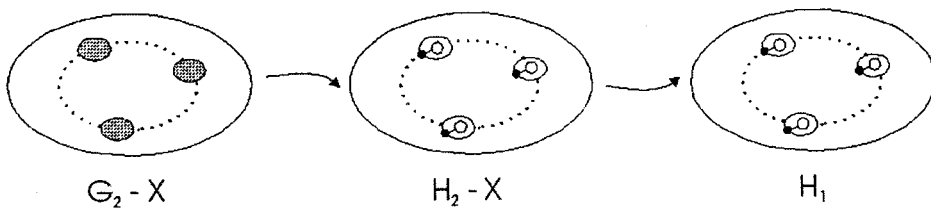


Figura 3.14:

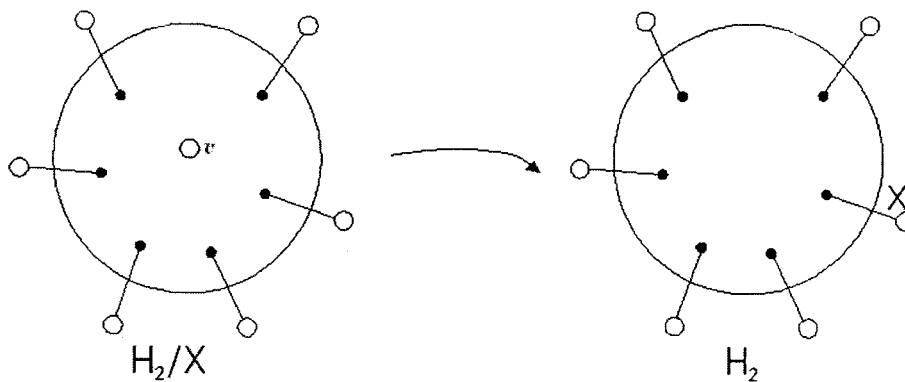


Figura 3.15:

3.15). Contrayendo todas las hojas y distinguiendo los vértices obtenidos de las contracciones obtenemos los grafos (G_1, W_1) , $(G_2, W_2 - \{v\})$ y (G_2, W_2) de los cuales tenemos que (G_1, W_1) y $(G_2, W_2) \in L_1(n, S)$ (ver Figura 3.16).

$(G_2, W_2 - \{v\}) <_1 (G_2, W_2)$ trivialmente.

Veamos que se verifica que $(G_1, W_1) \leq_1 (G_2, W_2 - \{v\})$.

Podemos dar una inmersión de $(G_2, W_2 - \{v\})$ en S con todos los vértices de W_2 en n caras menos el vértice v . Así pues, podemos dar una inmersión de H_2/x de tal forma que todas las hojas estén en n caras, excepto la hoja que produce el vértice de valencia 1 adyacente a x . Esta inmersión induce una inmersión de H_1 con todas las hojas en n caras ya que H_1 es un menor de H_2/x (ver Figura 3.17).

La inmersión de H_1 induce una de G_1 , por lo tanto tenemos una inmersión de G_1 con todos los vértices en n caras, lo cual es una contradicción ya que $G_1 \in L_1(n, S)$.

■

Corolario 3.13 $M(n, S)$ es finito.

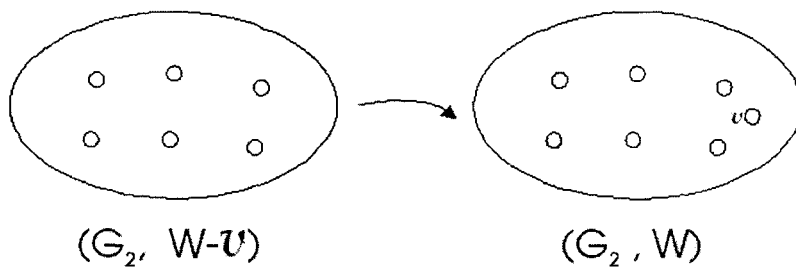


Figura 3.16:

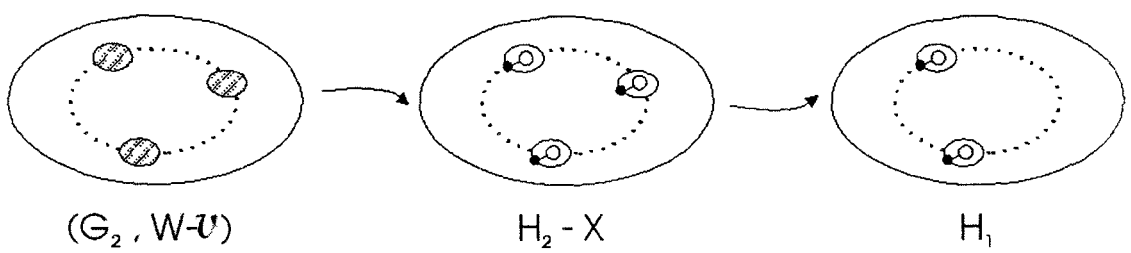


Figura 3.17:

3.4 Caracterización de los grafos VAP-S(1)

Vamos a obtener para $n = 1$ y S una superficie compacta la caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(1)$ de la siguiente forma: a los grafos de Kuratowski de S le añadimos los grafos infinitos obtenidos al llevar un punto del grafo, que puede ser un vértice o un punto interior de una arista, al infinito. Así, en el plano se obtienen a partir de K_5 los grafos K_5^∞ y L_5^∞ , mientras que de $K_{3,3}$ se obtienen $K_{3,3}^\infty$ y $L_{3,3}^\infty$ (ver Teorema 2.3, [29]).

Debido a que sólo se conoce el Teorema de Kuratowski para el plano y el plano proyectivo, sólo podemos dar una caracterización explícita de los grafos VAP-planos y en la superficie obtenida en el plano proyectivo al reemplazar un círculo por un semicilindro, o sea, en la Banda de Möbius.

Denotemos por $K(S)$ al conjunto de grafos que no admiten una inmersión en una superficie compacta S y por $K(S(n))$ al conjunto de grafos prohibidos en la superficie abierta con n finales.

Llamaremos $K_{VAP}(S(n))$ al conjunto de grafos que no admiten una inmersión sin acumulación de vértices en una superficie con n finales y $H(S)$ a los que se obtienen tomando los de $K(S)$ y llevando un vértice o un punto de una arista al infinito. Teniendo en cuenta lo anterior obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.14 $K_{VAP}(S(1)) = K(S) \cup H(S)$

Demostración

- Está claro que los grafos de $K(S) \cup H(S)$ están prohibidos, por lo tanto, se tiene que $K_{VAP}(S(1)) \supseteq K(S) \cup H(S)$.
- Veamos que $K_{VAP}(S(1)) \subseteq K(S) \cup H(S)$.

Según hemos visto en el Lema 3.6 si un grafo $G \in K_{VAP}(S(1))$ entonces G tiene todos los finales fuertemente estables.

Definamos una compactificación llevando los finales fuertemente estables a un punto, llamémosle *punto del infinito* y denotémoslo por ∞ . Entonces

si $G^+ = G \cup \{\infty\}$ es la compactificación de G , sabemos que G es VAP-S(1) si y sólo si G^+ admite una inmersión en la superficie compacta S . Por tanto, podemos decir que $G \in K_{VAP}(S(1))$ si y sólo G^+ también es mínimo en $K(S)$. ■

Para superficies con un final para las que se conoce el Teorema de Kuratowski (la esfera con un cilindro y el plano proyectivo con un cilindro) podemos dar por tanto la caracterización explícitamente.

3.4.1 Caracterización de los grafos con una inmersión sin acumulación de vértices en la Banda de Möbius

Cáceres [10] encontró en 1996 los 109 elementos de $L_2(1, P_2(R))$. Teniendo en cuenta que la Banda de Möbius es homeomorfa a $P_2(R)$ menos un punto, o dicho de otra forma, la compactificación de la Banda de Möbius es el Plano Proyectivo, podemos obtener $L_1(1, P_2(R))$ a partir de $L_2(1, P_2(R))$.

De los 35 menores proyectivos prohibidos Cáceres encuentra los 109 elementos de $L_2(1, P_2(R))$ quitando un vértice y distinguiendo los adyacentes, si además quitamos un punto de una arista y distinguimos los vertices adyacentes a ésta obtenemos $L_1(1, P_2(R))$. Si a los grafos así obtenidos le añadimos un rayo en los vértices distinguidos obtenemos los menores grafos prohibidos que se pueden sumergir en la Banda de Möbius sin acumulación de vértices.

Quizás la generalización más inmediata de grafo periplano se obtiene al considerar sólo algunos vértices para que sean dispuestos en la cara exterior, es decir, los grafos W-periplanos. Este tipo de grafos, cuya caracterización y estudio aparece en [47], juegan un papel especialmente importante en el diseño de circuitos integrados [42] ó incluso en el algoritmo de planaridad de Lempel, Even y Cederbaum [40]. En esta sección recordaremos como Cáceres trata el significado de la W-periplanaridad en otras superficies, caracterizándose totalmente a partir de los grafos prohibidos de la superficie correspondiente. Además él generaliza el Teorema de Oubiña y Zucchello[47]

para cualquier superficie, dando una condición necesaria y suficiente para que, dado un grafo G y un subconjunto W de sus vértices, G admita una inmersión en una superficie S de forma que todos los vértices de W estén en la misma cara.

Sean por tanto G un grafo, $W \subseteq V(G)$ y S una superficie. Decimos que G es S -representable si existe una inmersión de G en S de forma que todos los vértices de W estén en la misma cara. También notaremos como G^W al cono de G , es decir, el grafo formado al añadir a G un nuevo vértice v y las aristas que unen v con cada vértice de W . Inmediatamente se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.15 *En las condiciones anteriores, G es W - S -representable si y sólo si G^W es S -representable.*

Notaremos como $M(S)$ al conjunto de los menores prohibidos no S -representables. Por ejemplo, $M(\pi) = \{K_5, K_{3,3}\}$ si π es el plano.

Sea u un vértice de G . Llamaremos $Ady_G(u)$ al conjunto de vértices de G que son adyacentes a u . Por otro lado, dado un grafo H y dos vértices u y v , decimos que u es equivalente a v , y lo notamos por $u \mathcal{R} v$, si $H - u$ es isomorfo a $H - v$. Notaremos como $F(G)$ a un conjunto cualquiera de representantes de cada clase de equivalencia.

Sobre G y W vamos a definir las siguientes operaciones:

1. Borrar una arista de G y dejar igual W .
2. Dejar igual G y quitar un vértice de W .
3. Contraer una arista x de G . Si al menos uno de los extremos de x está en W , se quitan estos de W y se añade el nuevo vértice creado al contraer x ; en otro caso W queda igual.
4. Dado $w \in W$, reemplazar G por $G - w$ y W por $W - \{w\} \cup Ady_G(w)$.

Si a partir de G y W se puede llegar hasta G' y W' aplicando estas operaciones, diremos que $(G', W') <_2 (G, W)$. Esta relación es de orden parcial.

El primer resultado que se obtiene es el siguiente:

Lema 3.16 *Si $(G', W') <_2 (G, W)$ y G es W - S -representable entonces G' es W' - S -representable.*

Consideremos las parejas (G, W) tales que G no es W - S -representable y no existe $(G', W') <_2 (G, W)$ tal que G' no es W' - S -representable. Hemos llamado $L_2(1, S)$ al conjunto de las parejas que son mínimas en este sentido, y por tanto se tiene:

Lema 3.17 *G es W - S -representable si y sólo si no existe $(G', W') \in L_2(1, S)$ tal que $(G', W') <_2 (G, W)$.*

Se caracteriza $L_2(1, S)$ en función de $M(S)$:

Teorema 3.18 $L_2(1, S) = \{(G - v, \text{Ady}_G(v)) : G \in M(S), v \in F(G)\}$

Como para obtener $L_2(1, S)$ es necesario conocer $M(S)$, el cual sólo han sido encontrado para el plano π y el plano proyectivo $P_2(R)$, sólo pueden darse explícitamente los conjuntos $L_2(1, \pi)$ y $L_2(1, P_2(R))$.

Como $M(\pi)$ está formado por $K_5, K_{3,3}$, $L_2(1, \pi)$ está formado por dos elementos: un K_4 con sus cuatro vértices distinguidos y un $K_{2,3}$ con los tres vértices de valencia 2 distinguidos. Estos son precisamente los grafos de Oubiña y Zucchello y sus vértices distinguidos.

Los grafos de $M(P_2(R))$, que fueron obtenidos en [26] son los que podemos ver en la Sección 3.2 de la Tesis de Cáceres donde dos vértices están etiquetados con el mismo número si están en la misma clase de equivalencia.

Por tanto tenemos que $L_2(1, P_2(R))$ es el conjunto de pares formados por grafos que se pueden consultar en la misma sección de la citada Tesis, y los vértices con forma cuadrada.

Sea $x = \{u, v\}$ una arista de G . Consideremos G/x , si ni u ni v pertenecen a W , al contraer la arista x en un nuevo vértice w el conjunto de vértices distinguidos W no varia, en cambio si u ó v son vértices distinguidos entonces al contraer la arista x el conjunto de vértices distinguidos pasa a ser $(W \cap V(G/x)) \cup \{w\}$. Por otra parte, dado un grafo H y dos aristas x e y , decimos que x es equivalente a y , y lo notamos por $x \mathfrak{R} y$, si H/x es isomorfo a H/y . Notaremos como $J(G)$ a un conjunto cualquiera de representantes de cada clase de equivalencia.

Sobre G y W vamos a considerar solamente las tres primeras operaciones definidas anteriormente:

1. Borrar una arista de G y dejar igual W .
2. Dejar igual G y quitar un vértice de W .
3. Contraer una arista x de G y si al menos uno de los extremos de x está en W , se quitan estos de W y se añade el nuevo vértice creado al contraer x ; en otro caso W queda igual.

Si a partir de G y W se puede llegar hasta G' y W' aplicando estas operaciones, diremos que $(G', W') <_1 (G, W)$. Esta relación es de orden parcial también.

Obtenemos, por tanto, un resultado similar al del $<_2$ ahora para $<_1$.

Lema 3.19 *Si $(G', W') <_1 (G, W)$ y G es W - S -representable entonces G' es W' - S -representable.*

Consideremos las parejas (G, W) tales que G no es $W - S$ -representable y no existe $(G', W') <_1 (G, W)$ tal que G' no es $W' - S$ -representable. Llamaremos $L_1(1, S)$ al conjunto de las parejas que son mínimas en este sentido,

y por tanto se tiene:

Lema 3.20 G es W - S -representable si y sólo si no existe $(G', W') \in L_1(1, S)$ tal que $(G', W') <_1 (G, W)$.

Vamos a caracterizar $L_1(1, S)$ en función de $M(S)$ y de $L_2(1, S)$.

Teorema 3.21 $L_1(1, S) = L_2(1, S) \sqcup \{(G/x, (W \cap V(G/x)) \cup \{w\}) : G \in M(S), x \in J(G)\}$

Demostración

Sea $C(S) = \{(G/x, (W \cap V(G/x)) \cup \{w\}) : G \in M(S), x \in J(G)\}$

Si $G \in M(S)$ y $x \in J(G)$, como $(G/x)^{(W \cap V(G/x)) \cup \{w\}}$ es isomorfo a G , que no es S -representable, se tiene que

(G/x) no es $((W \cap V(G/x)) \cup \{w\}) - S$ -representable.

Si tenemos dos elementos

$(G_1/x, (W_1 \cap V_1(G_1/x)) \cup \{w_1\})$ y $(G_2/y, (W_2 \cap V_2(G_2/y)) \cup \{w_2\})$ de $C(S)$ iguales, entonces existirá un isomorfismo

$\phi : G_1/x \rightarrow G_2/y$ tal que $\phi(W_1 \cap V_1(G_1/x)) = W_2 \cap V_2(G_2/y) \cup \{w_2\}$.

Consideremos

$\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\Phi(u) = \phi(u)$ para todo $u \in V(G_1/x)$ y $\Phi(x) = y$.

Claramente Φ es un isomorfismo, por lo tanto G_1 es G_2 y como G_1/x es G_2/y , $x \mathfrak{R} y$. Al tener $J(G_1)$ sólo un representante de cada clase de equivalencia, se tiene que x es y , por lo que ninguno de los elementos de $C(S)$ está repetido.

Veamos ahora que

$$L_2(1, S) \cap C(S) = \emptyset \text{ donde}$$

$$L_2(1, S) = \{(G - v, \text{Adj}_G(v)) : G \in M(S), v \in F(G)\} \text{ y}$$

$$C(S) = \{(G/x, (W \cap V(G/x)) \cup \{w\}) : G \in M(S), x \in J(G)\}$$

Para ello tomamos dos elementos

$$(G_1 - v, \text{Ady}_{G_1}(v)) \text{ tal que } G_1 \in M(S) \text{ y } v \in F(G_1)$$

$$(G_2/x, (W \cap V(G_2/x)) \cup \{w\}) \text{ tal que } G_2 \in M(S) \text{ y } x \in J(G)$$

y supongamos que son iguales, existira un isomorfismo

$$\varphi : G_1 - v \rightarrow G_2/x \text{ tal que } \varphi(\text{Ady}_{G_1}(v)) = W \cap V(G_2/x) \cup \{w\}.$$

Consideremos ahora

$$\Psi : G_1 \rightarrow G_2 \text{ tal que } \Psi(u) = \varphi(u) \text{ para todo } u \in V(G_1 - v) \text{ y } \Psi(v) = x.$$

En este caso tenemos que Ψ es un isomorfismo, por lo que G_1 es G_2 y como $G_1 - v$ es G_2/x , se tiene que $v\mathfrak{R}w$ o bien que $x\mathfrak{R}y$ donde $y = v\text{Ady}_{G_1}(v)$. En cualquiera de los casos, como tanto $F(G_1)$ como $J(G_1)$ sólo contienen a un representante de cada clase de equivalencia, se tiene que v es w o x es y , con lo que queda probado que $L_2(1, S)$ no tiene elementos comunes con $C(S)$.

Sea (G, W) un elemento de $L_1(1, S)$. Sea H un menor de G^W tal que G^W no sea un menor de H . Podemos suponer que H se obtiene de G^W al contraer o borrar una arista.

Si H se obtiene de G^W al contraer una arista $x = \{u, v\}$ de G , sea G/x el grafo obtenido de G al contraer la arista x y sea w el nuevo vértice donde x es contraída. Consideraremos los siguientes casos:

- Si ningún vértice de x está en W , entones H es $(G/x)^W$ y, como $(G, W) <_1 (G/x, W)$, G/x es $W - S$ -representable y por tanto se tiene que H es S -representable.
- Si un vértice de x , por ejemplo u , está en W , entonces H es $(G/x)^{W - \{u\} \cup \{w\}}$ y, como $(G, W) <_1 (G/x, W - \{u\} \cup \{w\})$, se tiene que H es S -representable.

3.5. Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$ 71

- Si u y v están en W , como $(G, W) <_1 (G/x, W - \{u, v\} \cup \{w\})$, $(G/x)^{W - \{u, v\} \cup \{w\}}$ es H , por tanto también se verifica que H es S -representable.

Sea (G', W') un elemento de L tal que $(G, W) <_i (G', W')$ con $i = 1$ ó 2 .

En cualquier caso $(G')^{W'}$ es un menor de H y H no es menor de $(G')^{W'}$, debido a esto tenemos que

$(G')^{W'}$ es S -representable y por tanto tenemos que G' es W' - S -representable y que por lo tanto $(G, W) \in L_2(1, S)$. ■

3.5 Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$

Vamos a dar una caracterización de los grafos $VAP - S(n)$ en relación con los n finales de Freudenthal que tiene dicha superficie y asignándole colores diferentes a los finales de los grafos que van a los distintos finales de la superficie, obteniendo en el caso de $n = 2$ y S la esfera la lista explícita de los menores prohibidos que no tienen una inmersión sin acumulación de vértices en el cilindro, resolviendo por tanto el problema planteado por Thomassen en su visita a nuestro Departamento.

Una *coloración de finales* de un grafo es una asignación de colores a los finales.

El conjunto de todos los finales con un mismo color es independiente y le llamaremos *clase* de dicho color.

Una *n-coloración de finales* de un grafo G usa n colores.

Esto particiona el conjunto de finales de un grafo G en n - *clases* de colores.

En la Figura 3.18 podemos observar tres grafos, el primero de ellos representa a uno con una 4-coloración de finales (teniendo en cuenta que en los vértices marcados de forma diferente se les añaden 1-caminos de colores

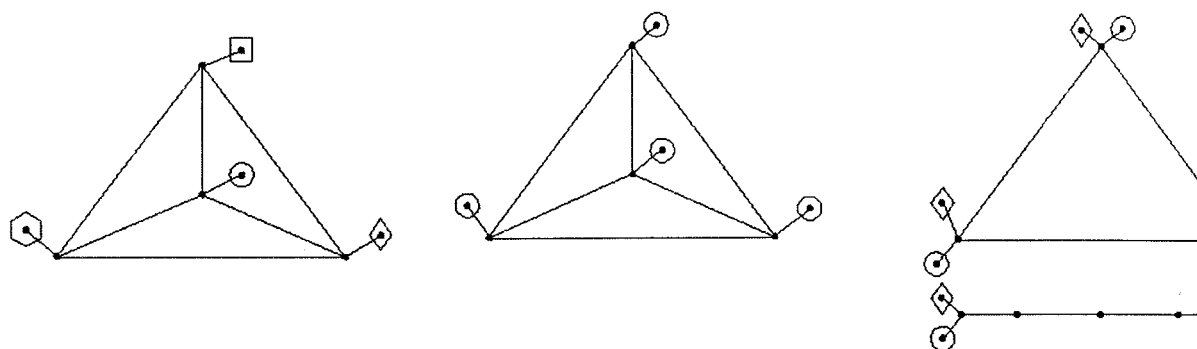


Figura 3.18:

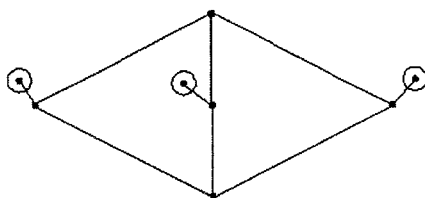


Figura 3.19:

distintos), el segundo con una 1-coloración de finales y el último con una 2-coloración de finales.

Sea G un grafo con una n -coloración de finales, G tiene una VAP-coloración en $S(n)$ cuando tiene una inmersión VAP- $S(n)$ de tal forma que una clase de color va a un final de la superficie $S(n)$.

Ejemplo 3.1 Un grafo que no tiene una VAP-coloración en el plano y sí tiene una VAP-coloración en el cilindro (ver Figuras 3.19 y 3.20 respectivamente).

En la Figura 3.19 podemos ver como hay una cara en la que queda encerrado un 1-camino provocando un punto de acumulación de vértices. En la

3.5. Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$ 73

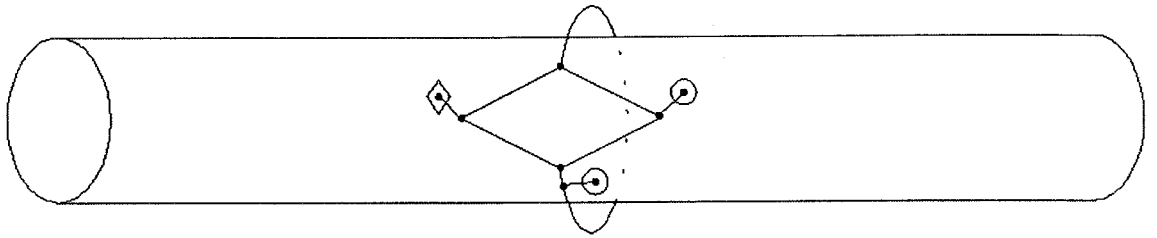


Figura 3.20:

Figura 3.20 el problema anterior queda solventado.

Denotaremos por $\Gamma(n\text{-coloración}, G)$ a una inmersión de G con una n -coloración de finales. Si no da lugar a confusión, para simplificar, la denotaremos por $\Gamma(n, G)$. Sean $\Gamma_1(n, G_1)$ y $\Gamma_2(n, G_2)$ dos inmersiones de G_1 y G_2 respectivamente con una n -coloración de finales cada una de ellas.

$\Gamma_1(n, G_1)$ es menor que $\Gamma_2(n, G_2)$ si existe una inmersión de G_1 en G_2 tal que los finales de una clase de color en G_1 van a los finales de otra clase de color en G_2 .

Ejemplo 3.2 $\Gamma_1(n, G_1)$ es menor que $\Gamma_2(n, G_2)$ (ver Figuras 3.21 y 3.22).

En la Figura 3.12 en cada vértice marcado de igual forma añadimos 1-caminos del mismo color y en los vértices marcados de forma diferente añadimos 1-caminos con distinto color. En la Figura 3.22 con el mismo proceso añadimos escaleras.

Sea \mathcal{G} una familia de grafos finitos o infinitos con una coloración de finales.

Sea $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ una familia de grafos infinitos con una coloración de finales. Los elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ se obtienen eliminando un vértice o un punto interior de una arista de cada uno de los grafos de la familia \mathcal{G} , llevándolo al infinito y asignando un nuevo color a los nuevos finales así obtenidos.

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{G})$$

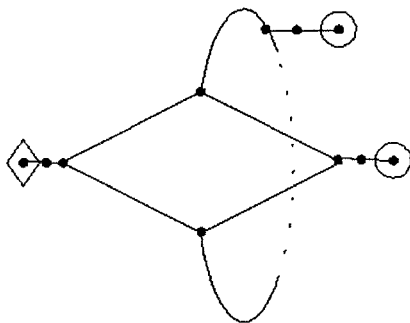


Figura 3.21:

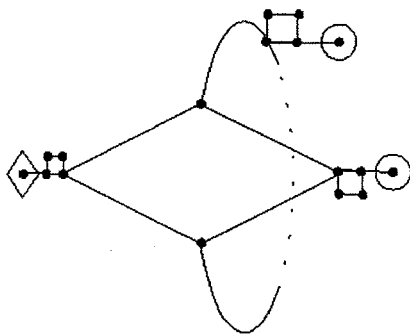


Figura 3.22:

3.5. Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$ 75

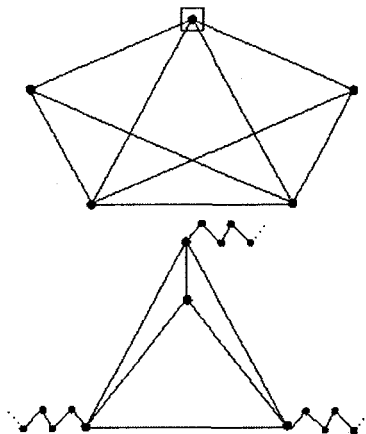


Figura 3.23:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{B}_1(\mathcal{G}))$$

$$\mathcal{B}_3(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{B}_2(\mathcal{G}))$$

.....

$$\mathcal{B}_n(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathcal{B}_{n-1}(\mathcal{G}))$$

Podemos definir $K(S) = \{\text{grafos prohibidos en la superficie } S\}$, así denotaremos por $A(n, S) = \mathcal{B}_n(K(S))$.

Si $S(1)$ es el plano, $K(S(1)) = \{K_5, K_{3,3}\}$ los grafos prohibidos por Kuratowski para la planaridad y por lo tanto $A(1, S(1)) = \{K_5^\infty, K_{3,3}^\infty, L_5^\infty, L_{3,3}^\infty\}$, o sea los grafos prohibidos por Halin para la VAP-planaridad (ver Figuras 3.23, 3.24, 3.25 y 3.26).

Teorema 3.22 *Un grafo G es VAP- $S(n)$ si y sólo si G tiene una n -coloración de finales tal que no existen elementos en $A(n, S)$ menores que dicha n -coloración de finales de G .*

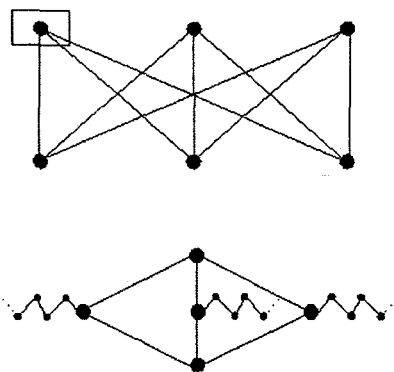


Figura 3.24:

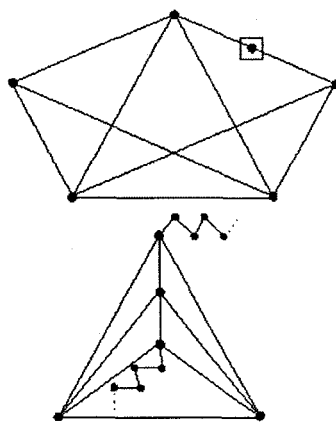


Figura 3.25:

3.5. Otra caracterización de los grafos sin acumulación de vértices en $S(n)$ 77

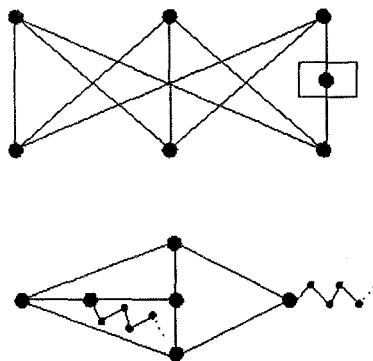


Figura 3.26:

Demostración

Sea G un grafo con una n -coloración de finales tal que no existen elementos en $A(n, S)$ menores que dicha n -coloración de finales de G .

$$G \in A(n, S) = B_n(K(S)) = B(B_{n-1}(K(S)))$$

Hagamos la demostración por inducción en n .

- Para $n = 1$ tenemos:

Un grafo G es VAP- $S(1)$ si y sólo si G tiene una 1-coloración de finales tales que no existen elementos en $A(1, S)$ menores que dicha 1-coloración de finales.

$A(1, S) = B_1(K(S)) = K(S) \cup H(S)$, por lo tanto es cierto el resultado.

- Supongamos cierto el resultado para $n - 1$ y veámoslo para n :

Teniendo en cuenta que

$$A(n, S) = B_n(K(S)) = B(B_{n-1}(K(S))) = B(A(n - 1, S))$$

y que por construcción los elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ se obtienen eliminando un vértice o un punto interior de una arista de cada uno de los grafos de la familia \mathcal{G} , llevándolo al infinito y asignando un nuevo color a los nuevos finales así obtenidos, y por hipótesis de inducción sabemos que:

Un grafo G es VAP- $S(n-1)$ si y sólo si G tiene una $(n-1)$ -coloración de finales tales que no existen elementos en $A(n-1, S)$ menores que dicha $(n-1)$ -coloración de finales.

Por lo tanto tenemos que $A(n, S) = B_n(K(S)) = B(B_{n-1}(K(S))) = B(A(n-1, S)) = B_1(A(n-1, S)) = A(n-1, S) \cup H(S(n-1))$. ■

En el cilindro, nosotros tenemos:

Teorema 3.23 *Un grafo G es VAP-cilíndrico si y sólo si G no tiene subgrafos homeomorfos a cualquiera de los grafos en la Figura 3.27.*

3.6 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo pretendíamos encontrar una caracterización de los grafos VAP- $S(n)$ y hemos probado que ese problema es equivalente a uno de naturaleza finita, caracterizar los grafos $n - W - S$ -representables.

Para el caso $n = 1$ hemos obtenido una forma diferente de caracterizar los grafos sin acumulación de vértices de $S(1)$ a partir de una caracterización del tipo Kuratowski para la superficie S .

Para $n \geq 2$, mediante una asignación de colores diferentes a los finales de los grafos que se van produciendo al iterar el proceso obtenido para $n = 1$ hemos obtenido la caracterización de los grafos VAP- $S(n)$, así como la lista explícita de los grafos menores prohibidos VAP-cilíndricos.

Nos queda por tanto como problema abierto encontrar la lista explícita de los grafos menores prohibidos $2 - W - \pi$ -representables.

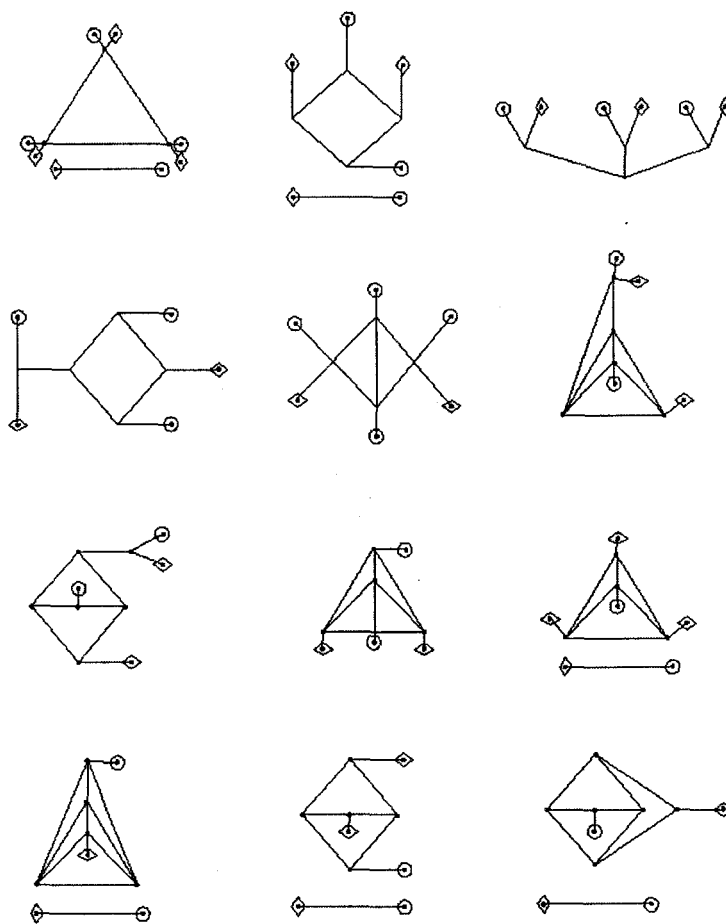


Figura 3.27:

Capítulo 4

Grafos recubridores de $S(n)$

El propósito de este capítulo es generalizar los resultados obtenidos por Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero [5] sobre grafos mosaicos en el plano a superficies planas abiertas con n finales de Freudenthal, así como el resultado obtenido por Thomassen en [58] sobre representaciones por segmentos rectilíneos de los grafos infinitos planos para dichas superficies.

4.1 Introducción

Dado un grafo G , y una inmersión EAP-plana, $\varphi : G \rightarrow R^2$ se dice que es una *inmersión recubridora* si todas las componentes de $R^2 - \varphi(G)$ están acotadas. Existen ejemplos obvios de grafos infinitos que admiten tanto una inmersión recubridora como no recubridora.

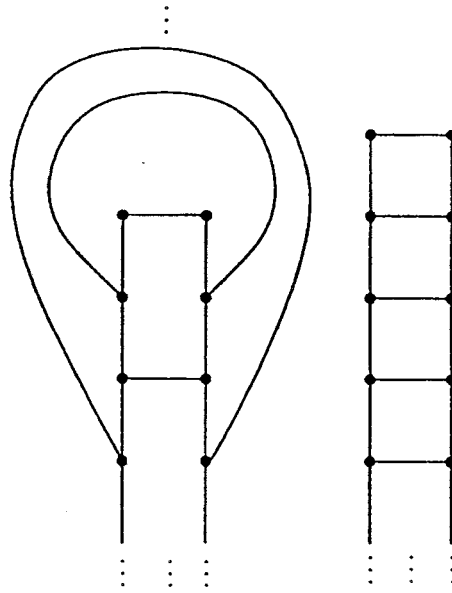


Figura 4.1:

En la Figura 4.1 podemos ver dos inmersiones de un grafo una recubridora y la otra no.

Un grafo G es *mosaico* si todas las inmersiones EAP-planas son recubridoras. En 1994 Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero [5] caracterizaron tales grafos.

La caracterización de los grafos mosaicos del plano ($S(1)$, cuando S es la esfera) viene dada por el siguiente resultado :

Teorema 4.1 G es mosaico en $S(1)$ si y sólo si es un grafo 2-conexo con un final y contiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ (ver Figura 4.2).

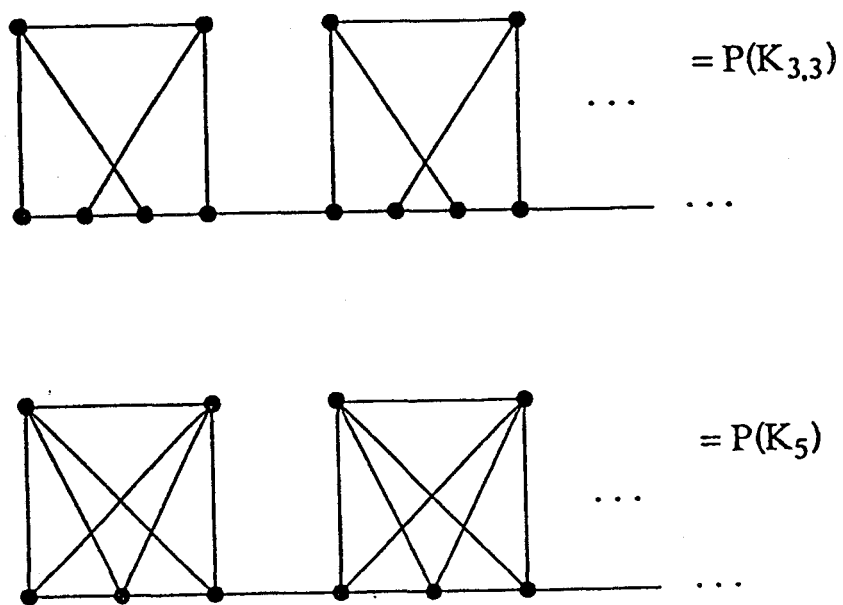


Figura 4.2:

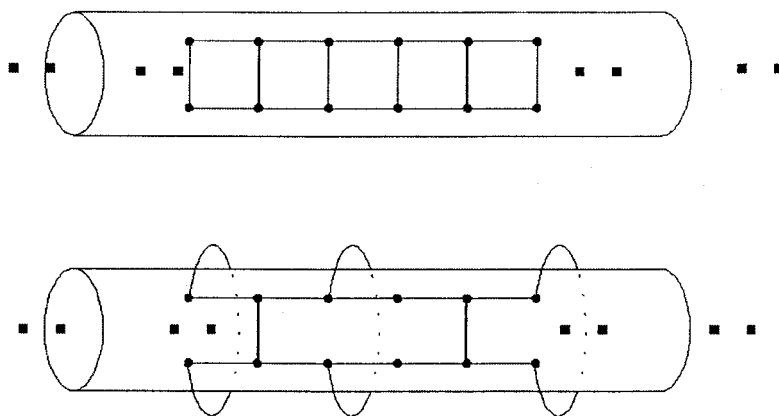


Figura 4.3:

En todo este capítulo consideraremos que S es la esfera y por lo tanto $S(n)$ representa la superficie plana abierta con n finales de Freudenthal.

El Teorema 4.1 se puede extender a $S(n)$ como sigue:

Dado un grafo G , decimos que una inmersión localmente finita $EAP - S(n)$, $\varphi : G \rightarrow S(n)$ es una *inmersión recubridora de $S(n)$* si todas las componentes de $S(n) - \varphi(G)$ están acotadas.

En la Figura 4.3 podemos ver dos inmersiones diferentes del mismo grafo en el cilindro, una no recubridora y otra sí.

Así pues, diremos que un grafo G es *mosaico en $S(n)$* si todas sus inmersiones sin acumulación (ni de vértices ni de puntos interiores de aristas) son recubridoras de $S(n)$.

Teorema 4.2 *Un grafo es mosaico en $S(n)$ si y sólo si admite una inmersión en $S(n)$ sin acumulación y contiene un subgrafo homeomorfo a la unión disjunta de n veces $P(K_5)$ y/o $P(K_{3,3})$.*

Demostración

Por inducción en n :

- Para $n = 1$ se tiene por [5], ya que $S(1)$ es homeomorfa a \mathcal{R}^2 .
- Supongamos el enunciado cierto para n y veámoslo para $n + 1$.

Condición Suficiente

$S(n + 1)$ es homeomorfa al plano menos n puntos. Sea $(0, 0)$ uno de esos puntos. Consideremos K un compacto tal que $(0, 0)$ está en el interior de $(\mathcal{R}^2 - \{n \text{ puntos}\}) - K$.

Sea $G_k = G \cap K$, lo que implica que

$$G - G_k = G_1 \sqcup G_2$$

donde $G_1 \subset \text{Int}((\mathcal{R}^2 - \{n \text{ puntos}\}) - K)$ y G_2 está en el exterior.

La cara interior de $(\mathcal{R}^2 - \{n \text{ puntos}\}) - K$ es homeomorfa a $S(1)$.

Como para $n = 1$ es cierto el resultado, existe $P(A_k) \subset G_1$ con $A_k = K_5^*$ ó $K_{3,3}^*$

De la misma forma, la cara exterior es homeomorfa a $S(n)$.

Por hipótesis de inducción, existirán

$$P(A_{1k}), P(A_{2k}), \dots, P(A_{nk}) \text{ tales que}$$

$$\bigsqcup_{i=1}^n P(A_{ik}) \subset G_2 \text{ con } A_{ik} = K_5^* \text{ ó } K_{3,3}^*.$$

Y como G_1 y G_2 son disjuntos, tenemos que

$$P(A_k) \cap P(A_{ik}) = \emptyset, \text{ cualquiera que sea } i = 1, \dots, n.$$

Hemos encontrado pues que,

$$P(A_k) \sqcup P(A_{1k}) \sqcup P(A_{2k}) \sqcup \dots \sqcup P(A_{nk}) \subset G.$$

Condición Necesaria

Por hipótesis $\bigsqcup_{i=1}^{n+1} P(A_{ik}) \subset G$.

Como G admite una inmersión sin acumulación se tiene que

$$G - \bigsqcup_{i=1}^{n+1} P(A_{ik}) \text{ es compacto.}$$

Consideramos $\bigsqcup_{i=1}^{n+1} P(A_{ik}) = \bigsqcup_{i=1}^n P(A_{ik}) \sqcup P(A_{n+1,k})$.

$S(n+1)$ es homeomorfa a \mathcal{R}^2 menos n puntos, de los cuales $(0,0)$ es uno.

Sea d la distancia del $(0,0)$ a los $n-1$ restantes.

Notaremos por $K = \overline{B}(\frac{1}{2}d) - B(\frac{1}{3}d)$.

Entonces se tiene que

$$(\mathcal{R}^2 \text{ menos } n \text{ puntos}) - K = R_1 \sqcup R_2$$

donde R_1 es homeomorfo a $S(1)$ y R_2 es homeomorfo a $S(n)$.

Por hipótesis de inducción,

$\bigsqcup_{i=1}^n P(A_{ik})$ recubre R_2 y $P(A_{n+1,k})$ recubre R_1 .

Además tenemos que:

$$K \cap G \subset G - \bigsqcup_{i=1}^{n+1} P(A_{ik}).$$

Por lo tanto $K \cap G$ es compacto, y las caras contenidas en $K \cap G$ son acotadas.

Como consecuencia:

$$\bigsqcup_{i=1}^n P(A_{ik}) \sqcup P(A_{n+1,k}) \cup (K \cap G) \text{ recubre } S(n+1).$$

Por tanto G recubre a $S(n+1)$. ■

4.2 Triangulaciones infinitas en $S(n)$

En esta sección generalizamos el resultado obtenido por Thomassen en [58] sobre inmersiones de grafos infinitos por segmentos rectilíneos en el plano a superficies abiertas planas con n finales de Freudenthal, $S(n)$. Además obtenemos como consecuencia que si el grafo G es conexo, ser $VAP - S(n)$ es equivalente a ser $EAP - S(n)$.

Para ello, usaremos el concepto de *triangulación infinita* introducido por Thomassen [58]. Diremos que una inmersión plana Γ de un grafo plano infinito y conexo es una *triangulación* si y sólo si Γ es $VAP - plano$ y para todo $x \in \Gamma$ existe Ψ_x ciclo de Γ tal que x es el único vértice contenido en el interior de Ψ_x y x está unido por una arista a todos los vértices de Ψ_x . Si además, cualquiera que sea $y \in \mathcal{R}^2 - \Gamma$ se tiene que y está contenido en algún ciclo de Γ , entonces diremos que Γ es una *triangulación del plano*.

Una caracterización de las triangulaciones infinitas debida a Thomassen [58] es la siguiente:

Una inmersión VAP-plana Γ de un grafo plano infinito es una triangulación si y sólo si Γ contiene una sucesión de ciclos disjuntos $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ tales que para todo $k \geq 2$, el subgrafo de Γ inducido por Θ_k y los vértices del interior de Θ_k es finito y triangula el interior de Θ_k y contiene al ciclo Θ_{k-1} ; además, todo vértice de Γ está en el interior de algún Θ_m .

Teniendo en cuenta que $S(n)$ es homeomorfa a la esfera menos n puntos, diremos que una inmersión Γ de un grafo infinito y conexo en una superficie abierta con n finales de Freudenthal es una *triangulación* si y sólo si dicha inmersión Γ no presenta puntos de acumulación de vértices en $S(n)$ y para todo $x \in \Gamma$, existe Ψ_x ciclo de Γ tal que x es el único vértice contenido en el interior de Ψ_x y x está unido por una arista a todos los vértices de Ψ_x . Si sucede también que cualquiera que sea y , un punto en el complementario de la inmersión Γ en dicha superficie, se tiene que y está contenido en algún ciclo de Γ , entonces diremos que Γ es una *triangulación de $S(n)$* .

Teorema 4.3 *Una inmersión VAP- $S(n)$ Γ de un grafo infinito es una triangulación si y sólo si Γ contiene una sucesión de ciclos disjuntos $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ tales que para todo $k \geq 2$, el subgrafo de Γ inducido por Θ_k y los vértices del interior de Θ_k es finito y triangula el interior de Θ_k y contiene al ciclo Θ_{k-1} ; además, todo vértice de Γ está en el interior de algún Θ_m .*

Demostración

La condición suficiente es evidente, veamos la condición necesaria.

Vamos a definir la sucesión de ciclos disjuntos $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ recursivamente de la siguiente forma:

Sea Θ_1 cualquier ciclo de Γ y supongamos ya definidos $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$. Consideraremos el grafo Γ_k como $\cup \Psi_x$, donde la unión es tomada sobre todos los vértices x de Θ_k . Γ_k es finito y 2-conexo, luego la frontera de la cara exterior es un ciclo, llamémosle Θ_{k+1} . Como Γ no tiene puntos de acumulación de vértices, existirán solamente una cantidad finita de vértices de Γ en el interior de Θ_{k+1} , y como por definición de triangulación, Γ triangula el interior de Θ_{k+1} . Si y es un vértice de Γ en el exterior de Θ_{k+1} , entonces la distancia desde y a Θ_{k+1} es menor que la distancia desde y a Θ_k . Por lo tanto y está en el interior de algún Θ_m y por lo tanto Γ satisface lo que queríamos. ■

Recordemos el resultado dado por Thomassen en [58] sobre inmersiones de grafos planos en triangulaciones infinitas por segmentos rectilíneos.

Teorema 4.4 *Sea Γ un grafo infinito, localmente finito, conexo, VAP-plano. Entonces existe una triangulación infinita por segmentos rectilíneos Δ del plano tal que Γ es isomorfo a un subgrafo de Δ .*

Vamos a generalizar dicho resultado a $S(n)$:

Teorema 4.5 *Sea Γ un grafo infinito, localmente finito, conexo, $VAP-S(n)$. Entonces existe una triangulación infinita por geodésicas mínimas Δ de $S(n)$ tal que Γ es isomorfo a un subgrafo de Δ .*

Demostración

Vamos a demostrarlo por inducción en n :

- Para $n = 1$ es cierto por el resultado de Thomassen [58].
- Para $n = 2$:

Sea Γ un grafo infinito, localmente finito, conexo $VAP-S(2)$, entonces Γ admite una inmersión en el plano con un punto de acumulación de vértices. Sea K un compacto que aisle dicho punto de acumulación. Dicho compacto existe, ya que de no existir tendríamos que podríamos abrir por una generatriz del cilindro y en ese caso tendríamos que la inmersión sería VAP -plana.

$$\begin{aligned} \text{Sea } \Gamma_k &= \Gamma \cap K, \text{ por tanto} \\ \Gamma - \Gamma_k &= \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \text{ tal que} \\ \Gamma_1 &\subset \text{int}(\mathcal{R}^2 - K) \text{ y } \Gamma_2 \subset \text{ext}(\mathcal{R}^2 - K). \end{aligned}$$

La cara exterior de $\mathcal{R}^2 - K$ es homeomorfa al plano $S(1)$.

Γ_2 es $VAP-S(1)$ y conexo, luego aplicando el resultado para el plano tenemos que Γ_2 es isomorfo a un subgrafo de una triangulación por segmentos rectilíneos del plano Δ_2 .

La cara interior también es homeomorfa a $S(1)$, por lo tanto tenemos una inmersión $VAP - S(1)$ de Γ_1 y es conexo, así pues, es isomorfo a un subgrafo de una triangulación por segmentos rectilíneos Δ_1 .

Nos queda la parte del compacto K , que es un grafo finito por tanto es subgrafo de una triangulación finita.

Sea xy una arista de K que no está contenida un 3-ciclo separador de K . Sea K' el grafo obtenido al contraer la arista xy a un vértice z . Sea Λ la representación de K , entonces la representación de K' puede ser obtenida desde Λ tal que sólo las aristas incidentes con x sean cambiadas. Recíprocamente, si Λ' es una representación por segmentos rectilíneos de K' , entonces una representación por segmentos rectilíneos de K puede ser obtenida desde Λ' tal que sólo las aristas incidentes con x sean cambiadas y tal que x lo unimos arbitrariamente con y . Haciendo coincidir un ciclo de Γ_1 y un ciclo de Γ_2 con los ciclos fronteros de Λ , tendremos que Γ es isomorfo a un subgrafo de una triangulación de $S(2)$.

En el caso en que en el compacto tengamos 3-ciclos separadores esas aristas no las contraemos, pero quitamos lo que tengamos dentro del 3-ciclo separador, con lo cual seguimos teniendo una triangulación de $S(2)$ y después se vuelve a poner lo que había dentro del 3-ciclo separador triangulando con segmentos rectilíneos.

- Supongamos cierto el resultado para $n - 1$ y veámoslo para n .

Si es cierto para $n - 1$, razonando similarmente como en el paso de $n = 1$ a $n = 2$, lo que hacemos es aislar el punto de acumulación que se obtiene en $S(n)$ mediante un compacto y aplicar el razonamiento anterior. ■

Como una triangulación infinita de $S(n)$ no tiene puntos de acumulación de aristas, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.6 *Sea Γ un grafo infinito, localmente finito, conexo y VAP-*

$S(n)$. Entonces Γ tiene una representación por segmentos rectilíneos $EAP-S(n)$.

Al igual que ocurre en el plano, en $S(n)$ existen ejemplos de grafos localmente finitos, no conexos sin puntos de acumulación de vértices que no tienen necesariamente una representación $EAP-S(n)$.

Sean G_1 y G_2 dos grafos abstractos tales que G_1 es isomorfo a un subgrafo de una triangulación de $S(n)$ y G_2 es un grafo infinito, conexo con una representación sin puntos de acumulación de vértices en $S(n)$. Consideraremos la unión disjunta de estos dos grafos y llamémosle H . Claramente H tiene una representación $VAP-S(n)$. Llamemos Θ a la inmersión sin acumulación de vértices de H en $S(n)$ y sean Γ_1 y Γ_2 las inmersiones sin acumulación de vértices de G_1 y G_2 en $S(n)$ respectivamente. Consideremos p un vértice de Γ_1 y q un vértice de Γ_2 , el segmento $[p, q]$ intersecta una cantidad infinita de aristas de Γ_1 ya que p está contenido en el interior de una cantidad infinita de ciclos mutuamente disjuntos de Γ_1 y el conjunto de puntos de Γ_2 en $S(n)$ no puede estar contenido en uno de tales ciclos. Así pues, tenemos que algunos puntos del segmento $[p, q]$ forman un punto de acumulación de aristas de Γ_1 .

Otro problema en apariencia distinto es generalizar las caracterizaciones de grafos sin acumulación de vértices ni aristas en superficies planas abiertas con n finales de Freudenthal, es decir los grafos $EAP-S(n)$. Estos también se pueden caracterizar mediante subgrafos prohibidos. Tenemos la siguiente conjetura:

Conjetura 4.7 *Sea G un grafo sin componentes finitas planas. Entonces G no es $EAP-S(n)$ si y sólo si existe $k = 0, \dots, n$ tal que hay k $P(K_5)$ y/o $P(K_{3,3})$ y un subgrafo disjunto no $VAP-S(n-k)$.*

De ser cierta la conjetura, se tendría inmediatamente la caracterización de los grafos $EAP - S(n)$ a partir de la de los $VAP - S(n)$.

Vamos a probar la conjetura para $n = 2$.

Teorema 4.8 *Sea G un grafo sin componentes finitas planas. Entonces:*

G no es $EAP - S(2)$ si y sólo si se verifican una de las siguientes condiciones:

- ($k = 0$) *No es $VAP - S(2)$.*
- ($k = 1$) *Hay un $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y un subgrafo disjunto no $VAP - S(1)$.*
- ($k = 2$) *Hay dos $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y un rayo infinito.*

Demostración

Condición Necesaria

- Para $k = 0$ si no es $VAP - S(2)$ entonces no es $EAP - S(2)$.
- Para $k = 1$ si tenemos uno cualquiera de los de Halin nos dividirá al cilindro en dos mitades y cada una de ellas tendrá al menos un rayo infinito. En cualquiera de las mitades en la que pongamos el $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ tendríamos un grafo recubridor y un rayo infinito, por lo tanto no sería $EAP - S(2)$.
- Para $k = 2$ si tenemos dos $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y un rayo infinito, tendremos un grafo recubridor de $S(2)$ y una componente infinita, así pues no será $EAP - S(2)$.

Condición Suficiente

Si G no es conexo, consideraremos los siguientes tipos de grafos:

- Tipo I: Contiene dos componentes de $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$.
- Tipo II: Contiene cualquiera de los prohibidos de Halin y que no es de tipo I.

- Tipo III: Contiene un $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y que no sea de tipo I ó II.
- Tipo IV: Contiene rayos infinitos y que no sean del tipo I ó II ó III.

Supongamos que tenemos dos componentes infinitas.

Caso 1

Una de las componentes es de tipo I.

Tendremos dos $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y un rayo infinito, luego estamos en la última condición.

Caso 2

Una de las componentes es de tipo II.

2.1 Otra componente de tipo II. En este caso no sería $VAP - S(2)$.

2.2 Otra de tipo III. Tendríamos uno de Halin y un $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$.

2.3 Otra de tipo IV. Sería $EAP - S(2)$.

Caso 3

Si tenemos dos componentes de tipo III y otra de tipo III ó tipo IV entonces tendremos dos $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y un rayo infinito.

Caso 4

Si tenemos dos componentes de tipo IV entonces es $EAP - S(2)$.

Caso 5

Si tenemos dos componentes una de tipo III y otra de tipo IV, en esta situación es $EAP - S(2)$.

Caso 6

Si son de tipo IV entonces el grafo es $EAP - S(2)$.

Nos queda el caso en que el grafo tenga una única componente infinita.

Como sabemos, según hemos visto anteriormente, son equivalentes en el caso conexo ser $EAP - S(2)$ y ser $VAP - S(2)$. Por lo tanto si el grafo no es $EAP - S(2)$ y tenemos una única componente infinita tendremos que no es $VAP - S(2)$. Con esto concluye la demostración. ■

4.3 Conclusiones y problemas abiertos

En el caso de superficies planas abiertas con una cantidad finita de finales de Freudenthal hemos caracterizado sus inmersiones recubridoras en términos de subgrafos minimales. Además hemos probado que todo grafo $VAP - S(n)$ es isomorfo a un subgrafo de una triangulación de $S(n)$, resultado éste que generaliza al obtenido por Thomassen en [58] para el plano. En el caso del cilindro, hemos obtenido también la caracterización de las inmersiones EAP -cilíndricas a partir de las VAP -cilíndricas.

Quedan abiertas para futuras investigaciones dos cuestiones principalmente: La primera de ellas encontrar la caracterización de las inmersiones $EAP - S(n)$, y en segundo lugar tratar todos los resultados del capítulo para superficies abiertas no necesariamente planas.

Parte II

Inmersiones de Grafos

Dinámicos

A partir de ahora vamos a trabajar principalmente con familias de grafos infinitos para las cuales sea posible construir algoritmos eficientes que comprueben si ciertas propiedades se satisfacen o no. Uno de los principales problemas que surgen cuando tratamos con grafos infinitos es la forma de poder definirlos de manera que puedan ser tratados en el ordenador. En el caso de *grafos dinámicos* este problema está solventado ya que podemos definirlos de forma recurrente. Son muchos los ejemplos que surgen en la literatura que se pueden incluir dentro de este contexto, como los grafos tratados por B. Grünbaum y G.C. Shephard en *Tilings and Patterns*, Freeman (New York, 1987), por citar alguno.

En el Capítulo 5 analizaremos los resultados obtenidos por Dana en su Tesis Doctoral [16] sobre inmersiones de grafos dinámicos en el plano e inmersiones sin acumulación, generalizando sus resultados para el cilindro.

El Capítulo 6 lo dedicaremos a estudiar propiedades métricas de las representaciones planas de grafos cuyas aristas son segmentos rectilíneos y que presentan puntos de acumulación (también podríamos llamarlas inmersiones recubridoras del cilindro por geodésicas). Abrimos así una nueva línea de trabajo propuesta por Thomassen en su visita a nuestro Departamento y que guarda gran relación con un problema propuesto por Wagner [62] en 1970, sobre la búsqueda de inmersiones planas de grafos en las cuales la relación entre la longitud de la arista más larga y la arista más corta no sea demasiado grande.

Capítulo 5

Grafos dinámicos en el cilindro

El objetivo de este capítulo es seguir la línea de trabajo abierta por Dana [16] en su Tesis Doctoral definiendo una familia de grafos infinitos en la cual es posible construir una algorítmica finita, nos estamos refiriendo a los *grafos periódicos o dinámicos*. Una vez cerrado el caso plano, parece pues natural preguntarse qué ocurre en otras superficies abiertas, y comenzamos, por su simplicidad, con el cilindro. Caracterizaremos desde un punto de vista teórico y algorítmico los diferentes tipos de acumulación que presentan esta familia de grafos.

5.1 Introducción

Un *cilindro (infinito)* C es la unión de una familia infinita de líneas paralelas a una recta, llamada *eje* del cilindro, y a la misma distancia de ella. Un cilindro se define también como el lugar geométrico de los puntos que equidistan del eje. Alternativamente, se puede definir como la unión de una familia infinita de circunferencias del mismo radio, cuyos centros están situados sobre el eje y dibujadas sobre planos ortogonales a éste. Las rectas y las circunferencias definen de forma natural un sistema de coordenadas sobre el cilindro, puesto que cada punto de C se obtiene como la intersección de una única recta y una única circunferencia. De igual forma, estas dos familias de

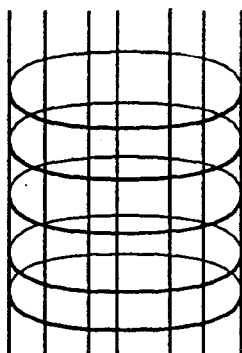


Figura 5.1:

curvas definen una *mall*a sobre el cilindro; a las rectas paralelas se las conoce como *generatrices* y corresponden a la dirección vertical, mientras que las circunferencias perpendiculares a dichas rectas son los *círculos máximos* del cilindro, asociados a la dirección horizontal (ver Figura 5.1).

Un cilindro infinito es homeomorfo al plano menos un punto, o a la esfera menos dos, puntos que se conocen como *Polo Norte* y *Polo Sur*. Este homeomorfismo nos conduce a representar el cilindro como una banda limitada por rectas verticales identificadas entre sí, obtenida al desarrollar el cilindro por una de sus generatrices. Las geodésicas del cilindro pasan a ser rectas en su representación plana y la malla está constituida por una familia de rectas horizontales y otra de verticales. La Figura 5.2 ilustra estos hechos.

Definiremos *inmersión de un grafo en el cilindro* como aquella inmersión de un grafo que está constituida por puntos del cilindro representando los vértices, y las aristas serán curvas de Jordan que no se intersectan entre sí, excepto en sus extremos. Cuando esto ocurra diremos que el grafo es *cilíndrico*. Es fácil ver que, al igual que grafo plano y esférico son conceptos equivalentes, grafo cilíndrico y plano también lo son. Los homeomorfismos

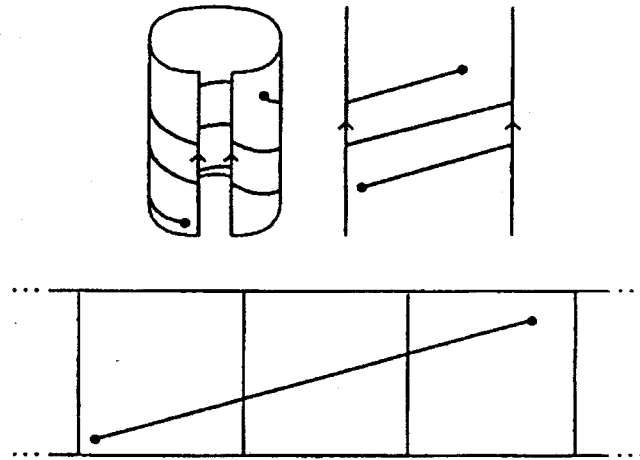


Figura 2: Representación plana del cilindro.

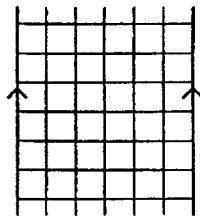


Figura 3: Malla en la representación plana del cilindro.

Figura 5.2:

existentes entre plano, cilindro y esfera hacen que si un grafo admite una inmersión en alguna de las tres superficies, también admita inmersiones en las otras dos. Esto es, los conceptos de grafo plano, cilíndrico y esférico son equivalentes.

Las inmersiones cilíndricas, al igual que las demás, dan lugar a un sistema de rotación de vértices y a un conjunto de ciclos esenciales. En este caso, un ciclo de la inmersión será *esencial* u *homótopicamente no nulo* si la curva asociada a dicho ciclo, la cual estará compuesta por segmentos, no encierra un disco abierto. Si una inmersión cilíndrica no contiene ningún ciclo esencial la llamaremos inmersión plana.

Toda inmersión cilíndrica determina un conjunto de caras sobre el cilindro, entre las que aparecen dos no acotadas (solamente una si es una inmersión plana), una de las cuales contiene al Polo Norte y la otra al Polo Sur. Si denotamos por n, m y f al número de vértices, aristas y caras de la inmersión, respectivamente, entonces la fórmula de Euler establece que $n - m + f = 2$.

La estructura topológica de una inmersión cilíndrica se describe señalando los ciclos esenciales y recorriendo las aristas que constituyen la frontera de cada cara, explicitando las caras no acotadas o externas. Cada cara f de la inmersión tendrá asociada una lista circular $P(f)$ formada por las aristas que la forman, recorridas en el sentido de las agujas del reloj, es decir, dejando el interior de la cara a la derecha. Notemos que cada arista aparece exactamente en dos de estas listas, es decir pertenece a la frontera de dos caras de la inmersión. Si estas dos caras son la misma decimos que la arista constituye un *puente*.

Dado que en este capítulo los resultados que obtendremos son algoritmizables, vamos a establecer la notación necesaria que nos permita expresarnos en el lenguaje natural a la hora de describir un algoritmo. El lector puede encontrar de manera mucho más amplia todos los conceptos de algorítmica en el clásico libro de Aho, Hopcroft y Ullmann [2] o bien en el libro de Garey y Johnson [25].

Un *algoritmo* es en general, la descripción paso a paso de un método para resolver cierta tarea. Más concretamente, podemos pensar en un algoritmo como en un programa de ordenador escrito en un lenguaje de programación. Por utilizar un ejemplo que vamos a necesitar, veamos un método para explorar los vértices y aristas de un grafo que se llama *Depth-first search* (DFS).

DFS(G)

Paso 1 Introducir un grafo G con N vértices.

Paso 2 Sea T un árbol que inicializaremos como \emptyset .

Paso 3 Marcar todos los vértices del grafo como *nuevo*.

Paso 4 Si existe un vértice v marcado como *nuevo* entonces BUSCAR(v).

Fin

El procedimiento BUSCAR es el siguiente:

BUSCAR(v)

Paso 1 Marcar v como *viejo*.

Paso 2 Para cada vértice w que sea adyacente a v

1. Si w está marcado como *nuevo* entonces:

- Añadir la arista $\{v, w\}$ a T .
- BUSCAR(v).

Fin

Al final de la ejecución del algoritmo, el árbol T contendrá todos los vértices y aristas de G . Al igual que hemos construido este árbol, podemos optar por realizar cualquier otra operación que necesitemos.

Estaremos interesados en encontrar el algoritmo más *eficiente* para resolver un problema. El concepto de *eficiencia* o *complejidad* de un algoritmo depende de dos factores:

- El *tiempo* que tarda en realizarse.
- El *espacio* (memoria) que ocupa.

El segundo factor es un problema subsanable (dentro de lo posible), pues basta con ampliar la memoria al tamaño necesario. El primer factor es el que en realidad va a marcarnos las pautas por las que debe regirse el diseño de un algoritmo.

Para nosotros, el algoritmo más eficiente quiere decir el *más rápido*, el que necesita menos tiempo de ejecución.

El tiempo de ejecución de un algoritmo es la suma de los tiempos de ejecución de sus pasos y viene expresado como una función del número de datos de la entrada del algoritmo. La definición con mayor rigor del tamaño de entrada de un algoritmo no es un problema fácil, para un estudio más exhaustivo de este problema consúltese el libro de Garey y Johnson [25]. Sin embargo, conviene hacer dos matizaciones a lo anterior: en primer lugar, la naturaleza de esa entrada (y no sólo su tamaño) puede influir en el tiempo de ejecución de un algoritmo, así que escogeremos el peor de los casos posibles; en segundo lugar, tampoco estamos interesados en la función explícita del tiempo sino en su crecimiento cuando el tamaño de los datos va aumentando. Por ejemplo, diremos que el algoritmo DFS es *lineal* porque su función tiempo es un polinomio de grado 1.

Existen muchas situaciones prácticas en las que es importante determinar si un grafo es plano o no, y en el caso de que lo sea encontrar una representación plana suya, por ejemplo en el diseño de circuitos impresos. Desgraciadamente, el Teorema de Kuratowski no proporciona un método algorítmico eficiente para reconocer a los grafos planos. Para medir la *eficiencia* suponemos que el tamaño de la entrada es n y contamos el número

de operaciones que constituyen el algoritmo. En este sentido, seguiremos la siguiente notación :

$f(n) \in O(g(n))$ si se verifica que existe una constante C tal que
$$f(n) \leq Cg(n).$$

En el caso de los grafos planos, hubo que esperar hasta el año 1974 para que Hopcroft y Tarjan [31] dieran un algoritmo lineal para decidir si un grafo es plano o no. Otros algoritmos que reconocen a un grafo plano son el de Lempel, Even y Cederbaum [40] y el de Booth y Lueker [8]. En 1985, Chiba, Nishizeki, Abe y Ozawa [14] obtienen un algoritmo que proporciona la representación plana de un grafo si es plano [45].

Al hablar de grafos infinitos, parece fuera de lugar plantearse la construcción de algoritmos que comprueben si uno de estos grafos es plano, VAP-plano o EAP-plano. Sin embargo, si los grafos que manejamos pueden representarse de una manera finita, tales algoritmos son posibles. El primer intento en ese sentido fue realizado por Iwano y Steiglitz en [34], pero desgraciadamente su trabajo se basaba en ciertas hipótesis erróneas. Posteriormente, Dana en [16] obtuvo estos algoritmos para la familia de grafos infinitos *dinámicos o periódicos* del plano.

5.2 Notación básica

Consideraremos inmersiones de grafos en el cilindro, donde los vértices son puntos del cilindro y las aristas son curvas de Jordan en el cilindro que sólo tienen en común los puntos extremos. Claramente, un grafo admite una inmersión en el cilindro si y sólo si admite una inmersión en el plano. La diferencia entre las inmersiones planas y las inmersiones cilíndricas radica en que éstas últimas presentan dos caras no acotadas o exteriores y a las cuales denominaremos *cara exterior izquierda* y *cara exterior derecha* de la inmersión.

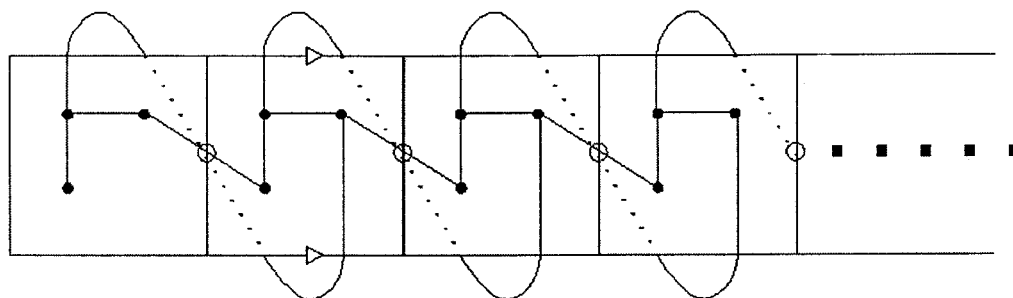


Figura 5.3:

A partir de ahora usaremos la notación seguida por Cáceres, Dana y Márquez en [11] y generalizaremos las definiciones de grafos dinámicos en el plano a *grafos dinámicos en el cilindro*. Teniendo en cuenta el homeomorfismo que nos conduce a representar el cilindro como una banda limitada por rectas verticales identificadas entre sí, obtenida al desarrollar el cilindro por una de sus generatrices, si G es un grafo finito, consideraremos que sus vértices están en una loseta $C = [0, 1] \times [0, 1]$ de la representación plana del cilindro y que ésta la repetimos infinitamente de dos formas diferentes: cubriendo toda la banda plana que representa el cilindro con lo cual cada loseta tiene dos losetas adyacentes o bien cubriendo solamente media banda plana, con lo que cada loseta tiene dos losetas adyacentes excepto la primera que sólo tiene una. En estos dos casos, nosotros decimos que tenemos un grafo *1-dimensional dinámico cilíndrico* y lo denotaremos por G^1 -cilíndrico ó $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico cilíndrico, denotado por $G^{\frac{1}{2}}$ -cilíndrico.

En la Figura 5.3 podemos ver un grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional cilíndrico y en la Figura 5.4 un grafo 1-dimensional cilíndrico.

Así mismo, podemos decir que un grafo *k-dimensional dinámico* es *VAP-cilíndrico* si admite una inmersión en el cilindro sin acumulación de vértices; y que un grafo *k-dimensional dinámico* es *EAP-cilíndrico* si dicha inmersión

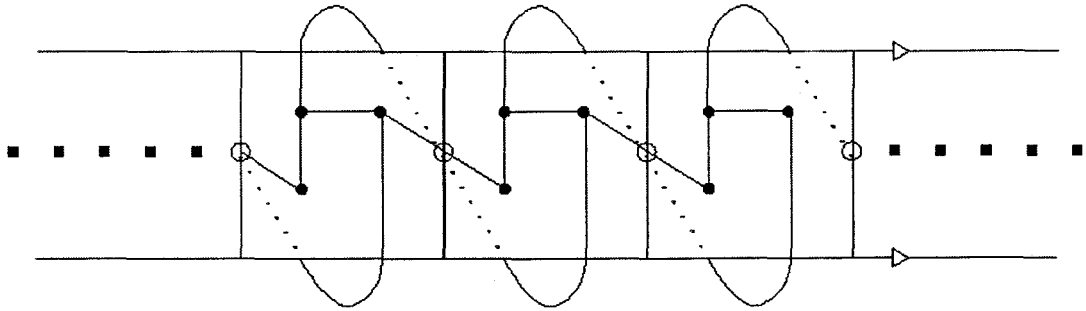


Figura 5.4:

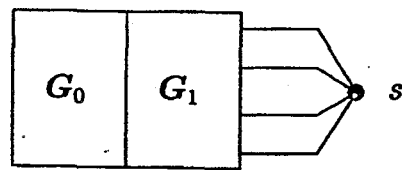


Figura 5.5:

no tiene acumulación ni de vértices ni de aristas. Hacer notar que en el caso plano k puede tomar los valores $\frac{1}{2}$, 1 ó 2; sin embargo en el caso de inmersiones cilíndricas sólo tiene sentido que k tome los valores $\frac{1}{2}$ ó 1.

5.3 Grafos Dinámicos Cilíndricos

Para un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional cilíndrico $G^{\frac{1}{2}}$, con generador G , podemos construir el grafo G_f desde G_0, G_1 y G_2 contrayendo este último en un punto como se muestra en la Figura 5.5 :

La caracterización resultante para los grafos dinámicos $\frac{1}{2}$ -dimensionales es:

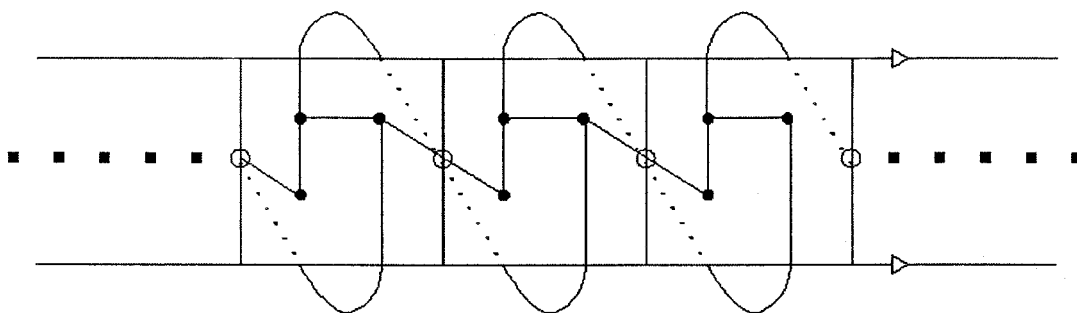


Figura 5.6:

Teorema 5.1 *Un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional es cilíndrico si y sólo si el grafo asociado G_f es plano.*

Demostración

Si $G^{\frac{1}{2}}$ es cilíndrico entonces $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ es cilíndrico y G_f también, por lo tanto es plano.

En el otro sentido, obtenemos una inmersión de $G^{\frac{1}{2}}$ de la siguiente forma: empezamos con una copia de la inmersión del grafo $G_0 \cup G_1$ y añadimos infinitas copias de la inmersión de G_1 en G_f . Volviendo hacia atrás, comprobamos que podemos pegar estas copias. Esto nos da una representación cilíndrica de $G^{\frac{1}{2}}$. ■

Veamos que el caso 1-dimensional se puede reducir al caso $\frac{1}{2}$ -dimensional como sigue.

Es claro que desde un grafo dinámico 1-dimensional, G^1 es posible construir un nuevo grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional $G^{\frac{1}{2}}$, tomando el generador de G^1 y repitiéndolo sólo en la mitad de la línea (ver Figura 5.6 y 5.7).

Veamos ahora la caracterización que estamos buscando:

Teorema 5.2 *Sea G^1 un grafo 1-dimensional dinámico y sea $G^{\frac{1}{2}}$ un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional, obtenido como hemos descrito anteriormente. Entonces G^1 es cilíndrico si y sólo si $G^{\frac{1}{2}}$ es cilíndrico.*

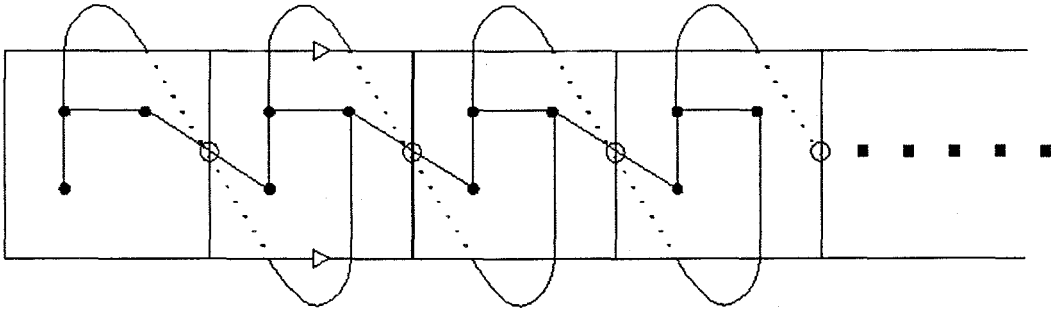


Figura 5.7:

Demostración

Claramente $G^{\frac{1}{2}}$ es un subgrafo de G^1 , así pues, si G^1 es cilíndrico entonces $G^{\frac{1}{2}}$ es cilíndrico también.

Veamos en el otro sentido. Supongamos que G^1 no es cilíndrico. Entonces existe un subgrafo finito K tal que es homeomorfo a K_5 ó $K_{3,3}$. Si K no está contenido en $G^{\frac{1}{2}}$, podemos encontrar una copia trasladada de K tal que es un subgrafo de $G^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, tendríamos que $G^{\frac{1}{2}}$ no es cilíndrico. ■

Como podemos dar un algoritmo que en tiempo lineal nos diga si un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional es cilíndrico, también podemos hacer esto en el caso de un grafo dinámico 1-dimensional, como consecuencia del resultado anterior.

5.4 Grafos Dinámicos VAP-cilíndricos

Veamos en primer lugar que un grafo es *cilíndrico* si y sólo si es *VAP-cilíndrico* si partimos de un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional .

Para hacer esto, tengamos en cuenta un resultado previo:

Lema 5.3 *Un grafo conexo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional tiene solamente un final de Freudenthal.*

Demostración

Podemos considerar $G^{\frac{1}{2}}$ como la siguiente unión $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$.

Tendremos que para todo $n_0 \in N$, los grafos $G^{\frac{1}{2}}$ y $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} G_n$ son isomorfos.

Así pues, para todo subgrafo finito $K \in G^{\frac{1}{2}}$, podemos encontrar un n_0 tal que $G^{\frac{1}{2}} - K = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} G_n \cup F$, donde F es un grafo finito. Como los grafos $G^{\frac{1}{2}}$ y $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} G_n$ son isomorfos, ambos son conexos. Por lo tanto, $G^{\frac{1}{2}}$ tiene sólo un final de Freudenthal. ■

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G no tiene vértices de juntura que lo unen con componentes finitas conexas, ya que si esto fuera así, lo que haríamos es retraer esta componente dentro de C . Así, podemos considerar el grafo G^k donde todas las componentes conexas de los vértices de juntura son infinitas. Esta operación, que es conocida por *reflejar* G , nos permite, usando el Teorema de Menger [28], trazar rayos infinitos desde estos vértices de juntura. Así pues, es fácil ver cuando las componentes conexas de un vértice son finitas o infinitas, es decir, una componente conexa es finita si y sólo si ésta no contiene dos copias de una componente conexa de G .

Como consecuencia del Teorema de Halin [29], un grafo infinito es VAP-plano si y sólo si cada componente conexa es VAP-plana. Esta misma afirmación sigue siendo válida en el cilindro, así que, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G^k es conexo. También, podemos suponer que es cilíndrico ya que en caso contrario G^k no sería cilíndrico.

Denotaremos por G^1 al grafo dinámico 1-dimensional y G como su generador.

Como G es cilíndrico, finito y conexo, por lo tanto es plano. Luego podemos construir su *block-cutvertex tree* T asociado, que es un grafo cuyos vértices son los bloques y los vértices de corte del grafo G (los llamaremos vértices del tipo B o vértices del tipo C) y cuyas aristas conectan cada bloque B a los vértices de corte contenidos en B . Este árbol T puede ser construido en tiempo lineal usando DFS.

Nosotros estamos interesados en construir el BC - *tree* T asociado al generador G aunque con una modificación que es de gran interés para nuestro

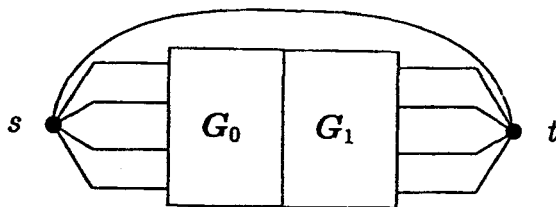


Figura 5.8:

propósito. Vamos a añadir a este árbol un tercer tipo de vértices (tipo J), que son los vértices de juntura. Un vértice B está unido a un vértice J si más tarde pertenece al bloque B . Un vértice C está unido a un vértice J si existe el mismo en el grafo. A este nuevo árbol le vamos a llamar BCJ -tree de G y lo denotaremos por $BCJ(G)$.

Además, debemos tener en cuenta, que existen dos tipos de vértices de juntura, *los vértices de entrada* (los que se unen con la copia precedente de G) y *los vértices de salida* (los que unen a G con la próxima copia).

Así pues, tenemos como consecuencia que para cada inmersión plana de G existe una inmersión de este árbol $BCJ(G)$ si el orden de las aristas alrededor de un vértice del tipo B se cambia, esa inmersión no representa una inmersión de G .

Vamos a construir un grafo finito G_f a partir de cuatro copias consecutivas del grafo dinámico, G_{-1}, G_0, G_1 y G_2 , contrayendo las copias G_{-1} y G_2 en dos vértices s y t ; finalmente añadimos la arista (s, t) como en la Figura 5.8.

Es importante hacer notar que si los vértices de salida de G_0 (que coinciden con los de entrada de G_1) son copias de los vértices de entrada de G_1 , por lo tanto si ellos están etiquetados con $1, 2, \dots, n$ entonces esto induce una etiquetación de los vértices de juntura de G_f .

El grafo G_f juega un papel muy importante en el estudio del grafo dinámico 1-dimensional G^1 y la propiedad de ser VAP-cilíndrico.

Dana, Cáceres y Márquez en [11] obtuvieron el siguiente resultado para el

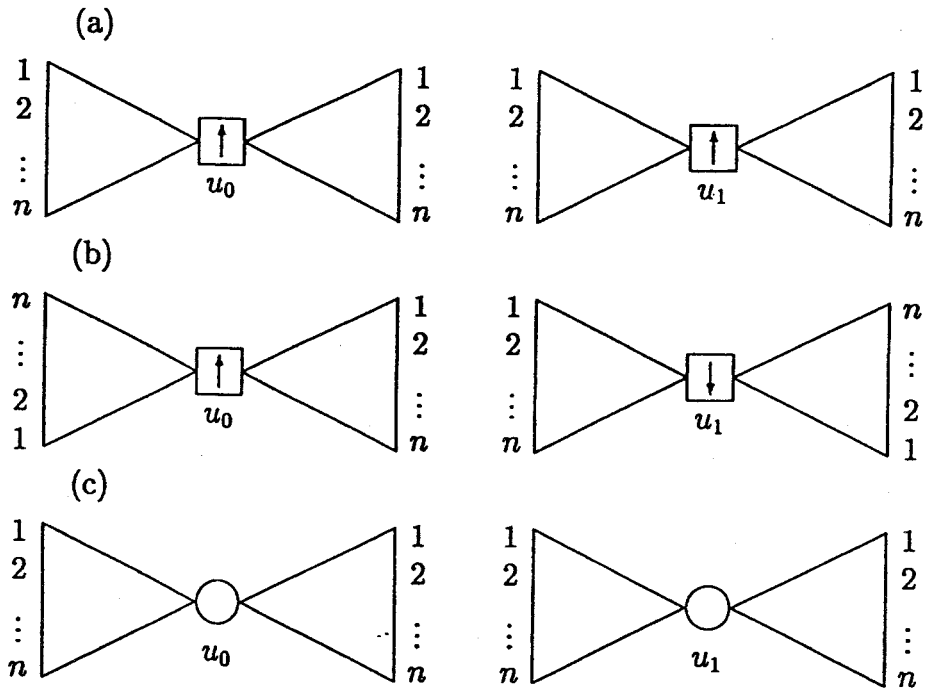


Figura 5.9:

caso de grafos dinámicos 1-dimensionales planos que nos será de gran utilidad a nosotros para la prueba del Teorema 5.10:

Lema 5.4 *Sea G^1 un grafo dinámico 1-dimensional y sea G su generador. Si el grafo G_f es plano entonces tiene una inmersión tal que las aristas incidentes a s y a t están situadas en el mismo orden o en orden inverso.*

En la Figura 5.9 vemos cuales son las situaciones que se pueden dar según el Lema 5.4, donde se considera *vértice principal* de T a un vértice tal que al borrarlo desconecta los vértices de entrada y de salida del árbol, y que denotamos por u_0 y u_1 a las copias de u en $BCJ(G_0)$ y $BCJ(G_1)$.

Vamos ahora a caracterizar los grafos dinámicos 1-dimensionales que son VAP-cilíndricos.

Teorema 5.5 *Un grafo dinámico 1-dimensional G^1 es VAP-cilíndrico si y sólo si el grafo asociado G_f es plano.*

Demostración

Si G^1 es VAP-cilíndrico entonces el subgrafo $G_{-1} \cup G_0 \cup G_1 \cup G_2$ es cilíndrico, y por lo tanto es plano y el resto de G^1 está en una de las dos caras exteriores del subgrafo. Como $G_f - \{(s, t)\}$ es un menor de este subgrafo entonces es cilíndrico, así pues plano, y s y t están situados cada uno en la cara exterior, por lo tanto G_f es plano.

Veamos en sentido contrario, si G_f es plano, entonces es posible obtener una inmersión tal que las aristas incidentes de s y t estén situadas en el mismo orden o en el orden inverso por el Lema 5.4. Estos vértices pertenecen cada uno de ellos a una de las caras exteriores de la inmersión del grafo en el cilindro. Con esta inmersión, podemos repetir infinitamente el grafo $G_0 \cup G_1$ tanto hacia la derecha como hacia la izquierda para obtener una representación VAP-cilíndrica de G^1 . ■

La caracterización obtenida, nos permite obtener un algoritmo eficiente que nos dice cuando un grafo dinámico es VAP-cilíndrico, ya que existen estos algoritmos que nos dice cuando un grafo finito es plano como podemos ver en [16, 11]. Además, N. Chiba en [45] nos da un algoritmo que en tiempo lineal obtiene la inmersión de un grafo finito plano en el plano.

Como sabemos que si G es un grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico cilíndrico entonces tiene un único final de Freudenthal, será por lo tanto homeomorfo a un grafo 2-dimensional dinámico plano que según el resultado dado por Cáceres, Dana y Márquez en [11] es equivalente a ser VAP-plano dinámico y por lo tanto será $\frac{1}{2}$ -dimensional VAP-cilíndrico.

El recíproco también se tiene, es decir, si el grafo es $\frac{1}{2}$ -dimensional VAP-cilíndrico tiene un único final de Freudenthal y será homeomorfo a un grafo 2-dimensional dinámico VAP-plano y de nuevo por la equivalencia anterior será 2-dimensional dinámico plano, así que será homeomorfo a un grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico cilíndrico.

Así pues, podemos obtener una inmersión eficiente con respecto al número

de vértices del grafo finito G que genera a G^1 sin puntos de acumulación de vértices. Como consecuencia tenemos:

Teorema 5.6 *Sea G^1 un grafo dinámico 1-dimensional. Entonces se puede computar cuando G^1 tiene o no tiene una inmersión VAP-cilíndrica en tiempo lineal.*

5.5 Grafos Dinámicos EAP-cilíndricos

En esta sección vamos a estudiar los grafos dinámicos sin ningún tipo de acumulación de puntos, haciendo la distinción si el grafo infinito es conexo o no. Un algoritmo que resuelve el problema de la conectividad de grafos dinámicos planos 1-dimensionales fue dado por Orlin en [46]. Generalmente, para todas las dimensiones un algoritmo que estudia la conectividad de grafos dinámicos planos está presentado en [15].

Como consecuencia del teorema probado en el capítulo anterior, cuando un grafo es conexo, los conceptos de VAP- $S(n)$ y EAP- $S(n)$ son equivalentes. Por lo tanto, estudiaremos el problema de los grafos EAP-cilíndricos en el caso no conexo.

Teorema 5.7 *Un grafo dinámico 1-dimensional es EAP-cilíndrico si y sólo si cada componente conexa es VAP-cilíndrica.*

Demostración

Consideremos G^1 el grafo dinámico 1-dimensional. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que G^1 no tiene componentes finitas conexas. Por otra parte, cada componente conexa infinita de G^1 puede ser considerada en sí misma como un grafo dinámico 1-dimensional.

Si G^1 es EAP-cilíndrico, entonces es VAP-cilíndrico si cada componente conexa es VAP-cilíndrica también.

Recíprocamente, si cada componente conexa de G^1 es VAP-cilíndrica entonces es EAP-cilíndrica y como es un grafo dinámico 1-dimensional, puede-

mos dar una inmersión en una banda del cilindro tal que dicha representación no presenta puntos de acumulación. ■

De esto podemos deducir, que ver si un grafo dinámico 1-dimensional es EAP-cilíndrico es equivalente a ver si cada una de sus componentes conexas son VAP-cilíndricas y este proceso podemos hacerlo en tiempo lineal.

Abordemos ahora el caso de un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional.

Teorema 5.8 *Un grafo dinámico no conexo $\frac{1}{2}$ -dimensional es EAP-cilíndrico si y sólo si cada una de las componentes conexas consideradas como un grafo dinámico 1-dimensional son VAP-cilíndricas.*

Demostración

Claramente, cada componente infinita conexa H de un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional, $G^{\frac{1}{2}}$ es en sí misma un grafo dinámico $\frac{1}{2}$ -dimensional. Por lo tanto, podemos tomar el generador de una componente y repetirla en ambas direcciones de la recta real R , debido a esto tenemos un grafo dinámico 1-dimensional H_* . El grafo construido con todos estos H_* lo denotaremos por $G_*^{\frac{1}{2}}$.

Si H_* es VAP-cilíndrico para cada componente H , entonces el grafo $G_*^{\frac{1}{2}}$ es EAP-cilíndrico por el Teorema 5.12. Como $G^{\frac{1}{2}}$ es un subgrafo de $G_*^{\frac{1}{2}}$, éste es también EAP-cilíndrico.

Recíprocamente, si $G^{\frac{1}{2}}$ es EAP-cilíndrico entonces no contiene a una subdivisión de $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$ y cada componente conexa de $G_*^{\frac{1}{2}}$ no contiene una subdivisión de L_5^∞ ó $L_{3,3}^\infty$, así, estas componentes son VAP-cilíndricas por el Corolario 1.3 de [5]. Por lo tanto tenemos que $G_*^{\frac{1}{2}}$ es VAP-cilíndrico. ■

Como en el caso anterior, es posible comprobar esto en tiempo lineal con respecto al número de componentes conexas del grafo dinámico no conexo $G^{\frac{1}{2}}$.

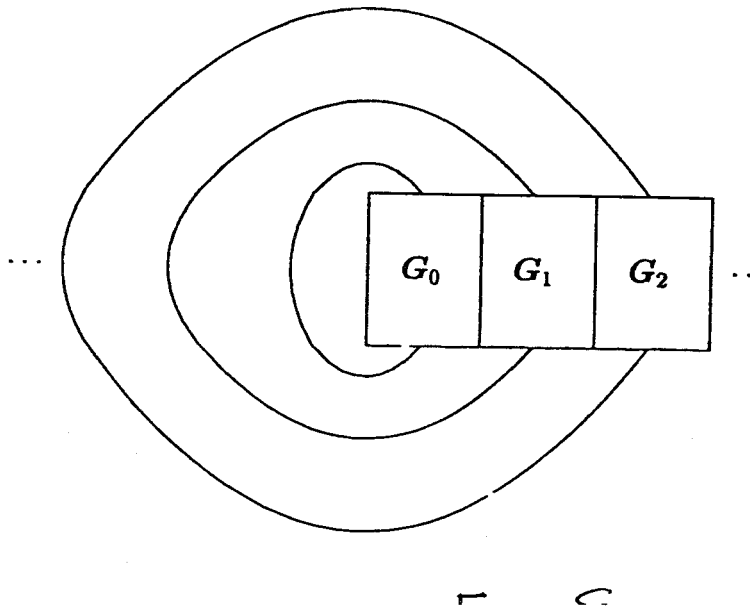


Figura 5.10:

5.6 Grafos Pattern

Un circuito VLSI es físicamente plano si es EAP-plano. Sería pues interesante asegurar que una representación plana de un grafo puede ser construida repitiendo una inmersión plana del generador.

Ésta es una condición indispensable para fabricar industrialmente circuitos VLSI y tales grafos son llamados *grafos pattern*. En esta sección vamos a caracterizar tales grafos.

En la Figura 5.10 podemos ver que no cada grafo dinámico EAP-plano G^k es un grafo pattern.

Sin embargo en las inmersiones en el cilindro, los grafos *pattern-cilíndricos* coinciden con los grafos *EAP-cilíndricos*.

Luego concluyendo, podemos comprobar si un grafo es *pattern-cilíndricos* o no en tiempo lineal.

5.7 Conclusiones

Teniendo en cuenta el resultado probado en el capítulo anterior que nos dice que en un grafo conexo es equivalente ser *EAP-cilíndrico* y *VAP-cilíndrico* y considerando los resultados probados en éste, podemos concluir con las siguientes equivalencias:

- Grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico cilíndrico
- Grafo 1-dimensional dinámico cilíndrico
- Grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico VAP-cilíndrico
- Grafo $\frac{1}{2}$ -dimensional dinámico EAP-cilíndrico con una componente conexa.

Como consecuencia del Teorema tenemos que un grafo $G^{\frac{1}{2}}$ -cilíndrico es equivalente a ser un grafo G^2 -plano y que según el resultado dado por [11] es equivalente a que sea G^2 -VAP-plano. Por lo tanto, tenemos que todas las equivalencias anteriores quedan caracterizadas por los grafos G^2 -planos; así pues el algoritmo que testa la planaridad de los grafos dinámicos 2-dimensionales nos sirve para todos estos casos. Además, si un grafo es cilíndrico, lo cual es equivalente a ser plano, entonces podemos dar una inmersión cilíndrica de forma eficiente.

Capítulo 6

Condiciones Métricas

Vamos a estudiar ciertas propiedades métricas relacionadas con los grafos infinitos numerables y localmente finitos planos. Caracterizaremos los grafos que admiten una inmersión en el plano cuyas aristas son segmentos rectilíneos y tales que sus caras tienen área al menos 1; y para los grafos que tienen una representación plana por segmentos rectilíneos de longitud mayor o igual a 1 encontraremos una caracterización para los *grafos dinámicos cilíndricos*, que son aquellos que presenta un punto de acumulación de vértices en el plano o una inmersión cilíndrica recubridora con dos finales de Freudenthal inestables.

6.1 Introducción

Wagner [61], Fáry [21] y Stein [53] independientemente probaron que cada grafo finito plano tiene una representación plana donde las aristas son segmentos rectilíneos. Tutte en [59] introdujo las representaciones convexas y probó que cada grafo finito plano 3-conexo tiene una representación de ese tipo de tal forma que cada vértice que no esté en el ciclo exterior es el baricentro de sus vecinos. Ungar [60] demostró que cada grafo plano cúbico cíclicamente 4-conexo por aristas tiene una representación rectangular. Algunos de estos resultados han sido generalizados por Thomassen

en [55, 56]. Para grafos planos infinitos con alto grado de simetría, incluso representaciones mucho más bellas son posibles como podemos encontrar en [27]. Thomassen [58] obtuvo el resultado de Wagner, Fáry y Stein para grafos infinitos, resolviendo así un problema propuesto por Adler [1]. Además probó que cada grafo plano, conexo, localmente finito, sin acumulación de vértices es isomorfo a un subgrafo de una triangulación en línea recta y como aplicación a este resultado demostró que todo grafo plano, infinito, localmente finito, sin acumulación de vértices (o sin acumulación de aristas) tiene una representación en línea recta con la misma propiedad. En su visita a nuestro Departamento nos propuso el estudio de ciertas propiedades métricas de una familia de grafos planos que denotamos por *clase 3* y que está formada por aquellos grafos que admiten una representación plana donde las aristas son segmentos rectilíneos de longitud, al menos 1. En el estudio de los grafos de *clase 3* nos pareció interesante definir y estudiar otra familia de grafos que llamamos *clase 4*, que está formada por aquellos grafos planos que admiten una representación por segmentos rectilíneos tales que las áreas de las caras sean, al menos, 1 y que caracterizaremos también.

6.2 Inmersiones de grafos con áreas de las caras acotadas

Caracterizaremos los grafos de *clase 4* y veremos que relación guardan con los grafos de *clase 3*.

Para ello tendremos que probar un importante resultado que nos dice que: *toda triangulación del plano admite una inmersión en línea recta en una banda plana acotada con las áreas de las caras mayores o iguales a 1.*

Estrechamente relacionado con las propiedades de *VAP – planaridad* y *EAP – planaridad* están diversas condiciones que distintos autores han impuesto a familias de grafos. Así, consideremos las siguientes clases de grafos planos:

Clase 1: Los grafos con una representación plana tal que cada punto del

plano sea el centro de un disco abierto que contiene a un número finito de aristas.

Clase 2: Los grafos con una inmersión plana de manera que las aristas tengan diámetro 1 como mínimo.

Clase 3: Los grafos con una representación en el plano donde las aristas son segmentos rectos de longitud al menos 1.

Evidentemente, todo grafo de clase i es de clase $i - 1$ ($i = 2, 3$). En realidad, no es difícil probar que a pesar de la similitud de las tres definiciones, las clases 1 y 2 son fáciles de caracterizar y no ocurre lo mismo con la clase 3.

En particular, todo grafo plano con una cantidad numerable de aristas es de *clase 2* (basta dar una inmersión del grafo arista por arista y en cada paso elegir dos puntos de la cara donde va a ir la arista nueva a distancia $1 + \epsilon$, y dibujar la arista atravesando esos puntos).

Sin embargo, es evidente, que la clase de grafos que hemos introducido más interesante es la que hemos llamado *clase 3*. Por tanto, la pregunta natural es, ¿los grafos planos numerables son de clase 3?. La respuesta es negativa como se puede observar en la Figura 6.1, donde el dibujo se repite indefinidamente hacia dentro y hacia fuera.

Nuestro problema principal, será por tanto encontrar una caracterización de los grafos de *clase 3*. Esta cuestión contiene en sí muchos subproblemas. Por ejemplo, una resolución algorítmica del problema para clases de grafos que presenten alguna regularidad como los grafos periódicos, tendría gran aplicación en una disciplina emergente como es el trazado de grafos.

Ser de *clase 3* es una propiedad métrica que no es topológica, lo que añade cierta dificultad a la caracterización, ya que aunque una subdivisión de un grafo de clase 3 sigue siendo de clase 3, el recíproco no es cierto, como

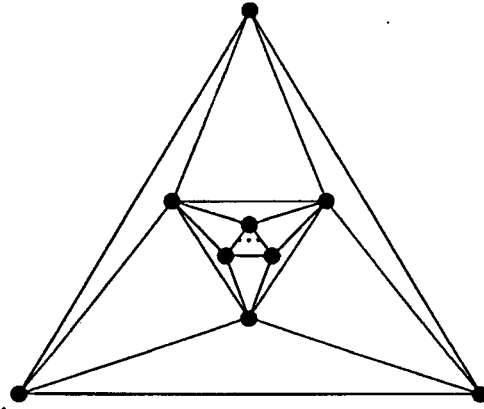


Figura 6.1:

podemos observar en la Figura 6.2, donde el grafo de la izquierda no es de clase 3, pero el de la derecha que es una subdivisión del anterior, sí lo es.

Relacionando la *clase 3* con la *clase 4* se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.1 *Todo grafo de clase 4 es de clase 3.*

Demostración

Veamos que, dado un grafo G , si no es de clase 3 entonces no es de clase 4.

Si G no es de clase 3 se tiene trivialmente que en toda representación plana por segmentos rectilíneos existe una sucesión de aristas $\{e_n\}$ cuya longitud tiende a 0.

G debe contener ciclos. De lo contrario sería un árbol, y por tanto, de clase 3.

Consideremos todas las sucesiones de aristas cuya longitud tiende a 0. Si ninguna de ellas tiene un punto de acumulación en el plano, todas ellas se

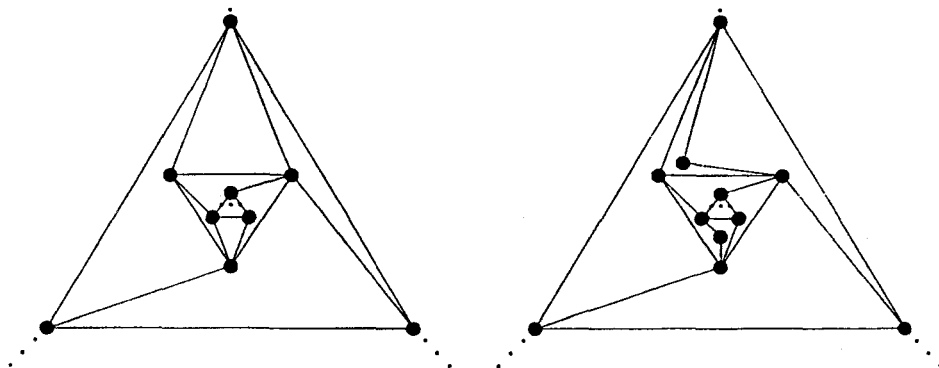


Figura 6.2:

dirigen hacia el infinito. Luego se puede dar una representación de G con las aristas de las sucesiones tan grandes como se quiera (y las otras aristas son suficientemente grandes). Por tanto G sería de clase 3.

Sean ahora todas las sucesiones $\{e_n\}$ cuya longitud tiende a 0 y tienen un punto de acumulación. Siempre podemos dar una representación plana de G en la que aparezca una cara exterior (por ejemplo, dando una inmersión de todo el grafo dentro de una cara). Supongamos que todos esos puntos de acumulación están en la cara exterior de G . Entonces podemos dar una representación por segmentos rectilíneos de G en la que la cara exterior esté tan lejos como se quiera y, por tanto, las aristas de las sucesiones e_n serían arbitrariamente grandes. Luego G es de clase 3.

Consideremos las sucesiones de aristas e_n cuya longitud tiende a 0 y que acumulan en un punto. Existe un ciclo de G en cuyo interior están los puntos de acumulación de dichas sucesiones. Entonces, el interior de dicho ciclo ha de contener infinitas caras de G (ya que de ser este número finito, por contener a los puntos de acumulación de las sucesiones, contiene infinitas aristas e_n , por tanto habría uno o varios árboles). Dando al ciclo un área suficientemente grande, podemos representar los árboles con aristas de longitud mayor que

1 (por ejemplo, inscribiendo los 1-caminos en rectángulos de altura 1 y base arbitrariamente pequeña).

Por tanto existe un ciclo C de G que contiene infinitas caras en su interior. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ dichas caras. Se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Área}(A_i) \leq \text{Área}(C) < +\infty$. Esto implica que las áreas de A_i tienden a 0, y, por tanto, G no es de clase 4. ■

Sin embargo, existen grafos de clase 3 que no son de clase 4. El grafo de la derecha de la Figura 6.2 es de clase 3 pues admite una representación donde las aristas se acumulan en un triángulo interior de lado 2. Esto nos asegura que toda arista tiene longitud, al menos 1. No obstante, dicho grafo no puede ser de clase 4 pues existen ciclos que contienen en su interior infinitas caras y encierran un área finita.

Recordemos que un final de un grafo es *estable* si no contiene ciclos.

Dado un grafo G y un ciclo C de G , al grafo generado por todos los vértices estrictamente incluidos en la región finita definida por el ciclo C , lo denominamos *disco abierto generado por C en G* y lo notaremos por $D(C, G)$ o $D(G)$ cuando no haya confusión. Al grafo generado por $V(D(G)) \cup V(G)$ lo denominamos *disco cerrado generado por C en G* y lo notaremos por $\overline{D(C, G)}$ ó bien $\overline{D(G)}$.

Dado un grafo Γ y dos ciclos C y C' tal que $V(C) \subseteq V(D(C'))$, el grafo generado por $\overline{V(D(C'))} - V(D(C))$ lo denominamos *corona generada por los ciclos C y C'* y lo notaremos por $\Gamma(C, C')$; siendo C y C' los ciclos interior y exterior de la corona respectivamente.

Dada una triangulación G y un ciclo C de G , cualquier ciclo C' que cumpla:

1. $V(C) \subseteq V(D(C'))$.

2. Para todo $x, y \in V(C')$, si $xy \in A(G)$ entonces $xy \in A(C')$,

lo denominaremos *ciclo minimal generado por C en G* y lo notaremos por $\mathcal{C}(C, G)$ ó simplemente $\mathcal{C}(C)$.

Dada una triangulación infinita Γ , cualquier cara de la triangulación es

una corona minimal 1-ésima Cor_1 ; su ciclo exterior es el 3-ciclo C_1 que la define. Y dada una corona minimal n -ésima Cor_n con ciclo exterior C_n , una corona minimal $(n+1)$ -ésima es $Cor_{n+1} = \Gamma(C_n, C_{n+1})$ con $C_{n+1} = \mathcal{C}(C_n, \Gamma)$.

Teorema 6.2 *Dada una triangulación Γ y una corona minimal $\Gamma(C, C')$ y tres vértices distintos a, b y $c \in C_n$, entonces existen tres caminos P_1, P_2 y P_3 disjuntos que unen C con C' , cumpliendo:*

- $(V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)) \cap V(C) = \{a, b, c\}$.
- $(V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)) \cap V(C') = \{a', b', c'\}$.
- Para todo $x, y \in V(P_i)$, si $xy \in A(\Gamma)$ entonces $xy \in A(P_i)$.

Demostración

Sea $\Gamma(C, C')$ una corona minimal, en las condiciones de la definición, de una triangulación del plano Γ y sea Γ' el grafo resultante de contraer todas las aristas de Γ excepto aquellas que unan los vértices a, b y $c \in C$, podemos pensar que dejamos invariante los vértices a, b y c y contraemos todo lo demás, hasta llegar a una de las siguientes configuraciones (ver Figura 6.3):

Es fácil ver que en ambas configuraciones las aristas aa', bb' y cc' están separadas por otras tantas aristas x, y, z , entonces al descontraer Γ' y las aristas aa', bb' y cc' se generan tres subgrafos de Γ' que no se intersectan pues están separados por los tres subgrafos generados por x, y y z de cada uno de los tres primeros tomamos un camino minimal que cumpla las condiciones impuestas en el enunciado. ■

Dada una triangulación plana infinita Γ y una corona minimal $\Gamma(C, C')$, diremos que $\Gamma(C, C')$ tiene una *inmersión estándar* si existe una inmersión plana en línea recta de forma que su conjunto de puntos está definido por dos

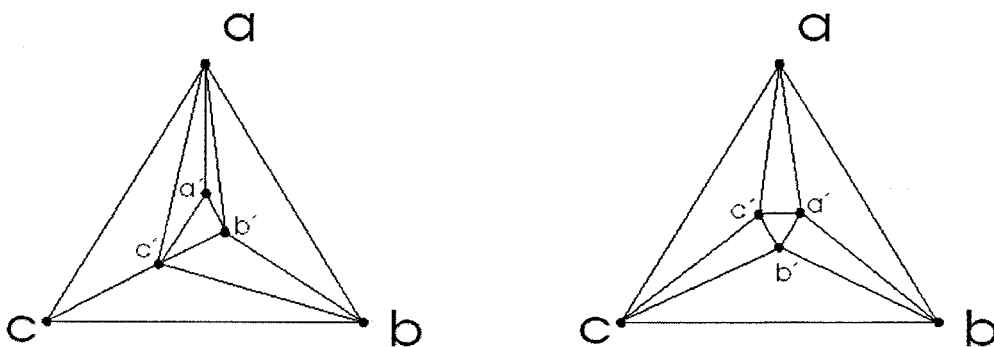


Figura 6.3:

triángulos equiláteros concéntricos, además de tres segmentos rectos que los unen por los vértices y una cantidad finita de segmentos rectos que triangulan el espacio entre ambos triángulos; correspondiéndose el triángulo interior con C y el exterior con C' .

Teorema 6.3 *Toda corona minimal de una triangulación del plano tiene una inmersión estándar.*

Demostración

Sólo hay que tener en cuenta lo siguiente:

- dos vértices de los ciclos $aa'c'c$, $aa'b'b$ y $bb'c'c$ son adyacentes en la triangulación sólo si lo son en los respectivos ciclos.
- los ciclos pueden ser dibujados mediante segmentos rectos haciendo que la región delimitada por ellos sea estrellada. ■

Una triangulación del plano se dice *estándar* si tiene una inmersión plana en la que existe una sucesión de coronas minimales en forma estándar.

Teorema 6.4 *Toda triangulación del plano, tiene una inmersión estándar.*

Demostración

Este teorema es consecuencia directa del anterior, basta con colocar las coronas sucesivamente y para que coincidan los vértices basta con colocarlos uniformemente repartidos en cada segmento recto de los ciclos. ■

Lema 6.5 *Toda triangulación del plano admite una inmersión en línea recta en una banda plana acotada con las áreas de las caras mayores o iguales a 1.*

Demostración

Dada la banda infinita vamos a colocar las coronas minimales sucesivamente de forma que las áreas de las caras sean mayores que uno.

Vamos a verlo por inducción :

- La primera corona minimal es un ciclo con una única cara. Basta pues colocar los vértices en los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.
- Supuesta colocada la corona minimal n -ésima con área de las caras mayores o iguales a uno y los vértices en los puntos $(-2 + \frac{1}{2^{n-1}}, y_{n-1})$, $(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, y_{n-1})$, $(0, y'_{n-1})$, colocamos inicialmente el ciclo inferior de la corona $(n + 1)$ -ésima siendo sus vértices extremos $(-2 + \frac{1}{2^{n-1}}, y_{n-1})$, $(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, y_{n-1})$, además de situar los vértices exteriores uniformemente repartidos y después colocamos los vértices interiores. Sea λ la menor área de todas las caras, si es mayor que 1 ya está, si no lo es, ampliamos lo que sea necesario el semiplano que está estrictamente debajo de la corona n -ésima (esta deformación no afecta a la conexión de vértices y sí a las áreas de los triángulos que definen). Con el ciclo inferior ya situado, colocamos los dos laterales, con los vértices exteriores uniformemente repartidos en los dos segmentos rectos, teniendo

sólo en cuenta que los ciclos generados por los caminos P_i y los segmentos de los ciclos estrellados. Además podemos exigir que los vértices interiores de los ciclos laterales tengan la segunda coordenada estrictamente mayor que y'_n . De esta forma, simplemente ampliando lo que sea necesario el semiplano que está estrictamente sobre la corona n -ésima, logramos aumentar las áreas de los triángulos interiores tanto como sea necesario. Es evidente, por construcción que no hay ningún vértice con abcisa menor que -2 ó mayor que 2 . Luego tenemos resuelto el problema. ■

Tenemos el siguiente resultado para los grafos de clase 4.

Teorema 6.6 *Un grafo sin finales estables es VAP-plano si y sólo si es de clase 4.*

Demostración

Condición Necesaria

Supongamos que G no es VAP-plano, por lo tanto contendrá a alguno de los subgrafos prohibidos por Halin [29]. Cada uno de ellos tiene un final encerrado en una cara con área finita. Como por hipótesis, los finales de G no son estables, entonces G posee un final no estable encerrado por un área finita. Sin embargo, un final no estable contiene infinitos ciclos, por lo tanto G contiene infinitos ciclos dentro de una cara finita. Sean $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ dichos ciclos, y sea K dicha área. Entonces tendremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Área}(C_n) \leq \text{Área}(K) < +\infty$. Así pues $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Área}(C_n) = 0$. Por lo tanto sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe C_n tal que $\text{Área}(C_n) < \varepsilon$ y en ese caso

G no es de clase 4.

Condición Suficiente

Supongamos primero que el grafo es conexo.

Sea G un grafo conexo y VAP-plano, entonces según el resultado de Thomassen dado en [58] el grafo admite una representación EAP-plana por segmentos rectilíneos, luego G sería de clase 4.

Supongamos que el grafo no es conexo. Sea n el número de componentes conexas que tiene el grafo. G es VAP-plano, luego cada una de sus componentes conexas son VAP-planas y, por el resultado dado por Thomassen en [58], cada una de sus componentes conexas es isomorfa a un subgrafo de una triangulación por segmentos rectilíneos. Por el Lema 6.5 sabemos que toda triangulación del plano admite una inmersión en una banda de tal forma que todas las caras tengan áreas mayores o iguales que 1. Por lo tanto, podemos dar una inmersión del grafo tal que cada componente conexa la sumergimos en una banda del plano con el área de las caras mayores o iguales a 1; así pues, podemos concluir que el grafo G es de clase 4. ■

Corolario 6.7 *Todo grafo mosaico en $S(n)$ con $n \geq 2$ no es de clase 4.*

Demostración

Un grafo mosaico no tiene finales estables. Al estar en una superficie con 2 ó más finales, dicho grafo recubrirá al plano pero tendrá al menos 2 puntos de acumulación de vértices. Luego no puede ser VAP-plano. Por tanto, por el Teorema 6.6 no puede ser de clase 4. ■

6.3 Inmersiones de grafos con longitud de aristas acotadas

Vamos a caracterizar los grafos que admiten una inmersión plana por segmentos rectilíneos tales que la longitud de sus aristas están acotadas tanto inferior como superiormente, para grafos dinámicos y recubridores del plano con dos finales de Freudenthal inestables.

Al definir la *clase 3* lo que estudiamos son los grafos que admiten una inmersión plana por segmentos rectilíneos donde la longitud de las aristas está acotada inferiormente. Wagner en [62] sugirió buscar representaciones en las cuales la relación entre la longitud de la arista más corta y la arista más larga no fuese demasiado grande. Por ello, nos pareció interesante pensar en aquellos grafos que tuvieran además acotada superiormente la longitud de sus aristas. En este sentido, decimos que un grafo es de *clase $3\frac{1}{2}$* si admite una inmersión plana por segmentos rectilíneos tal que la longitud de sus aristas están acotadas superior e inferiormente.

Con respecto a los grafos de clase 3 tenemos que:

Proposición 6.8 *Todo grafo VAP-plano es de clase 3.*

Demostración

Sabemos que todo grafo VAP-plano es isomorfo a un subgrafo de una triangulación infinita con segmentos rectos según el resultado dado por Thomassen en [58]. Por lo tanto es VAP-plano por segmentos rectilíneos, con lo cual es de clase 3. ■

El recíproco no es cierto. Cualquiera de los subgrafos prohibidos por Halin para la VAP-planaridad verifica que es de clase 3 (ver Figura 6.4).

Proposición 6.9 *Un grafo conexo, infinito, localmente finito, plano y con*

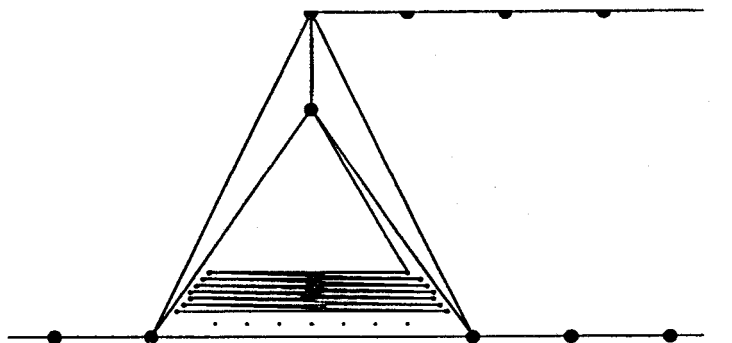


Figura 6.4:

un sólo final es de clase 3.

Demostración

Sabemos que si un grafo conexo tiene un sólo final es equivalente ser plano y ser EAP-plano. Así pues tenemos que dicho grafo es de clase 3. ■

Nos centraremos de ahora en adelante en los grafos que no son VAP-planos con al menos dos finales inestables e intentaremos dar una caracterización para clases de grafos que presenten alguna regularidad como los grafos periódicos o dinámicos.

Sea $G = (V, A)$ un grafo y sea Γ una representación plana de G . Diremos que $e = xy$ es una *arista virtual* de Γ si se verifica que $x, y \in V$, $xy \notin A$ y existe una curva de Jordan δ tal que $\delta(0) = x$, $\delta(1) = y$ tal que $\delta \cap \Gamma^* = \{x, y\}$, siendo Γ^* el conjunto de todos los puntos de Γ (ver Figura 6.5 de la izquierda).

Consideremos $G = (V, A)$ un grafo y Γ su representación plana. Decimos que $P = x_1x_2\dots x_n$ es un *camino virtual* si cualquiera que sea $i = 1, 2, \dots, n$, x_ix_{i+1} son aristas virtuales de Γ y cualesquiera que sean i y $j = 1, 2, \dots, n$

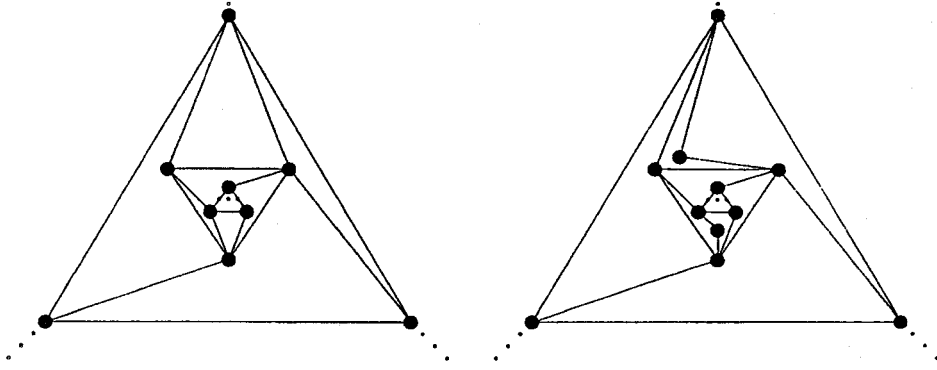


Figura 6.5:

tales que $x_i x_j \notin A$ (ver Figura 6.5 de la derecha).

Se dice que un camino es *pseudo virtual* cuando está formado por aristas reales (al menos una) y por aristas virtuales (al menos una). Si todas son reales entonces el camino es real y si todas son virtuales dicho camino será virtual.

Dado un ciclo de un grafo $C: x_1 x_2 \dots x_n x_1$ tal que exista $x_i x_j \in A$ con $j \neq i+1$ e $i = 1, 2, \dots, n-1$, llamamos *ciclo reducido* C^* a $x_1 x_2 \dots x_i x_j x_{j+1} \dots x_n x_1$.

Un grafo G es *fractal* si existen una sucesión de ciclos disjuntos

$$\dots Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots$$

de tal forma que para todo $v \in G$,

$$v \text{ está } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Z_n\text{-periconectados con dos ciclos consecutivos en } \mathbb{Z}.$$

Además, si llamamos

$Cor(Z_m, Z_{m+1})$ al subgrafo generado por $Z_m \cup Z_{m+1}$ y $v \in G$ tal que v está

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Z_n\text{-periconectado con } Z_m \text{ y } Z_{m+1}$$

entonces tenemos que

$G - Cor(Z_m, Z_{m+1})$ es isoformo a $G - Cor(Z_n, Z_{n+1})$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6.10 *Sea G un grafo infinito plano fractal con al menos dos finales inestables y sea Γ una inmersión plana de G por segmentos rectilíneos. G es de clase 3 si y sólo si existen dos caminos virtuales infinitos y un tercer camino real o pseudovirtual en Γ .*

Demostración

Condición Necesaria

Como G es *fractal* tenemos que Γ es *fractal*, luego existen una sucesión de ciclos disjuntos en Γ ,

$$\dots Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots$$

Consideraremos los ciclos reducidos

$$\dots Z_{-2}^*, Z_{-1}^*, Z_0^*, Z_1^*, Z_2^*, \dots$$

Lo demostraremos por inducción en m :

Para $m = 0$ consideramos la $Cor(Z_0^*, Z_1^*)$ de Γ .

Sean a, b y c tres vértices de Z_0^* y a', b' y c' tres vértices de Z_1^* .

Consideremos P_1, P_2 los caminos virtuales y \widetilde{P}_3 el camino pseudo-virtual o real, que unen a con a' , b con b' y c con c' respectivamente (ver Figura 6.6), es decir,

$$\begin{aligned} P_1 &: a = a_1, a_2, \dots, a_m = a' \\ P_2 &: b = b_1, b_2, \dots, b_k = b' \\ \widetilde{P}_3 &: c = c_1, c_2, \dots, c_l = c' \end{aligned}$$

Sea Γ' la representación obtenida de Γ tal que

$$d(a, a') < \varepsilon, d(b, b') < \varepsilon, d(c, c') < \varepsilon.$$

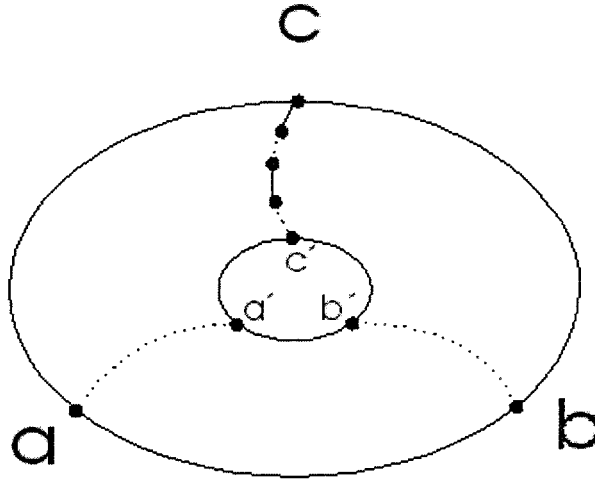


Figura 6.6:

Entonces tenemos que,

$$Z_0^* \cong T_0 \text{ y } Z_1^* \cong T_1,$$

donde T_0 es un triángulo de vértices \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} que representan a a , b y c respectivamente
 y T_1 es otro triángulo de vértices \bar{a}' , \bar{b}' y \bar{c}' que representan a a' , b' y c' respectivamente (ver Figura 6.7).

Para que

$$d(a, a') < \varepsilon, d(b, b') < \varepsilon, \text{ y } d(c, c') < \varepsilon,$$

procedemos de la siguiente forma:

contraemos las aristas de los caminos virtuales P_1, P_2 , así como las aristas virtuales y reales del camino pseudo-virtual \widetilde{P}_3 , llevando T_1 sobre T_0 , descontrayendo posteriormente las aristas de $P_1 \frac{\varepsilon}{m}$, las de $P_2 \frac{\varepsilon}{k}$ y las de $\widetilde{P}_3 \frac{\varepsilon}{l}$.

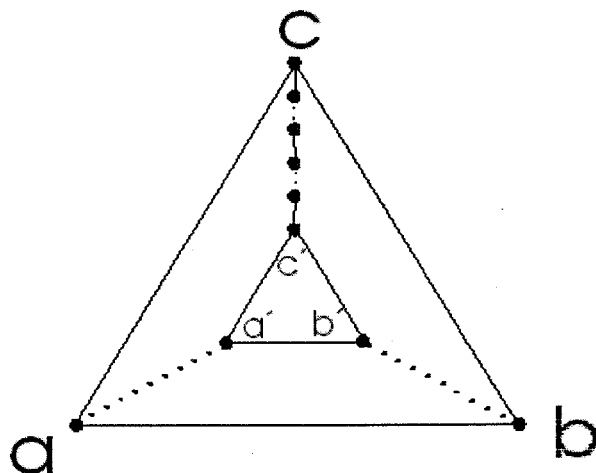


Figura 6.7:

Γ seguirá siendo una representación plana por segmentos rectilíneos, aunque en el camino pseudo-virtual o real seguiremos teniendo aristas no acotadas inferiormente. Los tres caminos nos dividen la $Cor(T_0, T_1)$ en tres regiones R_1, R_2, R_3 .

Sean N_1 el número de vértices que hay en R_1 , N_2 los que hay en R_2 y N_3 el número que hay en R_3 .

Consideremos $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$.

Con esta elección de N para la longitud del lado del triángulo T_1 podemos acumular uno de los finales de Γ' sobre dicho triángulo. Con T_0 no tenemos problemas ya que podemos tomarlo tan grande como queramos. Repartiendo uniformemente los vértices sobre los lados de los triángulos T_0 y T_1 y en las correspondientes regiones R_1, R_2 y R_3 podemos garantizar que las longitudes de las aristas sean mayores o iguales a 1. Para que las aristas reales que están en \tilde{P}_3 sean mayores o iguales que 1 haremos lo siguiente: las aristas virtuales las dejamos tal como están, y las aristas reales abrimos el ángulo tanto como

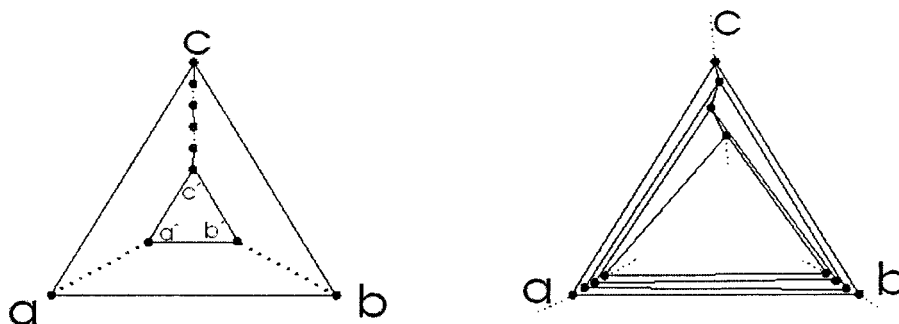


Figura 6.8:

sea posible tal que sus vértices extremos sean admisibles y dándole a la arista longitud $1 + \varepsilon$ (ver Figura 6.8).

Supuesto cierto para $-m$, con $m \in \mathbb{N}$, para $-(m + 1)$ es evidente.

Supuesto cierto para $m \in \mathbb{N}$, para $m + 1$ hacemos lo siguiente: Puesto que el triángulo sobre el que se acumula uno de los finales es de lado N podemos llevar Z_{m+1}^* a un triángulo T_{m+1} contenido en T_m y procederemos como en el caso primero para $m = 0$.

Condición Suficiente

Como el grafo es de clase 3, existirá una inmersión plana de él, por segmentos rectilíneos tal que todas sus aristas tengan longitud mayores o iguales que 1. Supongamos por reducción al absurdo que no existen dos caminos virtuales infinitos y un camino real o pseudo-virtual.

En primer lugar, consideremos que existen dos caminos virtuales infinitos y no existe un camino real o pseudo-virtual. Tendremos una situación como la de la Figura 6.9 y siempre tendremos una arista que no podremos ponerla en línea recta.

Supongamos por tanto que existen a lo más un camino virtual infinito y un camino real o pseudo-virtual. Como el grafo es de clase 3 y fractal existirá una inmersión plana de clase 3, Γ que se puede poner como una sucesión de

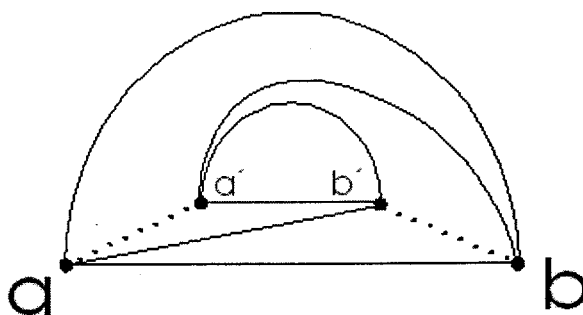


Figura 6.9:

ciclos disjuntos (ver Figura 6.10),

$$\dots, Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots$$

Sean $\dots, \Omega_{-2}, \Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ las poligonales cerradas que los representan. Podemos acumular sobre una poligonal ya que de lo contrario tendría un único punto de acumulación α y considerando la bola de centro α y radio $1 - \varepsilon$ tendríamos que existiría un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ Ω_n estaría contenido en la bola de centro α y radio $1 - \varepsilon$. Luego las aristas de Ω_n tendrían longitud menor que 1, con lo cual no sería de clase 3. Así pues $\dots, \Omega_{-2}, \Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ se acumulan en una poligonal. Sean a_n, b_n sucesiones de vértices de Ω_n alineados, y sean a y b sus puntos de acumulación. Consideramos las bolas de centro a y b respectivamente y radio $1 - \varepsilon$ para un cierto $\varepsilon > 0$. Como las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a a y b respectivamente tendremos que a partir de unos ciertos n_0 y n_1 , a_n está en la bola de centro a y radio $1 - \varepsilon$ y b_n pertenece a la bola de centro b y radio $1 - \varepsilon$. Sea $k = \max\{n_0, n_1\}$. Consideremos Ω_k y Ω_{k+1} . Por hipótesis, existe a lo más un camino virtual y un camino real o pseudo-virtual, luego los segmentos

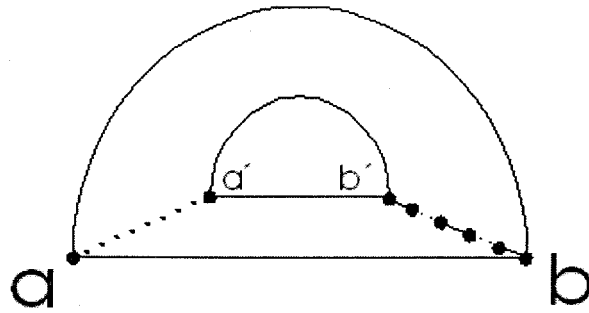


Figura 6.10:

$a_k a_{k+1}$ ó $b_k b_{k+1}$ contendrán aristas del grafo y por estar contenida en la bola de radio $1 - \varepsilon$, su longitud será menor que 1. Con lo que el grafo no sería de clase 3. ■

Corolario 6.11 *En las hipótesis del teorema tenemos que si existen los tres caminos virtuales infinitos entonces G es de clase $3\frac{1}{2}$.*

Demostración

Si tenemos los tres caminos virtuales el mismo razonamiento que hacemos en el teorema hacia dentro podríamos hacerlo hacia fuera. En lugar de acumular el grafo sobre una poligonal lo haríamos sobre una corona triangular con tres puntos de acumulación de vértices. Así tendríamos acotada la longitud de las aristas tanto inferior como superiormente. ■

Se puede probar sin más que seguir un esquema de demostración similar al de la Proposición 6.1 que todo grafo de clase 4 es de clase $3\frac{1}{2}$. El recíproco no es cierto, como se puede fácilmente observar en la Figura 6.5 de la derecha

que es de clase $3\frac{1}{2}$, pues existen 3 caminos virtuales infinitos y sin embargo no es de clase 4, al existir un ciclo con área finita que contiene en su interior infinitos ciclos.

6.4 Conclusiones y problemas abiertos

En este último capítulo no hemos hecho más que comenzar abriendo una nueva línea de investigación que sería *encontrar una caracterización de los grafos de clase 3*.

Evidentemente, esta cuestión, contiene en si muchos subproblemas. Por ejemplo, una resolución algorítmica de él para clases de grafos que presenten alguna regularidad como los *grafos periódicos o dinámicos*. Esto podría tener gran aplicación en una disciplina emergente como es el trazado de grafos (graphs drawing [18]).

Por otra parte caracterizar completamente los grafos de *clase 3* puede resultar una tarea difícil. En este sentido podríamos restringirnos a una familia de grafos mas pequeña que los grafos planos. Considerando la *conjetura de igualdad de áreas de Ringel* que dice que todo grafo plano cúbico tiene una representación en el plano donde las aristas son segmentos rectos y tal que todas las caras tienen la misma área ([57]). Si la conjetura de Ringel es cierta entonces todo grafo plano cúbico es de *clase 3*. Queda por tanto como problema abierto dar una demostración sin usar dicha conjetura.

Además, también podríamos concentrar nuestra atención en los grafos que *no son de clase 3*.

Otro problema que proponemos es el siguiente: que una buena subclase de grafos planos candidata a subclase del complementario de la *clase 3* son las triangulaciones de superficies abiertas planas con dos o mas finales de Freudenthal.

Apéndice A

A.1 Obtención de subgrafos prohibidos a partir de menores prohibidos

En este apéndice vamos a dar un procedimiento que, a partir de la caracterización mediante menores prohibidos de los grafos que verifican una propiedad P , obtiene la caracterización mediante subgrafos prohibidos de los grafos que verifican dicha propiedad P . Así, por ejemplo, mediante dicho procedimiento, a partir de los 35 menores proyectivos prohibidos obtenidos por Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [3, 4, 26], se pueden obtener los 103 subgrafos proyectivos prohibidos también obtenidos por dichos autores.

También se puede aplicar el procedimiento anterior para, a partir de los 36 menores 2-periplanos prohibidos obtenidos por Cáceres en [10], obtener la lista de subgrafos 2-periplanos prohibidos.

A.2 Descripción del procedimiento de obtención de subgrafos prohibidos

Sea P una propiedad de grafos hereditaria por menores, es decir, si G_1 es un menor de G_2 y G_2 verifica la propiedad P , entonces G_1 también.

Notaremos por \mathcal{P}_0 a la lista de menores prohibidos de los grafos que verifican la propiedad P , es decir, la lista de grafos tales que un grafo verifica

la propiedad P si y sólo si no tiene como menor ningún grafo de la lista y además ningún grafo de la lista es un menor de otro.

La propiedad P es también hereditaria por subgrafos, ya que si G_1 tiene como subgrafo una subdivisión de G_2 y G_1 verifica la propiedad P , como G_2 es también un menor de G_1 , tenemos que G_2 verifica la propiedad P .

Para cada $n \in \mathcal{N}$, denotaremos \mathcal{P}_n^* al conjunto de grafos no isomorfos tales que al contraer alguna arista no incidente con un vértice de valencia 1 ó 2, se obtiene un grafo de \mathcal{P}_{n-1} .

Finalmente, por cada $n \in \mathcal{N}$, denotaremos \mathcal{P}_n al conjunto de grafos de \mathcal{P}_n^* que no tienen como subgrafo una subdivisión de un grafo de $\cup_{k=0, \dots, n-1} \mathcal{P}_k$, ni tienen como menor a otro grafo de \mathcal{P}_n^* .

Por tanto se genera \mathcal{P}_n a partir de \mathcal{P}_n^* , el cual se obtiene de \mathcal{P}_{n-1} .

Vamos a ver ahora una serie de resultados que culminarán probando que si \mathcal{P}_0 es finito y todos sus elementos son grafos finitos, existe un número $n_P \in \mathcal{N}$ tal que el conjunto \mathcal{P} de subgrafos prohibidos de los grafos que verifican la propiedad P es la unión disjunta de los conjuntos $\cup_{k=0, \dots, n_P} \mathcal{P}_k$.

Lema A.1 *Se puede obtener de cualquier grafo de \mathcal{P} a partir de algún grafo de \mathcal{P}_0 contrayendo sucesivamente aristas no incidentes con vértices de valencia 1 ó 2. Además todos los grafos obtenidos en cada contracción de aristas pertenecen a \mathcal{P} .*

Demostración

Sea G un grafo de \mathcal{P} . Como G no verifica la propiedad P existe un grafo G' perteneciente a \mathcal{P}_0 tal que G' es un menor de G .

Como G' es un menor de G existe una secuencia de grafos $G = G_0, G_1, \dots, G_n = G'$ tal que para cada $k = 0, \dots, n-1$, G_{k+1} procede de G_k mediante la contracción o el borrado de una arista o el borrado de un vértice.

Como, para cada $k = 0, \dots, n-1$, G_k tiene como menor a G' , se tiene que no verifica la propiedad P . Si existe $k = 1, \dots, n$ tal que G_k no está en \mathcal{P} , entonces al borrar un cierto vértice o una cierta arista o al contraer una arista concreta incidente con un vértice de valencia 1 ó 2 se obtiene un

grafo H que no verifica la propiedad P . Sea G^* el grafo que se obtiene al aplicar a G la operación que transforma G_k en H . Como G^* es un menor de H , ya que H se obtiene a partir de G^* aplicándole sucesivamente las operaciones que transforman G en G_k , y H no verifica la propiedad P , se tiene que G^* tampoco verifica la propiedad P . Esto es contradictorio ya que G tiene un subgrafo que es una subdivisión de G^* y $G \in \mathcal{P}$. Por tanto para todo $k = 1, \dots, n$, $G_k \in \mathcal{P}$.

Si para algún $k = 0, \dots, n - 1$, G_{k+1} procede de G_k mediante el borrado de un vértice o de una arista o mediante la contracción de una arista incidente con un vértice de valencia 1 ó 2, entonces G_k tiene como subgrafo una subdivisión de G_{k+1} , lo cual es imposible ya que G_k y G_{k+1} pertenecen a \mathcal{P} . ■

Si existe una sucesión $G = G_0, G_1, \dots, G_n$ tal que cada elemento procede del anterior mediante la contracción de aristas incidentes con vértices de valencia al menos 3 y $G_n \in \mathcal{P}$, denotaremos como $q(G)$ a la máxima longitud menos 1 de una sucesión del tipo anterior, es decir, si la sucesión anterior es la de longitud máxima, entonces $q(G) = n$. Con esta notación podemos probar:

Lema A.2 Sea $G \in \mathcal{P}$. Entonces $G \in \mathcal{P}_{q(G)}$.

Demostración

Probémoslo por inducción en $q(G)$. Si $q(G) = 0$, el resultado es obvio. Supongámoslo probado el resultado si $q(G) \leq n - 1$ y supongamos que $q(G) = n$. Existe una sucesión $G = G_0, \dots, G_n$ donde cada elemento procede del anterior mediante la contracción de aristas incidentes con vértices de valencia al menos 3 y $G_n \in \mathcal{P}_0$. $q(G_1) = n - 1$, ya que la existencia de la sucesión anterior prueba que $q(G_1) \geq n - 1$ y si la desigualdad fuese estricta se podría construir otra sucesión de más larga que la original entre G y un elemento de \mathcal{P}_0 , lo cual contradeciría que $q(G) = n$.

Por hipótesis de inducción $G_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$. Como G se obtiene de un elemento, G_1 , de \mathcal{P}_{n-1} , G está en \mathcal{P}_n^* .

Como G está en \mathcal{P} , no contiene como subgrafo ninguna subdivisión de un

grafo de $\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_k$. Si algún otro grafo G' de \mathcal{P}_n^* fuese menor de G , como $G \in \mathcal{P}$, G' no sería un menor de ningún grafo obtenido a partir de G mediante borrado de aristas, vértices o la contracción de una arista incidente con un vértice de valencia 2. Por tanto, existirá una sucesión $G = G'_m, G'_{m-1}, \dots, G'_n = G'$, de manera que cada grafo se obtiene del anterior contrayendo una arista incidente con vértices de valencia al menor 3. Como G' de \mathcal{P}_n^* , tenemos que existe $G' = G'_n, \dots, G'_0$, con $G'_k \in \mathcal{P}_k$, de manera que cada grafo se obtiene del anterior contrayendo una arista incidente con vértices de valencia al menos 3.

Construimos así $G = G'_m, G'_{m-1}, \dots, G'_n, \dots, G'_0$, lo cual contradice que n es la máxima longitud menos 1 de una sucesión del tipo anterior. Por tanto $G \in \mathcal{P}_n$. ■

Lema A.3 Sean $n, m \in \mathcal{N}$, con $n < m$ y sean $G \in \mathcal{P}_n$ y $G' \in \mathcal{P}_m$. Entonces G' no es un menor de G .

Demostración

Si G' es un menor de G , consideremos la sucesión $G' = G'_0, \dots, G'_m$, donde $G'_i \in \mathcal{P}_{m-i}$ para todo $i = 0, \dots, m$. En particular $G'_{m-n} \in \mathcal{P}_n$, y como es un menor de G , se llega a contradicción con el hecho de que ningún elemento de \mathcal{P}_n es menor de otro. ■

Lema A.4 Sean $n \in \mathcal{N}$ y $G \in \mathcal{P}_n$. Entonces $G \in \mathcal{P}$.

Demostración

Consideremos la sucesión $G = G_0, \dots, G_n$, donde $G_i \in \mathcal{P}_{n-i}$ para todo $i = 0, \dots, n$, y cada grafo se obtiene del anterior contrayendo una arista no incidentes con vértices de valencia 1 ó 2.

Si $G \notin \mathcal{P}$, entonces existe $H \in \mathcal{P}$, tal que una subdivisión suya es un subgrafo de G . Por el Lema A.1, $H \in \mathcal{P}_{q(H)}$, y por el Lema A.2, $q(H) \leq q(G)$. Como ningún elemento de $\mathcal{P}_{q(G)}$ es menor de otro, $q(H) \neq q(G)$, así que $q(H) < q(G)$. Pero esto tampoco puede suceder, ya que si $q(H) < q(G)$,

por construcción de $\mathcal{P}_{q(G)}$, un grafo de dicho conjunto no puede tener un subgrafo que sea una subdivisión de un grafo de $\mathcal{P}_{q(H)}$. Con lo cual llegamos a contradicción en todos los casos y $G \in \mathcal{P}$. ■

Lema A.5 *Si \mathcal{P}_0 tiene una cantidad finita de grafos y todos ellos con una cantidad finita de vértices de valencia mayor o igual a 4, entonces existe $n \in \mathcal{N}$ tal que \mathcal{P}_0 es vacío.*

Demostración

Dado un grafo G definimos $r(G)$ como $\sum_{v \in V(G)} \max\{\delta_G(v) - 3, 0\}$. Como \mathcal{P}_0 tiene una cantidad finita de grafos y todos ellos son finitos, existe $N_0 = \max_{G \in \mathcal{P}_0} r(G)$.

Supongamos, por inducción, que existe $N_{k-1} = \max_{G \in \mathcal{P}_{k-1}} r(G)$ y consideremos $G \in \text{cal}P_k$. Existe $G' \in \mathcal{P}_{k-1}$, tal que se obtiene a partir de G contrayendo en un vértice w_0 , una arista incidente con dos vértices, u_0 y v_0 , que no tienen valencia 1 ó 2. Entonces $r(G') - r(G) = \sum_{v \in V(G')} \max\{\delta_{G'}(v) - 3, 0\} - \sum_{v \in V(G)} \max\{\delta_G(v) - 3, 0\} = \max\{\delta_{G'}(w_0) - 3, 0\} - \max\{\delta_G(u_0) - 3, 0\} - \max\{\delta_G(v_0) - 3, 0\}$. Como $\delta_G(u_0), \delta_G(v_0) > 2$ y $\delta_{G'}(w_0) = \delta_G(u_0) + \delta_G(v_0) - 2$, se tiene que $\delta_{G'}(w_0) > 3$ y $r(G') - r(G) = \delta_{G'}(w_0) - 3 - (\delta_G(u_0) - 3) - (\delta_G(v_0) - 3) = 1$.

Por tanto $r(G) \leq N_{k-1} - 1$, y como esto es cierto para todo $G \in \mathcal{P}_k$, se tiene que $N_k \leq N_{k-1} - 1$.

Repitiendo el proceso se llega a que $N_k \leq N_0 - k$. Por tanto si $G \in \mathcal{P}_{N_0+1}$, entonces $r(G) \leq -1$, lo cual es una contradicción ya que $r(G)$ no puede ser negativo y por tanto \mathcal{P}_{N_0+1} es vacío. ■

Ya estamos en condiciones de probar el resultado que nos dice cual es la estructura del conjunto \mathcal{P} .

Teorema A.6 *Existe $n_P \in \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{P} = \cup_{k=0, \dots, n_P} \mathcal{P}_k$.*

Demostración

Sea $n_P = \min\{n \in \mathcal{N} : \mathcal{P}_n = \emptyset\}$. Este mínimo existe, ya que el conjunto en el que se toma mínimo no es vacío por el Lema A.4.

Como cada \mathcal{P}_k se genera a partir del inmediato anterior, se tiene que si $k > n_P$, entonces \mathcal{P}_k es vacío.

Si $G \in \mathcal{P}$, por el Lema A.1, $G \in \mathcal{P}_{q(G)}$ y como $\mathcal{P}_{q(G)}$ no es vacío, $q(G) \leq n_P$, por lo que $G \in \cup_{k=0, \dots, n_P} \mathcal{P}_k$.

Recíprocamente, si $G \in \mathcal{P}_k$, con $k \in \{0, \dots, n_P\}$, por el Lema A.3, $G \in \mathcal{P}$, con lo que se tiene la doble contención y concluye la demostración del resultado. ■

Referencias

- [1] A. Adler. F-Planar Graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 15: 207-210, 1973.
- [2] A.V. Aho, J. E. Hopcroft y J.D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [3] D. Archdeacon. A Kuratowski Theorem for the Projective Plane. *Journal of Graph Theory*, 5: 243-246, 1981.
- [4] D. Archdeacon y P. Huneke. A Kuratowski Theorem for non-orientable surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27: 332-370, 1979.
- [5] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero. On the graphs which are the edge of a plane tiling. *Mathematica Scandinavica*, 77: 5-16, 1995.
- [6] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero. Proper homotopy classification of graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 22: 417-421, 1990.
- [7] D. Bienstock y C. L. Monma. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.*, 17(1): 53-76, 1988.
- [8] K. S. Booth y G. S. Lueker. Testing the consecutive one property, intervalgraphs and graph planarity using PQ-tree algorithms. *J. Comput. Syst. Sci.*, 13: 335-379, 1976.

- [9] L. Boza, A. Diáñez y A. Márquez. On infinite outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica*, 119 (4): 381-384, 1994.
- [10] J. Cáceres. *Diversos tipos de planaridad de grafos*. Tesis doctoral, Universidad de Almería, 1996.
- [11] J. Cáceres, J. C. Dana y A. Márquez. VAP-free planarity, planarity and EAP-free planarity testing of dynamic graphs. Preprint.
- [12] A. Cayley. On the mathematical theory of isomers. *Philos. Mag.* 67: 444-446, 1874. *Mathematical paper*. Cambridge 9: 202-204, 1895.
- [13] G. Chartrand y F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect B 3: 433-438, 1967.
- [14] N. Chiva, T. Nishizeki, S. Abe y T. Ozawa. A linear algorithm for embedding planar graphs using PQ-trees. *J. Comput. Syst. Sci.*, 30 (1): 54-76, 1985.
- [15] E. Cohen y N. Megido. Recognizing properties of periodic graphs, *DI-MACWS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4: 135-146, 1991.
- [16] J. C. Dana. *Grafos periódicos. Una algorítmica constructiva*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1994.
- [17] G. A. Dirac y S. Schuster. A Theorem of Kuratowski. *Indag Math.*, 16: 343-348, 1954.
- [18] P. Eades y R. Tamassia. *Algorithms for drawing graphs: an annotated bibliography*. Technical Report CS-89-09, Departament of Computer Science. Brown University, August 1988.
- [19] R. Engelking y K. Sieklucki. *Topology. A Geometric Approach*. Heldermann, 1992.

- [20] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*. 8:128-140, 1736. *Opera Omnia Series*. I-7:1-10, 1766. The Königsberg bridges. *Sci. Amer.* 189: 66-70, 1953.
- [21] I. Fáry. On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged.*, 11: 229-233, 1948.
- [22] L. R. Foulds. *Graph Theory Applications*. Springer-Verlag, 1992.
- [23] G. N. Frederickson y R. Janardan. Space-efficient and fault-tolerant routing un outerplanar graphs. *IEEE: Trans. on Comp.*, 37(12): 1529-1540, 1988.
- [24] H. Freudenthal. Über die enden topologischer räume und gruppen. *Math. Zeit.*, 33: 692-713.
- [25] M. R. Garey y D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, 1979.
- [26] H. H. Glover, J. P. Huneke y C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *Journal of Combinatorial Theory*, 27(3): 332-370, 1979.
- [27] B. Grünbaum y G. C. Shepard. *Tiling and Patterns*. Freeman and Co.. New York, 1987.
- [28] R. Halin. Über Trennende Eckenmengen in Graphen und der Mengerschen Satz, *Math. Ann.* 157: 34-41, 1964.
- [29] H. Halin. Zur häufungspunktfreien Darstellung adzählbarer Graphen in der Ebene. *Arch. Math.*, 17: 239-242, 1966.
- [30] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [31] J. E. Hopcroft y R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21: 549-568, 1974.

- [32] P. Hutchinson and S. Wagon. A forbidden subgraph characterization of infinite graphs of finite genus. *Graphs and Applications (Boulder, Colo. 1982)* páginas 183-194. Willey, New York, 1985.
- [33] K. Iwano y K. Steiglitz. Optimization of one-bit full adders embedded in regular structures. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-34(5): 1289-1300, 1986.
- [34] K. Iwano y K. Steiglitz. Planarity testing of doubly periodic infinite graphs. *Networks*, 18: 205-222, 1988.
- [35] C. Jordan. Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.* 70: 185-190, 1869.
- [36] A. P. Juškevič y E. Winter. *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel*. Adademie-Verlag, Berlin, 1965.
- [37] G. Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.* 72: 497-508, 1947.
- [38] D. König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. *Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936*. Reprinted by Chelsea, New York, 1950.
- [39] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15: 271-283, 1930.
- [40] A. Lempel, S. Even y I. Cederbaum. An algorithm for planarity testing of graphs. En P. Rosenstiehl, editor, *Theory of Graphs*, Int. Symp. Rome, July 1966, páginas 215-232, New York, 1967. Gordon and Breach.
- [41] K. Lewin. *Principles of Topological Psychology*, McGraw-Hill, New York, 1936.
- [42] M. C. van Lier y R. H. J. M. Otten. C.A.D. of masks and wiring. Technical Report 74-e-44, Dept. Elect. Engrg., Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1974.

- [43] S. Mitchell. Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs. *Information Processing Letters*, 9:229-232, 1979.
- [44] C. St. J. A. Nash-Williams. Infinite Graphs. A survey. *Journal of Combinatorial Theory*, 3: 286-301, 1967.
- [45] T. Nishizeki y N. Chiba. *Planar Graphs: Theory and Algorithms*. North-Holland, 1988.
- [46] J. Orlin. Some problems on dynamic/periodic graphs, W. R. Pulleybank ed., *Progress in Combinatorial Optimization* Academic Press, Orlando, 1984.
- [47] L. Oubiña y R. Zucchello. A generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics*, North-Holland, 1(51): 243-249, 1984.
- [48] R. Rado. Axiomatic treatment of rank in infinite sets, *Canad. J. Math.* 1: 337-343, 1949.
- [49] N. Robertson y P.D. Seymour. Graph Minors VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces. *J. Combinatorial Theory. Serie B.*, 48: 255-288, 1990.
- [50] D. F. Robinson y I. Janjic. The constructability of floorplans with given outerplanar adjacency and room areas. *Ars Combinatoria*, 20(B): 133-142, 1985.
- [51] J. Sedláček. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis Pěst. Mat.*, 113: 213-218, 1988.
- [52] R. Schmidt. *Diplomarbeit*. Universität Hamburg, 1976.
- [53] S. K. Stein. Convex maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2: 464-466, 1951.
- [54] C. Thomassen. Infinite graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, volumen 2, páginas 129-160. Academic Press, 1983.



* 5 0 1 1 4 4 2 9 6 *

FMA C 043/261

[55] C. Thomassen. Planarity and duality of finite and infinite graphs. *J. Combinatorial Theory (B)* 29: 244-271, 1980.

[56] C. Thomassen. Plane representations of graphs. *Progress in Graph Theory*. Bondy and Murty eds., Academic Press, Toronto, 43-69, 1984.

[57] C. Thomassen. Plane cubic graphs with prescribed face areas. *Combinatorics, Probability and Computing*, 1: 371-381, 1992.

[58] C. Thomassen. Straight line representations of infinite planar graphs. *J. London Math. Soc.*, 16(2): 411-423, 1977.

[59] W. T. Tutte. Convex representation of graphs. *Proc. London Math. Soc.*, 10: 304-320, 1960.

[60] P. Ungar. On diagrams representing maps. *J. London Math. Soc.*, 28: 336-342, 1953.

[61] K. Wagner. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresber. Deutsch. Math-Verein*. 46: 26-32, 1936.

[62] K. Wagner. *Graphentheorie*. Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim, 1970.

[63] P. Winter. Generalized Steiner problem in outerplanar networks. *BIT*, 25(3): 485-496, 1985.

María Pastora Revuelta Marchena

INMERSIONES DE GRAFOS EN SUPERFICIES

TUBULARES DE GÉNERO FINITO

Sobresaliente cum laude

doce

Febrero

99