

R. 23.622

LBS 1144370

043
265

301

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA I
CARRER DE MATEMÁTICA

**Geometría Computacional
en Superficies no Planas**

34 U3 65
U3 JUN. 1998

Memoria presentada por Clara Isabel
Grima Ruiz para optar al grado de
Doctora en Matemáticas por la
Universidad de Sevilla

Clara Isabel Grima Ruiz

Clara Isabel Grima Ruiz

Vº. Bº.
del Director,

Alberto Márquez Pérez

Fdo. Alberto Márquez Pérez,
Catedrático de Universidad del
Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, junio de 1998

A Salvador y Trini, mis padres.

*“Que yo no haya tocado las nubes
no significa que las nubes no existan”*

[Le decía a F.G. Lorca su profesor de piano.]

Agradecimientos

Parecía imposible pero está ahí, en la mesa, sin encuadernar, sin hacer las copias, pero es esa, ya no habrá más retoques, ahí está la versión definitiva de mi tesis. Y es ahora cuando una se sienta, cansada e ilusionada, tratando de recordar los nombres de todas esas personas que te han ayudado, de alguna u otra forma, a lo largo de este trabajo: esto va a ser difícil hasta el final, (y todavía hay que llevarla a Tercer Ciclo).

Debo empezar este apartado agradeciendo la ayuda y la ilusión prestada por mi director, Alberto Márquez, puesto que evidentemente es el mayor responsable de este suceso. Dentro de este mismo párrafo quiero agradecer también la inestimable colaboración a los profesores Ferrán Hurtado y Juan Carlos Dana en la búsqueda y captura de muchos de los resultados que aquí se van a presentar. Cerraré este párrafo, dedicado a los agradecimientos científicos, dando las gracias a mis compañeros Carmen Cortés, Lidia Ortega y Francisco Javier Cobos, con los cuales también paseé sobre el cilindro, el toro y la esfera.

Agradezco a mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I, su apoyo e interés; y de manera especial, a mis compañeros en la E.U.I.T.A: Carlos, Andrés, Isabel y Víctor, y, ¿cómo no?, a Juanma por su ayuda impres-

cindible con el “papeleo”.

En este párrafo quiero expresar mi agradecimiento a algunas personas, que me han apoyado a lo largo de estos meses, y que no puedo encuadrar bajo un nombre genérico, así que los digo todos: Mari Ángeles, Carmencita, Lidia, Mari Paz, Pepe, Marizó, Castu y Rocío del Valle.

Es indudable que, como todo lo que he conseguido en mi vida, también esto se lo debo al apoyo, cariño y desvelo de toda mi familia: Mamá, Papá, Abuela, Tata, Tato, Sonia, David, Rocío, Titi, Pepi, Elio, Albertito (alias Leonardo), Juan Manuel, Maribel, Alejandro y Jaime. Ellos han sido, son y serán siempre, espero, el motor de mi vida; ellos me padecen con inconmensurable ternura, y gracias a ellos, sobre todo a mis padres, estoy ahora reflejada en el monitor escribiendo estos agradecimientos. Aunque no sea esta la forma de agradecer todo lo que os debo, permitidme la licencia de expresarlo en estas líneas: gracias. También quiero dar las gracias por su cariño a Aurora y Alberto (aunque me riña), y a toda la maravillosa familia que ellos representan.

Para terminar y puesto que, sin duda, para emprender cualquier empresa necesitamos fuerza, y hay quien dice que *“da más fuerzas sentirse amado que sentirse fuerte”*, muchas gracias Alberto.

Gracias a todos.

Capítulo 0

Introducción

De forma general, la Geometría Computacional trata del estudio de algoritmos que resuelven problemas geométricos con el ordenador. Esta joven disciplina, que nació de una colección de resultados diversos, constituye, debido al auge que hoy en día ha tenido el ordenador, una de las áreas temáticas que más interés ha suscitado. Dicho interés radica, naturalmente, en las importantes e inmediatas aplicaciones de la Geometría Computacional en los distintos campos de las Matemáticas y de gran utilidad como el diseño asistido por ordenador [4], tratamiento de imágenes [98], localización [38], etc. Aunque, históricamente, el estudio de la Geometría y los algoritmos puede remontarse hasta hace más de 2000 años [5, 37], realmente, el estudio sistemático de la Geometría Computacional comenzó con la prestigiosa tesis de Shamos en 1978 [91]. Antes de dicho trabajo pocos problemas geométricos habían sido estudiados desde el punto de vista algorítmico. Sin embargo, dada la multitud de conexiones entre la Geometría Computacional y las áreas de aplicación en Informática, es difícil describir la línea que separa los algoritmos geométricos de los demás.

Los *surveys* de Lee y Preparata [64], (1984), y Yao [106],(1990), resumen las distintas interrelaciones de la Geometría Computacional. El primer texto que se centró en un análisis multidimensional fue el tercer volumen de la trilogía de Mehlhorn [69], (1984). Esta parte de la Geometría Computacional está particularmente vinculada con el estudio de algoritmos de análisis, como asegura Knuth [61], (1973). El libro de Preparata y Shamos [83], (1985), se ha convertido con el paso del tiempo en un clásico de referencia obligada, fijando la terminología, enfocando, principalmente, problemas bidimensionales y, ocasionalmente, tridimensionales. En 1987, O'Rourke [78] publicó un libro enfocado en problemas algorítmicos y combinatorios para polígonos. Por último mencionar que la relación entre la Geometría Discreta y la Geometría Computacional es el tema central del texto de Edelsbrunner [33], publicado en 1987. Desde entonces otros textos se han publicado, incluso considerando la geometría Computacional desde su aspecto pedagógico.

A pesar de todo lo dicho hasta el momento, son pocos y dispersos los trabajos, que se la han dedicado, dentro de la disciplina, al estudio de problemas en superficies. Y consideramos que dichos problemas son suficientemente interesante como para que se le dedique un amplio estudio. La razón es bien obvia, como hemos dicho anteriormente, la Geometría Computacional trata de resolver algorítmicamente problemas de naturaleza geométrica y se ha centrado en problemas dentro del plano u otros espacios euclídeos, pero muchas veces la modelización más adecuada no se puede realizar en espacios euclídeos; el mismo ejemplo, tantas veces citado, del movimiento de robots y con el cual están relacionados muchos problemas de la Geometría Computacional, si tratamos de resolverlo en la práctica, en la mayoría de los casos el robot es un brazo articulado que describe en su trayectoria una superficie algebraica. También podríamos modelizar ciertos fenómenos periódicos en el tiempo a través del cilindro y, por último por no hacer demasiado extensa esta relación que no pre-

tende ser exhaustiva, podrían ocurrir que la entrada (y la salida) de nuestro problema sea un conjunto de puntos en cierta superficie.

Por tanto, es el objetivo de esta memoria, iniciar desde un punto de vista más sistemático, el estudio de la Geometría Computacional en superficies no planas. Más concretamente, consideramos las superficies del cilindro, el toro, la esfera y ocasionalmente, cuando la situación lo haga especialmente destacable, el cono. La elección de estas superficies, en primer lugar se realizó, por ser las más simples al margen de los espacios euclídeos; después se ha comprobado, que presentaban suficiente peculiaridades y diferencias entre sí y con el caso euclídeo como para que puedan considerarse un buen ejemplo motivador para la continuación del estudio aquí realizado. Evidentemente, ya se habían considerados algunos problemas en estas superficies anteriormente por otros autores, cuando así ha sido, nos hemos limitado a intentar situar al lector en la senda bibliográfica adecuada, aportando algunos comentarios sobre las soluciones aportadas.

Los problemas de Geometría Computacional que hemos considerado también merecen algún tipo de comentario. Evidentemente, hay dos estructuras que no podían ser excluidas de un trabajo con el título como el que aquí presentamos: la envolvente convexa y los diagramas de Voronoi, su importancia en Geometría Computacional es clarísima y no es este el sitio, creemos para justificar su inclusión. Como tampoco creemos que merezca muchos más comentarios el caso de las triangulaciones: numerosos problemas, entre los que destacamos los de interpolación, han movido al estudio de las triangulaciones de nubes de puntos y por lo dicho en el párrafo anterior, es muy factible que la función a interpolar tome sus valores en puntos de un cilindro, una esfera, un toro, etc. El resto de los problemas considerados (diámetro, anchura y transversales) puede que dependan más de los intereses personales de quien

los ha trabajado, aunque estemos convencidos de que todos son de indudable interés y quisiéramos destacar que cada uno presenta características especiales por lo cual su estudio es interesante: así en la anchura de un conjunto, la principal dificultad encontrada ha sido dar una definición apropiada y demostrar la equivalencia entre todas las posibles generalizaciones del mismo concepto en el plano lo cual ha permitido su resolución desde el punto de vista computacional. En el diámetro, los problemas han sido de índole algorítmica y en el caso de las transversales nos hemos encontrados resultados totalmente distintos a los que se dan en el plano y con estudios de complejidades sorprendentes. Estas características nos hacen pensar que la selección efectuada no es tan arbitraria como podría parecer a primera vista.

Sin embargo, el estudio realizado para la resolución de todos los problemas prueba dos hechos que pudieran parecer sorprendentes y hasta contradictorios: en casi todos los casos considerados la solución algorítmica conocida en el plano no es válida, sin embargo, se puede encontrar algún otro procedimiento que lleva a la solución del problema con complejidades óptimas.

Por último quisiera mencionar que todos los temas que aquí se tratan han sido ya anteriormente presentados en foros especializados en los cuales, queremos pensar que han tenido una buena acogida. Así el estudio de la envolvente convexa ha motivado las publicaciones [25, 26] de la bibliografía, los temas tratados en el capítulo de diagramas de Voronoi aparecen en los trabajos [44, 45, 21, 20], el diámetro y la anchura fueron estudiados en [21, 20, 19, 22], las transversales son recogidas en [24] y en el mismo trabajo se contempla el problema de las triangulaciones.

Contenido

Agradecimientos

0	Introducción	iii
1	Preliminares	1
1.1	Introducción	1
1.2	Notaciones y terminología	2
1.2.1	Notaciones y terminología en Geometría de Superficies	2
1.2.2	Notaciones y terminología en Algorítmica	4
2	Envolvente convexa	6
2.1	Introducción	7

2.2	Envolvente hiperconvexa	10
2.3	Envolvente métricamente convexa	14
2.3.1	Envolvente métricamente convexa en el cilindro	15
2.3.2	Envolvente métricamente convexa en el toro	23
2.3.3	Envolvente métricamente convexa en la esfera	27
2.3.4	Envolvente métricamente convexa en el cono	30
2.4	Análisis del caso medio	33
2.5	Conclusiones y problemas abiertos.	37
3	Diagramas de Voronoi	39
3.1	Introducción	40
3.2	Diagramas de Voronoi	41
3.3	Diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos	46
3.4	Diagrama polar en el cilindro	49
4	Anchura y diámetro	53
4.1	Introducción	54

4.2	Anchura de un conjunto convexo en la esfera	55
4.3	Diámetro de un conjunto de puntos	70
4.3.1	Máxima y mínima distancia	73
4.4	Conclusiones y problemas abiertos	76
5	Transversales	78
5.1	Introducción	79
5.2	Hélices transversales	82
5.3	Visibilidad en presencia de obstáculos	95
5.4	“Apuñalando segmentos”.	98
6	Triangulaciones	103
6.1	Introducción	103
6.2	Triangulaciones en el cilindro	105

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

En este Capítulo se darán las nociones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de esta memoria.

Este trabajo se enmarca dentro la Geometría Computacional, así como desde un punto de vista informático, en la Algorítmica.

Los textos de O'Rourke [79], *Computational Geometry in C*, Preparata y Shamos [83], *Computational Geometry: an introduction*, y de Edelsbrunner [33], *Algorithms in Combinatorial Geometry* constituyen referencias básicas para los Capítulos 2 y 3 de esta memoria, en los que la envolvente convexa en espacios euclídeos y sus aplicaciones, reciben un esmerado tratamiento desde el punto de vista de la Geometría Computacional. Para la parte referente a

los espacios euclídeos, en la que se habla de politopos, se ha usado, entre otros textos, el de B. Grünbaum [47]. En cuanto a lo que se refiere a la Geometría Diferencial de Superficies, de la que hemos hecho uso en la última parte de nuestra memoria, el texto fundamental ha sido el de M. Do Carmo [30], *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*.

Por último podemos citar otros textos como los de Aho, Hopcroft y Ullman [1], y el de Nishizeki y Chiba [74], que nos han orientado en lo que refiere a Algorítmica.

1.2 Notaciones y terminología

Esta sección contiene algunas precisiones sobre el lenguaje y notaciones que utilizaremos.

1.2.1 Notaciones y terminología en Geometría de Superficies

En esta memoria nos centramos en las superficies cilíndrica y tórica, y sobre éstas se plantea el cálculo de la envolvente convexa. En los espacios euclídeos un conjunto convexo está caracterizado por contener al segmento que une dos puntos cualesquiera del mismo. Pero dados dos puntos sobre el cilindro o sobre el toro, no se puede hablar, en general, de la recta que los une, no obstante, por tratarse de superficies conexas siempre podemos considerar las geodésicas que unen a los citados puntos.

En el caso de la superficie cilíndrica, por ser ésta una superficie desarrollable, las geodésicas no son más que rectas en el desarrollo plano de dicha superficie.

En dicho desarrollo consideraremos un sistema de referencia euclídeo, y el concepto de distancia en el cilindro será el concepto de distancia euclídea en la representación plana del mismo.

En el caso del toro consideraremos la representación del mismo en la estructura conocida como *toro plano*. Sea $T_{m,n} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la aplicación *traslación* definida como $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$ donde m y n son números enteros. Se define en \mathbf{R}^2 la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists m, n \text{ tales que } T_{m,n}(x, y) = (x', y')$$

Llamamos \mathcal{T} al espacio cociente de \mathbf{R}^2 mediante esta relación de equivalencia y $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ a la aplicación proyección natural

$$\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y) : m, n \in \mathbf{Z}\}$$

De esta forma, en cada cuadrado unitario y abierto cuyos vértices tengan coordenadas enteras sólo hay un representante de \mathcal{T} ; podemos, por lo tanto, considerar \mathcal{T} como un cuadrado cerrado en el que se identifican los lados paralelos y asignándoles en el mismo sentido.

Consideramos $i_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una familia de parametrizaciones de \mathbf{R}^2 , donde i_α es la aplicación identidad y $U_\alpha \cap T_{m,n}(U_\alpha) = \emptyset$ para todos los valores de m y n . Como $T_{m,n}$ es un difeomorfismo, se comprueba, sin dificultad que la familia $\{U_\alpha, \pi \circ i_\alpha\}$ constituye una estructura diferenciable para \mathcal{T} . Se dice que \mathcal{T} es un *toro* (diferenciable) y es difeomorfo al *toro standar* de \mathbf{R}^3 .

T se comporta localmente como un espacio euclídeo, y se denomina *toro plano*. Luego si tenemos una superficie tórica, T , consideraremos su desarrollo en el toro plano, \mathcal{T} , y sobre éste podemos fijar un sistema de referencia euclídeo cuyo origen estará situado en el centro del cuadrado, y los ejes de coordenadas serán paralelos a los lados del mismo. Cuando se hable de distancia en el toro T nos estaremos refiriendo a la distancia euclídea en su representación como toro plano, \mathcal{T} . De nuevo, las geodésicas en esta superficie vuelven a ser rectas en el plano.

Concluimos que en ambas superficies las geodésicas están representadas como rectas en un plano.

1.2.2 Notaciones y terminología en Algorítmica

Se denotarán por *algoritmos* a los procesos que dándoles una entrada nos proporcionan una salida. La entrada estará compuesta por una secuencia de instrucciones que realizadas correctamente, y de manera repetitiva, dan lugar a un resultado deseado, la salida del algoritmo, y de forma que dicha secuencia de instrucciones verifique:

- a) **Finitud:** un algoritmo debe finalizar siempre, independientemente de la entrada que se le de, después de un número finito de pasos.
- b) **Definibilidad:** cada paso de un algoritmo debe ser definido de manera precisa y sin ambigüedad.
- c) **Conjunto de entradas:** ha de existir un conjunto específico de elementos que constituyan, en cada caso, los datos iniciales del problema que resuelve el algoritmo.

- d) **Conjunto de salidas:** el conjunto de todas las posibles salidas que puedan producir las posibles entradas.
- e) **Efectividad:** todas las operaciones a realizar deben ser lo bastante básicas para poder ser efectuadas por el procesador que lo ejecute, y han de conseguir el resultado para el que se ha creado dicho algoritmo.

El tiempo usado en la ejecución de un algoritmo es la suma de los tiempos que se invierten en cada uno de los pasos que sigue dicho algoritmo. Se suele utilizar, en lo que se refiere al análisis de algoritmos, una expresión del tiempo de ejecución módulo una constante multiplicativa. Expresión que viene dada mediante una función que mide la cantidad de operaciones realizadas en la ejecución del algoritmo. Esto es lo que se conoce por *efectividad* del algoritmo. Para medir la efectividad de los algoritmos descritos en esta memoria utilizaremos la notación asintótica introducida por Knuth [62]. Así, se notará por $O(f(n))$ al conjunto de todas las funciones $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que existe una constante positiva C y existe un natural n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tiene que $|g(n)| \leq Cf(n)$. Se dirá pues indistintamente que $2n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ es de $O(n^3)$ o bien que $2n^3 - 3n^2 + 5n - 7 \in O(n^3)$. De forma análoga, se notará por $\Omega(f(n))$ al conjunto de todas las funciones $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que existe una constante positiva C y existe un natural n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tiene que $g(n) \leq Cf(n)$. Se denotará por $\Theta(f(n))$ al conjunto de todas las funciones $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que existen dos constantes positivas C_1 y C_2 y existe un natural n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tiene $C_1f(n) \leq g(n) \leq C_2f(n)$. Por último, denotamos por $o(f(n))$ al conjunto de todas las funciones $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que para toda constante positiva C existe un natural n_0 de forma que $g(n) \leq Cf(n)$ para todo $n \geq n_0$ (o, equivalentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$).

Capítulo 2

Envolvente convexa

Cada una de las caracterizaciones de conjunto convexo en espacios euclídeos puede ser significativa a la hora de generalizar el concepto de convexidad a otras superficies. En este capítulo se consideran diversas extensiones del citado concepto, caracterizándose, con cada una de ellas, la envolvente convexa de una nube de N puntos en las superficies que hemos elegido como objeto de nuestro estudio. Se presentan algoritmos que la calculan en tiempo óptimo $O(N \log N)$, obteniéndose así la misma complejidad que en el caso plano. Sin embargo, al analizar el comportamiento de dichos algoritmos en el caso medio se observa que, en la mayoría de los casos, éstos computan la envolvente convexa en tiempo lineal; pero en estos casos, la envolvente es demasiado grande y, por lo tanto, en estas superficies, la citada estructura deja de ser una herramienta tan útil como lo es en el plano o en el espacio.

2.1 Introducción

Sin lugar a dudas el problema del cálculo de la envolvente convexa de un conjunto de puntos en espacios euclídeos, ha sido, y es, uno de los objetos básicos de la Geometría Computacional [90]. Se trata de una estructura no sólo útil en sí misma, sino también como herramienta en la solución de una gran variedad de problemas, aparentemente no relacionados con ella. Sin olvidar que se trata también de un bello objeto dentro de las matemáticas puras.

Además, históricamente uno de los primeros trabajos reconocidos dentro del campo de la Geometría Computacional, es el trabajo de Graham [43] del año 1972 presentando uno de los algoritmos más conocidos para el cálculo de la envolvente convexa en el plano en tiempo óptimo. Aunque según Toutsaint [95], existe un trabajo anterior del año 1967 [11] que contiene muchas de las ideas que se utilizan para los algoritmos del cálculo de la envolvente.

Como es bien sabido, un conjunto convexo del plano es un conjunto verificando que el segmento que une a dos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en él. Evidentemente, esta definición puede ser aplicada en cualquier espacio euclídeo n -dimensional. Dicha idea, lleva inmediatamente al concepto de envolvente convexa de un conjunto de puntos como el menor conjunto convexo que lo contiene. Es éste un concepto natural y fácil de entender, podemos pensar en la frontera de la envolvente convexa de un conjunto de puntos en el plano, como la forma que adquirirá una goma elástica envolviendo a todos los puntos del conjunto, que están fijos sobre el plano. Además este concepto intuitivo puede ser extendido a otras dimensiones y puede ser algoritmizado dando lugar a métodos simples para el cálculo de la envolvente convexa

El término *convexidad* tiene muchas facetas, la mayoría de éstas son fácil-

mente reconocibles, pero existen otras que están casi “ocultas”, por ejemplo, en los contextos de Análisis Funcional [3, 101], Teoría de la Probabilidad y Procesos Estocásticos [59], Cálculo de Variaciones [12] y Teoría de Funciones Complejas [72]. Por otra parte, debido a su posición entre la Geometría, el Análisis y la Matemática Discreta, la convexidad está relacionada con otras muchas áreas. Es, sin duda, sorprendente observar que algunos de los más eminentes matemáticos han contribuido con algún resultado sobre convexidad, mientras sus estudios se centraban, principalmente, en otras áreas; entre ellos podemos citar a Lebesgue, Lindelof, Sierpinski, Perron, Steiner, Cauchy, Caratheodory o Minkowski (ver [99]).

Como se ha dicho anteriormente, las aplicaciones de la envolvente convexa son muchas y muy diversas, y entre ellas se pueden destacar: reconocimiento de patrones [31, 2, 4], procesamiento de imágenes [85, 38, 40, 92, 98], localización [38], cálculo del diámetro de un conjunto [50, 105, 36], el problema del cálculo de una transversal [77, 35, 84], profundidad de un punto en un conjunto [17], etc. Las anteriores aplicaciones no sólo se han estudiado en el plano, sino que hay interesantes resultados para espacios de dimensión mayor que dos.

Pero son muy pocos los trabajos realizados sobre la envolvente convexa en espacios no euclídeos, a pesar de que dicha estructura tiene muchas aplicaciones en el campo de la Robótica; y es bien sabido que, en la mayoría de los casos prácticos, la trayectoria de un robot y los puntos accesibles por los brazos articulados no están, en general, en el plano sino que describen una variedad algebraica inmersa en el espacio. Por esta razón, parece interesante caracterizar la envolvente convexa de una nube finita de puntos en superficies no planas.

Es posible encontrar distintas generalizaciones de la noción de convexidad atendiendo a diversos aspectos [46, 65]; hemos considerado dos de ellas, caracterizando teóricamente la envolvente convexa de una nube de puntos sobre cualesquiera de nuestras superficies y descrito algoritmos que la calculan en cada caso. Los resultados obtenidos en este sentido son, en cierta medida negativos, puesto que la envolvente convexa de una nube de puntos en el cilindro, si éstos están en posición no euclídea, es toda una banda delimitada por dos paralelos y, aún peor es el caso del toro o de la esfera, donde la envolvente convexa de un conjunto de tres puntos en posición no cilíndrica es la propia superficie. De estos hechos se deduce que en estas superficies la envolvente pierde su carácter práctico para resolver otros problemas; por ejemplo, en el plano para evitar colisiones de un robot con un conjunto de obstáculos, se diseña una trayectoria que evite la envolvente convexa de éstos, este mismo procedimiento es inviable en el toro, por lo dicho anteriormente.

Observamos además que en el caso de la esfera y en del toro, el cálculo de la envolvente es similar al cálculo en el cilindro, mientras que en el cono, el cálculo de la misma está a caballo entre el caso del cilindro y el del plano. En todos los casos se pueden obtener algoritmos que corren en tiempo óptimo $O(N \log N)$.

A pesar de que, en el peor de los casos, nuestros algoritmos tienen la misma complejidad que en el caso plano, al analizar el comportamiento de los mismos en el caso medio, se concluye que en la mayoría de los casos prácticos, dichos algoritmos calculan la envolvente en tiempo lineal en el número de puntos. Esto puede parecer una buena noticia, pero no lo es tanto, porque en dichos casos, tal como se ha dicho, la envolvente es demasiado grande para ser útil.

2.2 Envolverte hiperconvexa

Cuando se plantea la cuestión de extender el concepto de convexidad a otras superficies, es posible elegir entre las distintas propiedades de los conjuntos convexos en el plano.

Entre estas propiedades, y desde el punto de vista geométrico, la convexidad de un conjunto $C \subset \mathbf{R}^n$, se puede definir imponiendo que la intersección de C con cualquier recta de \mathbf{R}^n sea conexa. Si reemplazamos las rectas por alguna familia de curvas, entonces tendremos un concepto generalizado de convexidad, la *hiperconvexidad*, que ya ha sido usado por Danzer, Grumbaum y Klee [27] en este contexto. En el caso de superficies, parece lógico definir la hiperconvexidad usando las familias de geodésicas de éstas, y así dada S una superficie, diremos que un conjunto $C \subset S$, es hiperconvexo si dados dos puntos cualesquiera en C , todas las geodésicas que los unen en S están contenidas en C . De forma natural, dado un conjunto C en S llamaremos *envolvente hiperconvexa* de C al menor conjunto hiperconvexo que contiene a C .

Con esta definición, dado un conjunto C de N puntos sobre un cilindro S trataremos de describir la envolvente hiperconvexa de C .

Lema 1. *Dado un conjunto hiperconvexo C en un cilindro, y dos puntos cualesquiera en él, la banda que determinan está contenida en C .*

Demostración: Sea x un punto en la banda determinada por dos puntos p y q de un conjunto hiperconvexo C , y dos geodésicas distintas g y g' , uniendo a p y q . Por ser hiperconvexo estas dos geodésicas deben estar contenidas en C . Es posible encontrar $z \in g$ y $z' \in g'$, a la misma altura que x , esto es, con la

misma ordenada. Luego x estará en una de las dos geodésicas que unen a z y z' , y por lo tanto, x está en C .

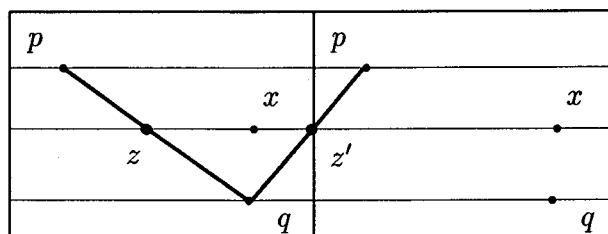


Figura 1.1.

■

Del resultado anterior se deduce que los únicos conjuntos hiperconvexos en el cilindro son bandas abiertas delimitadas por círculos máximos, a los cuales se les añade o bien un punto sobre los círculos de la frontera o bien, todo el círculo. Por lo tanto, se tiene

Teorema 1. *La envolvente hiperconvexa de un conjunto P de dos o más puntos en el cilindro es la banda de P unión el h-top y el h-bottom de P .*

En el caso del toro, dados dos puntos en un conjunto hiperconvexo, si todas las geodésicas que unen a dichos puntos deben estar contenidas en él, es fácil deducir, usando razonamientos similares a los de la demostración del

Lema 1., que el único conjunto hiperconvexo en el toro es la propia superficie (ver Figura 2). Por lo tanto, se tiene

Teorema 2. *La envolvente convexa de un conjunto de dos o más puntos en el toro es el propio toro.*

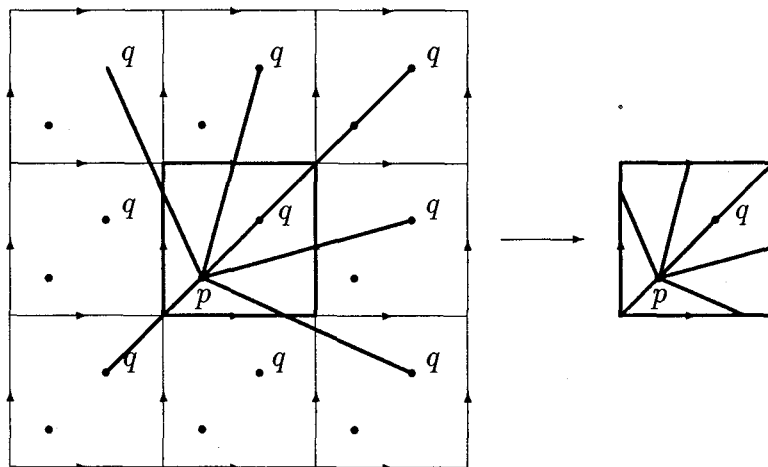


Figura 2.

En la esfera, dados dos puntos en un conjunto hiperconvexo, el círculo máximo que definen debe estar contenido en dicho conjunto, y también todas las geodésicas que unen a cada par de puntos del citado círculo; por lo que deducimos que el único conjunto hiperconvexo de la esfera es, como en el caso del toro, la propia superficie.

Concluimos que la envolvente hiperconvexa es muy “grande” en cualquier caso y, por lo tanto, no es útil como en el caso plano, par resolver problemas

como el diseño de trayectorias evitando obstáculos. Pero aunque no coincida, en general, con el caso plano nos gustaría que para puntos próximos, por ejemplo, sobre el cilindro la envolvente convexa fuese “pequeña”, como se muestra en la Figura 4.

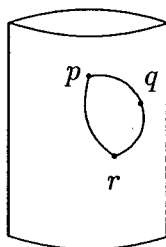


Figura 4

Si al imponer, para la hiperconvexidad de un conjunto, que éste contenga a todas las geodésicas uniendo a cada pareja de puntos obtenemos una envolvente convexa muy grande, se podría pensar en definir un conjunto convexo sobre el cilindro como un conjunto tal que dados dos puntos en él, existiera, al menos, una geodésica uniéndolos contenida en el conjunto; y así la envolvente convexa de una nube de puntos sería el menor conjunto convexo que la contuviera. Pero esta definición no es consistente como muestra la Figura 5.

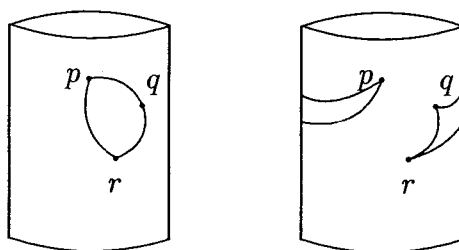


Figura 5: Para los mismos puntos $\{p, q, r\}$ tenemos dos conjuntos convexos que los contienen y cuya intersección no es conexa.

2.3 Envolverte métricamente convexa

En la sección anterior se ha visto que si imponemos para la convexidad de un conjunto que éste contenga a todas las geodésicas uniendo a cada par de puntos en el mismo, la envolvente convexa es poco útil; y es peor, si se elige una aleatoriamente.

Otra de las generalizaciones del concepto de convexidad, ésta estudiada ya por Menger [70] en 1928, que podemos encontrar es la de convexidad métrica; un subconjunto A de un espacio métrico $M = (M, d)$ se dice *métricamente convexo* si para cada par de puntos distintos x e y en A existe un punto z en $A \setminus \{x, y\}$ tal que $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$.

Tal y como vimos en el Capítulo de Preliminares, sabemos, en virtud del Teorema de Hopf-Rinow [51], que en las superficies que estamos estudiando, podemos definir el concepto de distancia usando segmentos, esto es, geodésicas que dan la mínima longitud entre dos puntos. Los casos en el que los segmentos no son únicos los consideramos casos degenerados; y como es sabido, es posible encontrar en la literatura técnicas que evitan estos casos, por ejemplo, el método *S.O.S. (simulation of simplicity)* de Edelsbrunner [33]. También se puede comprobar que en la gran mayoría de los casos nuestras soluciones son válidas con algunas pequeñas adaptaciones cuando se presentan casos degenerados.

En términos de geodésicas, diremos que un conjunto A sobre cualquiera de nuestras superficies, es métricamente convexo (*m-convexo*) si para cada par de puntos distintos, la geodésica métrica que los une está contenida en él. Así, la *envolvente m-convexa* de un conjunto C será el menor conjunto m-convexo que contiene a C , y lo escribiremos $E_m(C)$. Vamos a caracterizar la envolvente

m-convexa en el cilindro, el toro, la esfera y el cono.

2.3.1 Envolverte métricamente convexa en el cilindro

Comenzaremos con el cilindro, y en este caso es fácil comprobar que si tenemos un conjunto $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ en posición euclídea, la envolvente m-convexa coincide con la envolvente convexa del mismo conjunto en el plano, puesto que si los puntos del conjunto C están en posición euclídea sobre el cilindro, los segmentos que los unen de dos en dos, están contenidos entre dos generatrices diametralmente opuestas, (ver Capítulo de Preliminares y Figura 6).

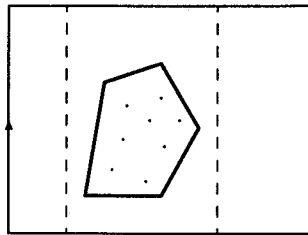


Figura 6

El cálculo de la envolvente m-convexa en el cilindro para conjuntos de puntos en posición euclídea, es decir, para conjuntos de puntos “próximos” sobre esta superficie, por lo tanto, coincide con el cálculo de la envolvente convexa en el plano. Si los puntos no están en posición euclídea tenemos, sin embargo, el siguiente resultado

Lema 2. *La envolvente m -convexa de tres puntos en posición no euclídea sobre el cilindro contiene a la banda delimitada por los círculos máximos que pasan por los puntos de mayor y menor altura respectivamente.*

Demostración:

Sean $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ en posición no euclídea sobre el cilindro; sea Γ la curva definida por los segmentos que unen a estos puntos, dos a dos, g_i la generatriz que contiene a v_i y g'_i su generatriz diametralmente opuesta. A priori, sabemos que tanto C como Γ están contenidas en $E_m(C)$ por su propia definición. Sea p_1 el punto de corte de g'_1 y la geodésica métrica que une a v_2 y v_3 .

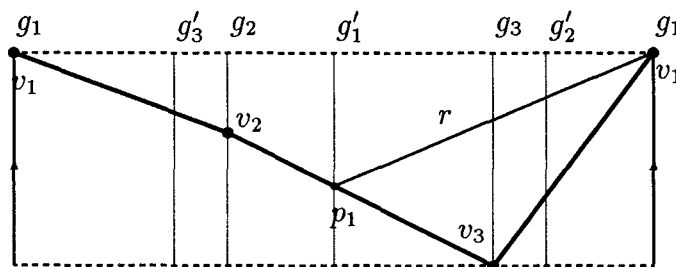


Figura 7.

La recta r que une a los puntos p_1 y v_1 , representa sobre el cilindro una de los segmentos que unen a estos dos puntos, (existen dos segmentos puesto que p_1 y v_1 son diametralmente opuestos), y como ambos puntos están en $E_m(C)$, también r debe estar contenida en ésta. Más aún, el triángulo de vértices $\{p_1, v_1, v_3\}$ estará contenido en $E_m(C)$ (Figura 7).

Siguiendo el mismo razonamiento, llegaríamos a que el triángulo de vértices $\{p_1, p_2, v_2\}$ (Figura 8), también está contenido en $E_m(C)$.

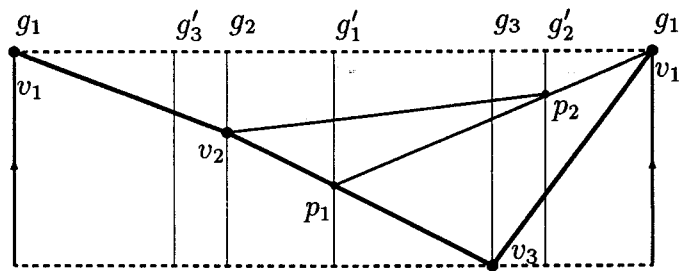


Figura 8: El punto p_2 es la intersección de la recta r y la generatriz g'_2

Repitiendo este proceso, llegamos a que los triángulos que aparecen en la Figura 9 están todos contenidos en $E_m(C)$.

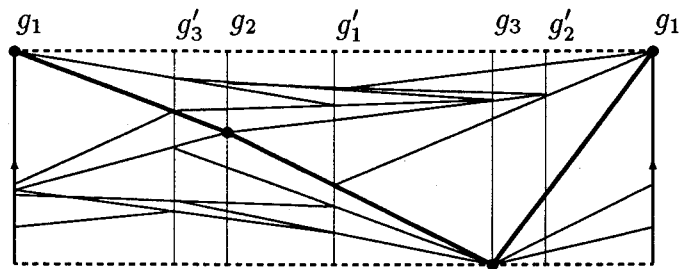


Figura 9.

Reiterando indefinidamente este proceso, en el límite obtendríamos una región contenida en $E_m(C)$ similar a la mostrada en la Figura 10.

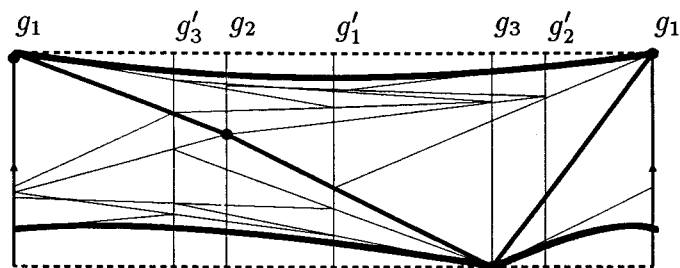


Figura 10.

Ya tenemos una región, en principio abierta, que debe estar contenida en $E_m(C)$; la frontera de dicha región está formada por dos curvas continuas puesto que se trata del límite uniforme de funciones continuas en un compacto. Pero como todo conjunto m -convexo debe ser localmente convexo. Se deduce fácilmente que toda la banda debe estar contenida en $E_m(C)$ porque en otro caso, $E_m(C)$ no sería localmente convexa. ■

El Lema anterior nos permite caracterizar la envolvente m -convexa en el cilindro de un conjunto de N puntos como sigue

Teorema 3. *La envolvente m -convexa de un conjunto de N puntos C en el cilindro es*

- a) *La envolvente convexa de C en el plano si C está en posición euclídea;*
o
- b) *La banda abierta definida por los puntos de C unión el m -top y el m -bottom de C en otro caso.*

Demostración: Para puntos en posición euclídea es inmediato que la envolvente m -convexa en el cilindro es la región correspondiente a la envolvente convexa en el plano. Supongamos que tenemos $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ en posición no euclídea, en este caso, podemos encontrar tres puntos en C en posición no euclídea entre ellos; podemos suponer por simplificar la notación que estos tres puntos son $\{v_1, v_2, v_3\}$. Por lo tanto, la banda abierta que definen estos puntos debe estar contenida en $E_m(C)$ (Lema 2.). Ya tenemos una banda contenida en la envolvente m -convexa, si existe algún punto de C fuera de

ella, se puede probar de forma similar al Lema 2., que la mínima banda que contiene a este punto y a la banda anterior, está contenida en $E_m(C)$.

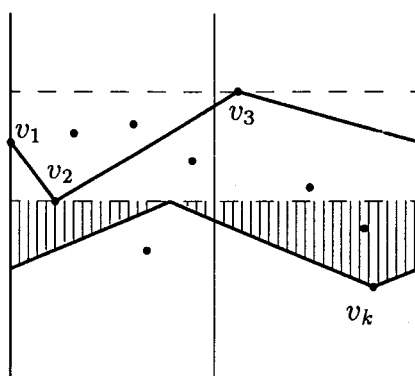


Figura 11: El punto v_k está fuera de la banda que definen v_1 , v_2 y v_3 . Los triángulos sombreados deben estar contenidos en $E_m(C)$

El resultado es inmediato a partir de aquí. ■

Podemos usar el Teorema 3. para diseñar un algoritmo que calcule la envolvente m -convexa en el cilindro. Dado un conjunto $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ sobre el cilindro, para calcular su envolvente, el paso fundamental será estudiar si C está en posición euclídea o no. Para ello vamos a trasladar el problema a una circunferencia en el siguiente sentido: cortamos el cilindro con un plano perpendicular al eje y proyectamos los puntos de C ortogonalmente sobre la circunferencia resultante. En esta situación, los puntos de C están en posición euclídea si, y sólo si, el menor arco que cubre a los puntos sobre la circunferencia es menor que π .

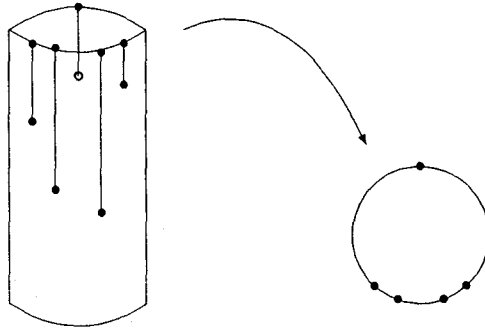


Figura 1.12.

Es sabido que el problema de hallar el menor arco de circunferencia que cubre un conjunto de N puntos requiere $\Omega(N \log N)$ operaciones [86]. Sin embargo, no necesitamos conocer exactamente el menor arco que cubre a los puntos, nos basta con saber si éste es menor que π o no, y ésto lo podemos saber en tiempo óptimo $O(N)$ tal y como se sugiere en [86] por separación lineal, pero podemos dar aquí otra demostración que se nos antoja más simple

Lema 3. *El problema de determinar si el menor arco de circunferencia que cubre un conjunto de N puntos es menor que π se resuelve en tiempo óptimo $O(N)$. En el caso de que lo sea, se puede calcular dicho arco en tiempo lineal.*

Demostración: Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ puntos distribuidos sobre una circunferencia, elegimos, por ejemplo v_1 , y consideramos el sistema de referencia con origen O en el centro de la circunferencia, y de forma que la semirrecta Ov_1 sea la parte positiva del eje de abscisas. Calculamos el ángulo formado por los restantes puntos del conjunto con la semirrecta Ov_1 girando en sentido contrario al de las agujas del reloj y los representamos como $ang_+(v_k)$, para $k = 2, 3, \dots, N$.

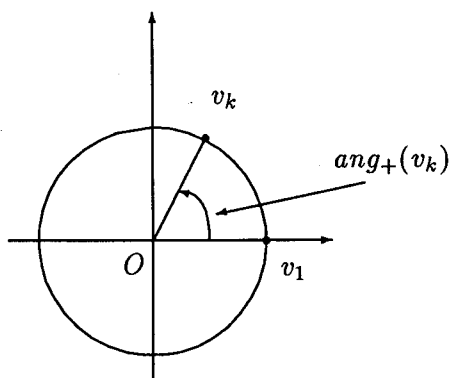


Figura 1.13

Llamamos $v^+ = \max_{k=2, \dots, N} \{ang_+(v_k); 0 \leq ang_+(v_k) \leq \pi\}$. Del mismo modo calculamos el ángulo formado por los demás puntos del conjunto con la semirecta Ov_1 girando en el sentido de las agujas del reloj y los representamos como $ang_-(v_k)$, $k = 2, 3, \dots, N$. Llamamos $v^- = \max_{k=2, \dots, N} \{ang_-(v_k); 0 \leq ang_-(v_k) \leq \pi\}$. Es fácil comprobar que todos los puntos están contenidos en una semicircunferencia si y sólo si $l = v^+ + v^- \leq \pi$, y en ese caso, l es precisamente la longitud del menor arco recubridor.

■

Determinar si los puntos están en posición euclídea o no necesita, por lo tanto, un número lineal de operaciones. En el caso en que lo estén para calcular la envolvente en el cilindro habrá que recurrir a algún algoritmo de cálculo de la envolvente en el caso plano [33, 79, 83, 90]. En otro caso, en virtud del Teorema 3., sabemos que la envolvente convexa será la banda abierta definida por el conjunto, a la que añadimos el m-top y el m-bottom. Básicamente, el algoritmo quedaría descrito en tres pasos como sigue

Algoritmo EC-CILINDRO(C)

Paso 1 Si C está en posición euclídea ir al Paso 3.

Paso 2 Calcular la máxima y la mínima altura de los puntos de C .
FIN.

Paso 3 Calcular la envolverte convexa de C en el plano.

Teorema 4. *El algoritmo EC-CILINDRO(C) calcula la envolverte m -convexa de una nube de N puntos en el cilindro en tiempo óptimo $O(N \log h)$, donde h representa el número de puntos que se encuentran en la frontera de la envolverte convexa.*

Demostración: El resultado es inmediato si tenemos en cuenta que el paso 1 del algoritmo EC-CILINDRO(C) se realiza en tiempo óptimo $O(N)$ (Lema 3.), el paso 2 consiste en calcular el máximo y el mínimo de un conjunto de N puntos y ésto se hace en tiempo lineal; por último, en cuanto al paso 3, es bien sabido que la envolverte convexa en el plano se calcula en tiempo óptimo $O(N \log h)$ (ver [90, 60, 16, 15]). ■

Volveremos más adelante sobre este resultado cuando analicemos la complejidad media del algoritmo.

2.3.2 Envolverte métricamente convexa en el toro

En el caso del toro, para un conjunto de puntos en posición euclídea, el cálculo de la envolverte, como ocurría en el cilindro, es el cálculo de la envolverte en el plano. Si el conjunto de puntos al que queremos calcularle la envolverte está en posición cilíndrica (ver Capítulo de Preliminares), podemos usar el algoritmo del cilindro. Ahora bien, si el conjunto de puntos sobre el toro está en posición no cilíndrica tenemos

Lema 4. *La envolverte m -convexa de tres puntos en posición no cilíndrica sobre el toro es la propia superficie.*

Demostración:

Sean $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ en posición no cilíndrica sobre el toro; sea Γ la curva definida por los segmentos que unen a estos puntos, de dos en dos, g_2 y h_2 el meridiano y el paralelo que contienen a v_2 , respectivamente, y g'_2 y h'_2 sus diametralmente opuestos. A priori, sabemos que tanto C como Γ están contenidas en $E_m(C)$ por su propia definición (Figura 12).

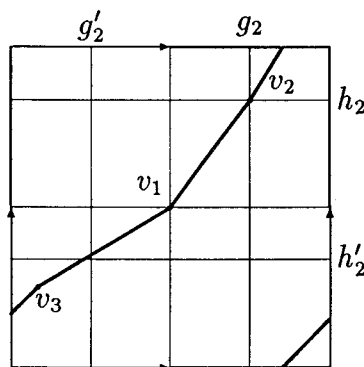


Figura 1.14.

Si consideramos el cilindro obtenido al cortar el toro por el meridiano diametralmente opuesto a v_1 , y calculamos la envolvente m-convexa de los puntos de Γ , contenidos en la región definida por el meridiano que contiene a v_1 y el diametralmente opuesto, la que contiene a v_2 , tenemos que la banda sombreada en la Figura 13, debe estar contenida en $E_m(C)$.

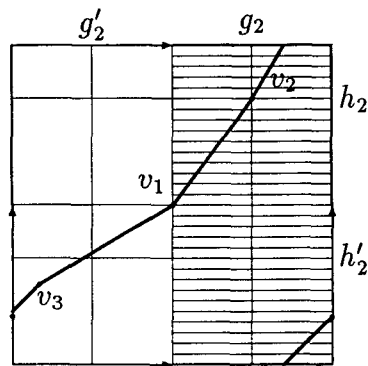


Figura 1.15.

Si consideramos ahora el cilindro obtenido al cortar el toro por el paralelo diametralmente opuesto a v_1 , y calculamos la envolvente m-convexa de los puntos de Γ , contenidos en la región definida por el paralelo que contiene a v_1 y el diametralmente opuesto, la que contiene a v_3 , tenemos que la región sombreada en la Figura 14, también debe estar contenida en $E_m(C)$.

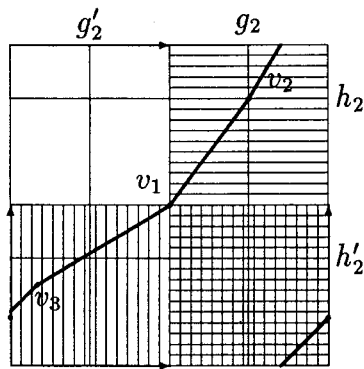


Figura 1.16

Uniendo mediante segmentos los puntos en las regiones rayadas, se llega a que la envolvente convexa es todo el toro.

■

Teorema 5. *La envolvente m -convexa de un conjunto C de N puntos en el toro es*

- a) *La envolvente convexa de C en el cilindro si C está en posición cilíndrica;*
o
- b) *Todo el toro en otro caso.*

Demostración:

Si C está en posición cilíndrica, por ejemplo, C está comprendido entre dos paralelos diametralmente opuestos, cortando el toro por uno de estos paralelos, el cálculo de la envolvente convexa se reduce al cálculo de la envolvente convexa en el cilindro. En otro caso, basta usar el Lema 4.

■

A la hora de diseñar un algoritmo que calcule la envolvente m -convexa en el toro, en virtud del Teorema 5., el primer paso será estudiar si C está en posición cilíndrica o no. Pero usando el Lema 3., ésto se hace en tiempo lineal:

- a) Cortamos el toro por un meridiano, y nos preguntamos si en el cilindro resultante, los puntos del conjunto C están en posición euclídea (Lema 3.). Si la respuesta es afirmativa, C está en posición cilíndrica, C está contenido entre dos paralelos diametralmente opuestos; recurrimos al algoritmo $EC-CILINDRO(C)$. Si la respuesta es no, se recurre al paso siguiente.
- b) Cortamos el toro por un paralelo, y nos preguntamos si en el cilindro resultante, los puntos del conjunto C están en posición euclídea (Lema 3.). Si la respuesta es afirmativa, C está contenido entre dos meridianos diametralmente opuestos y, por lo tanto, está en posición cilíndrica y usamos el algoritmo $EC-CILINDRO(C)$. Si la respuesta es no, tenemos que la envolvente m -convexa es todo el toro (Teorema 5.).

Podemos describir este algoritmo, en tres pasos, como sigue:

Algoritmo EC-TORO(C)

Paso 1 Si C está en posición cilíndrica ir al Paso 3.

Paso 2 La envolvente m -convexa es el toro. FIN

Paso 3 Calcular la envolvente m -convexa de C en el cilindro.

Teorema 6. *El algoritmo EC-TORO(C) calcula la envolvente m -convexa de una nube de N puntos en el toro en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

La complejidad de este algoritmo se deduce del hecho de que los pasos 1 y 2 son lineales, y como sabemos el paso 3 se puede hacer en tiempo óptimo $O(N \log N)$ (Teorema 4.).

2.3.3 **Envolvente métricamente convexa en la esfera**

Nos plantearemos ahora el cálculo de la envolvente m -convexa de un conjunto de puntos sobre la superficie de la esfera. Para ello, recuérdese que en el Capítulo de Preliminares habíamos definido que un conjunto de puntos en la esfera se encuentran en posición euclídea si todos están sobre una semiesfera. Con esto, el estudio de la envolvente métricamente convexa en la esfera es similar al del cilindro y al del toro: si los puntos están en posición euclídea, el algoritmo en la esfera es una simple modificación del algoritmo en el plano, y en otro caso, la envolvente m -convexa es toda la superficie y por lo tanto, demasiado grande para ser útil.

Consideremos $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ sobre la esfera, caractericemos primero teóricamente su envolvente m -convexa $E_m(C)$.

Lema 5. *Dados 4 puntos sobre la esfera en posición no euclídea, la envolvente m -convexa es la propia superficie.*

Demostración: Dados $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ puntos sobre la esfera, llamamos C_i al

círculo máximo que definen v_i y v_j y γ_{ij} a la geodésica métrica uniendo a dichos puntos; evidentemente, $\gamma_{ij} \subset \mathcal{C}_{ij}$

Consideremos por ejemplo \mathcal{C}_{12} . Entonces v_3 y v_4 , estarán uno en cada uno de los hemisferios en que este círculo divide a la esfera. Las geodésicas γ_{12} y γ_{34} no se cortan sobre la esfera, en caso contrario los puntos estarían en posición euclídea, considérese por ejemplo el hemisferio cuyo polo es el punto de intersección de γ_{12} y γ_{34} .

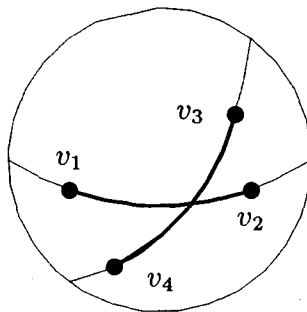


Figura 1.16.

A priori sabemos que tanto γ_{12} y γ_{34} están contenidas en la envolvente m-convexa; pero también lo estarán $\mathcal{C}_{12} \setminus \gamma_{12}$ y $\mathcal{C}_{34} \setminus \gamma_{34}$; puesto los triángulos esféricos abiertos de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_4\}$, están contenidos en la envolvente m-convexa y $\mathcal{C}_{34} \setminus \gamma_{34}$ está contenido en dichos triángulos. Análogamente se razonaría con $\mathcal{C}_{12} \setminus \gamma_{12}$ y los triángulos $\{v_1, v_3, v_4\}$ y $\{v_2, v_3, v_4\}$.

Los círculos máximos C_{12} y C_{34} están contenidos en $E_m(C)$; si unimos, de dos en dos, los puntos en ambos círculos mediante segmentos, todas éstas estarán contenidas en $E_m(C)$ y, puesto que los dos husos que definen dos círculos máximos miden menos de 180 grados (ver Capítulo de Preliminares), dichas geodésicas recubren toda la superficie. ■

Como consecuencia del resultado anterior, para un conjunto de N puntos sobre la esfera ocupando más de un hemisferio, $N \geq 4$, la envolvente m -convexa es toda la superficie. En otro caso, cuando exista un hemisferio cubriendo a todos los puntos del conjunto, para calcular la envolvente m -convexa puede usarse la siguiente adaptación del algoritmo de Graham [43]:

- a) Se calcula el centro del menor casquete esférico que cubre al conjunto, (esto puede hacerse en tiempo lineal si los puntos están en posición euclídea [86]), este punto, p , es un punto interno de la envolvente. Se considera dicho punto como polo norte y se ordenan los restantes puntos del conjunto a partir de él, construyendo una lista circular de puntos.
- b) Se calcula uno de los puntos del conjunto más alejado de p , que estará sobre el borde del menor casquete esférico. Podemos asegurar que éste es un punto extremo de la envolvente. Comenzamos el *scan* a partir de él, siguiendo la lista circular.
- c) Cada vez que tenemos que estudiar una tripleta $v_1v_2v_3$, nos preguntamos si el segmento pv_2 corta al segmento v_1v_3
 - si $pv_2 \cap v_1v_3 \neq \emptyset$ seguimos avanzando considerando $v_2v_3v_4$,
 - si $pv_2 \cap v_1v_3 = \emptyset$, se elimina el punto v_2 de la lista y se analiza la tripleta $v_0v_1v_2$.

El recorrido finaliza cuando alcanzamos el punto de partida.

De forma análoga, se pueden adaptar otros algoritmos que calculen la envolvente convexa en el plano, para calcular la envolvente m-convexa en la esfera, cuando los puntos están en posición euclídea.

A la vista de todo lo anterior, el primer paso de cualquier algoritmo de cálculo de la envolvente m-convexa en la esfera será determinar si los puntos están contenidos en un hemisferio o no; ésto puede hacerse estudiando la separabilidad del conjunto de puntos respecto del centro de la esfera y para ello puede usarse el algoritmo lineal de [68]. Con lo que, en tres grandes pasos, podemos calcular la m-envolvente en la esfera como sigue

Algoritmo EC-ESFERA(C)

Paso 1 Si C está en posición euclídea ir al Paso 3.

Paso 2 La envolvente m-convexa es la esfera. FIN.

Paso 3 Calcular la envolvente convexa de C usando un algoritmo plano, adaptado a la esfera.

2.3.4 Envolverte métricamente convexa en el cono

Para calcular la envolvente m-convexa de un conjunto finito de puntos en el cono, usaremos la representación del mismo en el espacio métrico $X = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ construido a partir de la identificación de tres copias del desarrollo

plano del cono (ver Capítulo de Preliminares). Tal y como ocurría en las demás superficies que hemos estudiado, el estudio de la envolvente en el cono depende fundamentalmente de la dispersión del conjunto; para puntos concentrados, en posición euclídea, el cálculo es idéntico al del plano; cuando los puntos no estén en posición euclídea, la envolvente está a medio camino entre la envolvente plana y la cilíndrica.

Si tenemos un conjunto de puntos $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ en posición euclídea sobre el cono, es inmediato comprobar que si calculamos la envolvente convexa de éstos en el desarrollo del cono, usando los algoritmos clásicos de cálculo de la envolvente en el plano, la región correspondiente sobre el cono es la envolvente m -convexa en el mismo.

Sin embargo, cuando los puntos de C no están en posición euclídea tenemos el siguiente resultado

Lema 6. *La envolvente m -convexa en el cono de un conjunto de tres puntos en posición no euclídea contiene al vértice del cono.*

Demostración: Sean $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ en posición no euclídea sobre el cono; sea Γ la curva definida por los segmentos que unen a estos puntos, de dos en dos. A priori, sabemos que tanto C como Γ están contenidas en $E_m(C)$ por su propia definición.

Sea r el radio de los puntos de la m -envolvente más cercano al vértice, supongamos que $r > 0$ y tracemos la circunferencia de radio r alrededor del vértice; usando razonamientos similares a los usados en la demostración del Lema 2., podemos demostrar que la región abierta comprendida entre Γ y dicha circunferencia está contenida en la envolvente.

Más aún, puesto que dicha circunferencia no es localmente convexa en el cono, podemos probar, usando el mismo tipo de razonamientos, que la región sombreada en la Figura, está contenida en la envolvente; pero esto contradice el hecho de que r sea el radio de los puntos de la envolvente más cercanos al vértice.

■

Supongamos que tenemos un conjunto $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ en posición no euclídea sobre el cono. En el espacio $X = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ podemos adaptar, como ya se hizo en el caso de la esfera, algún algoritmo del plano, por ejemplo el algoritmo de Graham [43]. Bastaría en este caso con ordenar circularmente los puntos $\phi^{-1}(C)$ desde el vértice del cono, y repetir el *scan* usando el mismo criterio que se usó en la esfera. La región así obtenida es una región convexa en X en el sentido euclídeo, el segmento que une a dos puntos sobre X está contenido en X . Si nos quedamos con la intersección de esta región con la copia central, \mathcal{C}_2 , obtenemos una región m-convexa en el cono, que contiene a C .

Usando razonamientos similares a los de la demostración del Lema 2., podemos probar que dicha región, eliminando de su frontera aquellos segmentos que no representen segmentos en el sentido de ser geodésicas de mínima longitud, es el menor conjunto m-convexo en el cono cumpliendo esta condición. Luego ya tenemos calculada la envolvente m-convexa de C en el cono. Por lo tanto, en el caso del cono el algoritmo del cálculo de la envolvente quedaría como sigue:

Algoritmo EC-CONO(C)

Paso 1 Si C está en posición euclídea ir al Paso 3.

Paso 2 Calcular la envolvente convexa en X de $\phi^{-1}(C) \cup \{\text{vértice del cono}\}$ usando un algoritmo plano, adaptado al plano, y quedarse con la intersección de dicha envolvente con C_2 .

Paso 3 Eliminar de la frontera aquellas geodésicas que no sean métricas. FIN.

Paso 4 Calcular la envolvente convexa de C usando un algoritmo plano.

Obsérvese, que en el caso de la envolvente m -convexa, el papel del cono está a medio camino entre el plano y el cilindro y que cuanto menor sea el ángulo del vértice del cono, más próximo estaremos al caso cilíndrico, acercándonos al plano cuando el ángulo va creciendo.

2.4 Análisis del caso medio

Aunque hemos visto que los algoritmos presentados en este Capítulo corren, en el peor caso, en tiempo óptimo $O(N \log N)$, vamos a realizar en esta sección un análisis de la complejidad media de dichos algoritmos.

Recuérdese que el primer paso del algoritmo EC-CILINDRO(C) era pre-

guntarse si C estaba o no en posición euclídea. Cuando la respuesta a dicha pregunta es “sí”, entonces el algoritmo remite al cómputo de la envolvente convexa en el plano y es bien conocido el análisis de la complejidad media en este caso (ver, por ejemplo [83]). Sin embargo, si la respuesta es “no”, el cálculo de la envolvente convexa es equivalente a encontrar el máximo y el mínimo de un conjunto, por lo tanto el algoritmo es lineal. La probabilidad de que esto ocurra queda reflejada en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si N puntos son escogidos uniformemente e independientemente de forma aleatoria sobre un cilindro, la probabilidad de que estén en posición no euclídea es $1 - N/2^{N-1}$.*

Demostración: Si $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, sean (x_i, y_i) las coordenadas de cada punto v_i en el sistema de referencia que para el cilindro habíamos fijado en el Capítulo de Preliminares. Si llamamos S al suceso “ C está en posición euclídea”, tenemos que $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$, siendo S_i el suceso “ $C_i = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_N\}$ está contenido en la banda definida por las rectas $x = x_i$ y $x = x_i + 1/2$ ”.

Si llamamos \mathcal{P}_i a la probabilidad de cada S_i , y puesto que éstos sucesos son independientes, ($C_i \cap C_j = \emptyset$), tenemos que la probabilidad de que ocurra C será $\mathcal{P}(C) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i$,

Por último, cada $\mathcal{P}_i = 1/2^{N-1}$, puesto que cada punto de C_i está o bien en la banda definida por las rectas $x = x_i$ y $x = x_i + 1/2$, o bien en la definida por las rectas $x = x_i$ y $x = x_i - 1/2$, y en cada uno de los casos, con probabilidad $1/2$. Por lo tanto, la probabilidad de que los N puntos estén en posición euclídea, será $\mathcal{P}(C) = \sum_{i=1}^N 1/2^{N-1} = \frac{N}{2^{N-1}}$, y se tiene el resultado. ■

Obsérvese que la probabilidad proporcionada en la Proposición 1. es muy alta ya que para $N = 7$ es aproximadamente del 90% y para $N = 15$ es más del 99.9%. Naturalmente, esto implica que, en la gran mayoría de los casos, es posible calcular la envolvente m -convexa en tiempo lineal, pero, en dichos casos, dicho objeto será excesivamente grande para los propósitos que suele ser utilizado, algunos de los cuales han quedado reflejados en la Introducción.

En el caso del algoritmo EC-TORO(C) para el cálculo de la envolvente de un conjunto de puntos C sobre el toro, podía ocurrir: (a) que C estuviese en posición no cilíndrica, y entonces la envolvente sería toda la superficie; (b) que C estuviese en posición cilíndrica pero no euclídea, y en ese caso la envolvente es una banda en el toro ó (c) que C estuviese en posición euclídea y la envolvente en el toro de C se calcula usando un algoritmo de cálculo de la envolvente en el plano. El siguiente resultado nos proporciona la probabilidad de que ocurran cada uno de los sucesos anteriores.

Proposición 2. *Si N puntos son escogidos uniforme e independientemente de forma aleatoria sobre un toro, la probabilidad de que estén en posición euclídea es $\mathcal{P}_1 = N^2/2^{2N-2}$ y la envolvente m -convexa es el toro completo con probabilidad $\mathcal{P}_2 = 1 - \frac{N}{2^{N-2}}(1 - \frac{N}{2^N})$.*

Demostración: Sea $C = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ un conjunto de N puntos en el toro y sean (x_i, y_i) las coordenadas de cada punto v_i en el sistema de referencia del toro plano, (ver Capítulo de Preliminares). Si llamamos S_1 al suceso “ C está en posición euclídea” tenemos que $S_1 = P \cap M$ siendo P el suceso “ C está contenido entre dos paralelos diametralmente opuestos” y M el suceso “ C está contenido entre dos meridianos diametralmente opuestos”. Como ya se hizo en la demostración de la Proposición 1., podemos calcular la probabilidad de

P y C y, en ambos casos, esta probabilidad es $\frac{N}{2^{N-1}}$. Entonces, como P y C son independientes, tenemos que la probabilidad de que los puntos de C estén en posición euclídea es $\mathcal{P}_1 = \frac{N^2}{2^{2N-2}}$.

Por otra parte, si llamamos S_2 al suceso " C está en posición cilíndrica" es fácil ver que $S_2 = P \cup M$, y por lo tanto $\mathcal{P}(S_2) = \mathcal{P}(P) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(P \cap M) = \frac{N}{2^{N-1}} + \frac{N}{2^{N-1}} - \frac{N^2}{2^{2N-2}} = \frac{N}{2^{N-2}}(1 - \frac{N}{2^N})$. Por lo tanto, la probabilidad de que la envolvente m-convexa sea todo el toro, que es la probabilidad de que los puntos estén en posición no cilíndrica, será $\mathcal{P}_2 = 1 - \frac{N}{2^{N-2}}(1 - \frac{N}{2^N})$.

■

Obsérvese que la probabilidad de que la envolvente m-convexa no sea la euclídea, y por lo tanto, se calcule en tiempo, a lo más lineal, es para $N = 10$ del 99'96%. Además para $N = 10$, la probabilidad de que la envolvente convexa sea toda la superficie es más del 96%, con lo que concluimos diciendo que la envolvente de un conjunto finito de puntos en el toro, en la mayoría de los casos se calcula en tiempo lineal, pero aporta poca información acerca de dicho conjunto; es demasiado grande en esos casos.

En el caso de un conjunto de puntos sobre la esfera podemos enunciar

Proposición 3. *Si N puntos son escogidos uniforme e independientemente de forma aleatoria sobre una esfera, la probabilidad de que estén en posición euclídea es $\mathcal{P} = \frac{N^2 - N + 2}{2^N}$.*

Demostración:

Este es un caso particular de un resultado más general probado por Wendel [102] ■

En el caso del cono, el estudio probabilístico que hemos hecho en el cilindro y en el toro no tiene sentido, ya que el cálculo de la envolvente m -convexa en esta superficie recurre a un algoritmo de cálculo de la envolvente en el plano en todos los casos, para puntos en posición euclídea o no, y estos algoritmos corren en tiempo óptimo $O(N \log h)$. Lo que sí podemos observar en el caso del cono es que, para valores pequeños del ángulo en el vértice, la frontera de la envolvente contiene a pocos puntos del conjunto original. Luego para valores pequeños del ángulo, conviene utilizar algoritmos de la envolvente en el plano que se “beneficien” de esta situación, por ejemplo, la *marcha de Jarvis* [57] (ver también [83]).

2.5 Conclusiones y problemas abiertos.

Hemos comprobado que, en cualquier caso, es posible encontrar la envolvente convexa de un conjunto de N puntos en el cilindro o en el toro en tiempo óptimo $O(N \log N)$. Más aún, en la gran mayoría de los casos, los puntos se encontrarán en posición no euclídea y en dichos casos los algoritmos que hemos presentado corren en tiempo lineal.

Sin embargo, cuando los puntos están en posición no euclídea, la envolvente convexa es demasiado grande y, por tanto, impráctica si la queremos utilizar como herramienta para los problemas señalados en la introducción. Así, surge como problema principal el encontrar estructuras alternativas adecuadas que puedan ser utilizadas para la resolución de los problemas para los

que la envolvente convexa no es útil. En este sentido, sirva como ejemplo el caso del cálculo del diámetro de un conjunto de N puntos (la distancia máxima entre dos puntos del conjunto), el cual se suele encontrar en el plano en tiempo óptimo $O(N \log N)$ usando la envolvente convexa, sin embargo, si los puntos no están en posición euclídea en el cilindro o en el toro, el diámetro no tiene porqué darse en puntos extremos de la envolvente, con lo cual conocer la envolvente convexa de los puntos no es significativo para la resolución de este problema.

Capítulo 3

Diagramas de Voronoi

Probablemente, después de la envolvente convexa, los Diagramas de Voronoi son las estructuras geométricas más estudiadas en el ámbito de la Geometría Computacional (ver [7, 76]), debido principalmente a las aplicaciones de estas estructuras en infinidad de campos diferentes de las ciencias: Cristalografía [87], Biología, Geografía y Ecología [10, 80, 41]. Básicamente estas estructuras han sido estudiadas con el fin de modelizar procesos de crecimiento y relaciones de proximidad entre objetos (el más cercano, el más lejano). Por todo lo anterior, nos parece lógico dedicar un capítulo al estudio de estas estructuras en superficies, aunque debemos decir que gran parte de los problemas que surgen en éstas ya han sido estudiados y resueltos por otros autores.

3.1 Introducción

Aunque hay autores [76] que afirman encontrar el concepto de diagrama de Voronoi en el trabajo de Descartes sobre fragmentación cósmica en 1644, *Le Monde de Descartes, ou Le Traité de la Lumière*; parece que la mayoría coincide en que el nacimiento de este concepto se tiene en el trabajo de Dirichlet [29] y el de Voronoi [100].

A partir de estos dos trabajos y hasta el momento, infinidad de trabajos relacionados con los diagramas de Voronoi se pueden encontrar no sólo en textos matemáticos, sino en textos de Cristalografía [73, 75, 87], en áreas relacionadas con interpolación espacial, como la Meteorología [94, 52, 103], o Geología [81, 48, 49], en Física[104], Ciencias Agroforestales [13], etc.... En el campo de la Geometría Computacional los diagramas de Voronoi se han usado para resolver problemas como el vecino más cercano (*nearest neighbors*), triangulaciones que maximizan el más pequeño de los ángulos, cálculo del mayor círculo vacío (*largest empty circle*), cálculo del árbol generador mínimo (*minimum spanning tree*) o el problema del viajante (*traveling salesperson problem*), ver Sección 5.5 del libro de O'Rourke [79].

En este capítulo nos vamos a ocupar de estas estructuras en superficies. Comenzaremos en la Sección 3.2 estudiando el diagrama de Voronoi clásico de un conjunto de puntos, es decir, el que asigna a cada punto una región sobre la superficie formada por los puntos que están más cercano a dicho punto que a ningún otro de la nube. En la Sección 3.3 nos centraremos en el estudio del diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos, que asigna a cada punto la región sobre la superficie formada por los puntos que están más alejados de dicho punto que de ningún otro. Como diagrama de Voronoi generalizado estudiaremos el diagrama polar [44] en el cilindro, por tratarse

de una estructura que proporciona un preprocesamiento muy interesante en problemas, por ejemplo, de visibilidad, y porque, por primera vez, a lo largo de nuestros estudios sobre Geometría Computacional sobre superficies, nos encontramos con una estructura que en el cilindro tiene una complejidad mayor que en el plano.

3.2 Diagramas de Voronoi

Dado un conjunto de puntos $S = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ en un espacio métrico X se define la *región de Voronoi de P_k* , $1 \leq k \leq N$ y se denota $Vor(P_k)$ como el lugar geométrico de los puntos de X que están más cerca de P_k que de ningún otro punto de la nube,

$$Vor(P_k) = \{Q \in X ; d(Q, P_k) \leq d(Q, P_j), j \neq k\}$$

La unión de estas regiones, $\bigcup_{k=1}^N Vor(P_k) = Vor(S)$, es la partición de X conocida como *diagrama de Voronoi de S* .

En el libro de Okabe et al [76] podemos encontrar el estudio de este diagrama en la esfera, el cilindro, el cono y el toro; y, desde un punto de vista más general, el estudio de los diagramas de Voronoi en caleidoscopios se encuentran en la tesis de Mazón [67]. Poco trabajo nos han dejado a nosotros en este terreno, pero, aún así, nos gustaría hacer algunas anotaciones.

Dado dos puntos P y Q en el cilindro, el bisector entre éstos, según se ve en [76], está formado por las dos geodésicas de menor longitud uniendo a dos puntos, uno sobre la generatriz diametralmente opuesta a P y otro sobre la diametralmente opuesta a Q . Veamos que el recíproco de este resultado

también es cierto. Para ello sean M_1 y M_2 dos puntos en el cilindro, h_1 y h_2 las geodésicas de menor longitud uniendo a estos puntos, ver Figura 2.1.

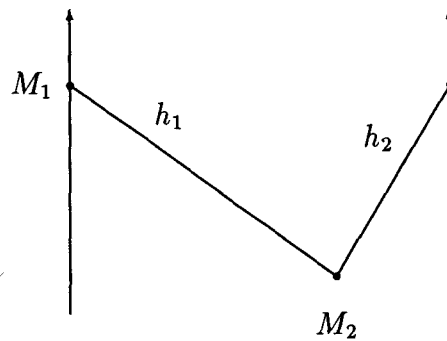


Figura 2.1.

Entonces los puntos de los que dicha poligonal es bisector, P_1 y P_2 , están situados sobre las generatrices diametralmente opuestas a M_1 y M_2 respectivamente (los “picos” de la curva), llamamos g_1 y g_2 a las generatrices que contienen a P_1 y P_2 respectivamente.

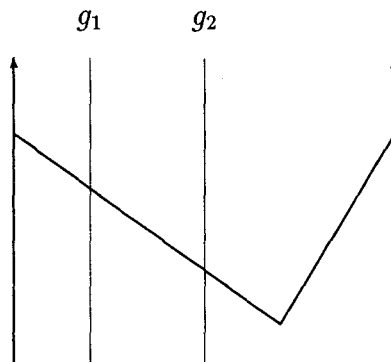


Figura 2.2.

Para determinar a qué altura de g_2 se encuentra exactamente P_2 , observemos que el bisector junto con la semigeneratriz descendente que comienza en M_2 , es el diagrama de Voronoi en el plano de los puntos P_1 , P_2 y la copia de P_2 a la derecha de P_1 , Figura 2.3..

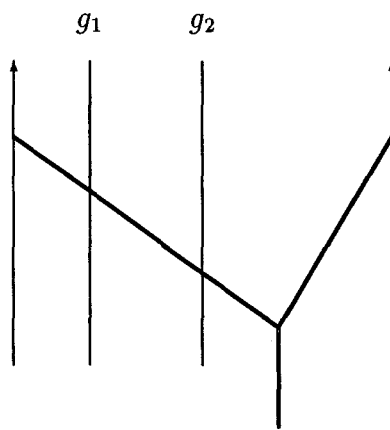


Figura 2.3.

Como se ve en [76], si llamamos γ al ángulo formado por h_1 y la recta que une a P_2 con M_2 y ϕ al ángulo señalado en la Figura 2.4., se tiene que $\gamma + \phi = \pi$.

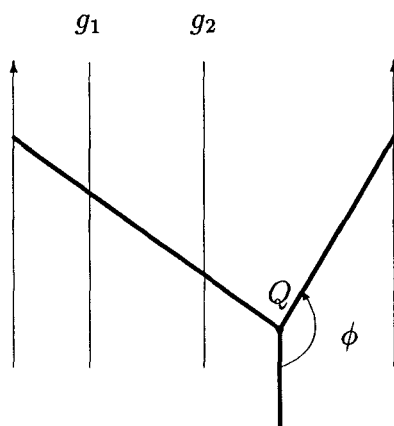


Figura 2.4.

Como conocemos ϕ , basta con trazar una recta formando un ángulo γ con h_1 desde M_2 y en el corte de esta con g_2 estará P_2 ; el cálculo de P_1 ya es inmediato.

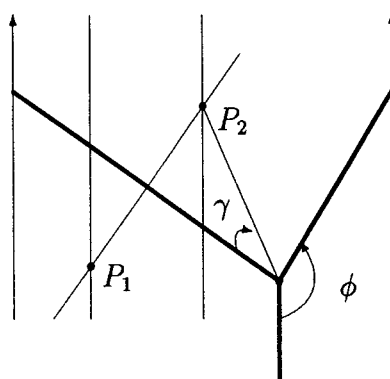


Figura 2.5.

Otra observación que queremos hacer en esta sección es que si en el plano se demuestra que las aristas del árbol generador mínimo (*MST*) son un subgrafo del dual de Voronoi [82], en las superficies anteriormente mencionadas la misma demostración es válida en estos casos. Además se puede comprobar fácilmente que todas las aristas del *MST* son segmentos en cada una de estas superficies, mientras que esto no ocurre con el dual del Voronoi, ver Figura?????. Por tanto, podemos decir que en realidad que el *MST* es un subgrafo de las aristas del dual de Voronoi que son segmentos.

3.3 Diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos

Dado un conjunto de puntos $S = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ en un espacio métrico X se define la *región de Voronoi de los puntos más lejanos de P_k* , $1 \leq k \leq N$ y se denota $Vor^F(P_k)$ como el lugar geométrico de los puntos de X que están más lejos de P_k que de ningún otro punto de la nube,

$$Vor^F(P_k) = \{Q \in X ; d(Q, P_k) \geq d(Q, P_j), j \neq k\}$$

La unión de estas regiones, $\bigcup_{k=1}^N Vor^F(P_k) = Vor^F(S)$, es la partición de X conocida como *diagrama de Voronoi de los puntos más alejados de S ó $N - 1$ diagrama de Voronoi de S* .

En su tesis doctoral, Brown [14] resalta el hecho de que, en el caso de la esfera, el diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos coincide con el diagrama de Voronoi clásico de los puntos antipodales a los de la nube original. En realidad, este hecho puede considerarse desde un punto de vista más general y así dado un espacio métrico X decimos que un punto y es el *antipodal* de x si y es el punto más alejado de x en X . Por lo tanto, si en X todo punto admite antipodal, podemos definir una aplicación $ant : X \rightarrow X$ que a cada punto le hace corresponder su antipodal y enunciar

Teorema 7. *Sea S un conjunto finito de puntos en un espacio métrico X , en el que la aplicación $ant : X \rightarrow X$ es una isometría, entonces*

$$Vor^F(S) = Vor(ant(S)).$$

En virtud del Teorema 7., tenemos un método para construir el diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos en el toro, y en general, en cualquier superficie donde se pueda definir la aplicación *ant*. ¿Qué pasa en el cilindro? Pues claramente en esta superficie no podemos usar el mencionado teorema, puesto que la aplicación *ant* no está definida, el cilindro tiene longitud infinita. En la tesis de Mazón [67], para calcular el diagrama de Voronoi clásico de un conjunto de N puntos sobre el cilindro, considera tres copias del mismo, calcula el diagrama de Voronoi plano de los $3N$ puntos, y se queda sólo con el diagrama en la copia central.

Si pensamos en usar este mismo procedimiento a la hora de calcular en el cilindro el diagrama de Voronoi de los puntos más lejanos, nos encontramos con situaciones como la mostrada en la Figura

Vamos a recurrir, por tanto, a un paradigma clásico en Geometría Computacional, al método de “Divide y vencerás” (*divide and conquer*), para computar el diagrama de Voronoi de los puntos más alejados en el cilindro. Para ello, al igual que para calcular el diagrama de Voronoi clásico en el plano usando este método [83], necesitamos describir la construcción de la cadena divisoria, que será usada en el proceso de pegado (*merge*) de los dos subdiagramas, si dicha construcción se hace en tiempo lineal en el número de puntos, ya tenemos que es posible calcular el diagrama de los puntos alejados en el cilindro en tiempo $O(N \log N)$ Describimos a continuación el proceso completo:

- (a) Dividimos el conjunto original S de puntos en dos subconjuntos, S_1 y S_2 , de, aproximadamente, el mismo tamaño, separándolos mediante un paralelo del cilindro $p : \{y = K\}$, suponemos que S_1 está arriba y S_2 debajo.
- (b) Construimos el diagrama de Voronoi de los puntos más alejados de S_1

y S_2 . Cada uno de estos dos diagramas, define sobre el paralelo p , segmentos correspondientes con la intersección de las regiones. Es decir si $S_1 = \{P_1^1, P_2^1, \dots, P_{n_1}^1\}$ y $S_2 = \{P_1^2, P_2^2, \dots, P_{n_2}^2\}$, llamamos

$$\mathcal{S}_j^i = \{(x, K) ; (x, K) \in Vor^F(P_j^i)\}$$

con $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, \dots, n_i$.

- (c) Comenzamos por un punto cualquiera en p , (x, K) , para este punto existen valores r y s de forma que $(x, K) \in \mathcal{S}_r^1 \cap \mathcal{S}_s^2$. Calculamos el bisector o mediatriz entre P_r^1 y P_s^2 , si este bisector no toca a p en un punto de $\mathcal{S}_r^1 \cap \mathcal{S}_s^2$ seguimos hacia la derecha sobre p hasta encontrar \mathcal{S}_r^1 , ó \mathcal{S}_s^2 , y volvemos a hacernos la misma pregunta con el nuevo bisector. Si acabamos de recorrer p y en ningún momento nos hemos topado con la cadena divisoria, es decir, el paralelo p no corta a ninguno de los bisectores considerados, será porque dicha cadena está totalmente contenida en uno de los dos semicilindros definidos por p ; decidir en cuál de ellos está se hace en tiempo constante, basta con calcular la distancia de un punto de p , (x_0, K) , a un punto cualquiera de S_1 y a otro de S_2 , la cadena estará en el semicilindro que contiene al punto más lejano de (x_0, K) . Una vez que sabemos en que semicilindro está contenida la cadena divisoria, la buscamos “andando” sobre la generatriz $x = x_0$, hacia arriba o hacia abajo según la posición de dicha cadena, de la siguiente manera: si estamos en un punto de la generatriz que pertenece a $Vor^F(P_r^1) \cap Vor^F(P_s^2)$, calculamos el bisector entre P_r^1 y P_s^2 , y comprobamos si interseca a $x = x_0$ dentro de $Vor^F(P_r^1) \cap Vor^F(P_s^2)$. Si la respuesta es negativa seguimos andando sobre la generatriz hasta que cambiemos de región en uno de los dos diagramas; en algún momento tenemos que encontrarla porque la cadena debe ser una curva homotópicamente no nula en el cilindro. Si la respuesta es afirmativa ya tenemos un punto sobre la cadena, seguimos caminando hacia la derecha sobre

el bisector encontrado, hasta que cambiemos de región; cuando hemos cambiado de región seguimos por el bisector asociados a los dos puntos que definen la nueva región, tal y como se hacía en el plano.

- (d) Una vez construida la cadena divisoria, borramos todos los segmentos de $Vor^F(S_1)$ que estén debajo de la cadena, y los de $Vor^F(S_2)$ que estén por encima.

A partir de lo anterior podemos enunciar el siguiente resultado

Lema 7. *Es posible construir la cadena divisoria en tiempo lineal en el número de puntos.*

Usando el lema anterior y tal como se ve en [83], tenemos

Teorema 8. *Es posible calcular el $(N-1)$ -diagrama de Voronoi en el cilindro en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

3.4 Diagrama polar en el cilindro

A la hora de generalizar el concepto de diagrama de Voronoi en otras direcciones, en el libro de Okabe et al. [76] define dicho concepto en los siguientes términos: dado un espacio S y un conjunto $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, $2 \leq N < \infty$, consideramos que cada punto de S tiene asignado, al menos, un punto de A . Si

$P \in S$ tiene asignado A_i , ponemos un 1 para el par (P, A_i) ; si P no tiene asignado A_i , ponemos un 0; así esta asignación se interpreta como una aplicación de $S \times A$ en el conjunto $\{1, 0\}$; $\delta : S \times A \rightarrow \{1, 0\}$, cumpliendo

$$\delta(P, A_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } P \text{ tiene asignado } A_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A una aplicación δ en las condiciones anteriores se le llama una *regla de asignación*. Por ejemplo, en el diagrama de Voronoi clásico, la regla de asignación es la siguiente

$$\delta(P, A_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } d(A_i, P) \leq d(A_j, P) \text{ para } j \neq i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos

$$V(A_i) = \{P \in S \mid \delta(P, A_i) = 1\}$$

$$e(A_i, A_j) = \{P \in S \mid \delta(P, A_i) = \delta(P, A_j) = 1\} = V(A_i) \cap V(A_j)$$

Toda regla de asignación δ que verifique

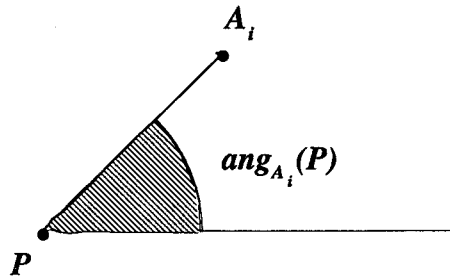
- (i) Todo punto P de S tiene asignado, al menos, un elemento en A ,
- (ii) el conjunto $e(A_i, A_j)$ es la frontera de $V(A_i)$, es decir, dado cualquier $\varepsilon > 0$, la bola abierta de centro $P \in e(A_i, A_j)$ y radio ε contiene puntos interiores de $V(A_i)$ y de $S \setminus V(A_i)$. Intuitivamente, esto quiere decir que si S es el plano, $e(A_i, A_j)$ tiene área nula,

define una teselación de S conocida como *Diagrama de Voronoi Generalizado (DVG)*, y que se denota como $V(A, \delta, S)$ [76].

Sea $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ un conjunto de puntos sobre el plano, consideramos la siguiente regla de asignación, dado $P \in \mathbf{E}^2$

$$\delta(P, A_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{ang}_{A_i}(P) \leq \text{ang}_{A_j}(P) \text{ para } j \neq i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\text{ang}_{A_i}(P)$ es el ángulo formado por la semirrecta horizontal que contiene a P y la semirrecta que contiene a P y lo une con A_i , medido este ángulo en sentido contrario al de las agujas del reloj.



Figura

Es fácil entender que la regla de asignación que acabamos de definir verifica las condiciones (i) y (ii); por lo tanto tenemos una teselación de \mathbf{E}^2 , $V(A, \delta, \mathbf{E}^2)$ que llamaremos *Diagrama polar de A*. Intuitivamente si un punto P pertenece

a $V(A_i)$ quiere decir que si barremos con una semirrecta con origen en P , comenzando en la horizontal, y en dirección contraria a las agujas del reloj, A_i es el primer punto que aparecerá en la pantalla de nuestro radar.

Este diagrama en el plano se puede construir en tiempo $O(N \log N)$ como se puede ver en [44], usando ó bien un algoritmo incremental, ó bien, un algoritmo basado en la técnica de *divide y vencerás*, ambos están descritos en el citado trabajo. Puesto que como en dicho trabajo se resalta la utilidad de dicha estructura como preprocesamiento de problemas de visibilidad, diseño de trayectorias, cálculo de la envolvente convexa, etc, nos vamos a plantear estudiar esta estructura en el cilindro. Se puede comprobar que en el caso del cilindro, es posible calcular el diagrama polar sin más que adaptar el algoritmo incremental descrito en [44] a esta superficie. Pero en el caso general dicho diagrama para un conjunto de N puntos va a tener del orden de N^2 vértices, con lo que nos queda

Teorema 9. *Es posible calcular el diagrama polar de una nube de N puntos en el cilindro en tiempo óptimo $O(N^2)$.*

Esta es la primera vez a lo largo de nuestro trabajo en superficies, que nos encontramos un problema con distinta complejidad en el cilindro y en el plano.

Capítulo 4

Anchura y diámetro

Se ven en este capítulo dos propiedades íntimamente relacionadas con la envolvente convexa y que miden distintas características de los conjuntos como son la anchura y el diámetro. Además el cálculo de ambos invariantes en el plano son parientes muy próximos ya que los algoritmos que lo resuelven son ligeras variaciones unos de otros (ver [53]). Sin embargo, como veremos, esto no es enteramente cierto en el caso de superficies no planas ya que los algoritmos que eran válidos en el plano no lo son ya en las superficies que hemos considerado. A pesar de lo cual probaremos que existen algoritmos que, con la misma complejidad que en el plano, resuelven ambos problemas.

4.1 Introducción

Si bien las aplicaciones prácticas de la anchura y el diámetro de un conjunto son bien distintas, ambos conceptos pertenecen evidentemente a una misma familia de problemas en Geometría Computacional. Para comprobarlo, no hay más que ojear el artículo de Houle y Toussaint [53] en el que se calcula el ancho de un conjunto con dos algoritmos distintos que son, cada uno de ellos, una adaptación de dos algoritmos preexistentes para el cálculo del diámetro.

El considerar ambos problemas dentro de este trabajo tiene sentido desde tres puntos de vista: en primer lugar, las aplicaciones que se le han señalado a ambos conceptos en el plano (*clustering*, robótica, Investigación Operativa, etc.) se pueden presentar cuando tenemos conjuntos que no se encuentran sobre el plano sino sobre alguna superficie. En segundo lugar, la solución algorítmica de ambos problemas, deja de ser similar cuando no nos encontramos en el plano y ésta es una diferencia fundamental (podríamos decir que ambos problemas en superficies no planas la anchura y el diámetro no son ya parientes cercanos). Por último, creemos que las soluciones que aportamos a ambos problemas son muy representativos de la metodología que se debe aplicar a la hora de adaptar algún problema de la Geometría Computacional “clásica” a superficies: en el caso de la anchura, la principal dificultad estriba en encontrar definiciones adecuadas (ya que existen diversas generalizaciones posibles del concepto “par de rectas paralelas”) y probar la equivalencia entre todas las definiciones consideradas (una vez realizada dicha labor, la parte algorítmica es una adaptación de una de las soluciones dadas en el plano. Mientras, en el caso del diámetro, probaremos que la envolvente convexa no es un preprocesamiento útil, sino que será necesario otro tipo de preprocesamiento, aportado, en este caso por el diagrama de Voronoi de los puntos más alejados.

4.2 Anchura de un conjunto convexo en la esfera

El *problema del sofá* [54, 66, 71] parece bastante importante en nuestra vida cotidiana como para dedicar tiempo y esfuerzo al estudio de la anchura de un conjunto en el plano. Básicamente, el planteamiento es el de un apartamento conectado con el exterior mediante un pasillo de anchura constante, con una esquina de 90 grados hacia la derecha, y la pregunta es cuál es el mayor mueble que se puede sacar del apartamento a través del pasillo; si proyectamos el problema sobre el plano nos preguntamos cuándo una figura plana puede pasar, mediante traslaciones y rotaciones a través de un intervalo (puerta) de longitud L (ver Figura 3.1.)

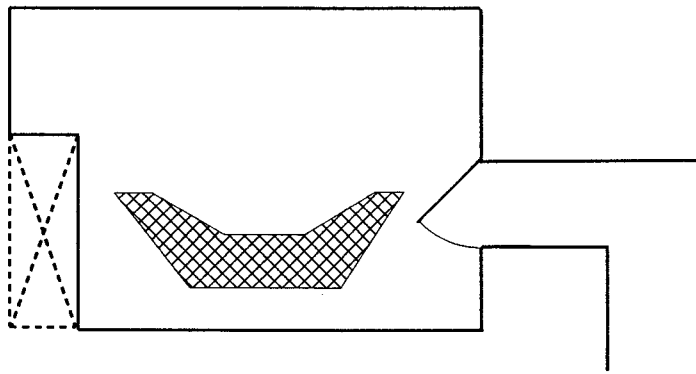


Figura 3.1.

Este problema ha sido tratado ampliamente [54, 66, 71, 96], y es en el trabajo de Strang [93] donde se prueba que en el plano un conjunto convexo

puede atravesar una puerta de longitud L si y sólo si la anchura de dicho conjunto es L . Sin embargo, en dimensión tres este resultado no es cierto y H. Stark ha construido conjuntos convexos que pueden pasar a través de una puerta, cuadrada o circular, aunque ninguna de sus proyecciones cabe por dicha puerta (ver [93]). En principio, no está claro si la esfera cumple la misma propiedad que el plano, o si, por contra y tal y como ocurre en el espacio, la anchura no tiene relación con el tamaño de la puerta que puede atravesar un conjunto conexo. Sin embargo, veremos que, respecto a este problema, el comportamiento en la esfera es exactamente el mismo que en el plano.

Dado un conjunto C y una recta r en el plano se dirá que r es una recta *soporte* para dicho conjunto cuando ésta pasa por algún vértice de la frontera de C y deja a todo el conjunto en un mismo lado, es decir, todo el conjunto C está contenido en uno de los dos semiplanos en que la recta r divide al plano. Así se define la *anchura* de un conjunto en el plano como la mínima distancia entre dos rectas soportes paralelas del conjunto [53]. Este concepto, así como los algoritmos conocidos para su computación, tienen aplicaciones en muchos campos, como pueden ser la robótica (o más específicamente en el estudio de movimientos que eviten colisiones [96]), en aproximación poligonal de curvas (ver [55] y [63]), etc. Además, el estudio de la anchura de un conjunto finito de puntos en el plano es equivalente al cálculo, en Investigación Operativa, de la *recta centro* del mismo conjunto, siendo la recta centro la que minimiza la mayor de sus distancias a cualquier punto del conjunto. El cálculo de la citada recta tiene importantes aplicaciones en problemas de localización de servicios, piénsese, por ejemplo, en un conjunto de parcelas cultivadas, como conjunto finito de puntos en el plano, y su recta centro sería el destino óptimo para un canal de regadío. Es inmediato comprobar que esta recta es la mediatriz de las rectas soportes que dan la anchura de la envolvente convexa del conjunto de puntos.

Dado que la anchura de un conjunto finito de puntos en el plano es la misma que la de su envolvente convexa [53], muchos autores han estudiado la anchura de polígonos convexos, ya que éstos son conjuntos sencillos y tienen muchas aplicaciones en reconocimiento de formas [2], procesamiento de imágenes [85] y troquelado industrial (ver [39], [92] y [40]). En esta sección nos reduciremos al estudio sobre la esfera de la anchura de conjuntos convexos en esta superficie. No consideraremos aquí la anchura sobre las otras superficies que normalmente hemos estudiado en el resto de la memoria ya que, como se observa fácilmente, dicho concepto no tiene una traslación natural a las superficies no tratadas (o, al menos, la traslación no tiene un gran sentido. Por ejemplo, casi cualquier nube de puntos en el cilindro puede ser comprendida entre un par de hélices paralelas tan próximas como queramos y, en cualquier caso todo lo que se haga en el plano con par de rectas paralelas, puede ser realizado en superficies desarrollables).

La definición de anchura de un conjunto en el plano puede ser extendida a espacios euclídeos de dimensión superior, definiendo la anchura de un conjunto como la mínima distancia entre dos hiperplanos soportes paralelos de dicho conjunto [53].

Como se ha dicho anteriormente, en esta sección vamos a estudiar, aportando algoritmos para su cálculo, la anchura de conjuntos convexos sobre la esfera. Para calcular la anchura de polígonos convexos en el plano se pueden usar, por ejemplo, las técnicas de calibradores (“rotating caliper”) o transformaciones geométricas y resolver el problema en tiempo y espacio lineales [53]. La propiedad fundamental a la hora de diseñar un algoritmo para el cálculo de la anchura de un convexo en el plano es la de que esta distancia se alcanza entre dos rectas soportes de forma que una contenga a una arista y la otra pase por un vértice [53].

Describiremos básicamente la técnica de calibradores para el cálculo de la anchura de un conjunto convexo en el plano: en primer lugar se elige, en tiempo lineal, una pareja de vértices antipodales, es decir, una pareja de vértices verificando que existen sendas rectas de soporte paralelas pasando por ellos; se consideran dichas rectas soportes, y se rotan a la vez, como si se tratase de un calibrador, en sentido positivo hasta que una de las dos rectas contenga a toda una arista de la frontera del conjunto, se mide entonces la distancia entre las rectas soportes, se almacena el dato, y se continúa el barrido, midiendo estas distancias cada vez que uno de los calibres se apoye sobre una arista. Una vez finalizado el barrido se elige la menor de las distancias almacenadas durante el proceso anterior y ésta será la anchura de nuestro conjunto.

Conocido el problema de la anchura en el plano y descrito uno de los algoritmos que la calculan, nos planteamos a continuación generalizar este concepto a la esfera. Un conjunto convexo en la esfera es un conjunto que contiene al segmento que une a cada pareja de puntos en él; estudiaremos la anchura en el caso de conjuntos convexos contenidos en un hemisferio, puesto que el único conjunto convexo en la esfera que ocupa más de un hemisferio es la propia superficie (ver Capítulo de Preliminares y Capítulo 1). Llegada la hora de definir la anchura de un conjunto convexo en nuestra superficie se nos ocurren, a priori, distintas posibilidades: en primer lugar, podemos generalizar el concepto de rectas soportes de un conjunto por el de geodésicas soportes: es decir, dado un conjunto convexo C sobre la esfera, llamaremos *meridianos soportes de C* a los meridianos que intersecan a C y dejan al conjunto en una de las dos semiesferas definidas por dicho meridiano. Llamaremos *huso soporte de C* a la región que, conteniendo a C , está delimitada por dos de sus meridianos soportes.

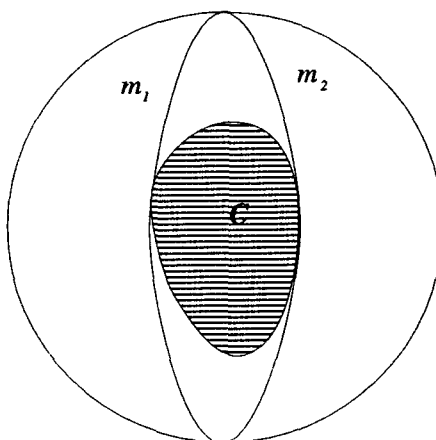


Figura 3.2.: El huso definido por m_1 y m_2 es un huso soporte para el conjunto C

Cada huso en la esfera divide a esta superficie en cuatro regiones; dado un huso soporte de C , este conjunto estará contenido totalmente en una de las cuatro regiones que dicho huso define. Como cada huso soporte define cuatro arcos ecuatoriales ortogonales a los meridianos que definen dicho huso, equidistantes de los polos del huso, siendo los polos del huso los puntos de intersección de los dos meridianos que lo definen, llamaremos *arco soporte* de C al arco ecuatorial asociado al huso soporte H que está contenido en la misma región que C , de las cuatro definidas por H .

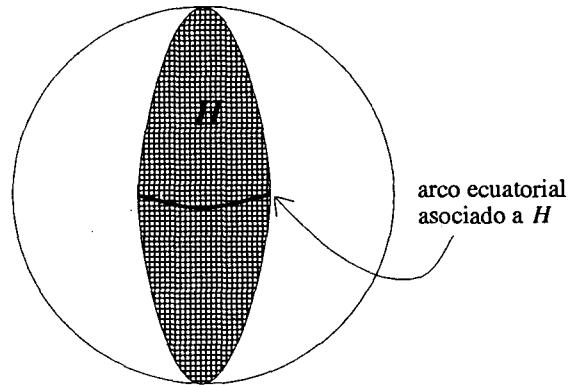


Figura 3.3.

Así dado un conjunto convexo C sobre la esfera, definimos su *anchura horaria*, $\mathcal{H}(C)$, como la mínima longitud de todos los arcos ecuatoriales asociados a husos soportes de C . La principal diferencia entre esta definición y la definición de anchura en el plano es que, en el plano, dos rectas paralelas de soporte tienen intersección vacía, mientras que en la esfera, dos meridianos soportes tienen dos puntos en común.

Si queremos generalizar el concepto de paralelismo entre los arcos soportes, al igual que ocurre en el plano, debemos dar otra definición: dado un conjunto convexo C sobre la esfera, llamaremos *paralelos soporte de C* a aquellos paralelos que intersecan a C y dejan al conjunto en uno de los dos casquetes esféricos de los que el paralelo define en la esfera. Si usamos la idea de par de paralelos soportes, conservamos el concepto de paralelismo existente en el plano (en el sentido de intersección vacía) pero en la esfera los paralelos no son geodésicas.

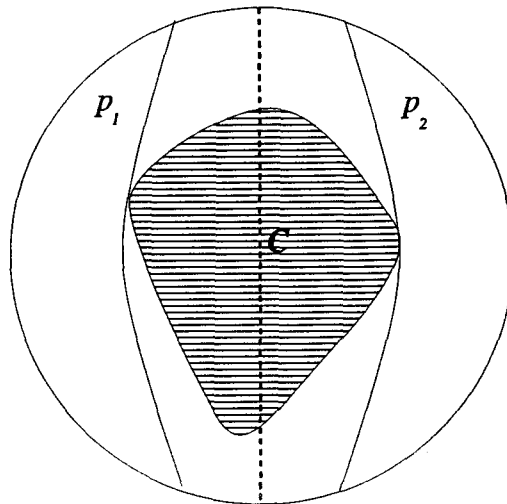


Figura 3.4.: Los paralelos p_1 y p_2 son paralelos soportes para C .

De acuerdo con todo lo anterior, podemos definir para un conjunto convexo C sobre la esfera, su *anchura tropical* $T(C)$ como la menor distancia entre todos los posibles pares de paralelos soportes de C equidistantes de un meridiano; nótese que dicho meridiano sería la geodésica que minimiza la máxima distancia a los puntos del conjunto C , o como ya habíamos apuntado anteriormente, será el *meridiano centro* del conjunto.

Como ya apuntábamos al principio de esta sección, en el trabajo de Strang [93] se prueba que la anchura de un convexo en el plano coincide con la longitud del mínimo intervalo cerrado (puerta) a través del cual puede pasar el conjunto, mediante una familia continua de movimientos rígidos (traslaciones combinadas con rotaciones). Así se nos ocurre una nueva definición de anchura en la esfera: dado un conjunto convexo C sobre la esfera, la *puerta* $\mathcal{P}(C)$ es la menor longitud de todos los posibles arcos cerrados de meridiano por los

que puede pasar el conjunto C mediante una familia de movimientos rígidos (traslaciones combinadas con rotaciones) en la esfera.

Llegados a este punto tenemos tres posibles definiciones de anchura en la esfera; en el caso del plano, las tres son equivalentes [93], vamos a estudiar qué ocurre sobre nuestra superficie.

Lema 8. *Para cualquier conjunto convexo sobre la esfera se verifica que*

$$\mathcal{P}(C) \leq \mathcal{T}(C).$$

Demostración: Basta con considerar el arco de meridiano ortogonal y contenido entre los paralelos que definen $\mathcal{T}(C)$. Evidentemente, la longitud de este arco es mayor o igual que $\mathcal{P}(C)$. ■

Lema 9. *Si C es un conjunto convexo sobre la esfera*

$$\mathcal{T}(C) \leq \mathcal{H}(C).$$

Demostración: Sea H el huso que determina la anchura horaria $\mathcal{H}(C)$ del conjunto y llamamos P y Q a los puntos de intersección de los meridianos que definen H con el arco ecuatorial ortogonal. Sea m la mediatriz (meridiano) del segmento PQ , si consideramos los paralelos, equidistantes m , tangentes a H en P y Q , tenemos una banda tropical de anchura $\mathcal{H}(C)$ que contiene a nuestro conjunto, por lo tanto $\mathcal{T}(C) \leq \mathcal{H}(C)$.

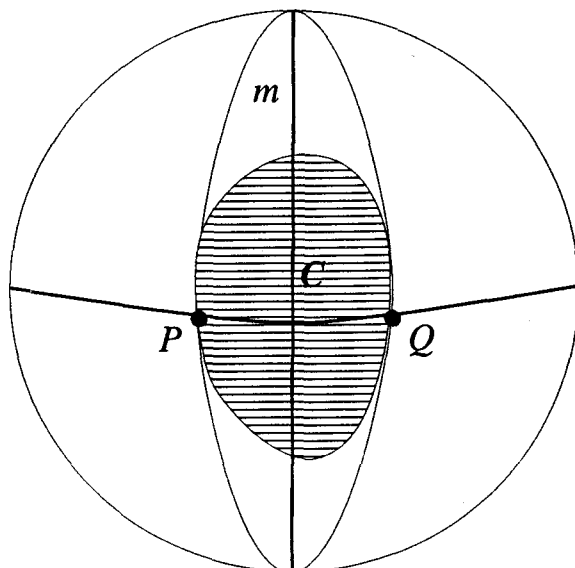


Figura 3.5.

Por tanto, $\mathcal{P}(C) \leq \mathcal{T}(C) \leq \mathcal{H}(C)$. El siguiente, que es el principal de esta sección, teorema nos dice que, al igual que ocurre en el plano, estas tres cantidades coinciden en la esfera.

Teorema 10. *Un conjunto convexo C sobre la esfera puede atravesar, mediante traslaciones y rotaciones, un arco de meridiano de longitud L si y sólo si $\mathcal{H}(C) \leq L$. Como consecuencia, dado un conjunto convexo C en la esfera se tiene que $\mathcal{H}(C) \leq \mathcal{P}(C)$.*

Demostración:

Si $\mathcal{H}(C) \leq L$ es claro que todo el huso de anchura $\mathcal{H}(C)$ puede pasar por la puerta de longitud L , por lo tanto también nuestro conjunto.

Para probar el recíproco, asumamos en primer lugar que la frontera ∂C de C es suave, es decir, en cualquier punto de ella existe una única tangente a la esfera, y ésta varía de forma continua a lo largo de ∂C . Sea I un arco de meridiano de longitud L y S la esfera; como C puede pasar a través de I , es posible definir una composición continua de movimientos $M : [0, 1] \rightarrow S$ donde $M(0)$ es la situación de C antes de comenzar a pasar a través de I y $M(1)$ su situación después de haberlo atravesado.

Para cualquier $t \in [0, 1]$, podemos definir dos aplicaciones $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ y $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ como sigue: $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son las longitudes angulares entre los puntos P_1 y P y los puntos P_2 y P respectivamente, donde P_1 y P_2 son las intersecciones de ∂C con el arco I , y P es la intersección entre las tangentes a C en los puntos P_1 y P_2 (ver Figura 3.6.).

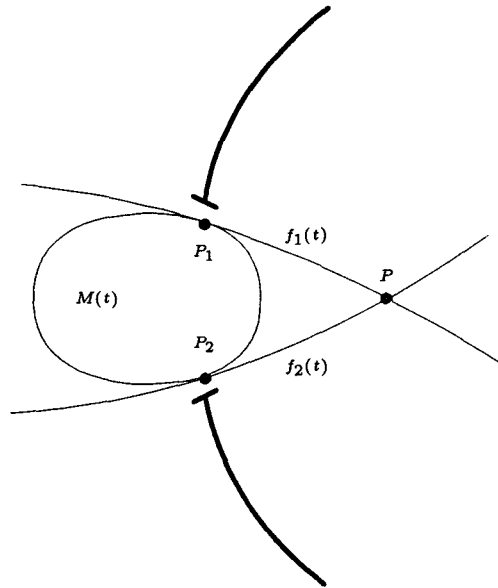


Figura 3.6.

La aplicación $f_1 + f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ es continua con $f_1(0) + f_2(0) = 0$ y $f_1(1) + f_2(1) = 2\pi$, por lo que existe $t^* \in [0, 1]$ tal que $f_1(t^*) + f_2(t^*) = \pi$.

Si $f_1(t^*) = f_2(t^*) = \frac{\pi}{2}$, entonces el arco de meridiano que define $\mathcal{M}(C)$ está contenido en I , por lo que $\mathcal{M}(C) \leq L$. Por otra parte, $f_1(t^*) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - f_2(t^*)$. Supuesto $f_1(t^*) > \frac{\pi}{2}$ se verifica que $f_2(t^*) < \frac{\pi}{2}$, por lo que la situación es similar a la de la Figura 7.

Como los ángulos en el arco ecuatorial son de noventa grados, la longitud del arco de meridiano que une P_1 y P_2 es mayor o igual que la longitud del arco ecuatorial. Por tanto $\mathcal{H}(C) \leq L$.

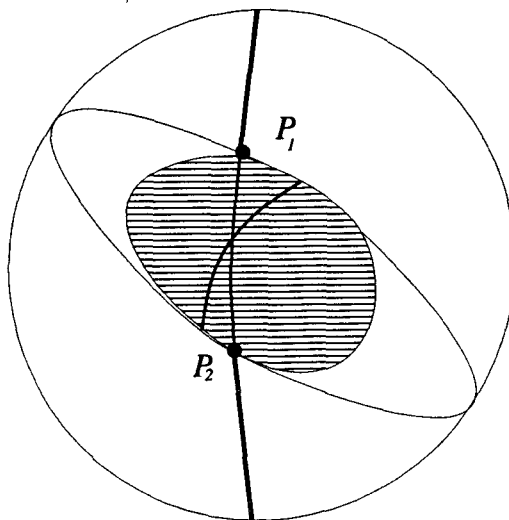


Figura 3.7.

Sólo nos queda verificar el resultado para un conjunto convexo C cuando ∂C no es suave. Para ello construimos una sucesión (C_n) de subconjuntos convexos de C de frontera suave y convergente a C . Como C puede pasar a través de I , también pueden hacerlo los C_n y su anchura meridiana debe verificar que $\mathcal{H}(C_n) < L$. Por tanto, $\mathcal{H}(C) \leq L$, lo que prueba el teorema. ■

Así pues, las tres definiciones de anchura consideradas coinciden y podemos hablar de anchura de un conjunto convexo, usando cualquiera de las tres.

Como consecuencia inmediata del Teorema 10. se tiene:

Corolario 1. *El arco ecuatorial ortogonal del mínimo huso soporte de un conjunto convexo C está contenido en C .*

Demostración: Si la anchura horaria es la misma que la de la puerta, debe ser que al pasar el huso mínimo por dicha puerta, el conjunto C toque a la puerta en sus dos extremos, en otro caso, sería posible encontrar una puerta menor, y estos dos puntos de contacto serán precisamente los extremos del arco ecuatorial ortogonal y puesto que C es convexo, dicho arco debe estar contenido en C .

■

En lo que queda de esta sección vamos de describir un algoritmo para el cálculo de la anchura de un conjunto convexo sobre la esfera, este algoritmo va a ser una adaptación de la técnica de calibradores [53] a esta superficie. La anchura de un polígono convexo en el plano es la distancia entre dos rectas soportes paralelas definidas por una parejas antipodal vértice-arista [53]; en el caso de la esfera, esto no siempre se cumple, es posible que la anchura venga definida por meridianos conteniendo a una pareja antipodal arista-arista, como se muestra en la Figura 3.8.

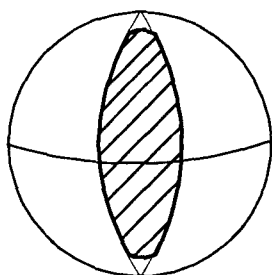


Figura 3.8.

Por lo tanto en el caso de la esfera tenemos el siguiente resultado:

Lema 10. *La anchura de un polígono convexo es la mínima distancia entre meridianos soporte definidos por los pares antipodales vértice-arista o arista-arista.*

Demostración: Sea H el huso mínimo que contiene a C , al menos C y H tienen dos puntos en común, uno en cada meridiano del huso; en virtud del Corolario 1., al menos tienen en común los dos extremos P y Q del arco ecuatorial ortogonal al huso. Pero además al menos uno de los dos meridianos que definen el huso debe contener a una de las aristas adyacentes en P o en Q , porque en otro caso, sería posible encontrar un huso menor conteniendo al conjunto, simplemente moviendo un poco los meridianos.

■

El Lema 10. nos dice que es posible adaptar el algoritmo de los calibradores para encontrar la anchura de un polígono convexo C de este modo:

- a) Buscamos una pareja antipodal: para ello consideramos una arista cualquiera a de la frontera y un vértice v que no sea punto final de a ; consideramos el meridiano que define a , m_a , trazamos el meridiano ortogonal a m_a que pasa por v , m_o , y consideremos el huso definido por m_a y el meridiano ortogonal a m_o que pasa por v . Si el conjunto está contenido en este huso, a y v son antipodales, en otro caso, si a_1 y a_2 son las aristas incidentes en v , puesto que C es convexo, o bien $a - a_1$ o bien $a - a_2$ es una pareja antipodal arista-arista. Medimos el arco ecuatorial ortogonal del huso y almacenamos el dato.
- b) Rotamos los meridianos, como los calibradores en [53], hasta encontrar otra arista o vértice, computamos la longitud del arco ecuatorial del nuevo huso, y volvemos a rotar los calibradores hasta encuentra la pareja antipodal inicial
- c) Calculamos la mínima longitud de los arcos ecuatoriales calculados en los pasos anteriores.

Podemos resumir el algoritmo en tres pasos como sigue:

Algoritmo ANCHURA-ESFERA(C)

Paso 1 Encontrar una pareja vértice-arista antipodal inicial.

Paso 2 Rotar los calibradores para encontrar las demás parejas antipodales, y calcular la longitud de los arcos ecuatoriales de cada una de ellas.

Paso 3 Calcular la mínima longitud de los arcos ecuatoriales.

Es inmediato comprobar a partir del trabajo de Toussaint [97] el siguiente resultado

Teorema 11. *El algoritmo ANCHURA-ESFERA(C) calcula la anchura de un polígono convexo C sobre la esfera en tiempo lineal óptimo.*

4.3 Diámetro de un conjunto de puntos

El diámetro de un conjunto de N puntos en el plano es la mayor de las distancias entre dos de sus puntos. Este concepto, muy relacionado con el de la anchura que estudiamos en la sección anterior, se utiliza para medir la dispersión de un conjunto, y para el caso de conjuntos finitos de puntos en el plano ha merecido la atención de otros autores [50, 83, 97]. En esta sección nos planteamos estudiar este problema en superficies.

Este problema se puede resolver de forma simple considerando las distancias entre todos los posibles pares de puntos de nuestro conjunto y quedándonos con la mayor de ellas. Esta primera solución conduce a un algoritmo de complejidad $O(N^2)$. Sin embargo, en el plano el problema se resuelve en tiempo óptimo $O(N \log N)$ una vez que se demuestra [50] que el diámetro viene determinado por la distancia entre dos vértices de la envolvente convexa, y aplicando las técnicas de calibradores [97] como ya vimos al tratar el problema del cálculo de la anchura de un conjunto convexo [53].

Para el caso de un conjunto de N puntos sobre una superficie, el cálculo del diámetro de dicho conjunto queda igualmente resuelto si calculamos la mayor de las distancias, en dicha superficie de entre todas las posibles parejas de puntos de la nube, con lo que con esta primera solución llegamos al algoritmo simple cuadrático. Si pretendemos mejorar el algoritmo anterior generalizando los algoritmos existentes en el plano, es decir, calculando previamente la en-

volvente convexa de la nube de puntos, podemos observar, por ejemplo, que en el cilindro el diámetro de una nube de puntos no lo definen, en general, dos puntos del borde de la envolvente convexa, ya que en la mayoría de los casos en esta superficie, la envolvente es la banda cilíndrica determinada por los puntos de ordenadas extremas (ver Capítulo 1).

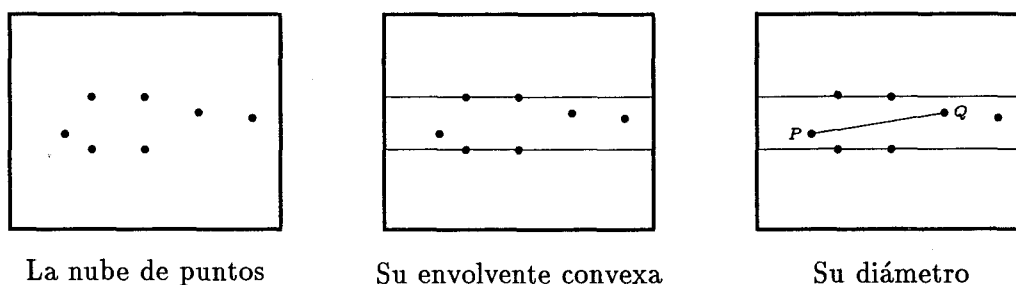


Figura 3.9.: El diámetro no lo determina el borde de la envolvente convexa.

Esta misma situación nos la encontramos en el toro y en la esfera, donde es posible encontrar conjuntos formados sólo por tres puntos, cuya envolvente es toda la superficie.

Como ya vimos en el capítulo dedicado al cálculo de la envolvente convexa, si todos los puntos de la nube están en posición euclídea, la envolvente convexa de la nube, en el cilindro, coincide con la de la misma nube de puntos considerada en el plano y, en este caso, sí determinarían el diámetro dos puntos situados en ella. Lo mismo ocurría en el toro y en la esfera. Por lo tanto, en lo que sigue, nos centraremos en el caso en que los puntos no estén posición euclídea. Obsérvese que, tal y como vimos en el análisis del caso medio de los algoritmos para el cálculo de la envolvente, si los puntos están escogidos de forma aleatoria y uniformemente sobre cualquiera de esta tres superficies, la probabilidad de que esto ocurra es muy alta.

Por las razones señaladas anteriormente, se hace necesario buscar estrategias que nos permitan construir un algoritmo óptimo que calcule el diámetro y que no utilicen la envolvente convexa en esta superficie. Se nos ocurre utilizar el $(n - 1)$ -diagrama de Voronoi (*farthest-point Voronoi diagram*), estructura cuyo estudio detallado se presentó en el Capítulo 2. Recordemos que en este diagrama se define la región correspondiente a cada punto P_i , $V^F(P_i)$, como el lugar geométrico de los puntos del cilindro que distan de P_i más que de ningún otro punto de la nube.

Obsérvese que si el diámetro de una nube de puntos es $d(P, Q)$, para ciertos P y Q de la nube, entonces el punto P está en la región $V^F(Q)$, y Q está en la región $V^F(P)$, por lo tanto si conocemos el $(N - 1)$ -diagrama de Voronoi del conjunto podemos diseñar un algoritmo que nos calcule el diámetro:

Algoritmo DIÁMETRO(C)

Paso 1 Si C está en posición euclídea ir al Paso 6.

Paso 2 Calcular el $(N - 1)$ -diagrama de Voronoi de C .

Paso 3 Localizar la región de dicho diagrama en la que se encuentra cada punto de C .

Paso 4 Para cada punto, calcular la distancia entre él y el punto correspondiente a la región del diagrama a la que pertenece.

Paso 5 El diámetro es la mayor de las distancias calculadas en el Paso 4.

Paso 6 Calcular el diámetro de C en el plano.

Como ya vimos en el Capítulo 2, la técnica de divide y vencerás nos permite construir el $(N - 1)$ -diagrama de Voronoi de una nube de N puntos

en el cilindro en tiempo óptimo $O(N \log N)$; y en el caso de la esfera y el toro, este diagrama coincide con el diagrama de Voronoi clásico del conjunto de puntos antipodales, y se calcula en el mismo tiempo óptimo. Puesto que localizar la región del $(N-1)$ -diagrama de Voronoi a la que pertenece un punto tiene un coste $O(\log N)$, localizar las regiones de dicho diagrama en donde se encuentra cada punto de la nube se realizará con un coste de $O(N \log N)$. Una vez encontradas las regiones a las que pertenece cada punto, el resto del algoritmo tiene un coste lineal.

Una vez hecho este análisis, se puede enunciar el siguiente resultado

Teorema 12. *Se puede calcular el diámetro de una nube de N puntos en el cilindro en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

Teorema 13. *Se puede calcular el diámetro de una nube de N puntos en el toro en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

Teorema 14. *Se puede calcular el diámetro de una nube de N puntos en la esfera en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

La demostración de estos resultados es inmediata a partir de las consideraciones anteriores.

4.3.1 Máxima y mínima distancia

Otra cuestión que ha sido extensamente estudiada en espacios euclídeos es ¿cuántas veces se puede dar la máxima distancia (el diámetro) en un conjunto

de N puntos? Es sabido que en el plano se puede dar como máximo N veces [36], y $2N - 2$ en el espacio tridimensional [9]. En el cilindro las cosas cambian, puesto que tenemos un ejemplo con un conjunto de N puntos donde la máxima distancia ocurre $4/3N$. Para ver ese ejemplo basta con considerar b con $0 < b$, y dividimos los N puntos en el cilindro en tres subconjuntos de $N/3$ puntos cada uno; cada uno de estos tres subconjuntos los distribuimos uniformemente sobre los paralelos de ecuaciones $y = 0$, $y = b$ y $y = 2b$, de tal forma que en el paralelo $y = 2b$ y en el paralelo $y = 0$ los $N/3$ puntos correspondientes tengan la misma abscisa, y en el paralelo $y = b$ las abscisas de los puntos sean los puntos medios de las abscisas de los otros dos paralelos, ver Figura 3.10.

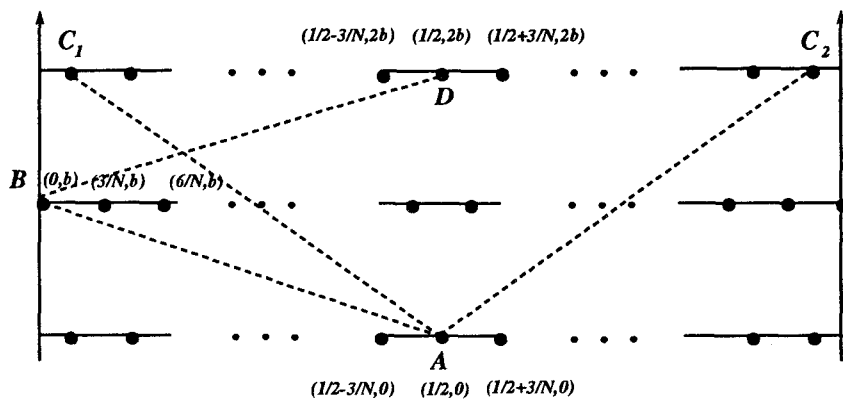


Figura 3.10.

Se comprueba fácilmente, sin más que hacer algunos cálculos, que tomando $b = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{4} - \frac{(N-3)^2}{4N^2})}$ y para $N \geq 2$ y N múltiplo de 3, se cumple que

$$d(A, B) = d(A, C_1) = d(A, C_2) = d(B, D),$$

y ésta es la máxima distancia en esta configuración. Luego para cada punto del paralelo $y = 0$, si consideramos el desarrollo en el que dicho punto tiene coordenadas $(1/2, 0)$, encontramos cuatro a la máxima distancia, éstos suman $4N/3$, y no hay más puntos a esta distancia, se ha contado todos.

Nos quedaría por ver si este ejemplo es óptimo, o si se pueden encontrar cotas mejores.

Sin embargo sí es posible responder a la pregunta: “¿cuántas veces puede ocurrir la máxima distancia entre N puntos en el cilindro?”

Teorema 15. *La máxima distancia entre N puntos en el cilindro puede ocurrir como máximo $3N - 6$ veces.*

Demostración: Elegimos un desarrollo del cilindro por una generatriz; dibujamos una arista entre cada par de puntos que estén a la mínima distancia, y el grafo así obtenido es plano; en otro caso si se cruzaran dos aristas considerando el cuadrilátero formado por los cuatro vértices de dichas aristas, alguno de los lados de dicho cuadrilátero es más pequeño que las diagonales, con lo cual las diagonales no tendrían la mínima distancia, ver Figura 3.11.

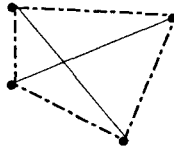


Figura 3.11.

Sólo tenemos que aplicar entonces la Fórmula de Euler. Por último, en la Figura 3.12., tenemos un ejemplo de que la cota se alcanza.

■

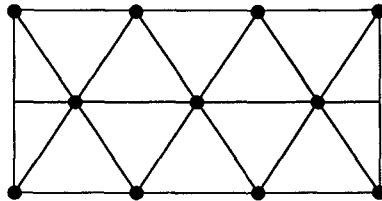


Figure 3.12.

4.4 Conclusiones y problemas abiertos

Tradicionalmente, en el plano se ha calculado el diámetro de una nube de puntos a partir de su envolvente convexa. Sin embargo, esto no es posible en el cilindro (ni en el resto de las superficies). Presentamos en este trabajo, un algoritmo que, partiendo del diagrama de Voronoi de los puntos más alejados, calcula el diámetro de una nube de n puntos en el cilindro en tiempo óptimo

$O(n \log n)$. Aunque el algoritmo es óptimo, el tiempo tardado a partir de la construcción del diagrama de Voronoi de los puntos más alejados, sigue siendo de $O(n \log n)$ y no lineal como cuando se puede utilizar la envolvente convexa; así una primera cuestión interesante que queda por estudiar es la existencia o no de una estructura que permita encontrar el diámetro a partir de ella en tiempo lineal.

Igualmente, quedan por analizar otras cuestiones relacionadas como el número de puntos en los que se puede alcanzar el diámetro y comprobar en qué sentido el método expuesto en este trabajo es aplicable a otras superficies.

Capítulo 5

Transversales

Los problemas de visibilidad que surgen en el diseño y preprocesamiento de imágenes por ordenador han motivado mucha investigación en Geometría Computacional. Entre éstos, el problema de decidir cuando existe una recta que interseque a todos los segmentos de un determinado conjunto S ya ha sido ampliamente estudiado en el plano [34, 77, 58]. A título de curiosidad, podemos decir que este mismo problema fue el elegido por Edelsbrunner en su libro [33] como ejemplo para mostrar los paradigmas clásicos de la Geometría Computacional, resolviéndolo usando cinco técnicas diferentes. En el Capítulo que aquí comienza vamos a tratar de “llevarnos” este problema al cilindro.

5.1 Introducción

Dado un conjunto S de N segmentos en el plano, no necesariamente disjuntos, diremos que la recta t es una *transversal* para S cuando dicha recta interseque a todos sus segmentos; también se dice que t apuñala (*stabs*) a S .

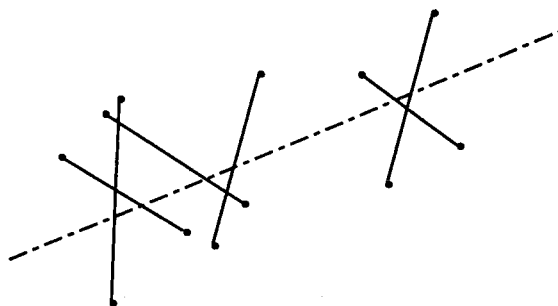


Figura 4.1: Transversal para un conjunto de segmentos.

El problema de decidir cuando existe una transversal para un conjunto de segmentos, como ya hemos dicho, ha sido estudiado en el plano [34, 77, 58]; se pueden encontrar también algoritmos para el cálculo de transversales para rectángulos o círculos en [6, 32], y, por último, algoritmos para el cálculo de transversales para poliedros se encuentran en [8, 56].

Como hemos venido haciendo a lo largo de este trabajo, vamos a plantearnos el estudio de la existencia de transversales para un conjunto de segmentos (*stabbing line segments*) en el cilindro, recordando que un segmento en el cilindro es el arco de geodésica mínima que une a dos puntos sobre esta superficie,

ver Capítulo de Preliminares. A la hora de generalizar el concepto de transversal a esta superficie se nos ocurren, a priori, dos posibilidades: puesto que una recta en el plano es una geodésica, podemos buscar una transversal en el cilindro dentro del conjunto de las hélices en el mismo, que son sus geodésicas. Pero por otra parte, una recta del plano cumple la propiedad de ser la mediatriz o el bisector de dos puntos, y, por lo tanto, divide al plano en dos semiplanos; en este caso, las hélices no serán una generalización apropiada puesto que no dividen al cilindro en dos regiones (Figura ???)

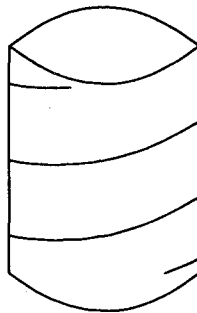
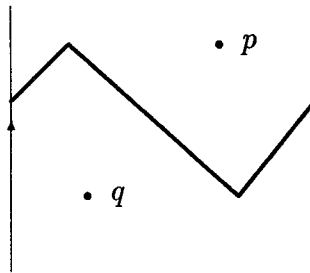
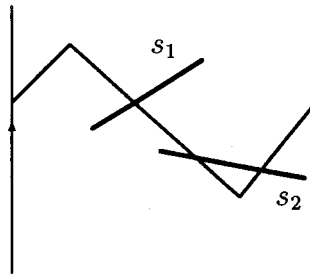


Figura 4.2: Una hélice no divide al cilindro en dos regiones

Podemos entonces plantearnos en el cilindro buscar una transversal en el conjunto de los bisectores en esta superficie. Los bisectores en el cilindro están estudiados en [76] y ya vimos en el Capítulo ???????? **CAPÍTULO DE VORONOI** que tenían la forma que nos muestra la Figura ??????

Figura 4.3: Bisector de p y q en el cilindro

Como consecuencia de lo anterior tenemos dos posibles definiciones en el cilindro. Dado un conjunto S de N segmentos en el cilindro diremos que una hélice h es una *transversal* para S cuando h corta a todos los segmentos de S ; diremos que un bisector b *apuñala* a S si cada segmento de S tiene un extremo en cada una de las partes en que b divide al cilindro. Nótese que un bisector no tiene por qué apuñalar a todos los segmentos a los que corta, Figura 4.4.

Figura 4.4.: El bisector corta a s_1 y a s_2 , pero solo apuñala a s_1

En las secciones siguientes vamos a plantearnos problemas de búsqueda de transversales y de bisectores que apuñalen a un conjunto de segmentos.

5.2 Hélices transversales

El problema que, usando hélices transversales, nos planteamos en el cilindro es similar al problema de cálculo de transversales en el plano:

PROBLEMA 1: Determinar cuando un conjunto finito de segmentos sobre el cilindro admite una transversal o no, y en caso afirmativo, encontrar dicha transversal.

Para atacar el **PROBLEMA 1** usaremos representaciones del cilindro en losetas \mathcal{L} y las bandas originadas partir de éstas \mathcal{M} (ver Capítulo de Preliminares), llamamos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ al conjunto de segmentos sobre el cilindro; llamamos $p_i = (a_i, b_i)$ y $q_i = (c_i, d_i)$ a los extremos de cada segmento s_i de forma que $b_i \geq d_i$ (p_i es el extremo más alto del segmento). Supongamos que en S no hay ningún segmento horizontal, $b_i > d_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$. En este caso consideramos todas las longitudes $b_i - d_i$, que será la longitud de las proyección sobre una generatriz del cilindro de cada segmento p_i , (ver Figura 4.5.)

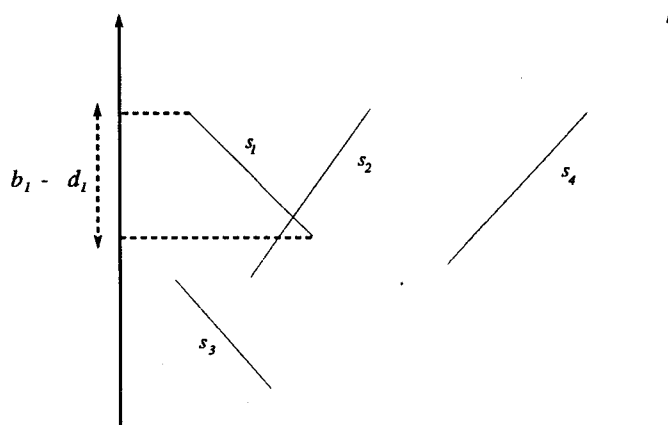


Figura 4.5.

Llamemos $h = \min_{i=1,2,\dots,N} (b_i - d_i)$, si consideramos una hélice H con paso de rosca $h/2$, es decir, una hélice que pasa por los puntos $(0, b)$, $(0, b + h/2)$, $(0, b + h)$, \dots , $(0, b + mh/2)$, podemos considerar el cilindro, desarrollado, dividido en bandas horizontales de anchura $h/2$ cuya diagonal desde la esquina izquierda inferior hasta la esquina derecha superior es la citada hélice, como la banda sombreada en la Figura 4.6.

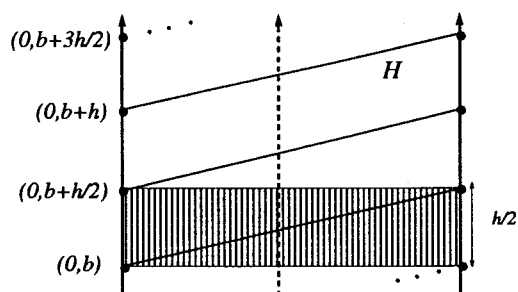


Figura 4.6

Veamos que H interseca a cualquier segmento de S , para ello sea s_k un segmento de S , consideramos la banda horizontal definida por las rectas $y = b_k$ e $y = d_k$, entonces $b_k - d_k > h/2$, y como consecuencia de esto, dentro de dicha banda podemos encontrar una banda de anchura $h/2$ atravesada por H y como consecuencia, H la divide en dos componentes; pues bien, como s_k tiene puntos en las dos componentes y es conexo, en algún punto corta a H , ver Figura 4.7.

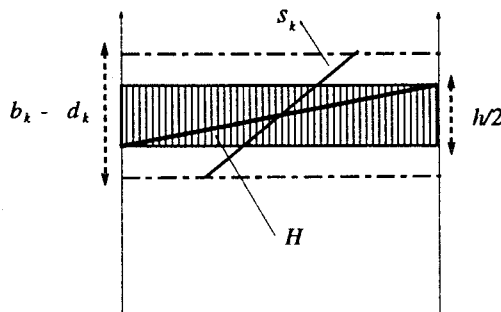


Figura 4.7

Concluimos que si ningún segmento en S es horizontal, el problema de encontrar una hélice siempre tiene solución en tiempo lineal en el número de segmentos, puesto que se trata sólo de calcular el mínimo de un conjunto de números. En este caso, se trata sólo de considerar una hélice con paso de rosca suficientemente pequeño.

A continuación permitamos que S tenga un segmento horizontal s_k ; en este caso, se procede como en el caso anterior, considerando $S' = S - \{s_k\}$,

tomamos una hélice de paso $h/2$ o menor, pero imponiendo que la hélice atraviese a este segmento horizontal. Del mismo modo, si S tiene dos segmentos horizontales a distinta altura, no contenidos en el mismo paralelo, también es posible encontrar una hélice atravesándolos a todos. Por simplicidad, supongamos que los segmentos horizontales son $s_1 = p_1q_1$ y $s_2 = p_2q_2$, con $b_1 = d_1 < b_2 = d_2$, y consideremos todas las hélices del cilindro uniendo, por ejemplo al punto medio de s_1 con el punto medio de s_2 , ver Figura 4.8

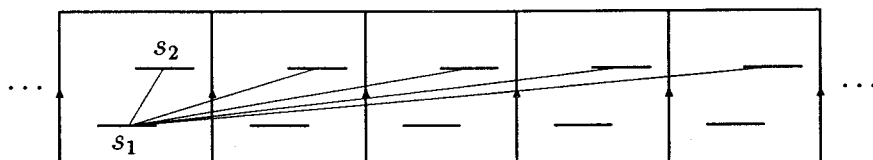


Figura 4.8

Todas estas hélices tocan a s_1 y s_2 , por supuesto, pero además el paso de rosca de las mismas cada vez es menor, tiende a cero, por lo tanto, podemos elegir entre todas éstas alguna que verifique que el paso sea menor que la mitad de la menor de las proyecciones sobre una generatriz de los restantes $N - 2$ segmentos, como ya hiciéramos para el caso en que no había segmentos horizontales. Hasta aquí ya tenemos que el problema de hallar una hélice transversal tiene solución para el caso en que el conjunto S tiene dos, uno o ningún segmento horizontal, sin embargo, encontramos un ejemplo con tres segmentos horizontales para el que el citado problema ya no tiene solución.

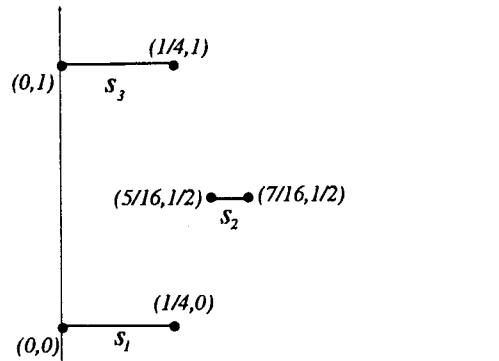


Figura 4.9.

Como podemos observar en la siguiente figura, Figura 4.10, todas las hélices que atraviesan a s_1 y s_3 a la vez, intersecan al paralelo $y = 1/2$ en algún punto del conjunto $\{(a, 1/2); \text{ con } 0 \leq a \leq 1/4 \text{ ó } 1/2 \leq a \leq 3/4\}$.

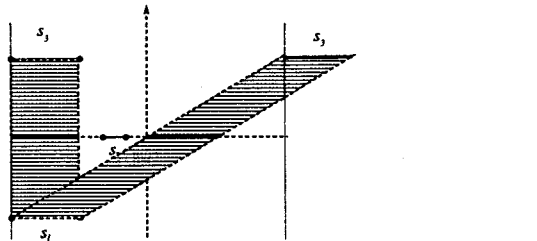


Figura 4.10.

Efectivamente, las hélices que unen al extremo izquierdo de s_1 , con el extremo izquierdo de s_2 , son las rectas que en el desarrollo plano del cilindro unen al $(0, 0)$ con las copias del extremo izquierdo de s_2 , $(m, 1)$, y éstas son las rectas de la forma $r_m \equiv x = my$. Dichas rectas cortan al paralelo $y = 1/2$ sólo

en dos puntos: $(1/2, 1/2)$ para valores impares de m y $(1, 1/2)$ cuando m sea par.

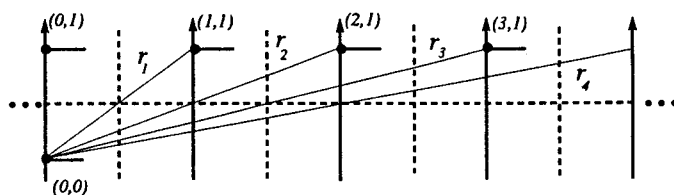


Figura 4.11.

es fácil entender a partir de aquí que cualquier hélice pasando por un punto de s_1 y un punto de s_2 atraviesa al paralelo $y = 1/2$ a través de los segmentos $\{(a, 1/2); \text{ con } 0 \leq a \leq 1/4\}$ ó $\{(a, 1/2); \text{ con } 1/2 \leq a \leq 3/4\}$, y por lo tanto, ninguna de ellas corta a s_2 con lo que el problema para esta configuración de tres segmentos horizontales no tiene solución.

El problema de encontrar una hélice transversal para un conjunto de segmentos, por lo tanto, no tiene por qué tener solución. A continuación vamos a describir un algoritmo que decide cuando es posible encontrar la transversal o no, y en caso afirmativo, la calcula. A partir de las consideraciones hechas hasta el momento, lo que sí está claro es que el primer paso del algoritmo va a ser comprobar si en el conjunto de segmentos S hay segmentos horizontales, puesto que si la respuesta es negativa ya sabemos que existe la transversal y la calculamos en tiempo lineal. Supongamos que estamos en el caso de un conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ de segmentos horizontales sobre el cilindro; llamamos $p_i = (a_i, b_i)$ y $q_i = (c_i, b_i)$ a los extremos de cada segmento s_i ; de forma que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N$. En un primer paso, vamos a fijarnos sólo en s_1 y

en s_N , el más bajo y el más alto, respectivamente. Consideremos el desarrollo del cilindro por una generatriz que no corte a ninguno de estos dos segmentos, esto siempre es posible puesto que cada uno de ellos mide menos de medio cilindro; y podemos suponer por simplicidad que en dicha representación se tiene que $a_1 \leq c_1$ y que $a_N \leq c_N$, o lo que es lo mismo que p_1 y p_N son los extremos izquierdos de s_1 y s_N respectivamente.

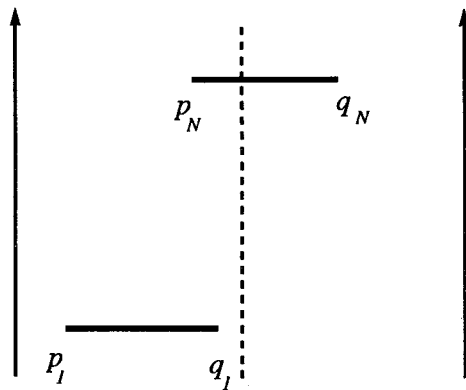


Figura 4.12.

Dado un paralelo $y = y_k$ vamos a ver que hay un número finito de intersecciones de éste con las infinitas hélices del cilindro que unen a p_1 y a p_N , resultado inmediato a partir del siguiente lema

Lema 11. *Las infinitas hélices uniendo a dos puntos sobre el cilindro, p_1 y p_N , sólo cortan a cada paralelo $y = y_k$, en un número finito de puntos.*

Demostración: Recordemos que en el Capítulo de Preliminares ya dijimos que

trabajaríamos con datos racionales, por lo tanto, $y_k = \frac{\text{num}(y_k)}{\text{den}(y_k)}$, $\text{den}(y_k) \in \mathbf{Z}^+$ y $m.c.d.(\text{num}(y_k), \text{den}(y_k)) = 1$.

Siempre podemos considerar un sistema de referencia sobre el cilindro verificando que las coordenadas de los puntos sean $p_1 = (0, 0)$ y $p_N = (a, 1)$, $0 \leq a \leq 1$. En esta situación, las infinitas hélices que unen a p_1 y p_N son las rectas que unen en el plano a $(0, 0)$ con las infinitas copias de p_N , que son los puntos $\{(a + m, 1) ; m \in \mathbf{Z}\}$; luego las ecuaciones de las hélices son $r_m \equiv \{x = (a + m)y\}$. Dado el paralelo $y = y_k$, $y_k = \frac{\text{num}(y_k)}{\text{den}(y_k)}$, los puntos de corte de éste con las hélices serán $\{(a + m)y_k, y_k\} ; m \in \mathbf{Z}$. Pero aunque en principio se trate de un conjunto infinito de puntos distintos en \mathcal{M} , sobre \mathcal{L} representan un número finito de éstos, puesto que la diferencia entre el punto $((a + m)y_k, y_k)$ y el punto (ay_k, y_k) (para $m = 0$) estaría en la primera coordenada y esta diferencia sería

$$(a + m)y_k - ay_k = my_k = m \frac{\text{num}(y_k)}{\text{den}(y_k)}$$

y considerando la igualdad anterior módulo 1, puesto que queremos representarlos en \mathcal{L} , a lo más hay $\text{den}(y_k)$ puntos distintos. ■

Ahora bien, a partir del lema anterior tenemos que si s_1 es el segmento de extremos $(0, 0)$ y $(c_1, 0)$, y s_N es el segmento de extremos $(a_N, 1)$ y $(c_N, 1)$, la intersección de todas las hélices que cortan a s_1 y a s_N intersecan a cada paralelo de \mathcal{L} en un número finito de segmentos, si hacemos los cálculos tenemos que dichos segmentos son los segmentos

$$t_m = \{(s(a_N + m)y_k + (1 - s)[(c_N + m - c_1)y_k + c_1], y_k); s \in (0, 1)\}$$

desde $m = 1$ hasta $m = \text{den}(y_k)$, todos de longitud $(c_N - c_1 - a_N)y_k + c_1$; en adelante llamaremos familia de segmentos asociados al paralelo $y = y_k$ a la siguiente familia

$$\mathcal{T}(y_k) = \{t_m\}_{m=1,2,\dots,\text{den}(y_k)}.$$

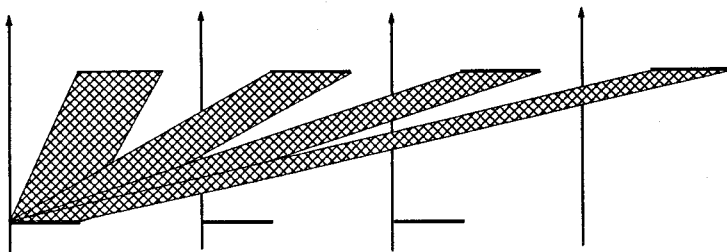


Figura 4.13.

Por lo tanto una estrategia para comprobar si existe una transversal para S puede ser la siguiente: consideramos s_2 y nos preguntamos si existe $t_m \in \mathcal{T}(b_2)$ verificando que $s_2 \cap t_m \neq \emptyset$. Si la respuesta es “no”, ya tenemos que el problema no tiene solución y hemos acabado. Pero ¿qué pasa cuando la respuesta es sí? Tendremos que eliminar de entre todas las hélices que cortan a s_1 y a s_N aquellas que no corten a s_2 ; a continuación, seguir razonando con s_3 . Con el fin de poder algoritmizar todo esto vamos a definir un etiquetado para los puntos de corte de las hélices con los paralelos.

Sean p y q dos puntos sobre el cilindro, consideramos un sistema de referencia sobre esta superficie (ver Capítulo de Preliminares) en el cual las coordenadas de estos puntos sean $p = (0, 0)$ y $q = (a, 1)$ siendo a un número racional entre 0 y 1. Las ecuaciones de las hélices que unen a p y q en el cilindro son las ecuaciones de las rectas que unen al punto $p = (0, 0)$ con las copias de $q = (a + m, 1)$, $m \in \mathbf{Z}$; por lo tanto las ecuaciones serán $h_m = \{x = (a + m)y\}$.

Consideremos $N - 2$ paralelos en el cilindro $\{y = b_2, y = b_3, \dots, y = b_{N-1}\}$ con $b_k = \frac{n_k}{d_k}$ y $0 < b_2 < b_3 < \dots < b_{N-1} < 1$. Como hemos visto anteriormente los puntos de corte de cada paralelo $y = b_k$ con todas las hélices h_m , $m \in \mathbf{Z}$, son $\{((a + m)b_k, b_k), m = 0, 1, 2, \dots, d_k - 1\}$. Calculamos estos d_k puntos, llamamos $\beta_0^k = (ab_k, b_k)$ y numeramos circularmente avanzando hacia la derecha, nombrando $\beta_1^k, \beta_2^k, \dots, \beta_{d_k-1}^k$. Estos puntos dividen al paralelo en d_k partes iguales. Sea $l = m.c.m.(d_2, d_3, \dots, d_{N-1})$. Vamos a asignar etiquetas de la siguiente manera: en cada paralelo $y = b_k$ llamaremos $\alpha_0^k = \beta_0^k$ y $\alpha_j^k = \beta_{n_j}^k$ siendo $n_j = jn_k \pmod{d_k}$, desde $j = 1, 2, \dots, l-1$. En el caso general cada punto de corte tiene asignadas más de una etiqueta. Vamos a ilustrar esta etiquetación con el siguiente ejemplo: sea $p = (0, 0)$, $q = (1/2, 1)$ y los paralelos $y_1 = 2/5$ e $y_2 = 1/2$

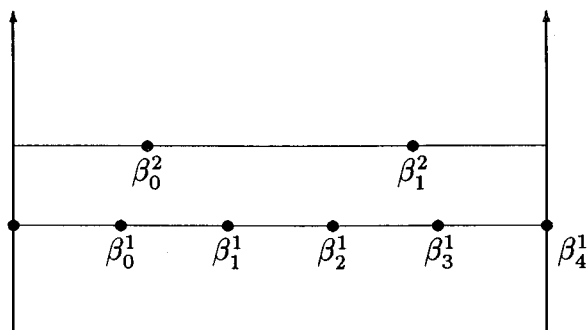


Figura 4.14.: $y_1 = 2/5 \rightarrow \{\beta_0^1 = (1/5, 2/5), \beta_1^1 = (2/5, 2/5), \beta_2^1 = (3/5, 2/5), \beta_3^1 = (4/5, 2/5), \beta_4^1 = (0, 2/5)\}$; $y_2 = 1/2 \rightarrow \{\beta_0^2 = (1/4, 1/2), \beta_1^2 = (3/4, 1/2)\}$.

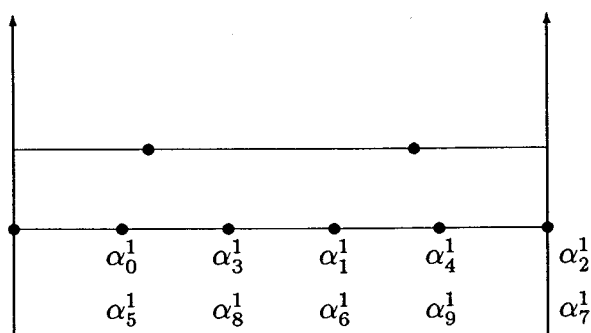


Figura 4.15.: $\{\alpha_0^1 = \alpha_5^1 = \beta_0^1 = (1/5, 2/5), \alpha_1^1 = \alpha_6^1 = \beta_2^1 = (3/5, 2/5), \alpha_2^1 = \alpha_7^1 = \beta_4^1 = (0, 2/5), \alpha_3^1 = \alpha_8^1 = \beta_1^1 = (2/5, 2/5), \alpha_4^1 = \alpha_9^1 = \beta_3^1 = (4/5, 2/5)\}$

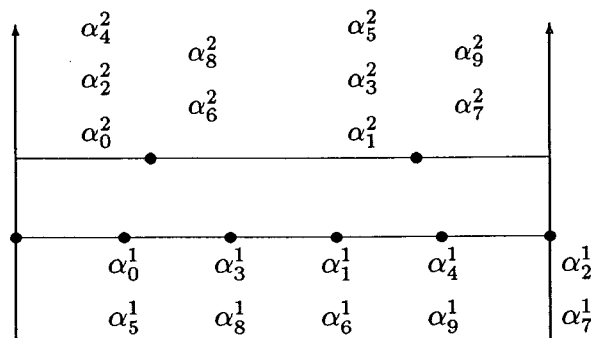


Figura 4.16.:

$$\{\alpha_0^2 = \alpha_2^2 = \alpha_4^2 = \alpha_6^2 = \alpha_8^2 = (1/4, 1/2), \alpha_1^2 = \alpha_3^2 = \alpha_5^2 = \alpha_7^2 = \alpha_9^2 = (3/4, 1/2)\}$$

Con este método de etiquetado sabemos que si una hélice h corta al paralelo $y = b_2$ en el punto de etiqueta α_j^2 los demás paralelos $y = b_k$, $3 \leq k \leq N - 1$, cortan a h en los puntos de etiquetas α_j^k .

Volvamos al conjunto S de segmentos. En cada paralelo $y = b_k$ etiquetamos los segmentos de la familia $\mathcal{T}(b_k)$, según el etiquetado α_j^k aplicado a los

puntos de corte de las hélices uniendo a p_1 con p_N , es decir, asignamos las etiquetas a los extremos izquierdos de los segmentos. En el momento inicial cada etiqueta α_j^k representa a un segmento de la forma $\{(sA_j^k + (1-s)B_j^k, b_k); s \in [0, 1]\}$, por lo tanto, en el momento inicial las etiquetas de los segmentos serán de la forma $\alpha_j^k = [0, 1]$. Una vez que cada paralelo $y = b_k$, $2 \leq k \leq N-1$, tiene etiquetados los segmentos en $\mathcal{T}(b_k)$, procedemos como sigue:

Algoritmo TRANSV-HORIZONTAL(S)

Entrada: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ segmentos horizontales en el cilindro, a distintas alturas.

Salida: Transversal para S , cuando existe.

Paso 1 Desde $k = 2$ hasta $k = N-1$ hacer

1.1 Desde $j = 1$ hasta $j = l-1$ ($l = m.c.m.(d_2, \dots, d_{N-1})$) hacer

- a. Si $s_k \cap \alpha_j^k = \emptyset$ eliminamos las etiquetas α_j^n para $n \geq k$;
- b. Si $s_k \cap \alpha_j^k \neq \emptyset$, entonces $s_k \cap \alpha_j^k = \{(sA_j^k + (1-s)B_j^k, b_k); s \in [a_j, b_j] \subseteq [0, 1]\}$, entonces cambiamos las etiquetas $\alpha_j^n = [a_j, b_j]$ para $n \geq k$.

Paso 2 Si no quedan etiquetas no existe hélice transversal, FIN.

Paso 3 Dada cualquier etiqueta $(\alpha_j^{N-1}, [a_j, b_j])$ la recta que pasa por $(0, 0)$ y un punto $(sA_j^{N-1} + (1-s)B_j^{N-1}, b_{N-1})$, para $s \in [a_j, b_j]$ será una hélice transversal para nuestro conjunto. FIN

Observemos que si dado un conjunto S de segmentos horizontales en el cilindro, la recta que une a $p = (0, 0)$ con el punto $(a_{N+m}, 1)$, para un determinado valor

de $m \in \mathbf{Z}$ es una hélice transversal, también lo serán las rectas pasando por $p = (0, 0)$ y $(a_N + m + kl, 1)$ para todo $k \in \mathbf{Z}$ y donde $l = m.c.m(d_2, d_3, \dots, d_{N-1})$, con lo cual se pueden obtener transversales con paso de rosca tan pequeño como queramos.

El algoritmo TRANSV-HORIZONTAL(S) decide la existencia o no de transversal en presencia de segmentos todos horizontales; ya habíamos visto que cuando ninguno de los segmentos es horizontal siempre existe transversal, basta con elegir una hélice con un paso de rosca suficientemente pequeño. Uniendo estas dos ideas es posible diseñar el algoritmo que soluciona el PROBLEMA 1 en el caso general.

Teorema 16. *Sea S un conjunto de segmentos en el cilindro, entonces*

- a) *si S no tiene más de un segmento horizontal, el PROBLEMA 1 siempre tiene solución y se puede calcular una hélice transversal en tiempo lineal en el número de segmentos.*
- b) *Si S tiene dos segmentos horizontales el PROBLEMA 1 tiene solución si y sólo si éstos no están contenidos en un único paralelo; y en el caso de que exista transversal, ésta puede calcularse en tiempo lineal.*
- c) *Si S tiene N segmentos horizontales, $N \geq 3$, se puede decidir si el PROBLEMA 1 tiene solución en tiempo $O(Nl)$, donde l es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las coordenadas de los paralelos donde se encuentran los segmentos.*

La demostración de este resultado se deduce de las consideraciones hechas a lo largo de esta sección.

5.3 Visibilidad en presencia de obstáculos

Además de para resolver el PROBLEMA 1, los resultados obtenidos en la Sección 5.2 nos van a permitir resolver otro problema en principio bastante diferente, relacionado con la visibilidad en el cilindro. Si tenemos en cuenta que el estudio de problemas de visibilidad tiene muchas aplicaciones en el campo de la Robótica [88, 89], parece interesante el estudio de estos mismos problemas, como ya vimos en la Introducción de este trabajo, en el cilindro. Si consideramos un conjunto S de N segmentos (obstáculos) y dos puntos p y q sobre esta superficie, la primera pregunta que surge de forma natural es existe una geodésica (hélice) que los una y que no corte a ningún elemento de S , en términos de visibilidad, la pregunta es si p ve a q en presencia de los obstáculos representados por los elementos de S . Otra pregunta relacionada con la anterior, y que resulta interesante para encontrar el camino más corto entre los puntos p y q , sería calcular cuántas geodésicas unen a estos dos puntos, sin cortar a ningún elemento de S , teniendo en cuenta que pueden existir infinitas. Luego, en principio, parece complicado encontrar algoritmos que en tiempo finito reconozcan la finitud o infinitud de un determinado conjunto; de hecho, no se conocen muchos algoritmos de este tipo. En la tesis de Cobos [18] se proporciona un algoritmo cuadrático que dado S determinaba si existían dos extremos en S unidos por infinitas geodésicas que no corten a ningún segmento del conjunto, determinando con ello si el grafo de visibilidad de S en el cilindro era o no localmente finito.

La pregunta que podemos fácilmente responder, usando los resultados vistos hasta ahora en este Capítulo, es si dados S , p y q existen infinitas geodésicas que unen a los dos puntos sin atravesar a ningún segmento de S . El siguiente resultado proporciona una condición necesaria sobre los

elementos de S para que existan infinitas geodésicas que unan a p y q sin cortar a ningún segmento del conjunto .

Lema 12. *Una condición necesaria para que existan infinitas geodésicas uniendo a dos puntos sobre una superficie cilíndrica, en presencia de un conjunto de segmentos, es que en la banda abierta y acotada definida sobre la superficie por los paralelos que contienen a dichos puntos sólo existan segmentos horizontales.*

Demostración: Consideremos la baldosa \mathcal{L} y la banda infinita \mathcal{M} , sean $(0, 0)$ y (a, b) las coordenadas de p y q respectivamente. Si en la banda abierta, existiera algún segmento no horizontal st y trazamos en \mathcal{M} la recta que une a la copia de t en una baldosa con la copia de s en la baldosa siguiente, y llamamos C_p a la intersección de dicha recta con la recta $y = 0$, y C_q a la intersección de la misma recta con la recta $y = b$; la copia de p a la izquierda que C_p no ve a ningún punto sobre la recta $y = b$ a la derecha de C_q , y por lo tanto, no pueden existir infinitas geodésicas uniendo a este punto con q . El razonamiento hacia el otro lado es similar.

■

Sin embargo, la condición anterior no es suficiente, tenemos que afinar un poco más. Consideremos \mathcal{M} y un segmento horizontal contenido en la recta $y = c$, con $0 < c < b$. Si trazamos las rectas que unen a una copia de p fija con todas las copias de q en \mathcal{M} , los puntos de corte de estas rectas con la recta $y = c$ son los únicos puntos que impedirían la existencia de una geodésica desde p a la copia de q correspondiente; estos puntos de corte son, tal y como hemos visto en sección anterior los elementos del conjunto $\mathcal{PP}_c = \{(\frac{c(a+m)}{b}, c); m \in \mathbf{Z}\}$;

conjunto que, en este caso, llamaremos *puntos prohibidos de coordenada $y=c$* . Pero aunque en principio se trate de un conjunto infinito de puntos distintos en \mathcal{M} , ya hemos visto que sobre \mathcal{L} representan un número finito de éstos. Estamos ahora en condiciones de enunciar el resultado que nos proporcione una condición suficiente para la existencia de infinitas geodésicas entre p y q que no cortan transversalmente a ningún segmento de S :

Teorema 17. *Sea S un conjunto de n segmentos sobre una superficie cilíndrica C y sean p y q dos puntos sobre C . Una condición suficiente para que existan infinitas geodésicas de C uniendo a p y a q , sin cortar transversalmente a ningún elemento de S es que los únicos segmentos de S que tienen intersección no vacía con la banda horizontal definida por p y q sean horizontales y que para cada segmento horizontal que corte a dicha banda contenido en una recta de ecuación $y = c$, dicho segmento no contenga a todos los elementos de \mathcal{PP}_c .*

Demostración: El resultado es evidente a partir de las consideraciones anteriores. Si en la banda abierta no hay ningún segmento no horizontal st , las rectas $C_p C_q$ construidas en la demostración del Teorema 1 no impiden la visibilidad de p y las copias de q . Por otro lado, dado un segmento horizontal contenido en una recta $y = c$, si este no contiene a alguno de los puntos prohibidos, podemos trazar geodésicas desde p hasta las copias de q correspondientes a dicho punto prohibido, que son infinitas, puesto que los puntos prohibidos se repiten cada b copias (o $c_2 b_1$ si b no fuese entero). ■

Los dos resultados anteriores nos permitirán diseñar un algoritmo cuya entrada serán los elementos de S , p y q , y cuya salida nos dirá si existen

infinitas geodésicas uniendo a p y q sin cortar transversalmente a los segmentos de S .

5.4 “Apuñalando segmentos”.

Como ya definimos en la Introducción de este capítulo, dado un conjunto S de N segmentos en el cilindro diremos que un bisector b apuñala a S si cada segmento de este conjunto tiene un extremo en cada una de las partes en que b divide al cilindro. En términos de bisectores nos planteamos, en primer lugar el siguiente problema

PROBLEMA 2: Determinar cuando existe o no un bisector que apuñale a un conjunto finito de segmentos sobre el cilindro, y en caso afirmativo, encontrar dicho bisector.

Cuando hemos intentado atacar el PROBLEMA 2 nos hemos encontrado con mayores dificultades que en el plano, debidas básicamente al hecho de que, como ya apuntamos en la Introducción, un bisector no apuñala a todos los segmentos a los que corta (ver Figura 4.4.). Nos planteamos una variante de este problema: consideremos que cada segmento de S tiene un extremo ROJO y el otro AZUL,

PROBLEMA 2’: Determinar cuando existe o no un bisector que separe extremos ROJO y AZULES, y en caso afirmativo, encontrar dicho bisector.

Es fácil entender que si encontramos un bisector separando puntos rojos de azules, ese bisector también apuñala al conjunto; pero tampoco es difícil

ver que el recíproco no es cierto en general, existen bisectores que apuñalan y no separan colores.

La versión del PROBLEMA 2' en el plano, usando rectas en lugar de bisectores, se resuelve en tiempo $O(N)$ usando técnicas de programación lineal, tal y como se puede ver en el trabajo de Megiddo [68]. La solución propuesta en dicho trabajo consiste en buscar una recta en el plano de ecuación $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$, imponiendo que todos los puntos rojos estén en un único semiplano de los dos definidos por r , y todo los puntos azules en el otro. Esto se traduce, como hemos dicho antes, en un problema de programación lineal con $2N$ inecuaciones, que se resuelve en tiempo $O(N)$. En el caso del cilindro se podría pensar buscar el bisector b usando el mismo procedimiento, pero dicho bisector, como ya hemos visto, estará formado por dos segmentos, llamémosles b_1 y b_2 . Así cada segmento de una colección S podría ser apuñalado bien por b_1 ó por b_2 . Por tanto una aproximación naif, sería intentar ver si todos los segmentos de S pueden ser intersectados por b_1 y ninguno por b_2 (lo cual implicaría la resolución de un sistema lineal con $2N$ ecuaciones); ó bien, suponer que el primer segmento de S es cortado por b_1 y el resto por b_2 , ó bien cualquiera de las 2^N variaciones posibles. Evidentemente esto nos conduce a un algoritmo exponencial. Vamos a ver a continuación, que a pesar de esto, es posible resolver el PROBLEMA 2' en tiempo polinomial, más concretamente

Teorema 18. *El PROBLEMA 2' puede ser resuelto en tiempo $O(N^3)$.*

Demostración: Partimos de $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ un conjunto de segmentos, siendo A_i y B_i los extremos de cada s_i , coloreados en azul y rojo, respectivamente, para $1 \leq i \leq N$. Buscamos P_1 y P_2 , dos puntos en el cilindro verificando que el bisector entre ambos separe puntos rojos y azules. Como

vimos en el Capítulo de Voronoi, dados P_1 y P_2 , el bisector entre ambos, notémoslo por $b(P_1, P_2)$, tiene dos ecuaciones, las ecuaciones de los dos segmentos que lo componen. Supongamos que vamos a imponer a $b(P_1, P_2)$ que deje a los puntos $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ en la región superior, de las dos que este bisector define en el cilindro, y a los puntos $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ en la inferior. Dado un punto de los $2N$ que tenemos, para imponer que esté por encima o por debajo de $b(P_1, P_2)$, necesitamos saber cuál de las dos ecuaciones de dicho bisector tenemos que usar; es fácil entender que será la del segmento de $b(P_1, P_2)$ que no interseque a la generatriz diametralmente opuesta al punto que estamos usando, Figura????????.

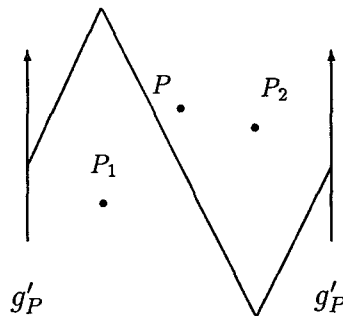


Figura ??????: Si llamamos g'_P a la generatriz diametralmente opuesta a P , para imponer que el bisector entre P_1 y P_2 , $b(P_1, P_2)$, deje a P en una de las dos regiones que éste define, tenemos que usar la ecuación del segmento en $b(P_1, P_2)$ que no corta a g'_P

Llamemos g'_{A_i} y g'_{B_j} a las generatrices diametralmente opuestas a A_i y B_j respectivamente, $1 \leq i, j \leq N$. Estas $2N$ generatrices dividen al cilindro en bandas verticales. Entonces buscamos P_1 y P_2 , dejando a los puntos azules por arriba y a los rojos por debajo. Pero para imponer esta condición necesitamos saber en qué bandas de las definidas anteriormente se encuentran P_1 y P_2

5.4. "Apuñalando segmentos".

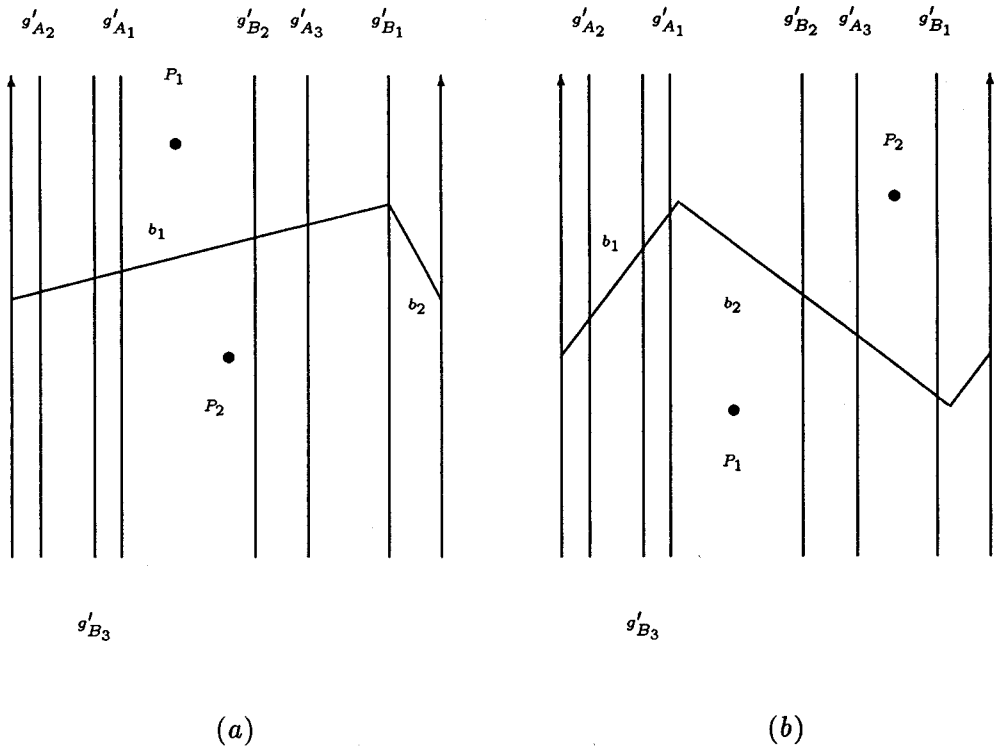


Figura 4.17.: (a) Si P_1 y P_2 están los dos en la banda definida por g'_{A_1} y g'_{B_2} , y calculamos el bisector $b(P_1, P_2)$, para imponer que, por ejemplo, A_3 esté a un lado u otro de dicho bisector debemos usar la ecuación de b_2 , que es el segmento de $b(P_1, P_2)$ que no corta a su generatriz diametralmente opuesta, g'_{A_3} .

(b) Si P_1 está en la banda definida por g'_{A_1} y g'_{B_2} , y P_2 en la definida por g'_{A_3} y g'_{B_1} , para imponer que A_3 esté a un lado u otro de $b(P_1, P_2)$ debemos usar la ecuación de b_1 , que es el segmento del bisector que no corta a g'_{A_3} .

Una vez decidido en qué banda se encuentran P_1 y P_2 , imponer que los azules estén por arriba y los rojos por abajo de lugar a un sistema con $2N$ desigualdades, podemos encontrar una solución, usando programación lineal, en tiempo $O(N)$. Pero las posibles localizaciones de P_1 y P_2 en las $2N$ bandas son de orden $O(N^2)$, con lo que el tiempo total del algoritmo es de $O(N^3)$.

Capítulo 6

Triangulaciones

Si el objetivo de este trabajo es, como dijimos en la Introducción, estudiar algunos problemas clásicos de la Geometría Computacional en distintas superficies, parece inevitable dedicar un capítulo al estudio de triangulaciones, puesto que se trata de una estructura que, aunque simple, tiene muchas aplicaciones [28, 42]. En el capítulo que aquí comienza vamos a plantear el problema de calcular una triangulación para un conjunto de puntos sobre el cilindro y la esfera, y a comparar los resultados con el caso plano.

6.1 Introducción

El término triangulación aparece en los textos de Geometría Computacional con diversos propósitos [33, 83]; así se pueden encontrar, por ejemplo, trabajos acerca de triangulaciones de polígonos, o sobre triangulaciones de conjuntos de

puntos; en ambos casos, se trata también de encontrar triangulaciones “buenas” en algún sentido, por ejemplo, que maximicen el menor de los ángulos de los triángulos con el fin de usar estas triangulaciones en problemas de interpolación, ya que es ésta una de las principales aplicaciones de la triangulación de una nube de puntos (en realidad, es tan importante que dicha aplicación justifica por sí misma que se estudien triangulaciones en superficies no planas, ya que la región a interpolar pudiera no encontrarse en el plano).

En esta memoria nos vamos a centrar en el problema de calcular una buena triangulación para un conjunto de N puntos en el cilindro ya que dicho problema ya ha sido considerado y resuelto en la esfera haciendo uso de la tetraedrelización de los puntos si los consideramos como puntos del espacio tridimensional (ver [14]). En ambas superficies se usa la métrica que para ellas se fijó en el Capítulo de Preliminares.

Una *triangulación* de un conjunto de N puntos en el plano es un conjunto maximal de segmentos, uniendo a dichos puntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo, a lo más, en sus puntos finales. Podemos generalizar directamente esta definición al cilindro y a la esfera simplemente considerando como segmentos en estas superficies las geodésicas que dan la mínima longitud entre dos puntos sobre la superficie, como ya habíamos definido anteriormente en Preliminares.

Tanto en el caso del cilindro como en el caso de la esfera, si los puntos del conjunto están en posición euclídea, el estudio de las triangulaciones es similar al caso plano, como ocurría también cuando estudiábamos la envolvente convexa en estas superficies, Capítulo 1; por lo tanto, en este capítulo consideraremos siempre conjuntos de puntos que están en posición no euclídea.

Es de destacar, igualmente, que aunque es conocido que triangular la esfera es relativamente similar a triangular el plano, esto no ocurre así en el caso del cilindro, presentándose numerosas peculiaridades, entre las que podríamos señalar que la región a triangular no siempre es la envolvente convexa de los puntos ni está unívocamente determinada y que la triangulación óptima no es la dual del diagrama de Voronoi.

6.2 Triangulaciones en el cilindro

Dado un conjunto C de puntos en el cilindro, llamamos *triangulación* de C a todo conjunto maximal de segmentos uniendo a dichos puntos de dos en dos y de forma que no se intersequen entre sí, salvo, a lo más, en sus puntos finales. Con esta definición y tal como ya habíamos comentado en la Introducción de este capítulo, si los puntos de C están en posición euclídea sobre el cilindro, el estudio de las triangulaciones de C es similar al estudio de las triangulaciones de un conjunto de puntos en el plano, puesto que si C está en posición euclídea todos los segmentos uniendo a cualquier par de puntos de este conjunto estará contenido entre las dos generatrices diametralmente opuestas entre las que se encuentra C , la envolvente convexa de C será como en el plano, y por lo tanto, cualquier triangulación de C será una triangulación de su envolvente convexa.

Supongamos entonces que tenemos un conjunto C de N puntos en posición no euclídea sobre el cilindro y T una triangulación del mismo. La primera diferencia que podemos comentar entre este caso y el caso plano es que mientras que una triangulación de un conjunto de puntos en el plano es una subdivisión del mismo cumpliendo, entre otras propiedades, que tiene una única cara no acotada, en el cilindro ésto deja de cumplirse; veremos que cualquier triangu-

lación de un conjunto de puntos sobre el cilindro define sobre esta superficie dos caras no acotadas. Para ello probaremos el siguiente resultado

Lema 13. *De cualquier punto de C parte un segmento de T hacia la derecha y otro hacia la izquierda.*

Demostración:

Sea $C = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ con $N \geq 3$, y sean (x_i, y_i) las coordenadas de cada punto p_i en el sistema de referencia definido para el cilindro en el Capítulo de Preliminares. Vamos a probar que de un punto cualquiera de C , p_k , parte un segmento de la triangulación de C hacia la derecha de p_k , es decir, existe p_r en C de forma que $x_k \leq x_r \leq x_k + 1/2$ y verificando que $p_k p_r$ es un segmento de T ; y para ello consideramos dos copias del cilindro y la banda vertical definida por las rectas $x = x_k$ y $x = x_k + 1/2$, como en la Figura 5.1.

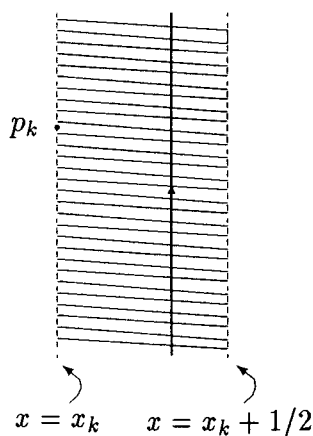


Figura 5.1.

Nótese que en la banda sombreada en la figura debe existir, al menos, un punto de C distinto de p_k , en otro caso, los puntos estarían en posición euclídea; sea p_{r_1} dicho punto. Si el segmento $p_k p_{r_1}$ no está en T es porque existe un segmento t_1 de T que lo atraviesa; pues bien, uno de los dos extremos de ese segmento debe estar en la banda, llamémosle p_{r_2} .

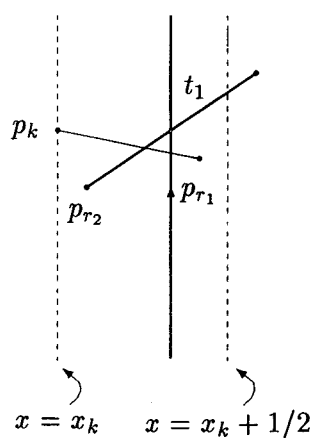


Figura 5.2.

Además el segmento t_1 produce una zona “sombreada”, \mathcal{N}_1 , como en la Figura 5.3., que contiene a p_{r_1} y de forma que cualquier segmento uniendo a un punto de C en \mathcal{N}_1 y p_k interseca a t_1 .

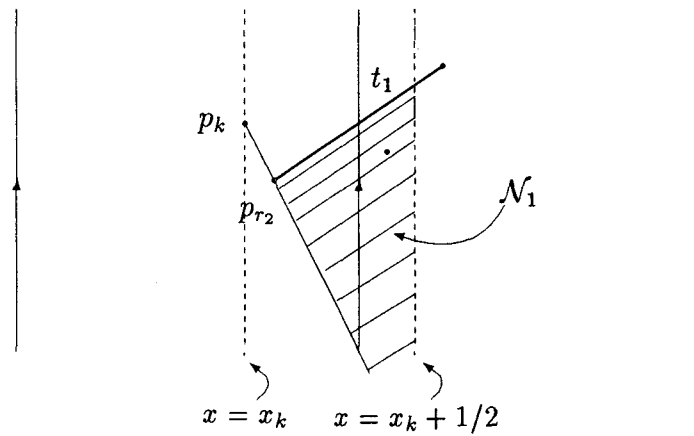


Figura 5.3.

Si el segmento $p_k p_{r_2}$ no es un segmento de T es porque existe $t_2 \in T$ que lo interseca, con alguno de sus dos extremos en la banda, p_{r_3} , y ninguno de ellos en \mathcal{N}_1 , porque en caso contrario, intersecaría a t_1 .

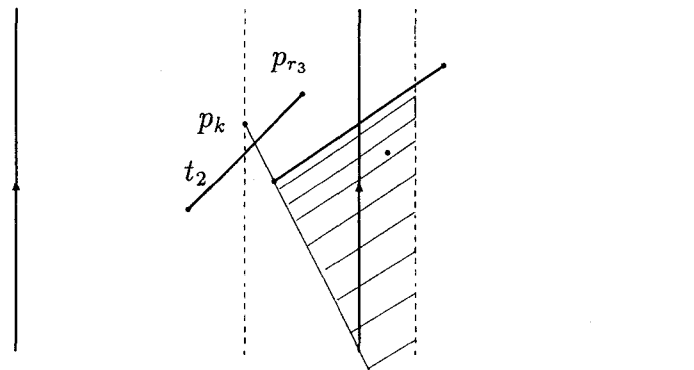


Figura 5.4.

De nuevo el segmento t_2 produce una sombra \mathcal{N}_2 , que contiene a p_{r_2} , y por lo tanto, ningún segmento de la triangulación puede tener como extremos a p_k y a un punto de la zona \mathcal{N}_2

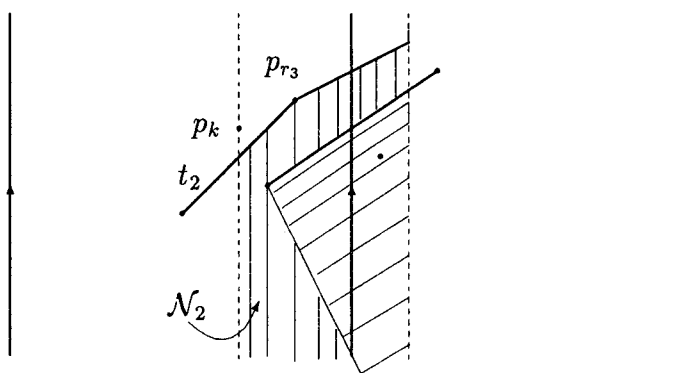


Figura 5.5.

Si reiteramos este proceso, en algún paso, el segmento $p_k p_{r_n}$ debe estar en la triangulación, porque el número de puntos del conjunto es finito, y no podemos volver a los p_{r_n} anteriores, porque cada p_{r_n} se ha ido quedando en la zona \mathcal{N}_n .

■

Llamemos ahora *poligonal esencial* en C a toda poligonal con vértices en C homotópicamente no nula en el cilindro, es decir, que divide al cilindro en dos componentes no acotadas. En el conjunto de las poligonales esenciales en C podemos definir una relación de orden parcial como sigue: “si P_1 y P_2 son dos poligonales esenciales diremos que $P_1 \leq P_2$ si la intersección de cualquier

generatriz del cilindro con P_1 tiene menor o igual ordenada que la intersección de la misma generatriz con P_2 ".

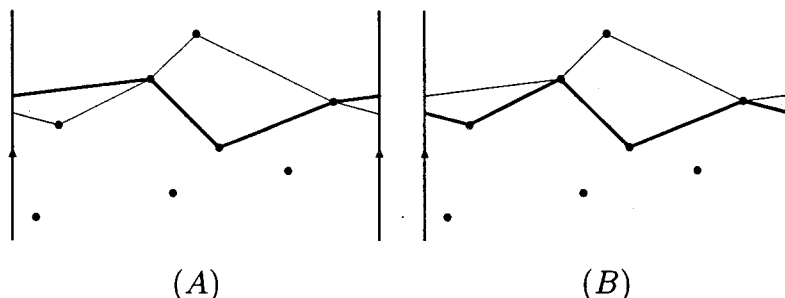


Figura 5.6.: Si llamamos P_1 a la poligonal en trazo grueso y P_2 a la de trazo fino, en la Figura (A), tenemos que estas poligonales no están relacionadas; y en la Figura (B), tenemos que $P_1 < P_2$.

Diremos que una poligonal esencial P es una *poligonal superior* (respectivamente *inferior*) en C de cuando no exista ninguna poligonal en dicho conjunto mayor (respectivamente menor) que P .

En los términos que acabamos de definir, y para conjuntos de puntos en posición no euclídea se puede demostrar que

Proposición 4. *Cualquier triangulación de un conjunto de tres o más puntos sobre el cilindro define sobre esta superficie dos caras no acotadas, delimitadas por una poligonal superior y una poligonal inferior respectivamente.*

Demostración: A partir del Lema 13. es trivial comprobar que en cualquier triangulación en el cilindro de un conjunto de puntos en posición no euclídea

define una poligonal esencial, ya que siempre podemos avanzar con segmentos de la triangulación hacia la derecha, por ejemplo, y si esta poligonal no se cerrara nunca, sería de longitud infinita y esto es imposible. Por lo tanto, se tiene que son dos las caras no acotadas definidas por la triangulación.

Sólo nos quedaría probar que la frontera de las caras no acotadas son una poligonal superior y una poligonal inferior, respectivamente. Evidentemente, ambas fronteras son poligonales esenciales, si la frontera de la cara no acotada superior no fuese una poligonal superior sería posible encontrar otra poligonal mayor, y eso significa que aún podemos añadir segmentos a nuestra triangulación. De la misma forma se puede razonar con la frontera de la cara inferior.

■

En este punto ya sabemos que en el cilindro, cada triangulación de una nube de puntos define dos caras no acotadas, y ésta era la primera diferencia que encontramos con el caso plano, donde la cara no acotada es única y además coincide con el complementario de la envolvente convexa del conjunto de puntos; tampoco ésto se cumplirá en el cilindro, las caras no acotadas no van a ser en general el complementario sobre esta superficie de la envolvente convexa como podemos ver en la siguiente figura

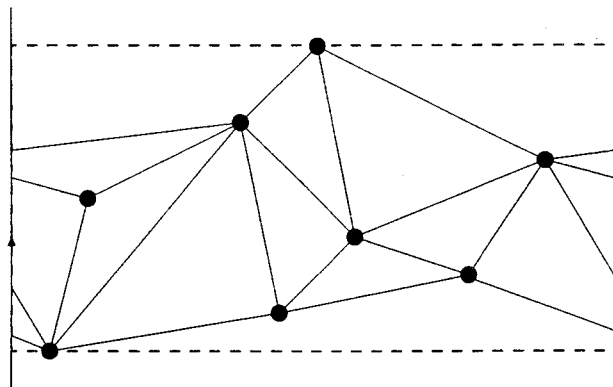


Figura 5.7.: Esta triangulación no triangula la envolvente convexa del conjunto que en este caso sería la banda definida por los círculos discontinuos en la figura.

Esto último no debe extrañarnos demasiado porque cuando estudiamos la envolvente en el cilindro (Capítulo 1) y vimos que para puntos en posición no euclídea la envolvente contenía toda una banda abierta, empezamos a sospechar que esta estructura jugaría en esta superficie un papel bien distinto al del plano, y que no iba a ser tan útil. Pero aunque la región complementaria de las no acotadas no es la envolvente convexa, probaremos que esta región siempre queda triangulada, es decir, que las caras acotadas comprendidas entre la poligonal superior y la poligonal inferior son triángulos. Llamamos *polígono euclídeo* en el cilindro a toda región acotada en esta superficie cuya frontera sea una poligonal; a los extremos de los segmentos de dicha poligonal los llamamos *vértices* del polígono euclídeo. Diremos que un vértice es convexo si el ángulo interior al polígono formado por los dos segmentos adyacentes en él es menor de 180 grados.

Lema 14. *Todo polígono euclídeo en el cilindro tiene un vértice convexo.*

Demostración: Basta con considerar bien el vértice de mayor ordenada o bien el vértice de menor ordenada en el sistema de referencia del cilindro. ■

Llamamos *diagonal* de un polígono euclídeo en el cilindro a todo segmento interior a dicho polígono uniendo dos vértices del mismo.

Lema 15. *Todo polígono euclídeo de cuatro o más vértices en el cilindro admite una diagonal.*

Demostración: La demostración de este resultado es una adaptación al cilindro de la que O'Rourke da en su libro [79] del Lema de Meister, que asegura que cualquier polígono en el plano con cuatro vértices o más tiene una diagonal.

Consideremos uno de los vértices con menor ordenada del polígono P , puede haber más de uno, y lo llamamos v ; este vértice es convexo. Sean a y b los vértices adyacentes con v . Obsérvese que tenemos dos posibilidades: a) que a , b y v estén en posición euclídea, y en este caso avb es un triángulo en el cilindro; b) que a , b y v no estén en posición euclídea, y entonces avb sea una poligonal esencial

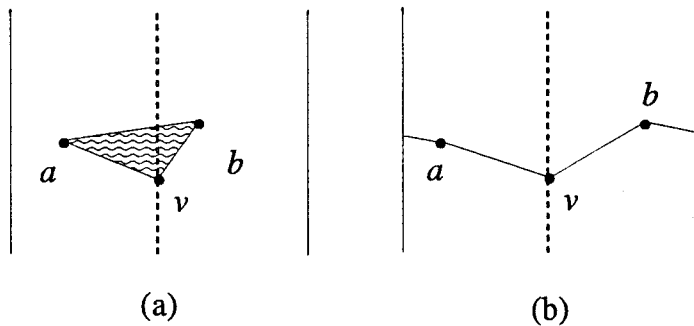


Figura 5.8.: (a) Si a , b y v están en posición euclídea, definen un triángulo cilíndrico; (b) en otro caso, los segmentos que los unen, de dos en dos, definen una poligonal esencial.

Si avb define una cara acotada en el cilindro, es decir, un triángulo acotado, se razona como en [79]: si ab es una diagonal hemos terminado; en otro caso, ó ab es exterior ó ab interseca a la frontera del polígono; en cualquier caso, puesto que tenemos al menos cuatro vértices, el triángulo abv contiene al menos un vértice distinto de estos tres; consideramos una recta paralela a la recta ab pasando por v y la desplazamos paralelamente desde v hasta el segmento ab ; sea x el primer vértice dentro del triángulo que encontramos en el barrido, entonces vx es una diagonal (Figura 5.9.).

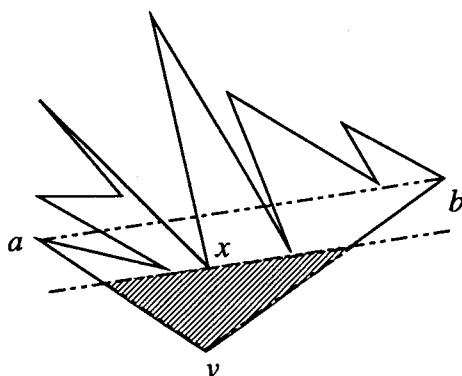


Figura 5.9.

Si avb es una poligonal esencial consideremos las semirrectas conteniendo a los segmentos av y vb , y barremos girando dichas semirrectas con centro en v y hacia la semigeneratriz ascendente que contiene a v , ver Figura 5.10.

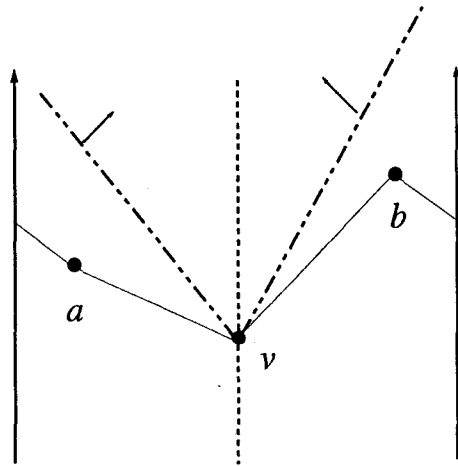


Figura 5.10.

Llamamos a_1 y b_1 a los primeros vértices del polígono que se encuentran las semirrectas av y vb , respectivamente, en el barrido que hemos descrito. Nos preguntamos entonces si a_1vb_1 define un triángulo acotado, si la respuesta es sí seguimos el razonamiento de O'Rourke; si la respuesta es no, seguimos con el barrido hasta encontrar a_2 y b_2 , que son los siguientes vértices que nos encontramos en el barrido, y nos repetimos la misma pregunta.

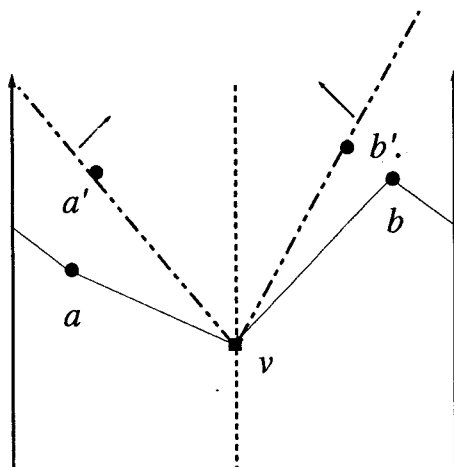


Figura 5.11.

En algún momento debemos encontrar a_k y b_k , de forma que $a_k v b_k$ definan un triángulo acotado porque en otro caso, la poligonal frontera de nuestro polígono no se cerraría nunca. Para dicho $a_k v b_k$ aplicamos el procedimiento descrito anteriormente y se tendrá el resultado.

■

Proposición 5. *Todas las caras acotadas de una triangulación en el cilindro son triángulos.*

Demostración:

Este resultado es una consecuencia del resultado anterior. ■

Corolario 2. *Dada un conjunto de N puntos en el cilindro, cualquier triangulación de este conjunto es una triangulación de su envolvente convexa si y sólo si la envolvente es un conjunto cerrado.*

Demostración:

Como ya se dijo en la Introducción de este capítulo, si los puntos están en posición euclídea la situación es la misma que en el plano y este resultado se tiene. Supongamos, por lo tanto, que los puntos están en posición no euclídea. Es evidente que si triangulamos la envolvente ésta será cerrada por ser unión finita de conjuntos cerrados. Recíprocamente, si la envolvente es cerrada, como ya se vio en el Capítulo 1, el m -top y el m -bottom son círculos completos, y en dicho caso, la única poligonal del conjunto es el m -top, y la única poligonal inferior es el m -bottom, y en virtud de la Proposición 5., la región que queda entre las dos poligonales queda triangulada.

■

Pero aún podemos encontrar más diferencias entre el caso cilíndrico y el caso plano: cuando triangulamos en el cilindro, no sólo es que no triangulemos la envolvente, sino que además distintas triangulaciones pueden triangular distintas regiones como se puede ver en la Figura 5.12.

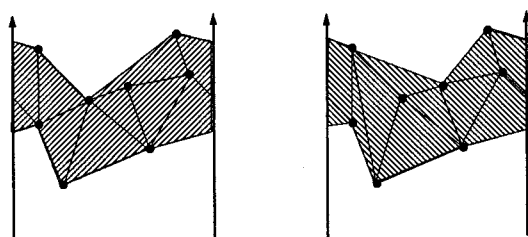


Figura 5.12.: Dos triangulaciones distintas del mismo conjunto de puntos que triangulan distintas regiones sobre el cilindro.

Nos preguntamos entonces si, en algún caso, la región triangulada está unívocamente determinada y en qué casos. Para ello nos preguntamos primero cuando un punto del conjunto que queremos triangular pertenece a alguna poligonal superior o inferior; la respuesta la tenemos en el siguiente resultado. Sea $C = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ una nube de puntos sobre el cilindro, sean (x_k, y_k) las coordenadas del punto p_k , para cada p_k llamamos $g_k^+ = \{(x, y); y \geq y_k\}$; L_k al primer punto que encontramos al barrer girando g_k^+ con centro en p_k , en sentido contrario al de las agujas del reloj y dentro de la banda $\{(x, y); x_k - 1/2 < x < x_k\}$; y R_k al primero que encontramos al hacer el barrido en el sentido de las agujas del reloj y en la banda $\{(x, y); x_k < x < x_k + 1/2\}$.

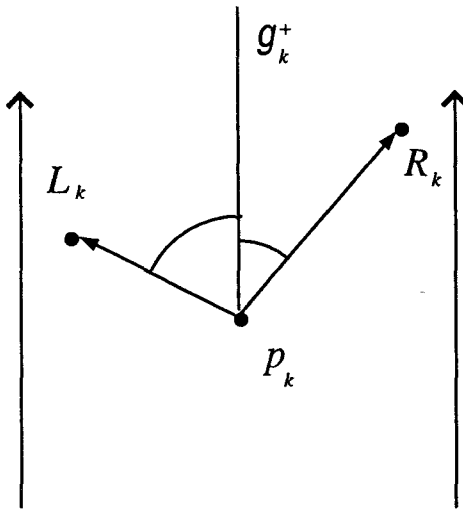


Figura 5.13.

Lema 16. *El punto p_k pertenece a una poligonal superior si y sólo si la semirrecta g_k^+ no interseca al segmento L_kR_k .*

Demostración: En primer lugar nótese que de la propia definición se deduce que si p_k pertenece a una poligonal superior, sus vecinos en esta poligonal son L_k y R_k .

Supongamos que p_k está en una poligonal superior P , entonces si g_k^+ cortase al segmento L_kR_k , bastaría sustituir en P los segmentos L_kp_k y p_kR_k por este segmento para obtener una poligonal mayor que P que no contiene a p_k ; lo que contradice que P sea superior.

Recíprocamente si g_k^+ no corta al segmento L_kR_k pueden darse dos casos:
 a) $g_k^- = \{(x_k, y); y < y_k\}$ corta a ese segmento, si $L_kp_kR_k$ están en posición

euclídea (Figura 5.14 (a)); ó b) g_k^- no interseca a $L_k R_k$, cuando $L_k p_k R_k$ define una poligonal esencial (Figura 5.14.(b))

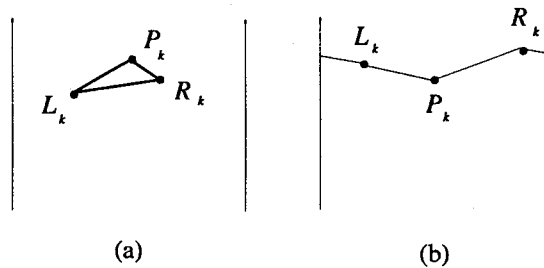


Figura 5.14.

En ambos casos es inmediato comprobar que es posible encontrar una poligonal superior conteniendo a p_k .

■

Teorema 19. *Dada una nube de N puntos en el cilindro es posible determinar cuando admite una única poligonal superior en tiempo $O(N^2)$.*

Demostración:

A partir de la caracterización obtenida en el Teorema 16. podemos diseñar un algoritmo cuya entrada serán los puntos del conjunto C y cuya salida será el grafo cuyos vértices y aristas son aquellos puntos y segmentos que forman parte de alguna poligonal superior. Puesto que para cada punto la comprobación a la que nos hemos referido requiere un tiempo lineal, dicho grafo puede construirse

en tiempo cuadrático. Es inmediato comprobar que la poligonal superior es única si y sólo si la valencia máxima de dicho grafo es dos.

■

El resultado obtenido en el Teorema 16. nos permitirá además diseñar un algoritmo que construya una poligonal superior; este algoritmo será una adaptación del de Graham [43] para el cálculo de la envolvente convexa: consideramos los puntos ordenados circularmente por su abcisa comenzando por el punto de mayor ordenada, que debe estar en cualquier poligonal superior, $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ (si hay más de un punto con la mayor ordenada elegimos cualquiera de ellos); para cada terna (p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) nos preguntamos si el segmento $p_{i-1}p_{i+1}$ corta a g_i^+ ; si la respuesta es sí consideramos la terna $(p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2})$, y en otro caso, consideramos (p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) , tal como se hace en el *scan* de Graham al que nos referimos antes. Por lo tanto, en virtud del análisis del algoritmo del citado algoritmo [83] podemos afirmar

Proposición 6. *Es posible calcular una poligonal superior en tiempo óptimo $O(N \log N)$.*

Siguiendo el paralelismo con el estudio de triangulaciones de un conjunto de puntos en el plano, y pensando en problemas de interpolación en el cilindro, lo que nos planteamos a continuación es optimizar las triangulaciones sobre dicha superficie, en el sentido de maximizar el mínimo de los ángulos de los triángulos acotados que aparecen en ella. Dado un conjunto C de puntos y una triangulación T de este conjunto formada por m triángulos, consideramos los $3m$ ángulos de T , ordenados de menor a mayor, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$, y llamamos *vector de ángulos de T* a $A(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$. Dada T' otra

triangulación distinta de C , diremos que $A(T)$ es mayor que $A(T')$, $A(T) > A(T')$ cuando $A(T)$ sea lexicográficamente mayor que $A(T')$, es decir, cuando podemos encontrar un índice $i \in \{1, 2, \dots, 3m\}$, de forma que $\alpha_j = \alpha'_j$ para los índices $j < i$ y $\alpha_i > \alpha'_i$. Una triangulación T maximiza el mínimo ángulo cuando $A(T) \geq A(T')$ sea cual sea la triangulación T' de C .

Dado un conjunto de puntos en posición general en el plano, el dual de su diagrama de Voronoi es una triangulación de dicho conjunto, conocida como *triangulación de Delaunay*; esta triangulación, entre otras, cumple la propiedad de maximizar el mínimo ángulo [28]. Puesto que es posible calcular el diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos sobre el cilindro, (Capítulo 2), una aproximación simple sería hacer lo mismo en esta superficie; desafortunadamente, como nos muestra la Figura 5.15, el dual de Voronoi no tiene por que ser ni siquiera una triangulación.

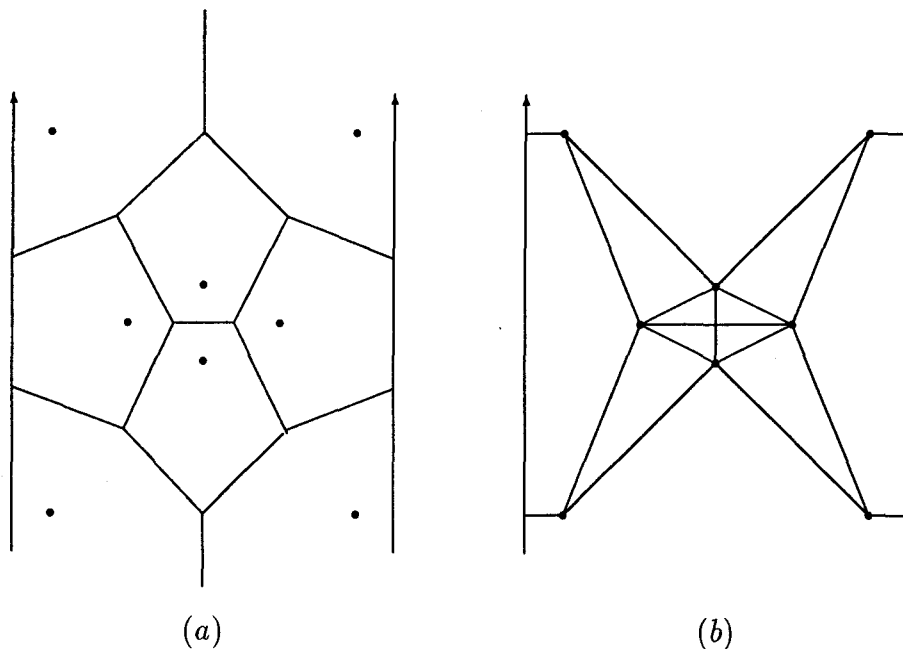


Figura 5.15: (a) Un conjunto de 8 puntos en el cilindro y su diagrama de Voronoi; (b) Dual del diagrama de Voronoi, las aristas unen puntos cuyas regiones de Voronoi son vecinas.

Podríamos pensar en adaptar al cilindro otros métodos que se han utilizado para construir triangulaciones maximizando el mínimo ángulo. Así en primer lugar podríamos pensar en partir de una triangulación cualquiera del conjunto de puntos, y mediante *flips* de aristas transformarla hasta llegar a la triangulación óptima [33]; pero la Figura 5.16. nos muestra una situación en la que no podemos aplicar este método. No es posible hacer ningún *flip* en la triangulación de la Figura 5.16.(a), que mejore los ángulos. Cuidado, no se puede cambiar la diagonal en trazo grueso por la diagonal en trazo discontinuo, esta última no es un segmento del cilindro. Por lo tanto, esta triangulación en (a) es localmente óptima, no hay *flip* que la mejore; sin embargo, la triangulación en (b) mejora los ángulos respecto a la triangulación en (a), y aunque si podemos hacer *flips* para llegar a ella desde (a), éstos no son positivos, en el sentido que acabamos de decir. Por lo tanto, llegados a una situación como en (a) localmente óptima, en el caso del cilindro no podemos asegurar, como ocurría en el plano, que ya hemos conseguido nuestro propósito.

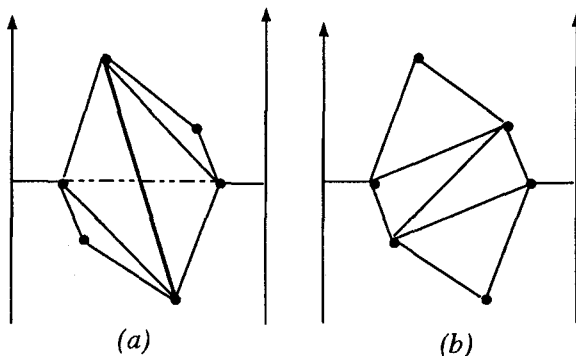


Figura 5.16. ¹

Otra técnica, utilizada ésta en la esfera, es la propuesta por Brown en su tesis [14], en su trabajo parte de un cierto conjunto de puntos sobre la esfera, los considera puntos en el espacio euclídeo tridimensional, calcula la envolvente convexa en este espacio y demuestran que las proyecciones de las aristas de la envolvente tridimensional sobre la esfera definen una triangulación sobre esta superficie del conjunto inicial, que maximiza el mínimo ángulo; pues bien, en el caso del cilindro podemos encontrar ejemplos en el trabajo de Cortés et al. [23], Figura 5.17., para los que dichas proyecciones no determinan una triangulación en el cilindro.

¹Este contraejemplo me lo dio Francisco Santos (Univ. de Cantabria), en las Jornadas Franco Españolas sobre Geometría Computacional celebradas en Barcelona en Septiembre de 1997. Gracias, Paco.

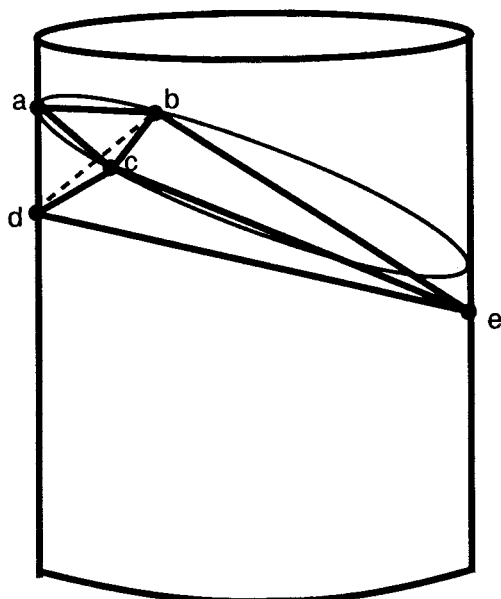


Figura 5.17.

Recíprocamente, para la triangulación dada en el cilindro su envolvente convexa en el espacio no es un poliedro

Tenemos entonces que seguir trabajando para maximizar el mínimo ángulo en las triangulaciones de un conjunto de puntos sobre el cilindro. Para ello volvemos de nuevo al plano; encontramos [28] un algoritmo basándose básicamente en el siguiente método: consideramos dos triángulos compartiendo una arista, y el círculo definido por los tres vértices de uno de los dos triángulos; si el cuarto punto está dentro de este círculo, cambiamos la arista que comparten los dos triángulos (que será una arista *ilegal*) por la otra diagonal del cuadrilátero formado con los cuatro vértices, ver Figura 5.19. Una vez elimi-

nadas todas las aristas ilegales, la triangulación obtenida maximiza el mínimo ángulo.

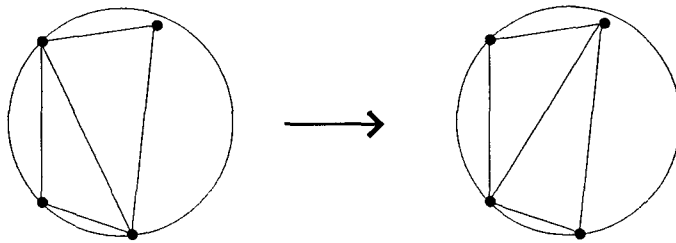


Figura 5.19.

Una vez más pensamos en hacer lo propio en el cilindro, y una vez más descubrimos que no es posible como se muestra en la Figura 5.20.

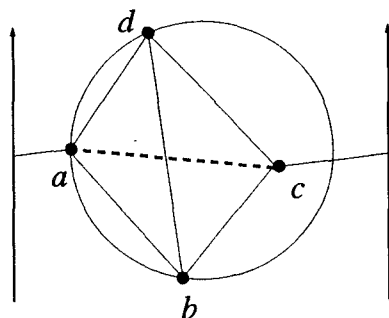


Figura 5.20.: Si queremos usar el mismo método que en el plano, debemos intercambiar las aristas ac y bd , pero esta última no es un segmento en el cilindro.

No se desmoralice el lector llegados a este punto, porque sí que podremos adaptar este último algoritmo para usarlo en nuestra superficie. En el plano este algoritmo funciona de forma incremental como sigue [28]. Añade al principio tres puntos P_1 , P_2 y P_3 , lo suficientemente alejados, de forma que el conjunto de puntos que desea triangular esté contenido en el triángulo $P_1P_2P_3$, que será el triángulo con el que empieza. A continuación ordena los N puntos del conjunto a triangular de forma aleatoria, y de uno en uno va realizando el siguiente proceso. Si el punto a considerar está en el interior de alguno de los triángulos ya construidos (Figura 5.21.(a)), lo unimos con los tres vértices de dicho triángulo, y nos preguntamos acerca de la legalidad de las aristas de los triángulos que se acaban de formar: si alguna es ilegal la cambia por la otra diagonal del cuadrilátero formado con los cuatro vértices de los dos triángulos que comparten dicha arista; cuando ha terminado, considera el si-

guiente punto. Si el punto a considerar está sobre una arista de alguno de los triángulos anteriormente construidos (Figura 5.21.(b)), lo unimos con los dos vértices opuestos en los triángulos que comparten dicha arista, y nos preguntamos sobre la legalidad de las aristas en los cuatro nuevos triángulos que se forman.

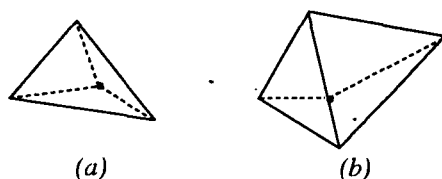


Figura 5.21.

Describiremos a continuación la adaptación del algoritmo anterior para obtener una triangulación que maximice el mínimo ángulo en el cilindro. Si en el caso del plano empezábamos añadiendo tres puntos para asegurarnos que cualquier punto del conjunto a triangular estaba contenido en el triángulo que definían dichos puntos, en el cilindro añadiremos seis puntos de la siguiente manera: puesto que estamos suponiendo que los puntos están en posición no euclídea, sabemos que su envolvente convexa contiene a una banda definida por los círculos $\{(x, y); y = y_t\}$ y $\{(x, y); y = y_b\}$, consideremos, por ejemplo, los siguientes puntos $P_1 = (0, M)$, $P_2 = (1/3, M)$, $P_3 = (2/3, M)$, $P_4 = (1/6, m)$, $P_5 = (1/2, m)$ y $P_6 = (5/6, m)$, de forma que M y m son, respectivamente, suficientemente mayor y menor que y_t e y_b . Si triangulamos el conjunto formado por estos seis puntos, podemos asegurar que cualquier punto del conjunto inicial está en el interior de alguno de estos triángulos o sobre alguna de las aristas de los mismos.

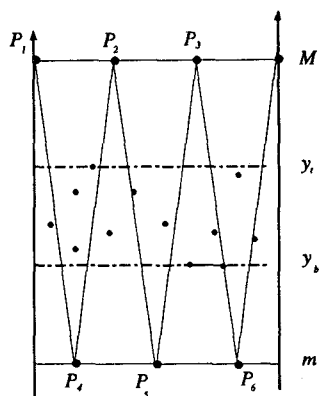


Figura 5.22.

Sólo nos queda entonces describir el test para estudiar la legalidad o no de una arista en la triangulación sobre el cilindro, para ello llamamos *círculo euclídeo* definido por tres puntos $Q_i = (x_i, y_i)$, con $1 \leq i \leq 3$, de forma que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$, a la intersección del círculo plano que definen dichos puntos en la representación plana del cilindro con la banda definida por $\{(x, y); x_3 - 1/2 \leq x \leq x_1 + 1/2\}$,

Entonces dada una arista e en un triángulo abc del cilindro será una arista legal en la triangulación de C cuando ningún otro punto de C está contenido en el interior del círculo euclídeo que definen a , b y c . Usando este criterio y los resultados conocidos en el plano[28], es posible demostrar el siguiente resultado

Teorema 20. *Es posible calcular una triangulación T de un conjunto C de N puntos en el cilindro que maximice el mínimo ángulo en tiempo $O(N^2)$, y tiempo esperado $O(N \log N)$.*

Referencias

- [1] A.V. Aho, J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- [2] S.G. Akl and G.T. Toussaint. Efficient convex hull algorithms for pattern recognition applications. In Kyoto, editor, *Proc. 4th. Int'l JOint Conf. on Pattern Recognition*, pages 483–487, Japan, 1978.
- [3] E.L. Aleksandrov and G.M. Ilmushkin. On the convex hull of orthogonal spectral functions of a regular isometric operator. *Functional Analysis*, 31:21–28, 1990.
- [4] H.C. Andrews. *Introduction to mathematical techniques in pattern recognition*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [5] Anónimo. Antigua colección china. In *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*.
- [6] M.J. Atallah and C. Bajaj. Efficient algorithms for common transversals. *Inform. Process. Lett.*, 25:87–91, 1987.
- [7] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams: A survey of a fundamental data structure. *ACM Comput. Surveys*, 23:345–405, 1991.

- [8] D. Avis and R. Wenger. Polyhedral line transversals in space. *Discrete and Comput. Geometry*, 3:257–266, 1988.
- [9] B. Grünbaum. A proof of vazsonyi's conjecture. *Bull. Res. Council Israel*, A(6):77–78, 1956.
- [10] M.S. Bartlett. *The Statistical Analysis of Spatial Pattern*. London: Chapman and Hall, 1975.
- [11] L.J. Bass and S.R. Schubert. On finding the disc of minimum radius containing a given set of points. *Math. Comput.*, 12:712–714, 1967.
- [12] J. Benoist and J.B. Hiriart-Urruty. Quel est le sous-différentiel de l'enveloppe convexe fermée d'une fonction? *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Serie I. Mathématique*, 316(3):233–237, 1993.
- [13] G.S. Brown. Point density in stems per acre. *New Zealand Forestry Service Research Notes*, 38:1–11, 1965.
- [14] K.Q. Brown. *Geometric transformations for fast geometric algorithms*. PhD thesis, Dept. of Computer Science, Carnegie Mellon Univ., Décembre 1979.
- [15] T.M. Chan. Output-sensitive results on convex hulls, extreme points, and related problems. In *11th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 10–19. ACM, 1995.
- [16] T.M. Chan, J. Snoeyink and C.K. Yap. Output-sensitive construction of polytopes in four dimensions and clipped voronoi diagrams in three. In *6th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms (SODA '95)*, pages 282–291. ACM-SIAM, 1995.

- [17] B.M. Chazelle. Optimal algorithms for computing depths and layers. In *Proc. 21st Allerton Conference on Comm., Control and Comput.*, pages 427–436, 1983.
- [18] F.J. Cobos. *Sobre visibilidad en espacios n -dimensionales y superficies no planas*. PhD thesis, Dept. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla., 1995.
- [19] F.J. Cobos, J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. Anchura de un conjunto convexo en la esfera. In *Proc. VII Encuentros en Geometría Computacional*. Universidad Politécnica de Madrid, 1997.
- [20] F.J. Cobos, J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. Diameter of a set on the cylinder. In *Proc. Ninth Canadian Conference on Computational Geometry*, Kingston (Canada), 1997.
- [21] F.J. Cobos, J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. Diámetro de un conjunto de puntos en el cilindro. In *Proc. VII Encuentros en Geometría Computacional*. Universidad Politécnica de Madrid, 1997.
- [22] F.J. Cobos, J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. The width of a convex set on the sphere. In *Proc. Ninth Canadian Conference on Computational Geometry*, Kingston (Canada), 1997.
- [23] C. Cortés, F. Hurtado, A. Márquez and A. Nakamoto. Edge flipping in triangulations of surfaces. *14th European Workshop on Computational Geometry*, Universidad Politécnica de Cataluña(Barcelona), 1998.
- [24] J.C. Dana, C.I. Grima, F. Hurtado and A. Márquez. More results on the computational geometry on the cylinder. In *Proc. 14th European Workshop on Computational Geometry*. Universidad Politécnica de Cataluña, 1998.

- [25] J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. Convex hull in non-planar surfaces. In *Proc. 13th European Workshop on Computational Geometry*, Germany, 1997. University of Wuerzburg.
- [26] J.C. Dana, C.I. Grima and A. Márquez. Envolvente convexa en superficies no planas. In *Proc. VII Encuentros en Geometría Computacional*. Universidad Politécnica de Madrid, 1997.
- [27] L. Danzer, B. Grunbaum and V.L. Klee. Helly's theorem and its relatives. In *Proc. Symp. Pure Math. VII*, Providence, R.I., 1963. American Mathematical Society.
- [28] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*. Springer-Verlag, 1997.
- [29] G.L. Dirichlet. Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 40:209–227, 1850.
- [30] M.P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, 1976.
- [31] R.O. Duda and P.E. Hart. *Pattern clasification and Scene Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [32] H. Edelsbrunner. Finding transversals for sets of simple geometric figures. *Theoret. Comput. Sci.*, 35:55–69, 1985.
- [33] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [34] H. Edelsbrunner, A. Maurer, F.P. Preparata, A.L. Rosenberg, E. Welzl and D. Wood. Stabbing line segments. *BIT*, 22:274–281, 1982.

-
- [35] H. Edelsbrunner, H.A. Maurer, F.P. Preparata, A.L. Rosenberg, E. Welzl and D. Wood. Stabbing line segments. *BIT*, 22:274–281, 1982.
- [36] P. Erdos. On sets of distances of n points. *Amer. Meth. Monthly*, 53:248–250, 1946.
- [37] Euclides. *Elementos. Libro VII*.
- [38] H. Freeman. Computer processing of line-drawing images. *Comput. Surveys*, 6:57–97, 1974.
- [39] H. Freeman. Computer processing of line-drawing images. *Comput. Surveys*, (6):57–97, 1974.
- [40] H. Freeman and R. Shapira. Determining the minimum-area enclosing rectangle for an arbitrary closed curve. *Comm. ACM*, 18(7):409–413, 1975.
- [41] A. Getis and B. Boots. *Models of Spatial Processes: An Approach to the Study of Point, Line and Area Patterns*. Cambridge University Press, 1978.
- [42] J.E. Goodman and J. O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [43] R.L. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Inform. Process. Lett.*, 1:132–133, 1972.
- [44] C.I. Grima, A. Márquez and L. Ortega. A locus approach to angle problems in computational geometry. *14th European Workshop in Computational Geometry*, Barcelona, 1998.

- [45] C.I. Grima, A. Márquez and L. Ortega. A locus approach to angle problems in computational geometry. *Wet and Discrete*, Darwin (Australia), 1998.
- [46] P.M. Gruber. History of convexity. In *Handbook of convex Geometry*. Elsevier Science, 1993.
- [47] B. Grunbaum. *Convex Polytopes*. Wiley-Interscience, New York, 1967.
- [48] J.E. Harding. Calculation of ore tonnage and grade from drill-hole samples. *Transactions of the American Institute of Mining Engineers*, 66:117–126, 1920-21.
- [49] J.E. Harding. How to calculate tonnage and grade of an ore body. *Engineering and Mining Journal Press*, 116(11):445–448, 1923.
- [50] J.G. Hocking and G.S. Young. *Topology*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1961.
- [51] H. Hopf and W. Rinow. Über den Begriff der vollständigen differential-geometrischen Fläche. *Comentarii. Math. Helvetici.*, 3:209–225, 1931.
- [52] R. E. Horton. Rational study of rainfall data makes possible better estimates of water field. *Engineering News-Record*, 79:211–213, 1917.
- [53] M.E. Houle and G.T. Toussaint. Computing the width of a set. *IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence*, 10(5):761–765, 1988.
- [54] W.E. Howden. The sofa problem. *Computer Journal*, 11:299–301, 1968.
- [55] K. Ichida and T. Kiyono. Segmentation of plane curves. *Trans. Elec. Commun. Eng. Japan*, 58-D:689–696, 1975.

- [56] J.W. Jaromczyk and M. Kowaluk. Skewed projections with an application to line stabbing in \mathbb{r}^3 . In *Proc. 4th Ann. ACM Symp. Comput. Geom.*, pages 362–370, 1988.
- [57] R.A. Jarvis. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Info. Proc. Lett.*, 2:18–21, 1973.
- [58] M. Katchalski, T. Lewis and J. Zaks. Geometric permutations for convex sets. *Discrete Math*, 54:271–284, 1985.
- [59] D. Khoshnevisan. Moment inequalities for functionals of the brownian convex hull. *The Annals of Probability*, 20(2):627–630, 1992.
- [60] D.G. Kirkpatrick and R. Seidel. The ultimate planar convex hull algorithm? *SIAM J. Comput.*, 15:287–299, 1986.
- [61] D.E. Knuth. *Sorting and Searching: The Art of Computer Programming III*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [62] D.E. Knuth. Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News*, 8(2):18–24, 1976.
- [63] Y. Kurozumi and W.A. Davis. Polygonal approximation by the minimax method. *Comput. Graphics Image Processing*, 19:248–264, 1982.
- [64] D.T. Lee and F.P. Preparata. Computational geometry, a survey. *IEEE Trans. Comput.*, 31:1072–1101, 1984.
- [65] P. Mani-Levitska. Characterizations of convex sets. In *Handbook of convex Geometry*. Elsevier Science, 1993.
- [66] K. Maruyama. An approximation method for solving the sofa problem. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 2:29–48, 1973.

- [67] M.L. Mazón. *Diagramas de Voronoi en caleidoscopios*. PhD thesis, Universidad de Cantabria, 1992.
- [68] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in \mathbf{R}^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12:759–776, 1983.
- [69] K. Mehlhorn. *Data Structures and Algorithms III: Multidimensional Searching and Computational Geometry*. Springer, Heidelberg, 1984.
- [70] K. Menger. Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.*, (100):75–163, 1928.
- [71] L. Moser. Problem 66-11: Moving furniture through a hallway. *SIAM Review*, 8:381, 1966.
- [72] M. Naatanen and R.C.Penner. The convex hull construction for compact surfaces and the dirichlet polygon. *The Bulletin of the London Mathematical Society*, 23(6):568–574, 1991.
- [73] R. Niggli. Die topologische strukturanalyse. *Zeitschrift für Kristallographie*, 65:391–415, 1927.
- [74] T. Nishizeki and N. Chiba. *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, volume 32 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1988.
- [75] V.W. Nowacki. über allgemeine eigenschaften von wirkungsbereichen. *Zeitschrift für Kristallographie*, 143:360–385, 1976.
- [76] A. Okabe, B.Boots and K. Sugihara. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley and Sons, 1992.
- [77] J. O'Rourke. An on-line algorithm for fitting straight lines between data ranges. *Comm. ACM.*, 24:574–578, 1981.

- [78] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [79] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [80] E. Pielou. *Mathematical Ecology*. New York: Wiley-Interscience, 1977.
- [81] C.C. Popoff. Computing reserves of mineral deposits: principles and conventional methods. *U.S. Department of the Interior, Bureau of Mines, Information Circular, 8283*, 1966.
- [82] F.P. Preparata. An optimal real time algorithm for planar convex hulls. *Comm. ACM*, 22:402–405, 1979.
- [83] F.P. Preparata and M.I. Shamos. *Computational geometry: an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [84] D. Rappaport. A convex hull algorithm for discs, and applications. *Computational Geometry Theory and Applications*, 1(3):171–187, 1992.
- [85] A. Rosenfeld. *Picture Processing by Computers*. Academic Press, New York, 1969.
- [86] V. Sacristán. *Optimización Geométrica y Aplicaciones en Visibilidad*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1997.
- [87] B. Schaudt and R.L. Drysdale. Multiplicatively weighted crystal growth voronoi diagrams. *Proc. 7th Annu. Symp. Comp. Geom. ACM*, pages 214–223, 1991.
- [88] J. Schwartz, M. Sharir and J. Hopcroft. *Algorithmic and Geometric Robotics*. Lawrence Earlbaum Assoc., 1987.

- [89] J. Schwartz and C.K. Yap. *Planning Geometry and Complexity of Robot Motion*. Ablex Publishing, 1987.
- [90] R. Seidel. Convex hull computations. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pages 361–375. J.E. Goodman and J. O'Rourke, CRC Press, 1997.
- [91] M.I. Shamos. *Computational geometry*. PhD thesis, Yale University, 1978.
- [92] J. Sklansky. Measuring concavity on a rectangular mosaic. *IEEE Trans. Comp.*, C-21:1355–1364, 1972.
- [93] G. Strang. The width of a chair. *The American Mathematical Monthly*, 89(8):529–534, 1982.
- [94] A.H. Thiessen. Precipitation averages for large areas. *Monthly Weather Review*, 39:1082–1084, 1911.
- [95] G.T. Toussaint. A historical note on convex hull finding algorithms. *Patt. Recogn. Lett.*, 3:335–375, 1985.
- [96] G.T. Toussaint. Movable separability of sets. In Godfried T. Toussaint, editor, *Computational Geometry*. Elsevier Science, 1985.
- [97] G.T. Toussaint. Solving geometric problems with the rotating calipers. In *Proc. IEEE MELECON'83*, Athens, Greece, May 1983.
- [98] K. Unger. The convex hull problem on special planar point sets. *Journal of Information Processing and Cybernetics*, 25(11-12):587–601, 1989.
- [99] Varios. *Handbook of Convex Geometry*. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.

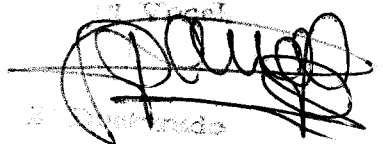
- [100] G. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, deuxième memoire, recherches sur les sur les paralleloèdres primitifs. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 134:198–287, 1908.
- [101] Ti Fu Wang. A property of the convex hull of a compact set in a banach space. *Shangai.Shifan.Daxue.Xuebao.Ziran.Kexue.Ban.*, 22(2):23–27, 1993.
- [102] J.G. Wendel. A problem in geometric probability. *Math. Scand.*, 2:109–111, 1962.
- [103] E.N. Whitney. Areal rainfall estimates. *Monthly Weather Review*, 57:462–463, 1929.
- [104] E. Wigner and F. Seitz. On the constitution of metallic sodium. *Physical Review*, 43:804–810, 1933.
- [105] I.M. Yaglom and V.G. Boltyanskii. *Convex figures*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.
- [106] F.F. Yao. *Computational Geometry*. Elsevier, 1990.

Doña Clara Isabel Grima Ruiz
Geometría Computacional en Superficies no Planas

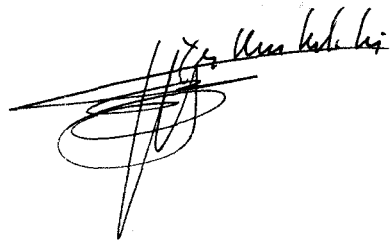
unanimidad) 28 septiembre 98



M. Belmontes



Comunicación



* 5 0 1 1 4 4 3 7 0 *

FMA C 043/265