El problema del anti-k-centrum en grafos[1]

Antonio J. Lozano[2] Juan A. Mesa[3] y Frank Plastria[4]

Resumen

Dos de los criterios más conocidos en la localización, en redes, de servicios repulsivos son el anti-centro y la anti-mediana. El problema del anti-k-centrum generaliza ambos criterios, pues los tiene como casos particulares, y consiste en buscar la ubicación del servicio que hace máxima la suma de distancias (o distancia media) a los k usuarios más cercanos. El anti-centro y la anti-mediana corresponden a los casos $k = 1$ y $k = n$, respectivamente. En este trabajo describimos un conjunto dominante finito para el anti-k-centrum así como un algoritmo que encuentra una solución al problema en tiempo $O(\alpha(2(k+1))k^2 \log k\, nm)$.

1 Introducción

Dos de los problemas más ampliamente estudiados en la localización en redes de servicios atractivos son el problema del centro y el problema de la mediana. Mientras en el primer caso se busca la ubicación que hace mínima la distancia hasta el usuario más lejano, en el segundo caso se trata de ubicar el servicio de manera que la distancia media al conjunto de usuarios sea lo más pequeña posible. El problema del k-centrum consiste en buscar la localización del servicio que hace mínima la suma de distancias a los k usuarios más alejados. Este criterio, que generaliza y unifica al problema del centro y al problema de la mediana, ha sido ampliamente estudiado en la literatura. De este modo, Slater [9] define el k-centrum discreto en un contexto topológico, Andreatta y Mason [2] consideran el caso de árboles con aristas de longitud arbitraria, Peeters [8] describe un algoritmo para la versión discreta en un grafo y Tamir [10] estudia la ubicación de un único servicio en caminos, árboles y grafos así como el problema múltiple, que consiste en situar p servicios en lugar de uno, proporcionando para este último caso una δ-aproximación.

Cuando el servicio a localizar, lejos de ser atractivo, produce o puede producir efectos no deseados, los criterios centro y mediana se transforman en el anti-centro y la anti-mediana. En el primer caso el objetivo es buscar el punto del grafo que se encuentra más alejado del usuario más cercano mientras que en el segundo se busca la localización del servicio que hace máxima la distancia media a los usuarios. El anti-centro es propio de problemas en los que se desea ubicar un servicio potencialmente peligroso que debe alejarse de cualquier usuario en previsión de posibles catástrofes (centrales nucleares, depósitos de residuos industriales...). La anti-mediana es más adecuada para la ubicación de servicios que, aún siendo molestos, no representan un peligro real para la integridad de los usuarios (grandes superficies comerciales, vertederos de residuos de la construcción...).

En este trabajo estudiamos el problema del anti-k-centrum que, además de generalizar y unificar ambos criterios, proporciona al decisor un criterio mucho más flexible y adaptable a las situaciones en las que el uso del anti-centro o la anti-mediana puede ser discutible. El objetivo es encontrar la localización del servicio que hace máxima la suma de distancias a los k usuarios más cercanos. El anti-centro y la anti-mediana corresponden a los casos en que $k = 1$ y $k = n$, respectivamente y al igual que sus versiones atractivas han sido ya ampliamente tratados: Melachrinoudis y Zhang [7], Church y Garfinkel [4], respectivamente.

[1]Trabajo parcialmente subvencionado por BFM2000-1052-C02-01

[2]Dpto. de Matemáticas. Universidad de Huelva. E-mail: antonio.lozano@dmat.uhu.es

[3]Dpto. de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla. E-mail: jmesa@us.es

[4]Dept. of Management Informatics. Vrije Universiteit Brussel. E-mail: Frank.Plastria@vub.ac.be

2 Definiciones y formulación del problema

Sea $G = (E, V)$ un grafo no dirigido, conexo y ponderado con $|V| = n$ y $|E| = m$. Cada arista $e \in E$ tiene asociada una longitud positiva l_e y suponemos que es rectificable. Denotaremos por $A(G)$ el conjunto de puntos de las aristas de G. Cada uno de estos puntos está caracterizado por su distancia a los vértices de la arista a la cual pertenece. Dados dos puntos $x, y \in A(G)$ representaremos por $d(x, y)$ a la longitud del camino más corto que une x e y. Cada vértice $v \in V$ tiene asociado un peso $\omega_v > 0$ que refleja su importancia relativa con respecto al resto de vértices.

El problema del Anti-k-Centrum consiste en encontrar un punto $x \in A(G)$ que haga máxima la función

$$F(x) = \min_{Q \subset V, |Q|=k} \sum_{v \in Q} \omega_v d(x, v)$$

Como ya hemos comentado anteriormente el anti-k-centrum recoge como casos particulares al problema maxmin o anti-centro ($k = 1$) y al problema maxsum o anti-mediana ($k = n$). Los algoritmos conocidos más efectivos para estos problemas tienen en ambos casos complejidad temporal $O(mn)$ [4, 7].

Sean $(v_i, v_j) \in E$ y $\overline{x} \in (v_i, v_j)$,

Definición: Se dice que $\overline{x}$ es un *punto cuello de botella arco* si existe un vértice $u \in V$ tal que

$$d(\overline{x}, v_i) + d(v_i, u) = d(\overline{x}, v_j) + d(v_j, u)$$

Denotaremos por B_A al conjunto formado por todos los puntos cuello de botella arco.

Definición: Se dice que $\overline{x}$ es un *punto cuello de botella centro* si existen dos vértices distintos v_r y v_s tales que

$$\omega_r d(\overline{x}, v_r) = \omega_s d(\overline{x}, v_s) \text{ y } d'(\overline{x}^+, v_r) \cdot d'(\overline{x}^+, v_s) < 0$$

Denotaremos por B_C al conjunto formado por todos los puntos cuello de botella centro.

Definición: Se dice que $\overline{x}$ es un *punto de equilibrio* si existen dos vértices distintos v_r y v_s tales que

$$\omega_r d(\overline{x}, v_r) = \omega_s d(\overline{x}, v_s)$$

Denotaremos por EQ al conjunto formado por todos los puntos de equilibrio.

En la siguiente figura aparecen representadas las funciones $\omega_s d(x, v_s)$ y $\omega_r d(x, v_r)$ donde $x \in (v_i, v_j)$, siendo (v_i, v_j) una arista de una hipotética red, y v_s, v_r son dos vértices distintos de dicha red. Podemos observar que $\overline{x}'' \in B_A$, $\overline{x}' \in B_C \cap EQ$ y $\overline{x} \in EQ \backslash BC$.

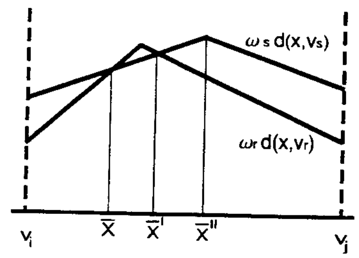

Figura 1: Funciones de distancia

3 Conjunto dominante finito

Para el problema *maxsum* un conjunto dominante finito es $V \cup B_A$, Church y Garfinkel [4]; para el problema *maxmin* el conjunto dominante finito es $V \cup B_A \cup B_C$, Melachrinoudis y Zhang [7]. Dado que el anti-k-centrum recoge a ambos problemas como casos particulares suyos se podría pensar que su conjunto dominante finito es la unión de los conjuntos dominantes del anticentro y la antimediana. Sin embargo esto no es cierto y es fácil comprobar que es necesario considerar también los puntos de equilibrio, resultando de este modo el conjunto $V \cup B_A \cup EQ$ que es precisamente el conjunto dominante finito del problema mediana ordenado, Kalcsics, Nickel, Puerto y Tamir [6], y del cuál es el anti-k-centrum un caso particular. No obstante, en el caso del anti-k-centrum, el conjunto dominante se puede refinar aún más como veremos a continuación.

Definición: Sea S un conjunto de segmentos en posición general en el plano. Dado $k = 0, \ldots, n-1$, el k-nivel $L(k)$ en el arreglo $A(S)$ de S se define como la clausura del conjunto de puntos w que pertenecen a algún elemento de S y tienen por debajo exactamente a k segmentos.

Teorema: El conjunto dominante finito del anti-k-centrum es

$$V(1) \cup B_A \cup BP(k-1)$$

donde $V(1)$ representa el conjunto de vértices de grado 1 y $BP(k-1) = L(k) \cap L(k-1)$, siendo $L(k)$ el k-nivel del arreglo de funciones distancia a los vértices del grafo. Este conjunto dominante finito contiene $O(n(k-1)^{(1/3)}\alpha(n/(k-1)))$ puntos.

4 Un algoritmo para k fijado

Como ya hemos comentado, el problema del anti-k-centrum constituye a su vez un caso particular del problema mediana ordenado, para el cual Kalcsics, Nickel, Puerto y Tamir [6] describen un algoritmo con complejidad temporal $O(mn^2 \log n)$. Cuando nos restingimos a una única arista del grafo, el anti-k-centrum tiene la propiedad de que la función objetivo es una función cóncava. Esta propiedad resulta fundamental para la validez del algoritmo que describiremos a continuación y que tiene menor complejidad que el descrito para el problema mediana ordenado. Para obtener el óptimo global será necesario aplicar el algoritmo a cada una de las aristas del grafo y buscar el óptimo global entre esos óptimos locales.

Input: Un grafo no dirigido $G = (E, V)$, conexo y ponderado con $|V| = n$ y $|E| = m$, y una arista $e_0 \in E$.

Output: Un punto anti-k-centrum, x^*, en e_0.

Fase 1:

`Paso 0.1:` Dividir el conjunto de n funciones distancia en $n/(k+1)$ conjuntos de $k+1$ funciones cada uno.

`Paso 0.2:` Si alguna de las funciones distancia no tiene pendiente constante a lo largo de la arista, descomponerla en dos segmentos y evaluar la envolvente superior de cada uno de los $n/(k+1)$ conjuntos de funciones.

`Paso 1:`

i. Evaluar la mediana de los $O(2(k+1)\alpha(2(k+1)))$ puntos de ruptura de cada envolvente superior. Sea P_1 el conjunto mediana.

ii. Evaluar la mediana p_1 de P_1.

iii. Determinar la posición relativa de p_1 respecto a x^*. Esto se puede hacer en tiempo lineal utilizando el algoritmo descrito en [3] y permite conocer,por ser la función objetivo cóncava, la posición relativa de $n/(2(k+1))$ elementos de P_1 con respecto al óptimo x^*.

iv. Considerar las $n/(2(k+1))$ envolventes superiores para las cuáles conocemos la posición relativa de sus medianas respecto a x^* (desechando el resto) y eliminar aquellos puntos de ruptura de posición relativa conocida con respecto a x^*.

Paso 2: Repetir el Paso 1 con las $n/(2(k+1))$ envolventes superiores restantes.

Repetimos el procedimiento descrito en los pasos anteriores hasta llegar al:

Paso $\log k$**:** En este instante hemos identificado $O(n/(k(k+1)))$ conjuntos de funciones con cuatro puntos de ruptura cada uno. Comprobar la posición relativa de cada uno de esos puntos con respecto al óptimo y eliminar $O(n/(k(k+1)))$ funciones distancia.

Al terminar la **Fase 1** habremos eliminado $O(n/k^2)$ funciones distancia

Fase 2: Repetir la **Fase 1** con las $O(n(1-1/k^2))$ funciones restantes.

Continuamos el procedimiento anterior hasta llegar a la...

Última Fase: En este momento el conjunto de funciones distancia ha quedado reducido a $O(k^2)$ elementos. El tiempo necesario para encontrar x^* con este conjunto de funciones es $O(k^2 \log k)$.

Teorema: El algoritmo anterior proporciona una solución al problema anti-k-centrum en tiempo $O(\alpha(2(k+1))k^2 \log k\, nm)$.

Referencias

[1] P.K. Agarwal, B. Aronov, T.M. Chan and M. Sharir. *On levels in arrangements of lines, segments, planes and triangles.* Discrete Computational Geometry. num. 19. pp. 315-331. 1998.

[2] G. Andreatta and F.M. Mason. *Properties of the k-centrum in a network.* Networks. num. 15. pp. 21-25. 1985.

[3] M. Blum, R.W. Floyd, V. Pratt, R.L. Rivest and R.E. Tarjan. *Time bounds for selection.* J.

Comp. Systems Science. num. 7. pp. 448-461. 1973.

[4] R.L. Church and R.S. Garfinkel. *Locating an obnoxious facility on a network.* Transportation Science. num. 12. pp. 107-118. 1978.

[5] R. Cole. *Slowing down sorting networks to obtain faster sorting algorithms.* J. ACM. num. 34. pp. 200-208. 1987.

[6] J. Kalcsics, S. Nickel, J. Puerto and A. Tamir. *Algorithmic results for ordered median problems.* Operations Research Letters. Por aparecer.

[7] E. Melachrinoudis and F. GuangSheng Zhang. *An $O(mn)$ algorithm for the 1-maximin problem on a network.* Computers & Operations Research. num. 26. pp. 849-869. 1999.

[8] P.H. Peeters. *Some new algorithms for location problems on networks.* European Journal of Operational Research. num. 104. pp. 299-309. 1998.

[9] P.J. Slater. *Centers to centroids in a graph.* Journal of Graph Theory. num. 2. pp. 59-64. 1978.

[10] A. Tamir. *The k-centrum multi-facility location problem.* Discrete Applied Mathematics. num. 109. pp. 293-307. 2001.