

El problema del puente recto maximin

J. A. Barcia¹

J. M. Díaz-Báñez²

I. Ventura³

Resumen

Sea \mathcal{P} un conjunto de n puntos en el plano, C una curva genérica, y o un punto fijado distinto de los puntos de C y de \mathcal{P} . El problema del *puente recto maximin* trata de encontrar un punto x sobre la curva C tal que $\min_{p \in \mathcal{P}} d(p, \overline{ox})$ sea máxima. Se propone obtener previamente una estructura geométrica, el diagrama de Voronoi anclado, para resolver el problema eficientemente. Dicha estructura puede obtenerse en tiempo $O(n \log n)$, resolviéndose el problema inicial en tiempo lineal.

1. Introducción

Si tuviésemos que determinar la ruta más propicia para evacuar residuos hasta el curso de un río navegable, uno de los criterios principales que estableceríamos sería el de alejarnos lo más posible de las zonas habitadas. Esto supone resolver un problema de optimización geométrica para ubicar una estructura lineal. Los problemas de localización de estructuras lineales han sido ampliamente estudiados en la literatura científica, principalmente usando el criterio minimax, i.e. encontrar la ubicación de un objeto geométrico que minimiza la máxima distancia desde todos los puntos de la entrada al objeto, véase [7, 8, 10, 2]. Una referencia sobre el estado de la materia puede verse en [4].

Sin embargo el problema dual, como es ubicar un objeto que maximiza la mínima distancia desde el recurso a todos los puntos de demanda, sólo ha sido estudiado para la ubicación de puntos ([12, 11]), rectas ([5, 6]) y circunferencias ([3]). Nuestro interés en este artículo es encontrar la ubicación de un segmento con un extremo inicial fijado y el otro sobre una curva genérica dada en el plano. Las aplicaciones se sitúan en la planificación

de tareas urbanísticas, industriales y militares, en ciertos problemas de movimiento de objetos, como el desplazamiento de un robot, o de su brazo en un medio con obstáculos, y en problemas de visibilidad. En el contexto de localización de rutas, la aplicación se concreta en el transporte de residuos peligrosos. De estos problemas se ocupa la Investigación Operativa, especialmente en el campo del Análisis de Localizaciones, y la mayoría de los casos de localización continua han sido resueltos eficientemente desde el punto de vista de la Geometría Computacional.

2. Definición del problema

El problema que abordamos, pretende estudiar la complejidad algorítmica que presenta el determinar la ubicación óptima de un segmento anclado en un punto fijado o , y cuyo extremo se mueve a lo largo de una curva $C(x, y)$, de tal forma que se maximice la mínima distancia a una nube de puntos. (Fig. 1)

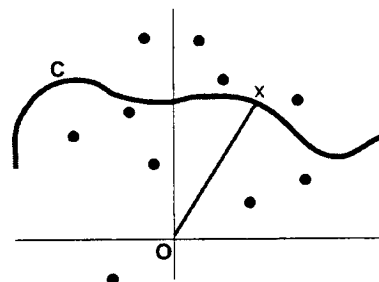


Figura 1: Búsqueda del *puente óptimo* \overline{ox} .

El planteamiento del problema *puente recto maximin* queda como sigue:

OSBP¹ : Sea \mathcal{P} un conjunto de n puntos en el plano, C una curva en \mathbb{R}^2 y o un punto fijado que no pertenece a C ni a \mathcal{P} . Queremos calcular un

¹Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla (jbarcia@us.es)

²Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla (dbanez@us.es)

³Universidad de Sevilla (iventura@us.es)

¹Obnoxious straight bridge problem

punto x sobre C de tal forma que $\min_{p \in \mathcal{P}} d(p, \overline{ox})$ sea máxima.

Si la longitud l del segmento \overline{ox} es constante para todo θ (ángulo polar de \overline{ox}), C es una circunferencia, y el OSBP se reduce al problema del *segmento anclado maximin* estudiado en [1], que se resuelve en tiempo óptimo $\Theta(n \log n)$.

Definición 1 Dado un segmento \overline{ox} , $x \in C$, sea $\varepsilon \geq 0$. Llamamos *hipódromo centrado en \overline{ox} y de radio ε* al lugar geométrico de los puntos equidistantes de \overline{ox} una distancia ε (véase Fig. 2).

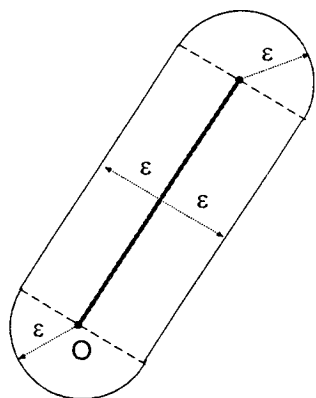


Figura 2: Hipódromo de radio ε .

De esta forma el problema OSBP es equivalente a encontrar el hipódromo vacío (que no contiene puntos de \mathcal{P} en su interior) con radio máximo. Este problema puede ser resuelto en tiempo polinomial pues hay un número polinomial de candidatos para un hipódromo máximo. En [8] se demuestra que a lo más cuatro puntos son necesarios para determinar un hipódromo no anclado. Estos puntos son llamados *puntos críticos*. De forma similar se puede probar que a lo más hay dos puntos críticos cuando el hipódromo está anclado. Basándonos en esto, por una enumeración exhaustiva de todos los posibles casos de ubicación de un hipódromo vacío en una nube de puntos, y la búsqueda del mayor, podemos resolverlo con un algoritmo directo de complejidad $O(n^3)$. En lo que sigue proponemos un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$ para resolver el problema.

Un problema relacionado con el que estamos tratando se estudió en [5]. En este artículo se busca el rayo anclado maximin que atraviesa una nube de puntos, y el procedimiento propuesto se basa en el

estudio de las envolventes inferiores de las funciones distancia de los puntos al rayo. Para nuestro problema, el cálculo de la envolvente inferior depende de la curva C sobre la que se mueve el extremo libre x del puente y, en general, los algoritmos de cálculo no son eficientes. Es por lo que abordaremos nuestro problema buscando una estructura geometría conveniente, un diagrama de Voronoi abstracto (en el sentido de Klein [9]), que llamaremos *diagrama de Voronoi anclado*, a partir del cuál el problema se resuelve eficientemente.

3. La estructura de datos: El diagrama de Voronoi anclado.

3.1. Definiciones

Dado un conjunto \mathcal{P} de n puntos en el plano, denotamos la distancia euclídea entre un punto p y el origen por $\|p\|$. La distancia euclídea entre dos puntos p y q la denotamos por $d(p, q)$. Si p es un punto de \mathbb{R}^2 y S es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^2 , la distancia entre p y S está definida como $d(p, S) = \min\{d(p, q), \forall q \in S\}$. También denotamos por \overline{ox} a un segmento con un punto origen o fijado, que llamaremos *segmento anclado*. Sin pérdida de generalidad, consideraremos \overline{ox} anclado en el origen.

La estructura que vamos a definir depende intrínsecamente de la distancia de un punto a un segmento. Para facilitar el desarrollo posterior damos una interpretación geométrica de dicha distancia. Dado $p \in \mathcal{P}$, la expresión analítica de la función distancia $d(p, \overline{ox})$ depende de la posición del punto x . Sea C_p la circunferencia de diámetro $\|\overline{op}\|$ y que contiene a o y a p . Si x está en la circunferencia, o en su interior, la distancia se toma al punto extremo del segmento $d(p, \overline{ox}) = d(p, x)$. Si x está fuera de la circunferencia C_p y en el semiplano que contiene a p , definido por la perpendicular al segmento \overline{op} , la distancia $d(p, \overline{ox}) = d(p, R_x)$, siendo R_x la recta soporte del segmento \overline{ox} . Y si x se encuentra en el otro semiplano, $d(p, \overline{ox}) = d(p, o)$. (ver Fig. 3)

Definición 2 Dados dos puntos p y q de \mathcal{P} , $p \neq q$, definimos $L(p, q)$ como el lugar geométrico de los puntos x del plano para los que el segmento \overline{ox}

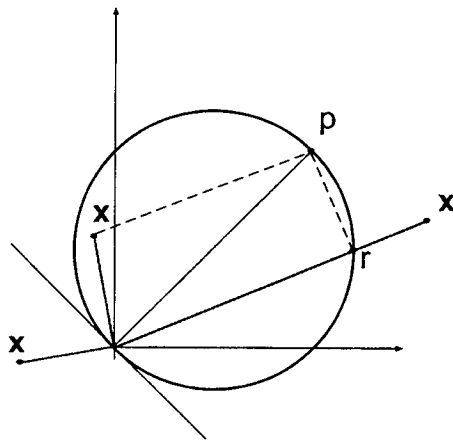


Figura 3: Regla geométrica para medir la distancia

equidista de ambos,

$$L(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, \overline{ox}) = d(q, \overline{ox})\}$$

Las curvas $L(p, q)$ son curvas bisectores, esto es, dividen al plano en dos regiones disjuntas, que denotamos por $D(p, q)$ y $D(q, p)$, siendo

$$D(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, \overline{ox}) < d(q, \overline{ox})\}$$

Por otra parte denotamos $B(p, q)$, como la mediatriz al segmento que une p y q .

$$B(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, x) = d(q, x)\}$$

Definición 3 Dado un conjunto de n puntos \mathcal{P} en el plano y $o \notin \mathcal{P}$, definimos el diagrama de Voronoi anclado en o como la estructura determinada por $V_o(\mathcal{P}) = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \delta VR(p)$ donde $VR(p) = \bigcap_{q \in \mathcal{P}, p \neq q} D(p, q)$.

A $VR(p)$ lo llamamos región de Voronoi anclado del punto p .

Definición 4 (Klein [9]) Un sistema de curvas bisectores $L(p, q) : p, q \in \mathcal{P}, p \neq q$ es admisible si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. La intersección de dos curvas $L(p, q)$ consiste en un número finito de componentes conexas.
2. $VR(p)$ es arcoconexa $\forall p \in \mathcal{P}$.
3. $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} VR(p)$.

3.2. Estudio del sistema de curvas $L(p, q)$

Vamos a estudiar el sistema de curvas $L(p, q)$ definidas anteriormente, para comprobar que es un sistema de curvas admisible.

Lema 1 La intersección de dos curvas $L(p, q)$ consiste en un número finito de componentes conexas.

Demostración: $L(p, q)$ es el lugar de los puntos x del plano en los que la distancia al segmento \overline{ox} es equidistante de ambos p y q . Vamos a hacer un estudio exhaustivo de las curvas bisectores $L(p, q)$. Dado que $d(p, \overline{ox})$ es una función definida en tres partes, calcular la expresión analítica de $L(p, q)$ presenta algunas dificultades. Sin embargo, podemos describirla geoméricamente (tal como hemos hecho en la Fig. 3). Usando esta regla geométrica podemos generar las curvas $L(p, q)$ (una descripción exhaustiva viene dada en [1]). Consideraremos dos casos, dependiendo de que p, q y o estén alineados o no. En el caso en que el segmento \overline{op} y \overline{oq} estén en diferentes líneas, se dan tres posibilidades como se ve en la Figura 4(a):

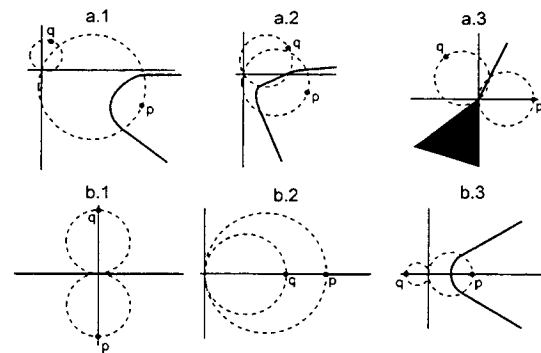


Figura 4: El lugar geométrico $L(p, q)$.

1. Si $\|p\| \neq \|q\|$ y $B(p, q)$ no se corta con $C_p \cap C_q$, $L(p, q)$ es una curva continua que consiste en una semirrecta, un arco de una curva de cuarto grado, y un arco de círculo (que puede existir o no) y finalmente otra semirrecta.
2. Si $\|p\| \neq \|q\|$ y $B(p, q)$ si se corta con $C_p \cap C_q$, entonces $L(p, q)$ es una curva compuesta por una semirrecta, un arco de curva de cuarto grado, un trozo recto (parte de $B(p, q)$), otro arco

de curva de grado cuatro, un arco de círculo (que puedes estar o no) y finalmente de otra semirrecta.

3. Si $\|p\| = \|q\|$, entonces $L(p, q)$ consiste en una semirrecta que contiene a $B(p, q)$ la región entre las semirrectas (perpendicular a \overline{op} y \overline{oq}), partiendo desde el origen o (región mostrada en la Figura 4(a.3)).

El segundo caso, cuando \overline{op} y \overline{oq} están alineados, también hay tres subcasos como se muestran en las Figuras 4(b):

1. $\|p\| = \|q\|$, entonces $L(p, q)$ es $B(p, q)$.
2. $\|p\| \neq \|q\|$ y $p \in \overline{oq}$ (o $q \in \overline{op}$) en este caso $L(p, q)$ es la semirrecta que parte de q (o p).
3. $\|p\| \neq \|q\|$ y $p \notin \overline{oq}$ y $q \notin \overline{op}$ en este caso $L(p, q)$ está compuesta por un trozo que es una semirrecta, un arco de círculo y otra semirrecta.

Nótese que en el caso (a.3), $L(p, q)$ incluye una región del plano, pero los valores de las distancias dada p y q no cambian cuando x está en dicha región. Esta situación corresponde al caso en el que hay un intervalo de ángulos polares del segmento \overline{ox} en el que $d(p, \overline{ox}) = d(q, \overline{ox})$. Puesto que buscamos una solución identificamos $L(p, q)$ con $B(p, q)$, en este caso. Examinado todas las posibles formas de la curva $L(p, q)$, combinaciones de arcos de circunferencias, rectas y arcos de curvas de cuarto grado, concluimos que dos curvas $L(p, q)$ se cortan un número finito de veces. ■

En lo que sigue se van a introducir notaciones y propiedades que serán necesarias para probar que $VR(p)$ es arcoconexa $\forall p \in \mathcal{P}$, (segunda condición de admisibilidad). Hemos definido un hipódromo centrado en el segmento anclado \overline{ox} y radio ε , y lo denotábamos por $\mathcal{H}_{\overline{ox}, \varepsilon}$. Cuando ε es la distancia $d(p, \overline{ox})$ emplearemos la notación abreviada $\mathcal{H}_{\overline{ox}, p}$ (Figura 5).

Propiedad 1 Si $x \in VR(p)$ el hipódromo $\mathcal{H}_{\overline{ox}, p}$ no contiene a ningún otro punto de \mathcal{P} .

Demostración: Si $q \in \text{int}(\mathcal{H}_{\overline{ox}, p})$ entonces $d(q, \overline{ox}) < d(p, \overline{ox})$ por lo que $q \notin VR(p)$, en contra de la hipótesis (Fig. 6). ■

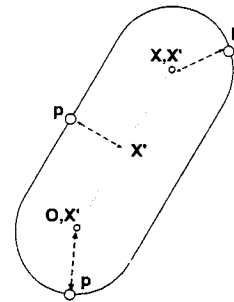


Figura 5: Hipódromo $\mathcal{H}_{\overline{ox}, p}$

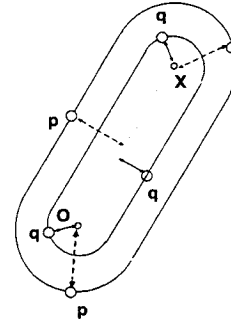


Figura 6: $x \in VR(p) \Rightarrow q \notin \text{int}(\mathcal{H}_{\overline{ox}, p})$

Se propone un camino para probar la arcoconexión de la región $VR(p)$.

Propiedad 2 Dados dos puntos $x, y \in VR(p)$, sean x', y' puntos tales que $d(p, \overline{ox}) = d(p, x')$ y $d(p, \overline{oy}) = d(p, y')$. Entonces el camino poligonal de vértices $\{x, x', y', y\}$ está totalmente incluida en $VR(p)$. (Fig. 9).

Demostración: Probaremos que cada segmento del camino propuesto está contenido en $VR(p)$:

- $\overline{xx'} \subset VR(p)$.

Sea z un punto del segmento $\overline{xx'}$. Si $z \in VR(q)$, el radio del hipódromo $\mathcal{H}_{\overline{ox}, q}$ es menor que el del $\mathcal{H}_{\overline{ox}, p}$ (fig. 10), y por tanto $q \in \text{int}(\mathcal{H}_{\overline{ox}, p})$, en contra de la Propiedad 1. Similarmente para $\overline{yy'}$.

- $\overline{x'y'} \subset VR(p)$.

Sea $z \in \overline{x'y'}$, veamos que $d(p, \overline{oz}) < d(q, \overline{oz})$. Haciendo uso de la regla geométrica para medir distancias (Fig. 3), se deduce fácilmente que $d(p, \overline{oz}) = d(p, z)$. (Ver Fig. 7, 8)

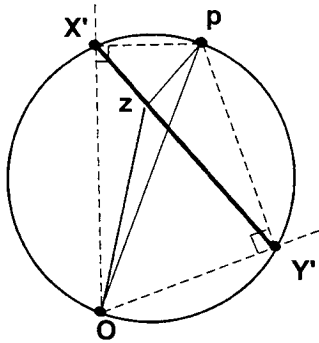


Figura 7: $x', y' \in C_p$.

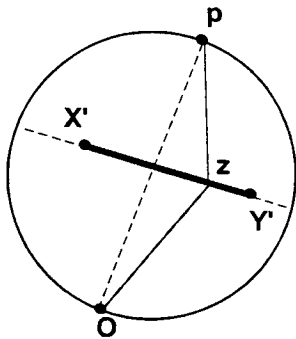


Figura 8: $x', y' \in \text{int}(C_p)$.

Sin embargo, la distancia de q a \overline{oz} puede ser al extremo, al origen o a la recta soporte de \overline{oz} . Consideramos la partición del intervalo $\overline{x'y'}$ generada por los cambios de la función distancia de q al segmento \overline{oz} (Fig. 11).

Demostraremos esta propiedad para los tres tipos de subintervalos $l_{i-1}l_i$ que aparecen:

Caso 1.- Supongamos $d(q, \overline{oz}) = d(q, z) \forall z \in l_{i-1}l_i \subset \overline{x'y'}$. La mediatriz del segmento \overline{pq} divide al plano en dos semiplanos, los denotamos $H(p, q)$ (el que contiene a p), y $H(p, q)$ (el que contiene a q) (véase Fig 12). Como $\overline{x'y'} \subset VR(p)$, $x', y' \in H(p, q)$. Por tanto $\overline{x'y'} \subset D(p, q)$ y $l_{i-1}l_i \subset \overline{x'y'} \subset H(p, q)$, esto es $z \in D(p, q)$. Los puntos de $D(p, q)$ son los que están más cercanos a p que a q , esto es $d(p, z) < d(q, z)$, y por tanto $d(p, \overline{oz}) < d(q, \overline{oz})$ y $z \in VR(p)$.

Caso 2.- Sea $d(q, \overline{oz}) = d(q, o) \forall z \in l_{j-1}l_j \subset \overline{x'y'}$. La distancia $d(p, \overline{oz}) \leq$

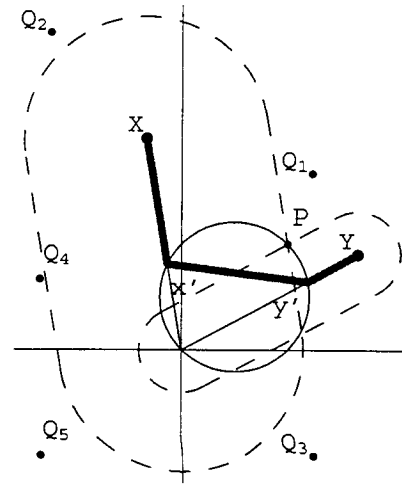


Figura 9: Camino poligonal propuesto.

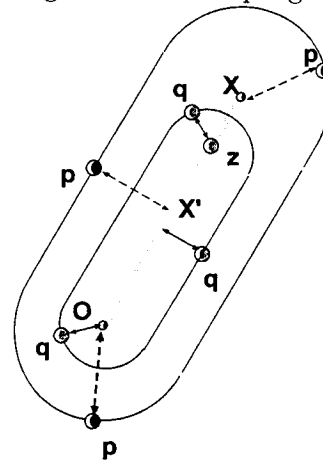


Figura 10: $\overline{xx'} \subset VR(p)$.

$\max \{d(p, \overline{ox'}), d(p, \overline{oy'})\}$ porque la distancia desde un vértice de un triángulo a un punto del lado opuesto, es menor que la longitud del mayor de los lados adyacentes. Veamos, por otro lado, que $d(p, \overline{ox'}) < d(q, o)$ (análogamente $d(p, \overline{oy'}) < d(q, o)$). Supongamos $d(p, \overline{ox'}) \geq d(q, o)$. En ese caso $q \in \text{int}(\mathcal{H}_{\overline{ox'}, p})$ lo que contradice la propiedad 1. Por tanto $d(p, \overline{oz}) < d(q, \overline{oz})$ y $z \in VR(p)$.

Caso 3.- Sea $d(q, \overline{oz}) = d(q, R_z) \forall z \in l_{k-1}, l_k \subset \overline{x'y'}$. Los puntos l_{k-1} y $l_k \in VR(p)$ porque en ellos la distancia desde q se toma al extremo o al origen, y para esos casos la proposición está demostrada. Al mover z desde l_{k-1} a l_k el segmento \overline{oz} puede estar acercándose o

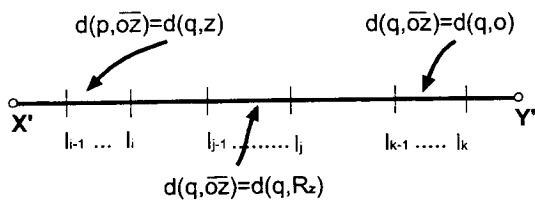


Figura 11: Partición del segmento $\overline{x'y'}$.

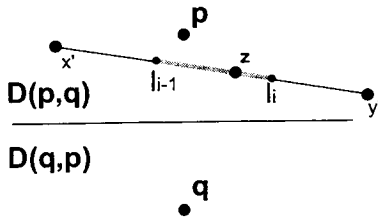


Figura 12: Prueba del Caso 1.

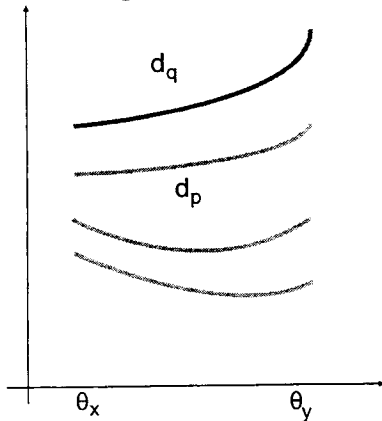


Figura 13: Gráficas de d_p, d_q .

alejándose con respecto a q . Como consecuencia, $d(q, \overline{oz})$ es creciente o decreciente. Además, $d(p, \overline{oz}) = d(p, z)$ es convexa.

Por otra parte, $l_{k-1}, l_k \in VR(p)$, la distancia $d(p, l_{k-1}) < d(q, l_{k-1})$ y $d(p, l_k) < d(q, l_k)$ y por tanto las curvas distancia $d(p, \overline{oz})$ y $d(q, \overline{oz})$ no se cortan para $z \in \overline{l_{k-1}, l_k}$, (véase Fig. 13). Finalmente, $d(p, z) < d(q, R_z) = d(q, \overline{oz})$ y $z \in VR(p)$.

La propiedad anterior prueba el siguiente resultado.

Lema 2 $VR(p)$ es arcoconexa $\forall p \in \mathcal{P}$.

Lema 3 $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} VR(p)$

Demostración: Por definición del diagrama de Voronoi anclado $V_0(\mathcal{P})$, todo punto x está asociado a un punto p . ■

Haciendo uso del algoritmo de Klein [9], y los lemas anteriores, tenemos demostrado el resultado de complejidad siguiente:

Teorema 1 El diagrama de Voronoi anclado $V_0(\mathcal{P})$, inducido en el plano por un segmento que tiene su origen en un punto fijo o , se calcula en tiempo $O(n \log n)$ y en espacio $O(n)$.

4. Solución al problema

Lema 4 Existe un punto x^* intersección de la curva C con $V_0(\mathcal{P})$ que determina una solución $\overline{ox^*}$ del problema OSBP.

Demostración: Sea S^* la solución al problema OSBP. Supongamos $S^* = \overline{ox^*}$, $x^* \in C$, $x^* \notin V_0(\mathcal{P})$. En ese caso existe un punto $p \in \mathcal{P}$ de forma que $x^* \in VR(p)$. Supongamos $d(p, \overline{ox^*}) = d(p, R_{x^*})$ (para los demás casos la prueba es similar). En ese caso, siempre es posible rotar el segmento $\overline{ox^*}$ en una dirección de forma que la función $d(p, \overline{ox^*})$ aumente y por tanto $\overline{ox^*}$ no sería óptima. Por tanto, x no puede encontrarse en el interior de una región. Para el caso en el que exista un intervalo de soluciones, siempre es posible encontrar una $\overline{ox^*}$, con $x^* \in V_0(\mathcal{P})$. (Véase Fig. 14) ■

Como consecuencia directa del lema anterior, y tomando un modelo de computación que obtiene las intersecciones de la curva dada C con las curvas bisectores $L(p, q)$ en tiempo constante, obtenemos el siguiente resultado,

Teorema 2 El OSBP se resuelve en $O(n)$ con un preprocesado en $O(n \log n)$

Referencias

[1] Barcia, J.A., Díaz-Báñez, J.M., Lozano, A. and Ventura, I., Computing an obnoxious anchored segment, *5th International Conference on Operations Research*, Havana, March 4-8, 2002.

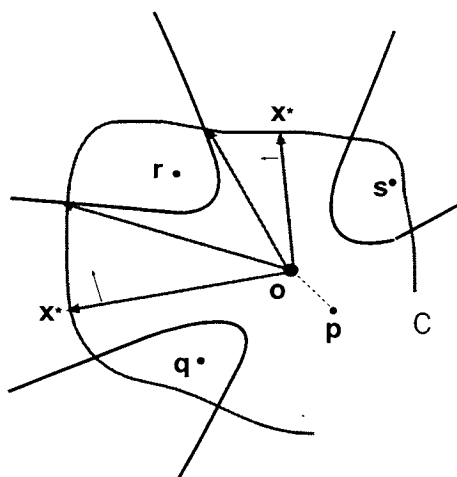


Figura 14: Existe un punto óptimo x^* sobre $V_o(P)$.

- [2] Díaz-Báñez, J.M., Gómez F. and Hurtado, F., Approximation of Point Sets by 1-Corner Polygonal Chains. *INFORMS Journal on Computing*, vol. 12, pp. 317-323, 2000.
- [3] Díaz-Báñez J.M., F. Hurtado, H. Meijer, D. Rappaport and T. Sellarès, The largest empty annulus problem. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2331, pp. 46-54, 2002.
- [4] Díaz-Báñez J.M., J.A. Mesa, and A. Shöbel, Continuous location of dimensional structures, *To appear in European Journal of Operational Research*.
- [5] Follert, F., Schömer, E., Sellen, J., Smid, M. Thiel, C. Computing a largest empty anchored cylinder and related problems. *International Journal Computational Geometry and Application*, vol. 7, pp. 566-580, 1997.
- [6] Houle, M.E., Maciel, A. Finding the widest empty corridor through a set of points. In *Snapshots of Computational and Discrete Geometry*, Godfried Toussaint, ed., Technical Report SOCS-88.11, School of Computer Science, McGill University, 1988.
- [7] Houle, M.E. and Toussaint, G.T., Computing the width of a set. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 10, pp. 760-765, 1988.
- [8] Imai, H., Lee, D. T. and Yang, Ch., 1-Segment Center Problem. *ORSA Journal on Computing*, vol. 4, pp. 426-434, 1992.
- [9] Klein, Rolf, Concrete and Abstract Voronoi Diagrams, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 400, 1987.
- [10] Lee, D.T. and Wu, Y.F., Geometric Complexity of Some Location Problems. *Algorithmica*, vol. 1, pp. 193-211, 1986.
- [11] Melachirnoudis, E. and MacGregor, S., An $O(mn^2)$ algorithm for the Maximin problem in E^2 . *Operations Research Letters*, vol. 18, pp. 25-30, 1995.
- [12] Toussaint G. T., Computing Largest Empty Circles with Location Constraints. *International Journal of Computer and Information Sciences*, vol. 12, pp. 347-358, 1983.