Puntos en posición general para una λ-distancia.[1]

J. Cáceres[2] C. I. Grima, A. Márquez[3] y A. Moreno-González[4]

Resumen

Dada una nube de puntos en el plano, estudiamos aquellos grafos geométricos que tienen dilación 1 para una λ-distancia. Para ello, en este trabajo, vemos que para cualquier λ-distancia, existe un número $n(\lambda)$ tal que cualquier nube de puntos con más de $n(\lambda)$ puntos no está en posición general.

1. Introduccción.

Hay muchas aplicaciones en las que es útil encontrar grafos geométricos con pocas aristas tales que la distancia entre dos puntos medida sobre el grafo sea una buena aproximación de la distancia entre esos puntos en el plano. Este problema surge principalmente en el diseño de circuitos VLSI. Dada una nube de puntos S en el plano, la *dilación* de un subgrafo del grafo geométrico completo es la mayor razón entre la longitud del camino más corto entre un par de vértices de S y la longitud de esos puntos en el plano. Dado que la métrica que refleja la distancia entre las componentes de un circuito es la l_1, en trabajos anteriores [1] presentamos algunos métodos que nos permitían construir grafos con dilación muy próxima a 1 en la métrica l_1. Sin embargo, sería más interesante encontrar grafos con pocas aristas que nos dieran con exactitud la distancia entre cada par de componentes, es decir, grafos que tengan dilación 1 o grafos sin dilación. Llamamos *grafo métricamente completo* de una nube de puntos S, (denotado M(S)), al grafo de tamaño mínimo de S sin dilación. En la métrica euclídea, excepto si los puntos no están en posición general, este grafo es el grafo geométrico completo, pero hemos probado que en la métrica l_1 el grafo métricamente completo es estrictamente menor que el grafo geométrico completo; de hecho si $K(S)$ denota al grafo geométrico completo de la nube de puntos S, se tiene que $|K(S) - M(S)| \in \Omega(n^{3/2})$.

Una línea de trabajo que surge a partir de esta cuestión es la de encontrar el grafo sin dilación de tamaño mínimo para otro tipo de métricas, las λ-distancias, muy utilizadas en problemas de localización, entre otros. Así, en este trabajo, nos planteamos el estudio de las nubes de puntos que están en posición general para una λ-distancia. Entendemos que una nube de puntos está en posición general si no existen tres puntos alineados para esa métrica.

Dada una λ-distancia, una bola con centro un punto x y radio r es un polígono regular de λ lados centrado en x y tal que la distancia de x a cada uno de los vértices es r.

Observemos que para cada valor de λ existen infinitas λ-distancias, puesto que tenemos infinitas posibilidades de centrar un polígono de λ lados alrededor de un punto. Así, una λ-distancia no sólo está definida por el número de lados que tienen sus entornos, sino también por la orientación de los mismos.

Ahora bien, basta resolver la cuestión propuesta para cualquiera de las posibles orientaciones, puesto que para pasar de una a otra basta girar la nube de puntos un cierto ángulo.

2. Puntos en posición general para una λ-distancia.

Es fácil comprobar que una de las posibles 4-distancias es la métrica l_1, para la que sabemos que toda nube de puntos S tal que $|S| \geq 5$ no est en posición general. Veamos entonces que para cualquier λ-distancia también podemos encontrar

[1] Trabajo parcialmente subvencionado por los proyectos MCyT BFM2001-2474 y PAI FQM-164.

[2] Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad de Almería. E-mail: jcaceres@ual.es

[3] Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: {grima,almar}@us.es

[4] Departamento de Matemáticas. Universidad de Huelva. E-mail: maria.moreno@dmat.uhu.es

un número $n(\lambda)$ tal que cualquier nube de puntos con más de $n(\lambda)$ puntos no está en posición general.

Sea pues $S = u_1, u_2, \ldots, u_n$ una nube de puntos en el plano y veamos cuando nos ahorramos la arista que une dos cualesquiera de los puntos de la nube en una λ-distancia. Para ello, dibujamos para cada punto u_i uno de sus entornos, E_i. Cada E_i produce una partición del plano en λ sectores centrados en u_i. Si denotamos Sij al sector centrado en u_i que contiene a u_j, cualquier otro punto de la nube en la región $Sij \bigcap Sji$ está alineado con u_i y u_j.

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 1 *Dada una λ-distancia, no podemos encontrar más de λ puntos en posición convexa en posición general.*

Demostración: Sea S una nube de puntos en posición convexa y consideremos el polígono regular de λ lados que define una λ-distancia.

Ahora, hacemos un barrido en las λ direcciones perpendiculares a las direcciones de las bisectrices de los ángulos del polígono hasta encontrar un punto de la nube. Los λ puntos encontrados están en posición general y cualquier otro punto de la nube está siempre en una de las regiones $Sij \bigcap Sji$ definidas por dos de estos puntos. ■

En 1935 Erdös y Szekeres [2] probaron que para cada n existe un número entero $g(n)$ tal que si tenemos $g(n)$ puntos en el plano en posición general, n están en posición convexa. Así, para cada valor de λ, si tenemos $g(\lambda + 1)$ puntos en el plano, sabemos que hay $\lambda + 1$ puntos en posición convexa, con lo que no están en posición general para la λ-distancia. Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2 *Para todo valor de λ existe $n(\lambda)$ tal que toda nube de puntos S con más de $n(\lambda)$ puntos no está en posición general.*

3. Cotas para $n(\lambda)$.

Cabe señalar que existen cotas para el valor de $g(n)$. De hecho en su artículo, Erdös y Szekeres [2] probaron que $2^{n-2}+1 \leq g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$. Otros autores han ido reduciendo la cota superior ligeramente, siendo actualmente $g(n) \leq \binom{2n-5}{n-2}+2$, ([3]).

Ahora bien, esta cota no parece ajustada pues para $\lambda = 4$ obtenemos que $n(4) \leq 12$ y sabemos que toda nube de puntos S tal que $|S| \geq 5$ no está en posición general para la métrica l_1. De hecho, para valores pequeños de λ, $n(\lambda)$ se alcanza cuando los puntos están en posición convexa. Por lo tanto, para dichos valores de λ, $n(\lambda) = \lambda + 1$.

Para intentar ajustar esta cota nos basamos en el siguiente resultado.

Lema 3 *Sea S una nube de puntos en el plano y u un punto de esa nube. Si dividimos el plano en λ sectores centrados en u y consideramos dos puntos v y w en sectores opuestos, entonces u, v y w no están en posición general para la λ-distancia.*

Este resultado, junto con el estudio de las posibles distribuciones de los puntos de la nube en capas convexas nos llevará a la reducción de la cota superior de $n(\lambda)$.

Referencias

[1] J. Cáceres, C. I. Grima, A. Márquez y A. Moreno-González. *Spanners en l_1*. II Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica. Palma de Mallorca. 2000.

[2] P. Erdös y G. Szekeres. *A combinatorial problem in geometry.* Compositio Math. vol.2 pp.463-470. 1935.

[3] G. Toth y P. Valtr. *Note on the Erdös-Szekeres theorem.* Rutger University. Technical Report DIMACS TR:97-31. 1997.