

# Reconstrucción de conjuntos convexos en grafos.<sup>1</sup>

J. Cáceres<sup>2</sup>A. Márquez<sup>3</sup>M.L. Puertas<sup>2</sup>

## Resumen

La convexidad clásica del plano puede trasladarse de forma natural al conjunto de vértices de un grafo, a través de la convexidad abstracta asociada a la distancia usual. Asimismo pueden estudiarse conceptos tales como la envolvente convexa o los puntos extremos de un conjunto convexo.

En este trabajo, para un grafo finito, estudiamos un subconjunto de sus vértices, que llamamos el contorno del grafo, que nos permite reconstruirlo utilizando el operador envolvente convexa. Asimismo daremos una descripción de las condiciones que debe cumplir un grafo para ser contorno de otro, y caracterizaremos los vértices del contorno dentro de la familia de grafos cordales.

## 1 Introducción

Se dice que un subconjunto  $S$  de vértices de un grafo conexo es *convexo* si contiene a todos los vértices intermedios de todos los caminos mínimos entre vértices de  $S$ . Esta definición traslada de forma natural el concepto de conjunto convexo al ambiente de grafos lo que nos permitirá tratar muchos de los problemas relacionados con la convexidad euclídea desde una perspectiva discreta y finita.

Además se cumplen ciertas condiciones mínimas exigibles en una convexidad abstracta (ver [4]) como son que el conjunto vacío y el total son convexos y que la intersección de conjuntos convexos también lo es. Gracias a esto último, tiene sentido hablar de la *envolvente convexa* de  $S$ , que denotaremos por  $CH(S)$ , simplemente como el menor convexo que contiene a  $S$ . También es posible dar una definición de *punto extremo* de un convexo  $S$  como

aquel vértice  $p$  que verifica que  $S \setminus p$  es convexo. De esto último se desprende fácilmente que todo punto extremo  $p$  debe ser *simplicial en  $S$*  es decir, el subgrafo inducido por  $p$  y sus vértices adyacentes pertenecientes a  $S$  es completo (para la notación relacionada con grafos, se puede consultar [2]).

En general siempre se tiene que la envolvente convexa de los puntos extremos de un conjunto  $S$  está contenido en  $S$  y sólo en algunos casos se verifica la igualdad; cuando esto ocurre decimos que se cumple la *propiedad de Minkowski-Krein-Milman*. Desgraciadamente, esta propiedad no es cierta para grafos en general como puede verse fácilmente en la Figura 1 sin más que considerar  $S$  como el conjunto de todos los vértices del grafo. En ese caso, sus puntos extremos son los vértices  $\{a, d\}$  cuya envolvente convexa es  $\{a, v, d\}$ . Precisamente el grafo de la Figura 1, que se denomina *3-fan*, juega un papel destacado ya que en [3], se demuestra que los únicos grafos donde se cumple la propiedad de Minkowski-Krein-Milman son los que no tienen ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro, es decir, los *grafos cordales*, que además tampoco contienen ningún 3-fan como subgrafo inducido.

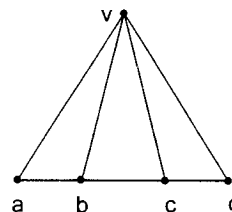


Figura 1: Un 3-fan.

<sup>1</sup>trabajo parcialmente subvencionado por los proyectos FQM 164, FQM 305 y BFM 2001-2474.

<sup>2</sup>Departamento de Estadística y Matemática Aplicada. Universidad de Almería. E-mail: {jcaceres, mpuestas}@ual.es

<sup>3</sup>Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: almar@us.es

La idea fundamental que anima este trabajo proviene de la siguiente interpretación de la propiedad de Minkowski-Krein-Milman: supongamos que tenemos un convexo contenido en un grafo donde dicha propiedad es cierta. En ese caso la única información que debemos guardar del convexo es la

de sus puntos extremos ya que, a partir de éstos, es posible "reconstruir" el conjunto sin más que calcular todos los caminos mínimos posibles entre los vértices que se van obteniendo. Ya que esto sólo se puede hacer en una cierta subfamilia de grafos como se ha señalado anteriormente, nos preguntamos si es posible completar el conjunto de puntos extremos de un convexo de manera que la envolvente convexa de nuestro conjunto coincida con el convexo de partida en cualquier grafo. La respuesta va a ser afirmativa.

Para describir ese conjunto vamos a recordar en primer lugar que la *excentricidad* en  $S$  de un vértice  $u \in S$  es  $ecc_S(u) = \max\{d(u, v) : v \in S\}$ , si  $S$  es el conjunto de todos los vértices de  $G$ , denotaremos la excentricidad de  $u \in S$  como  $ecc(u)$ . Dado un grafo  $G$  y un subconjunto de sus vértices  $S$ , diremos que un vértice  $u$  es un *punto del contorno* de  $S$  si  $ecc_S(u) \geq ecc_S(v)$  para todo vecino  $v$  de  $u$  en  $S$ . El subgrafo  $Ct(S)$  de  $G$  inducido por todos los puntos del contorno de  $S$  será el *contorno* de  $S$ . Si  $S$  está formado por todos los vértices de un grafo  $G$  hablaremos del contorno de  $G$  ó  $Ct(G)$ . En el ejemplo de la Figura 1, el contorno de  $G$  está formado por  $\{a, b, c, d\}$ .

La estructura de este trabajo será la siguiente: en la Sección 2 comprobaremos que los puntos del contorno son precisamente los que nos permitirán reconstruir  $S$  a partir del operador envolvente convexa. En la Sección 3, estudiaremos una caracterización alternativa del contorno de un grafo cordal que tiene una naturaleza local e involucra a su grafo de cliques y, finalmente, en la Sección 4 nos plantearemos cuando un grafo puede ser el contorno de otro caracterizándolos completamente.

## 2 Contorno de un grafo

Vamos a comprobar en esta Sección que los puntos del contorno de un conjunto  $S$  de vértices de  $G$  son precisamente aquellos que necesitamos para reconstruir  $S$  calculando su envolvente convexa. En primer lugar demostraremos que  $Ct(S)$  es realmente una ampliación del conjunto de puntos extremos.

**Lema 1** *Dado un grafo  $G$  y un subconjunto de sus vértices  $S$ , siempre se tiene que  $Ct(S)$  contiene a todos los puntos extremos de  $S$ .*

*Demostración:* En las condiciones anteriores, sea  $u \in S$  un punto extremo y por tanto simplicial en  $S$ , y sea  $v$  un vecino suyo en  $S$ . Supongamos que  $w \in S$  es un vértice tal que  $d_S(v, w) = ecc_S(v)$ . Consideremos  $v'$  el vértice adyacente a  $u$  en uno de los caminos mínimos entre  $u$  y  $w$ . Como  $u$  es simplicial en  $S$ , tenemos que  $v$  y  $v'$  deben ser vecinos así que  $ecc_S(v) = d_S(v, w) \leq d_S(v', w) + 1 = d_S(u, w) \leq ecc_S(u)$ . ■

El siguiente resultado demostrará que el contorno de un convexo  $S$  permite reconstruirlo utilizando el operador envolvente convexa, sin hacer ninguna restricción sobre el grafo en el que está contenido. Así, este resultado es del mismo tipo que la propiedad de Minkowski-Krein-Milman pero para grafos en general.

**Teorema 2** *Sea  $G$  un grafo y  $S$  un subconjunto de vértices convexo. Entonces  $S$  es la envolvente convexa de  $Ct(S)$ .*

*Demostración:* Supongamos que no fuera así y que  $S \setminus CH(Ct(S)) \neq \emptyset$ . Escogemos  $u \in S \setminus CH(Ct(S))$  con la máxima excentricidad. Como  $u \notin Ct(S)$ , existe un vecino  $v$  de  $u$  en  $S$  con  $ecc_S(v) > ecc_S(u)$  y así  $v \in CH(Ct(S))$ . Si  $w \in S$  es un vértice tal que  $d_S(v, w) = ecc_S(v)$ , entonces  $ecc_S(w) \geq ecc_S(v) > ecc_S(u)$  y  $w \in CH(Ct(S))$ . Con todo esto tenemos que  $d_S(u, w) \leq ecc_S(u) < ecc_S(v) = d_S(v, w)$  y por lo tanto  $d_S(u, w) + 1 \leq d_S(v, w)$ . Si  $P$  es un camino mínimo en  $S$  entre  $u$  y  $w$  y le añadimos la arista desde  $u$  hasta  $v$ , obtenemos otro camino  $P'$  cuya longitud es  $d_S(u, w) + 1 \leq d_S(v, w)$ . Por tanto es un camino mínimo entre  $v$  y  $w$  que contiene a  $u$ , que es una contradicción con el hecho de que  $u \notin CH(Ct(S))$ . ■

El conjunto de puntos extremos es mínimo para la propiedad de Minkowski-Krein-Milman en el sentido de que ningún punto extremo está en la envolvente convexa de un conjunto que no lo contenga. Los puntos del contorno no cumplen esta condición en general, como se puede comprobar en el ejemplo de la Figura 1. En este ejemplo los puntos del contorno son  $\{a, b, c, d\}$  donde  $CH(\{a, b, d\}) = CH(\{a, b, c, d\})$ . Sin embargo, sí es posible encontrar ejemplos donde el contorno es mínimo en el mismo sentido que los puntos extremos lo son.

Si en el grafo de la Figura 2 consideremos  $S = V(G)$  de manera que  $\text{Ct}(S) = \{a, b, c, d\}$  y la envolvente convexa de cualquier subconjunto propio de  $\text{Ct}(S)$  está estrictamente contenida en  $S$  así que, en este caso, el contorno de  $S$  es minimal.

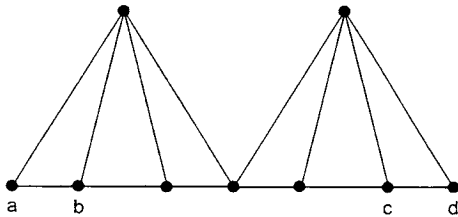


Figura 2: Un grafo cuyo contorno es minimal.

### 3 Contorno en grafos cordales

Dado que la excentricidad de un vértice es un concepto global, no es esperable que exista una caracterización local de punto de contorno en un grafo en general, lo cual sería bastante deseable desde el punto de vista computacional. En esta Sección presentaremos un resultado que determina la situación de los puntos del contorno en un grafo cordal respecto de la estructura de cliques del mismo.

Recordemos que un grafo cordal es el que no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro, o equivalentemente, aquél que se puede descomponer en cliques de manera que la intersección de dos de éstos o es vacía, o es un subgrafo completo.

Asociado a un grafo cordal  $G$  se puede obtener su *grafo de cliques* esto es, el grafo de intersecciones de los cliques de  $G$ , que denotaremos  $K(G)$ . Llamaremos *excentricidad de un clique* de  $G$  a su excentricidad como vértice en  $K(G)$ . Gran parte de lo que viene a continuación se basa en definiciones y resultados que pueden encontrarse en [1] como por ejemplo, la demostración del siguiente resultado.

**Lema 3** [1] *Sea  $xu_1u_2 \dots u_ky$  un camino mínimo entre  $x$  e  $y$ , entonces cada  $u_i$  está en al menos dos cliques distintos.*

En lo que sigue y hasta el final de esta sección,  $x$  e  $y$  son dos vértices de  $G$  con  $d(x, y) = k + 1$ ,  $k \geq 1$ . Dados  $C_x$  clique que contiene a  $x$ ,  $C_y$  clique

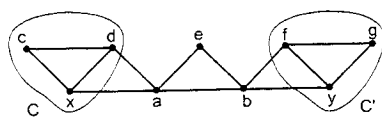
que contiene a  $y$  y  $xu_1u_2 \dots u_ky$  camino mínimo entre  $x$  e  $y$ , se puede construir un camino, no necesariamente mínimo, entre  $C_x$  y  $C_y$  de la siguiente forma:

- a) si  $u_1 \notin C_x$  y  $u_k \notin C_y$  entonces como  $xu_1$  es una arista de  $G$ , existe un clique  $C_1$  tal que  $x, u_1 \in C_1$ . Por el Lema 3, existe al menos un clique  $C \neq C_1$  con  $u_1 \in C$ . Además tenemos que  $u_2 \notin C_1$ , ya que en caso contrario  $xu_2 \dots u_ky$  sería un camino entre  $x$  e  $y$  de longitud menor que  $d(x, y)$ . Por lo tanto podemos elegir un clique  $C_2$  tal que  $u_1, u_2 \in C_2$ . Análogamente existen cliques  $C_i$ , con  $i \in \{2, \dots, k\}$ , tales que  $u_i \in C_{i-1} \cap C_i$  y finalmente existe un clique  $C_{k+1}$  tal que  $u_k, y \in C_{k+1}$ .

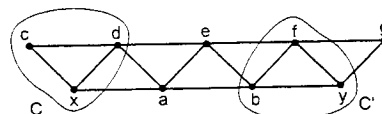
Nótese que todos los cliques obtenidos son distintos, ya que si  $C_i = C_j$ , con  $i < j$ , entonces  $u_i$  y  $u_{j+1}$  son vecinos y obtendríamos  $xu_1 \dots u_i u_{j+1} \dots u_ky$  camino entre  $x$  e  $y$  de longitud menor que  $d(x, y)$ . Análogamente  $C_x \neq C_i$ ,  $C_i \neq C_y$ .

Así pues hemos obtenido un camino  $C_x C_1 C_2 \dots C_k C_{k+1} C_y$ , que diremos que está *asociado* al camino mínimo  $xu_1u_2 \dots u_ky$ . Como  $x \in C_x \cap C_1$  e  $y \in C_{k+1} \cap C_y$ , diremos que es un camino de cliques tipo A (ver Figura 3(a)).

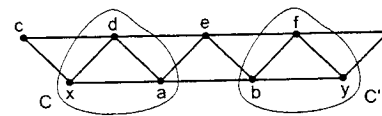
- b) b.1) Si  $u_1 \in C_x$  y  $u_k \notin C_y$ , elegimos  $C_i$  tal que  $u_i, u_{i+1} \in C_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , y  $C_k$  tal que  $u_k, y \in C_k$ . Así obtenemos un camino  $C_x C_1 C_2 \dots C_k C_y$  asociado a  $xu_1u_2 \dots u_ky$ . Como  $x \in C_x \setminus C_1$  e  $y \in C_k \cap C_y$ , diremos que es tipo  $\mathbb{B}_1$  (ver Figura 3(b)).
- b.2) Si  $u_1 \notin C_x$  y  $u_k \in C_y$ , elegimos  $C_1$  tal que  $x, u_1 \in C_1$ , y  $C_i$  de tal forma que  $u_{i-1}, u_i \in C_i$  con  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Así obtenemos un camino  $C_x C_1 C_2 \dots C_k C_y$  asociado a  $xu_1u_2 \dots u_ky$ . Como se tiene que  $x \in C_x \cap C_1$  e  $y \in C_y \setminus C_k$ , diremos que es tipo  $\mathbb{B}_2$ .
- c) Si  $u_1 \in C_x$  y  $u_k \in C_y$ , elegimos  $C_i$  tal que  $u_i, u_{i+1} \in C_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Así obtenemos un camino  $C_x C_1 C_2 \dots C_{k-1} C_y$  asociado a  $xu_1u_2 \dots u_ky$ . Como  $x \in C_x \setminus C_1$  e  $y \in C_y \setminus C_k$ , diremos que es tipo C (ver Figura 3(c)).



(a) Camino cliques tipo A



(b) Camino cliques tipo B<sub>1</sub>



(c) Camino cliques tipo C

Figura 3: Caminos de cliques.

Con esta clasificación podemos dar la relación existente entre los caminos mínimos de dos vértices de un grafo cordal  $G$  y los caminos mínimos de sus correspondientes cliques en  $K(G)$ . (ver [1] para la demostración)

**Lema 4** [1] Sean  $C_x$  clique que contiene a  $x$  y  $C_y$  clique que contiene a  $y$ .

- a) Si  $C_x C_1 C_2 \dots C_s C_y$  es un camino mínimo entre  $C_x$  y  $C_y$  de tipo A, entonces se tiene que  $s = k + 1$  y para cada elección  $u_i \in C_i \cap C_{i+1}$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , se obtiene un camino mínimo  $xu_1u_2 \dots u_ky$  entre  $x$  y  $y$ , asociado a  $C_x C_1 C_2 \dots C_s C_y$ .
- b) Sea  $C_x C_1 C_2 \dots C_s C_y$  un camino mínimo entre  $C_x$  y  $C_y$  de tipo B<sub>1</sub>, entonces para cada elección  $u_1 \in C_x \cap C_1$ ,  $u_i \in C_{i-1} \cap C_i$ , con  $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ , se obtiene un camino  $xu_1u_2 \dots u_ky$  entre  $x$  y  $y$  que es mínimo si y sólo si no existe ningún camino mínimo entre  $C_x$  y  $C_y$  de tipo A. Además, en caso de que se verifiquen las condiciones anteriores,  $s = k$ .

Si  $C_x C_1 C_2 \dots C_s C_y$  es de tipo B<sub>2</sub>, entonces para cada elección  $u_i \in C_i \cap C_{i+1}$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $u_k \in C_k \cap C_y$ , se obtiene un camino  $xu_1u_2 \dots u_ky$  entre  $x$  y  $y$  que es mínimo en las mismas condiciones anteriores.

- c) Sea  $C_x C_1 C_2 \dots C_s C_y$  un camino mínimo entre  $C_x$  y  $C_y$  de tipo C, entonces para cada elección  $u_1 \in C_x \cap C_1$ ,  $u_i \in C_{i-1} \cap C_i$ , con  $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$ ,  $u_k \in C_{k-1} \cap C_y$ , se obtiene un camino  $xu_1u_2 \dots u_ky$  entre  $x$  y  $y$  que es mínimo si y sólo si no existe ningún camino mínimo entre  $C_x$  y  $C_y$  de los tipos A y B, ni ningún camino entre  $C_x$  y  $C_y$  de tipo A y con longitud  $d(C_x, C_y) + 1$ . Además, en caso de que se verifiquen las condiciones anteriores,  $s = k - 1$ .

Por último, y antes de obtener la caracterización que hemos anunciado, necesitamos un lema técnico relativo a grafos cordales.

**Lema 5** Sea  $G$  un grafo cordal,  $C$  uno de sus cliques y  $x_1, x_2, \dots, x_p$  todos los vértices de  $C$ . No puede existir un vértice  $z \in G \setminus C$  que verifique  $d(x_i, z) = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ , cualquiera que sea el natural  $n$ .

*Demostración:* Para la demostración, procedemos por inducción sobre  $n$ . En primer lugar, si existe  $z \in G$  tal que  $d(x_i, z) = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ , es claro que  $z \in C$ .

Para el siguiente paso de la inducción, suponemos, por el contrario, que existe  $z \in G \setminus C$  tal que  $d(x_i, z) = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . Veamos que entonces podemos encontrar un vértice  $w \in G \setminus C$  tal que  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . Para esto procedemos por inducción sobre  $k = 2, \dots, p$ .

Para  $k = 2$ , tomamos los vértices  $x_1, x_2$ , y una pareja de caminos mínimos  $P_1, P_2$  entre éstos y  $z$ . Se obtiene un ciclo de longitud mayor que tres que forzosamente tiene que estar triangulado, ya que  $G$  es un grafo cordal. Podemos llamar  $z_i$  al vértice adyacente a  $z$  en el camino  $P_i$ , y  $z'_i$  al vértice adyacente a  $z_i$  que no es adyacente a  $z$  (ver Figura 4).

Nótese que para triangular el ciclo que hemos fijado, sólo existen dos posibilidades: o bien  $z$  está unido con algún vértice intermedio de los caminos  $P_1$  y  $P_2$ , lo que implica que estos caminos no eran mínimos y por tanto no puede ocurrir, o bien  $z_1$  y  $z_2$

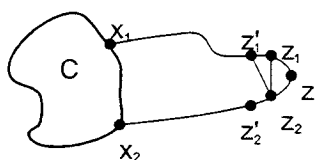


Figura 4: Esquema de primer paso de la inducción.

son vecinos en  $G$ . Asumiendo esto último, es claro de nuevo que o bien  $z'_1$  es adyacente a  $z_2$  o bien  $z'_2$  es vecino de  $z_1$ . En cualquier caso tenemos un vértice  $w$  (o bien  $z_1$  o bien  $z_2$ ) que verifica  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Como Hipótesis de inducción, supongamos que existe  $w \in G \setminus C$  tal que  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, k - 1$ , con  $2 < k \leq p$ . Tomamos el vértice  $x_k$  y un camino mínimo  $P_k$  entre éste y  $z$ , y sean  $P'_i$  caminos mínimos entre cada  $x_i$  y  $w$ , para  $i = 1, \dots, k - 1$  (ver Figura 5). Razonando de forma similar al paso anterior, los vértices  $w$  y  $z_k$  han de ser vecinos en  $G$ . Además, para cada  $i = 1, \dots, k - 1$ , o bien  $z'_i$  es vecino de  $z_k$ , o bien  $z'_k$  es vecino de  $w$ , dado que cada ciclo  $x_i - w - z_k - z'_k - x_k - x_i$  ha de estar triangulado.

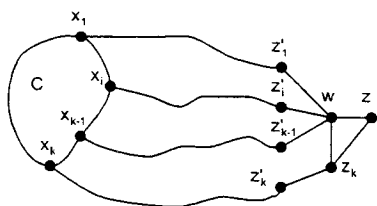


Figura 5: Esquema del paso final de la inducción.

Así pues, si el vértice  $z'_i$  es vecino de  $z_k$ , donde  $i = 1, \dots, k - 1$ , entonces renombramos  $z_k = w$ , que satisface  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Si por el contrario existe un índice  $i$  tal que  $z'_i$  no es vecino de  $z_k$ , entonces  $z'_k$  es vecino de  $w$ , con lo que  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Esto concluye la inducción.

Finalmente, si suponemos que no existe ningún  $w \in G \setminus C$  que verifique  $d(x_i, w) = n - 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ , entonces es claro que tampoco existe  $z \in G \setminus C$  tal que  $d(x_i, z) = n$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ , lo que finaliza la demostración. ■

Con todo esto, podemos obtener la caracterización que andábamos buscando y en la que intervienen precisamente los cliques a los que pertenece el vértice dado.

**Teorema 6** *Un vértice pertenece al contorno de un grafo cordal si y sólo si su excentricidad es estrictamente mayor que el máximo de las excentricidades de los cliques a los que pertenece.*

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo cordal. Si  $x \in G$  no pertenece al contorno entonces existe otro vértice  $y \in G$  adyacente tal que  $\text{ecc}(y) > \text{ecc}(x)$ . Como  $G$  es cordal tenemos que existe al menos un clique, que denotaremos por  $C$ , que contiene a  $x$  e  $y$ , y que  $\text{ecc}(x) = \text{ecc}(y) - 1$ . Sea  $z$  un vértice de  $G$  tal que  $d(y, z) = \text{ecc}(y)$  y sea  $C_z$  un clique que lo contiene. Si entre los cliques  $C$  y  $C_z$  existe un camino mínimo de tipo A entonces por el Lema 4 se tiene que  $d(C, C_z) = d(y, z) + 1$  y por lo tanto obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\text{ecc}(C) \geq d(C, C_z) = d(y, z) + 1 = \text{ecc}(y) + 1 > \text{ecc}(x)$$

De la que se deduce inmediatamente que la excentricidad de  $x$  no es estrictamente mayor que el máximo de las excentricidades de los cliques a los que pertenece. Si no existe ningún camino de tipo A y existe uno de tipo B tenemos por el Lema 4 que  $d(C, C_z) = d(y, z)$  y así:

$$\text{ecc}(C) \geq d(C, C_z) = d(y, z) = \text{ecc}(y) > \text{ecc}(x)$$

De nuevo tenemos que la excentricidad de  $x$  en  $G$  no es estrictamente mayor que la del clique  $C$  en  $K(G)$ . Por último si todos los caminos mínimos son de tipo C, el Lema 4 nos asegura que en ese caso  $d(C, C_z) = d(y, z) - 1$ . Podemos deducir que:

$$\text{ecc}(C) \geq d(C, C_z) = d(y, z) - 1 = \text{ecc}(y) - 1 = \text{ecc}(x)$$

Tampoco en este caso, la excentricidad de  $x$  en  $G$  supera a la del clique  $C$  en  $K(G)$ .

Recíprocamente, sea  $x$  un vértice del contorno de  $G$  y sea  $C$  un clique que lo contiene. Llamaremos  $C'$  a otro clique tal que  $\text{ecc}(C) = d(C, C')$ . Por el Lema 5 es posible escoger un vértice  $z$  de  $G$  que esté contenido en el clique  $C'$  y a ningún otro clique intermedio de los caminos mínimos entre  $C$  y  $C'$ . Cualquiera de esos caminos mínimos  $P$  en  $K(G)$  da lugar a un camino en  $G$  entre los vértices  $x$  y  $z$ .

Por la elección que hemos hecho de  $z$ , el camino  $P$  no puede ser de tipo A. Si  $P$  es de tipo C, de nuevo por el Lema 4 se tiene que  $d(x, z) = d(C, C') + 1$  y entonces

$$ecc(x) \geq d(x, z) = d(C, C') + 1 > d(C, C') = ecc(C)$$

Si  $P$  es de tipo B, el Lema 4 sólo nos asegura que

$$d(x, z) = d(C, C') = ecc(C)$$

Si  $ecc(x) > d(x, z)$  tendríamos probado el resultado. Vamos a demostrar que no puede ocurrir que  $ecc(x) = d(x, z)$ . En ese caso existe un vértice  $x' \in C$  que no pertenece a ninguno de los cliques intermedios de los caminos mínimos entre  $C$  y  $C'$  en  $K(G)$  por el Lema 5. Este vértice  $x'$  es adyacente a  $x$  y verifica que  $d(x', z) = d(x, z) + 1$  por lo que  $ecc(x') > ecc(x)$  que se contradice con el hecho de que  $x \in Ct(G)$ . ■

#### 4 Grafos con contorno prefijado.

En esta sección vamos a responder a la pregunta de si todo grafo puede ser contorno de otro. Dado que la respuesta va a ser negativa, caracterizaremos completamente cuándo no es posible y estudiaremos los casos en los que sí es posible. Para todo esto es necesario previamente demostrar este resultado previo.

**Lema 7** *Sea  $G$  un grafo conexo. Si su contorno es conexo, todos sus vértices tienen la misma excentricidad. Si el contorno no es conexo, todos los vértices de la misma componente conexa tienen la misma excentricidad.*

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo conexo y sea  $H$  su contorno. Si  $H$  es conexo, y todos sus vértices no tienen la misma excentricidad existen dos vértices adyacentes  $u$  y  $u'$  con diferente excentricidad. El que tenga menor excentricidad es claro que no puede pertenecer al contorno, luego  $H$  no puede ser el contorno de ningún grafo. Un razonamiento similar se puede hacer para los vértices de la misma componente conexa de  $H$  en el caso de que éste no sea conexo. ■

Vamos ahora en qué condiciones, un grafo  $H$  es contorno de otro. Dividiremos nuestro estudio

entre aquellos candidatos conexos y los que no sean conexos. Es necesario señalar un caso sencillo de entre los primeros pero que tiene su importancia: cuando  $H$  es completo, entonces es evidente que es contorno de sí mismo.

El siguiente resultado caracteriza completamente aquellos grafos que no pueden ser contorno de otro.

**Proposición 8** *Si  $H$  es un grafo conexo, no completo y de radio uno, entonces no puede ser contorno de ningún otro grafo conexo.*

*Demostración:* Sea  $H$  es un grafo en las condiciones del enunciado, entonces existe  $u \in H$  tal que está unido a todos los demás vértices de  $H$ , y existen  $v$  y  $v'$  dos vértices suyos que no son adyacentes entre sí. Supongamos por el contrario que  $H$  es el contorno de un grafo  $G$ . Por el Lema 7, todos los vértices de  $H$  deben tener la misma excentricidad  $k$ . Si  $k = 1$  entonces  $d(v, v') \leq 1$  lo cual significa que en el grafo  $G$  existe la arista  $vv'$  y por tanto  $H$  no es un subgrafo inducido de  $G$  y no puede ser su contorno.

Por otro lado si  $k > 1$  entonces existe  $w \in G$  tal que  $ecc(w) = d(w, u) = k$ . Está claro que  $w \notin Ct(G)$  porque no es vecino de  $u$ . Por lo tanto existe un vértice adyacente suyo  $w_1 \in G$  tal que  $ecc(w_1) > ecc(w) \leq k$ . Este nuevo vértice  $w_1 \notin Ct(G)$  porque no tiene excentricidad igual a  $k$ , luego debe existir un vértice  $w_2 \in G$  tal que  $ecc(w_2) > ecc(w_1) > k$ . Podemos repetir el mismo razonamiento hasta acabar con los vértices de  $G \setminus Ct(G)$ . Como el último de los vértices que hemos obtenido en este proceso tiene excentricidad mayor que sus vecinos, debería pertenecer al contorno, sin embargo tiene excentricidad mayor que  $k$  de donde se obtiene la contradicción buscada. ■

Éste es el único caso en el que no es posible construir un grafo  $G$  con un contorno prefijado. A continuación construiremos explícitamente ese grafo para el resto de casos. Como se dijo al principio de la sección dividiremos nuestro estudio en los casos conexos y no conexos. El siguiente resultado resuelve el caso conexo.

**Proposición 9** *Si  $H$  es un grafo conexo con radio mayor que uno, entonces existe un grafo  $G$  del cuál es contorno.*

*Demostración:* Simplemente construiremos el grafo  $G$  que buscamos y comprobaremos que cumple las condiciones del enunciado. Para ello añadiremos al grafo  $H$  un nuevo vértice  $w$  unido a todos los vértices de  $H$ . Por la construcción que hemos hecho, es evidente que  $\text{ecc}(w) = 1$ . Supongamos ahora un vértice  $u$  cualquiera del grafo  $H$ . Debe existir otro vértice de  $H$ , que llamaremos  $u'$  que no es adyacente a  $u$  porque de lo contrario  $H$  tendría radio uno. En el nuevo grafo  $G$ , tenemos que un camino mínimo que une  $u$  con  $u'$  es  $uwu'$  por tanto  $d(u, u') = 2, \forall u' \in G$  no adyacente a  $u$ , entonces  $\text{ecc}(u) = 2$ , de lo que se deduce que  $\text{Ct}(G) = H$ . ■

Por último, veamos qué ocurre si el grafo candidato a ser contorno no es conexo.

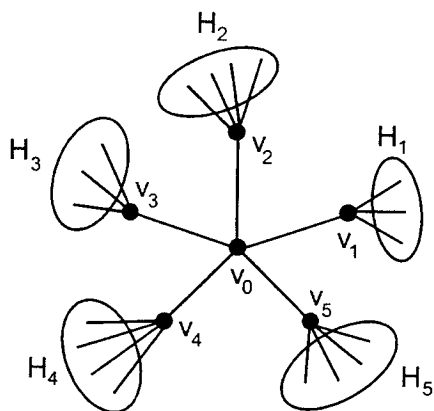


Figura 6: Un grafo con un contorno no conexo prefijado.

**Proposición 10** *Cualquier grafo no conexo es contorno de otro grafo.*

*Demostración:* Sea  $H$  un grafo no conexo cuyas componentes conexas son  $H_1, H_2, \dots, H_p$ . Vamos a obtener el grafo  $G$  como sigue: construimos una estrella con exactamente  $p$  terminales  $v_1, v_2, \dots, v_p$  y centro  $v_0$ . Unimos el terminal  $v_i$  con todos los vértices de la componente conexa  $H_i$  (ver Figura 6). Es claro que en este nuevo grafo  $\text{ecc}(v_0) = 2$ ,  $\text{ecc}(v_i) = 3$ , y  $\text{ecc}(u_i) = 4, \forall u_i \in H_i$  para todo  $i = 1, \dots, p$ , y esto demuestra el resultado. ■

En el siguiente teorema resumimos lo obtenido en esta sección.

**Teorema 11** *Un grafo es contorno de otro si y sólo si o bien es completo, o es conexo y de radio mayor que uno, o no es conexo.*

## Referencias

- [1] J. Cáceres and A. Márquez and M.L. Pueras. *La envolvente convexa en grafos*. Actas de los IX Encuentros de Geometría Computacional. Eds.: Narcís Coll and J. Antoni Sellarès. pp.219-228. 2001.
- [2] R. Diestel. *Graph theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [3] M. Faber and R. Jamison. *Convexity in graphs and hypergraphs*. SIAM J. Alg. Disc. Math. vol. 7 (3), pp. 433-444. 1986.
- [4] M.L.J. van de Vel. *Theory of Convex Structures*. North-Holland, 1993.