

EFFECTO DE LA FRICCIÓN SOBRE LA SOLUCIÓN ELÁSTICA DE UNA GRIETA CIRCULAR EN LA INTERFASE ENTRE DOS SEMIESPACIOS

E. Graciani¹, V. Mantić¹, F. París¹

¹ Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales (Universidad de Sevilla),
Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla. España
E-mail: graciani@esi.us.es, mantic@esi.us.es, paris@esi.us.es

RESUMEN

Se estudia la solución elástica en el entorno de una grieta circular en la interfase entre dos materiales sometida a una carga de tracción. Siguiendo el enfoque de Comninou, se supone la existencia de una zona de contacto junto al vértice de la grieta y se estudia de forma paramétrica el efecto que tiene la fricción en dicha zona sobre los distintos aspectos de la solución elástica. Para el análisis se emplea una formulación del Método de Elementos de Contorno para problemas de contacto con simetría axial. Dentro del rango de parejas de materiales en los que la zona de contacto es detectable numéricamente, los resultados muestran el efecto de la fricción en el comportamiento asintótico de las tensiones y los desplazamientos, en el tamaño de la zona de contacto, en el factor de intensificación de tensiones y en la tasa de liberación de energía durante el crecimiento de la grieta.

ABSTRACT

The elastic solution in the vicinity of a penny-shape crack at a bi material interface under tensile loading is analyzed. Following the approach proposed by Comninou, a near-tip contact zone is assumed and a parametric analysis is carried out to elucidate the effect induced by the friction along the contact zone on different features of the elastic solution. Analysis is carried out using a Boundary Element formulation for axi-symmetric contact problems. Within the range of bi-material pair for which the near-tip contact zone is numerically detectable, results show the effect of friction in the asymptotic behaviour of near-tip stresses and displacements, the size of the contact zone, the stress intensity factor and the energy release rate associated to crack propagation.

PALABRAS CLAVE: Grieta circular, Grieta de interfase, Fricción.

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de modelar el comportamiento de las grietas de interfase existen dos enfoques alternativos: el de Williams, que supone una grieta libre de tensiones en las caras de la misma [1], y el de Comninou, que predice la presencia de una zona de contacto en el entorno del vértice de la grieta [2,3]. La solución obtenida con el enfoque de Williams predice la existencia de infinitas zonas de interpenetración entre los labios de la grieta que se extienden hasta una distancia del vértice de la grieta similar a la zona de contacto que aparece en la solución obtenida con el enfoque de Comninou [4].

El problema de una grieta circular en la interfase entre dos materiales, de comportamiento elástico lineal isótropo, sometida a un campo lejano de tracción uniforme, es un problema clásico del análisis de grietas de interfase, que ha sido estudiado por diversos autores [5,6]. En estos trabajos, bien se ha empleado el enfoque de Williams [5] o bien se ha empleado el enfoque de Comninou, despreciando el efecto de la fricción en la zona de contacto que aparece en el entorno del vértice de la grieta [6].

En el presente trabajo se analiza la influencia que tiene la fricción entre las caras de la grieta dentro de la zona de contacto en la solución obtenida en el entorno del vértice de la grieta. Obviamente, si se pretende estudiar el efecto que produce la fricción entre las caras de la grieta en la solución elástica en el entorno del vértice de la fisura, es obligado emplear el enfoque de Comninou, ya que el de Williams ignora la zona de cierre de grieta.

Según Comninou [3] la existencia de fricción entre las caras de la grieta cambia el comportamiento asintótico de la solución en el entorno del vértice de la fisura, de forma que la singularidad en tensiones tangenciales por delante del fondo de grieta deja de ser de orden 0.5 y pasa a ser de un orden ligeramente inferior, el cual viene determinado por el coeficiente de fricción entre las caras de la grieta y las propiedades elásticas de los materiales a ambos lados de la misma.

En lo que sigue se hará una breve descripción del problema analizado y de la solución obtenida para distintas combinaciones de materiales y distintos valores del coeficiente de fricción en la interfase. Al mostrar la solución se hará especial énfasis en describir el efecto

de la fricción en el comportamiento asintótico de los desplazamientos y las tensiones en el entorno del vértice de la grieta, en el tamaño de la zona de contacto que aparece, en el factor de intensificación de tensiones y en la tasa de energía liberada durante la propagación de la grieta.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

La configuración del problema es la mostrada en la figura 1(a), en la cual se muestra la sección radial de la grieta circular situada en el centro de la interfase entre dos cilindros unidos por sus bases. Para minimizar los efectos de borde, se han considerados unas dimensiones $b = h = 100 a$ para ambos cilindros. Las condiciones de contorno prescriben una tracción uniforme σ_0 actuando sobre las caras superior e inferior del conjunto y tensiones nulas en el resto de las caras.

Se permite el contacto con fricción entre las caras de la grieta y se considera que en la zona no dañada es una interfase perfecta.

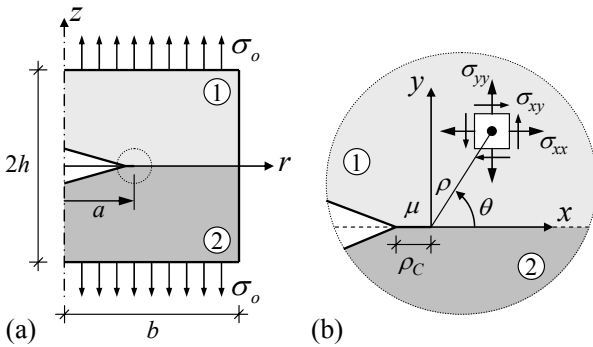


Figura 1. Geometría del problema: (a) dimensiones; (b) coordenadas locales en el entorno del vértice.

Se han resuelto una serie de casos, en los cuales se han tomado una longitud de grieta a y una carga aplicada σ_0 constantes ($a = 1$ y $\sigma_0 = 1$) y se han variado las características elásticas de los sólidos y el coeficiente de fricción en la interfase.

Para la solución del problema se ha empleado una herramienta numérica, basada en el Método de los Elementos de Contorno [7], para el análisis de problemas elásticos de contacto con simetría axial [8]. Por tanto, se ha realizado una discretización del contorno de la sección radial mostrada en la figura 1(a), empleando elementos lineales continuos.

En cada lado se ha empleado un tamaño máximo de elemento cincuenta veces inferior al tamaño del lado y en las esquinas se han empleado elementos de igual longitud. El tamaño empleado para los elementos más pequeños de la discretización, situados a ambos lados del vértice de la grieta, ha sido de $10^{-12}a$. Con objeto de determinar con precisión el tamaño de la zona de contacto, se ha colocado también una malla más fina en el

entorno del final de la zona de contacto esperada. En las zonas en que es necesario variar el tamaño de los elementos, se ha empleado una relación de 1.3 entre las longitudes de los elementos adyacentes.

Para caracterizar la solución asintótica en el entorno del vértice de la grieta se emplearán el coeficiente de fricción μ , el parámetro β de Dundurs y el parámetro E^* . Estos últimos han sido definidos de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)} \tag{1}$$

$$\frac{16}{E^*} = \frac{1 + \kappa_1}{\mu_1} + \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \tag{2}$$

donde μ_i es el módulo de elasticidad a cortadura (con $i = 1, 2$ indicando los materiales mostrados en la figura 1), y $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, siendo ν_i el coeficiente de Poisson.

Si los materiales son idénticos, se obtiene $\beta = 0$, mientras que, para cualquier combinación de materiales, se verifica: $-0.5 \leq \beta \leq 0.5$. El intercambio de los materiales a ambos lados de la grieta provoca el cambio de signo del parámetro β , tal como puede observarse de su definición en (1). Por tanto en lo que sigue se supondrá que el parámetro β varía en el rango $0 \leq \beta \leq 0.5$.

Si se desprecia el efecto de la fricción, el tamaño de la zona de contacto en el entorno del vértice de la grieta puede ser estimado a partir de la solución analítica del problema obtenida con el enfoque de Williams [4,5,9], obteniéndose un máximo del orden de $\rho_c = 10^{-4}a$ (en el caso de $\beta = 0.5$). El tamaño de la zona de contacto disminuye rápidamente al disminuir β , de forma que para valores en el rango $\beta \leq 0.2$ la zona de contacto es numéricamente indetectable con el esquema empleado, es decir, $\rho_c \leq 10^{-11}a$.

Dado que el objetivo no es sólo determinar el tamaño de la zona de cierre de grieta, sino el comportamiento de la solución en el interior de la misma, el análisis se ha restringido a los casos en que la zona de contacto es de mayor tamaño, es decir, al intervalo rango $0.4 \leq \beta \leq 0.5$ con lo cual, el tamaño de la zona de contacto esperada es del orden de, $6 \cdot 10^{-5}a \leq \rho_c \leq 10^{-4}a$. El coeficiente de fricción se ha variado en el intervalo $0 \leq \mu \leq 2$.

3. SOLUCIÓN CERCA DEL VÉRTICE

Las figuras 2(a) y 2(b) muestran respectivamente la solución obtenida numéricamente (en el caso particular de $\beta = 0.45$ y $\mu = 0.75$) para las tensiones y los desplazamientos relativos en el entorno del vértice de la grieta, siguiendo la referencia mostrada en la figura 1(b). En lo que sigue, el superíndice '+' se empleará para denotar variables asociadas a la solución en la interfase no dañada, por ejemplo, $\sigma_{yy}(\rho, 0) = \sigma_{yy}(\rho)^+$, mientras que el superíndice '-' se empleará para denotar variables asociadas a la solución en las caras de la grieta, como la

presión de contacto $\sigma_{yy}(\rho, \pi) = \sigma_{yy}(\rho, -\pi) = \sigma_{yy}(\rho)^-$, o el deslizamiento relativo $\Delta u_x(\rho)^- = u_x(\rho, \pi) - u_x(\rho, -\pi)$ entre las caras de la grieta. Siendo, en todos los casos, ρ la distancia al vértice de la grieta.

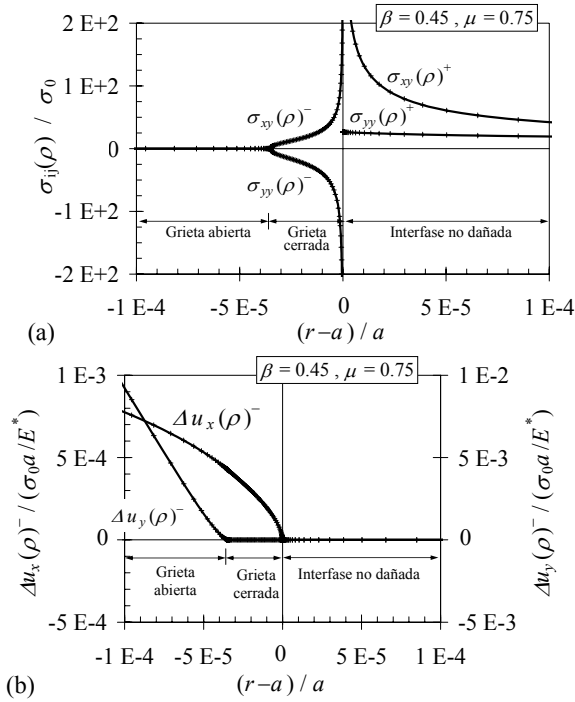


Figura 2. Solución en el entorno del vértice: (a) tensiones; (b) desplazamientos relativos.

El comportamiento asintótico de la solución de las tensiones y los desplazamientos relativos en el entorno del vértice de una grieta de interfase considerando el efecto de la fricción presenta ciertas diferencias frente al comportamiento de la solución obtenida despreciando el efecto de la fricción [3]. Para estudiar con detalle estas diferencias, se muestran sucesivamente, en los siguientes apartados, la evolución de las distintas componentes de la solución, en coordenadas logarítmicas, para el caso de $\beta = 0.45$ y distintos valores del coeficiente de fricción dentro del rango dado por $0 \leq \mu \leq 2$.

3.1. Tensiones por delante del fondo de grieta

Cuando $\rho \rightarrow 0$, las tensiones tangenciales por delante del fondo de grieta, $\sigma_{xy}(\rho)^+$, tienen un comportamiento singular dado por

$$\sigma_{xy}(\rho)^+ = K_{II} (2\pi\rho)^{-\lambda}, \tag{3}$$

siendo K_{II} el coeficiente de intensificación de tensiones. El orden de singularidad λ viene dado por la ecuación:

$$\tan(\lambda\pi) = (\mu\beta)^{-1} \tag{4}$$

Por el contrario, las tensiones normales por delante del fondo de grieta, $\sigma_{yy}(\rho)^+$, tienen un comportamiento acotado en el entorno del vértice.

En las figuras 3(a) y 3(b) se muestran respectivamente la solución de las componentes tangencial y normal del vector tensión por delante del fondo de grieta.

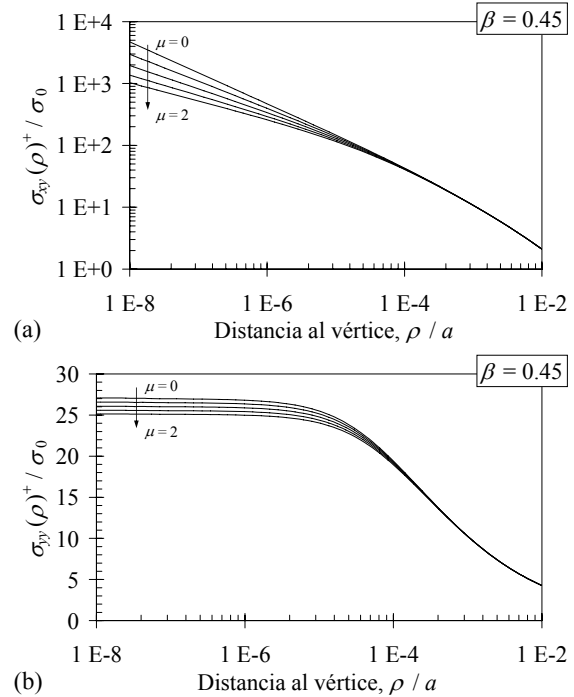


Figura 3. Tensiones por delante del fondo de grieta, en dirección: (a) tangencial; (b) normal.

Como puede observarse, a distancias suficientemente alejadas del vértice, el coeficiente de fricción no influye en la solución obtenida y, por tanto, todas las soluciones convergen en la misma curva.

En la zona cercana al vértice, las tensiones tangenciales disminuyen cuando aumenta el coeficiente de fricción. En las coordenadas logarítmicas empleadas, el cambio de pendiente que se observa en las distintas soluciones cuando $\rho \rightarrow 0$, pone claramente de manifiesto que el descenso en el orden de singularidad de las tensiones tangenciales es tanto mayor cuanto mayor es el coeficiente de fricción.

Las tensiones normales también disminuyen ligeramente en el entorno del vértice de la grieta al aumentar el coeficiente de fricción, aunque al ser estas tensiones acotadas en dicha zona, el descenso es menos significativo y es preciso emplear coordenadas decimales para que se aprecie el descenso con claridad.

3.2. Desplazamiento relativo de las caras de la grieta

Al existir una zona de contacto en el entorno del vértice de la grieta, la apertura $\Delta u_y(\rho)^-$ debe ser nula en dicha zona. Por otra parte, cuando $\rho \rightarrow 0$, los deslizamientos

relativos $\Delta u_x(\rho)^-$ tienen un comportamiento asintótico que viene definido por la ecuación:

$$\Delta u_x(\rho)^- = \frac{1-\beta^2}{E^*} \frac{\text{sen}(\lambda\pi)}{(2-2\lambda)\pi} K_{II}(2\pi\rho)^{(1-\lambda)}. \quad (5)$$

En las figuras 4(a) y 4(b) se muestran respectivamente la solución de la apertura y el deslizamiento relativo entre las caras de la grieta.

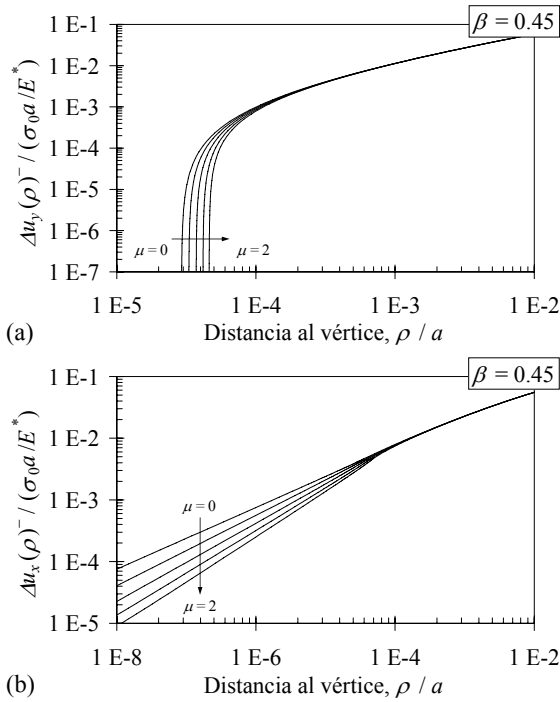


Figura 4. Desplazamientos relativos entre las caras de la grieta: (a) normal; (b) tangencial.

Puede observarse nuevamente que, a distancias suficientemente alejadas del vértice, la presencia de la fricción no influye en la solución obtenida y todas las soluciones convergen en la misma curva.

En la solución obtenida para la apertura se muestra que ésta disminuye cuando aumenta el coeficiente de fricción. Como consecuencia, se observa claramente que el tamaño de la zona de contacto aumenta cuando aumenta el coeficiente de fricción.

Igualmente, en la solución obtenida para los deslizamientos relativos se muestra que éstos disminuyen cuando aumenta el coeficiente de fricción, disminuyendo la pendiente como corresponde a la disminución del orden de singularidad λ .

3.3. Tensiones de contacto

Por último, el comportamiento asintótico de las tensiones de contacto viene dado por las ecuaciones:

$$\sigma_{yy}(\rho)^- = -\beta \text{sen}(\lambda\pi) K_{II}(2\pi\rho)^{-\lambda}, \quad (6)$$

$$\sigma_{xy}(\rho)^- = \cos(\lambda\pi) K_{II}(2\pi\rho)^{-\lambda}. \quad (7)$$

A la vista de la ecuación (4) puede comprobarse que esta solución, cumple la relación impuesta por el modelo de Coulomb: $|\sigma_{xy}(\rho)^-| = \mu |\sigma_{yy}(\rho)^-|$.

Las soluciones obtenidas para las componentes normal y tangencial de las tensiones de contacto se muestran respectivamente en las figuras 5(a) y 5(b).

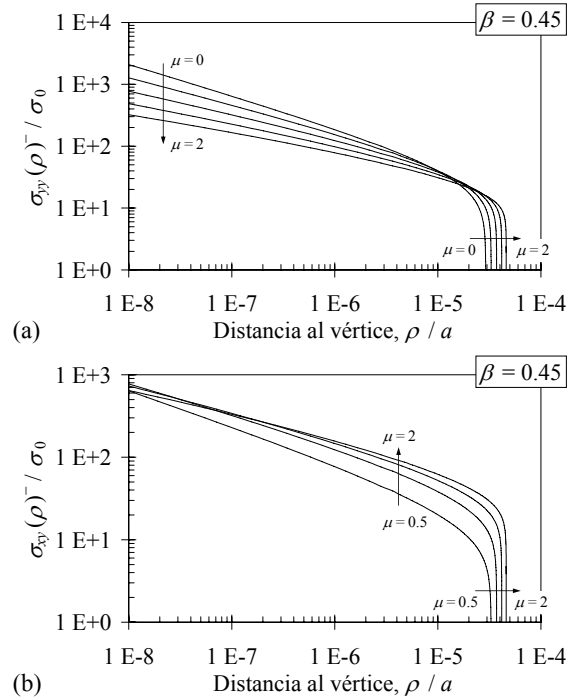


Figura 5. Tensiones de contacto: (a) normales; (b) tangenciales.

En el extremo de la zona de contacto se observa que ambas componentes de las tensiones de contacto aumentan con el coeficiente de fricción, debido, por un lado, en ambos casos, al aumento de la zona de contacto y, por otro, en el caso de las tensiones tangenciales, al aumento del coeficiente de fricción. Sin embargo, en el entorno más próximo del vértice de la grieta, es decir, cuando $\rho \rightarrow 0$, el comportamiento se invierte, es decir, debido al descenso del orden de singularidad, las tensiones se hacen menores cuanto mayor es el coeficiente de fricción.

4. TAMAÑO DE LA ZONA DE CONTACTO

Como hemos visto anteriormente, el tamaño de la zona de contacto en el entorno del vértice de la grieta aumenta cuando lo hace el coeficiente de fricción entre las caras de la grieta.

En la figura 6 se muestra el incremento obtenido en el tamaño de la zona de contacto, para una serie de combinaciones de materiales en el intervalo $0.4 \leq \beta \leq 0.5$, al variar el coeficiente de fricción en el rango $0 \leq \mu \leq 1$.

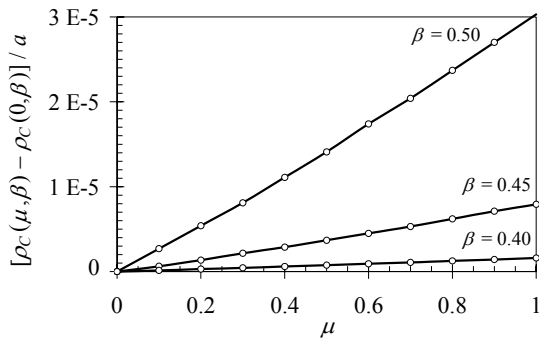


Figura 6. Aumento del tamaño de la zona de contacto debido al incremento del coeficiente de fricción.

Como puede observarse, el aumento de tamaño en la zona de contacto es más notable cuanto mayor es el parámetro β dado que en dicho caso la zona de contacto es mayor. Por otra parte, el aumento de tamaño es aparentemente lineal con el coeficiente de fricción (aunque en realidad presenta una ligera desviación del comportamiento lineal).

5. FACTOR DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES

Para calcular el factor de intensificación de tensiones se puede emplear cualquiera de las ecuaciones (3), (5)-(7). Para ello, es preciso emplear la solución numérica de la variable correspondiente en nodos suficientemente cercanos al vértice de la grieta como para que el primer término del desarrollo de la solución asintótica sea dominante.

Observando las figuras 3(a), 4(b), 5(a) y 5(b), correspondientes a un caso con $\beta = 0.45$, se observa claramente que en todas ellas existe una amplia zona en la que el primer término del desarrollo de la solución asintótica es dominante y, por tanto, el comportamiento de la variable correspondiente en coordenadas log-log es una recta.

Determinando mediante un ajuste de mínimos cuadrados la pendiente de dicha recta y comparando con el orden de singularidad analítico mostrado en (4) se ha comprobado que el ajuste más preciso (para combinaciones de materiales en el rango $0.4 \leq \beta \leq 0.5$) se obtiene para la solución de los deslizamientos relativos, $\Delta u_x(\rho)^-$, en el intervalo $10^{-8}a \leq \rho_c \leq 10^{-6}a$. Por tanto, el valor del factor de intensificación de tensiones se ha obtenido promediando los valores obtenidos de aplicar (3) en los nodos existentes en dicho intervalo.

En la figura 7 se muestran los resultados obtenidos para el factor de intensificación de tensiones, para el rango $0.4 \leq \beta \leq 0.5$, al variar el coeficiente de fricción en el intervalo $0 \leq \mu \leq 1$.

En la figura 7(a) se aprecia claramente que el factor de intensificación de tensiones aumenta con el coeficiente

de fricción para todos los valores del parámetro β considerados. Aunque no puede apreciarse con claridad en la gráfica, el crecimiento del factor de intensificación de tensiones es levemente más acusado cuanto menor es el valor del parámetro β . Por consiguiente, el comportamiento del factor de intensificación de tensiones frente al parámetro β se invierte al aumentar el coeficiente de fricción. Este hecho se puede apreciar con mayor claridad en la figura 7(b) donde se observa que, para valores bajos del coeficiente de fricción, el factor de intensificación de tensiones disminuye al disminuir el parámetro β , mientras que por el contrario, para valores superiores del coeficiente de fricción, el factor de intensificación de tensiones aumenta al disminuir el parámetro β .

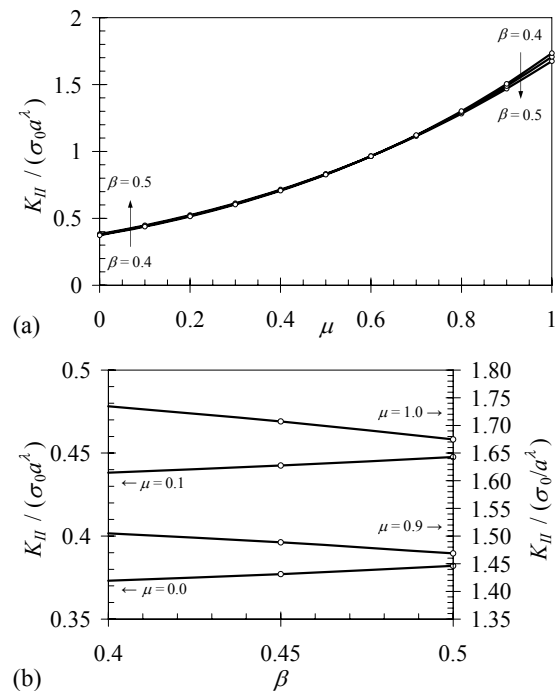


Figura 7. Evolución del factor de intensificación de tensiones frente a: (a) μ ; (b) β .

En cualquier caso, hay que tener en cuenta que al variar el coeficiente de fricción varía el orden de singularidad y, por tanto, las dimensiones del factor de intensificación de tensiones, por lo cual la influencia de éste en la posible propagación de la grieta debe ser objeto de un estudio más profundo.

6. TASA DE ENERGÍA LIBERADA

Para terminar con el análisis, se ha evaluado la tasa de energía liberada durante la propagación de la grieta, empleando la técnica del cierre virtual de grieta, teniendo en cuenta la presencia de las tensiones de contacto entre las caras de la grieta [10].

De esta forma, la tasa de energía liberada asociada a una extensión virtual Δa del tamaño de la grieta puede obtenerse con la integral:

$$\hat{G}_{II}(\Delta a) = \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{xy}(\rho)^+ \Delta u_x(\Delta a - \rho)^- d\rho - \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{xy}(\Delta a - \rho)^- \Delta u_x(\Delta a - \rho)^- d\rho \quad (8)$$

la cual se ha evaluado numéricamente, a partir de la solución nodal de los deslizamientos y el vector tensión en la interfase, para un rango de extensiones virtuales de la grieta $10^{-8}a \leq \Delta a \leq 10^{-6}a$, obteniéndose los resultados mostrados en la figura 8 para los casos en el rango $\beta = 0.45$ y $0 \leq \mu \leq 1$.

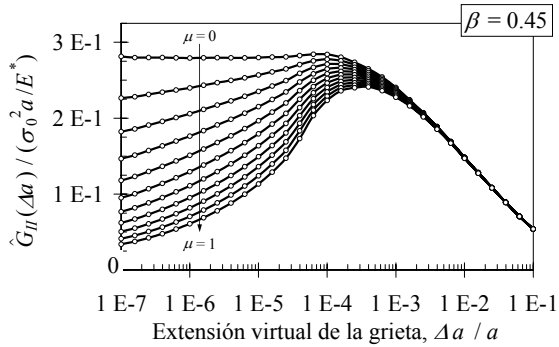


Figura 8. Evolución de la tasa de energía liberada con el tamaño de la extensión virtual de la grieta.

A la vista de los comportamientos asintóticos mostrados en (3), (5) y (7) para los deslizamientos y el vector tensión en la interfase, en el entorno del vértice de la grieta, se puede obtener el siguiente comportamiento asintótico de la tasa de energía liberada cuando la extensión virtual del tamaño de la grieta tiende a cero:

$$\hat{G}_{II}(\Delta a) \sim \Delta a^{(1-2\lambda)}, \text{ si } \Delta a \rightarrow 0. \quad (9)$$

Como consecuencia de este comportamiento asintótico, se obtiene que $\hat{G}_{II}(\Delta a) \rightarrow 0$ cuando $\Delta a \rightarrow 0$, siempre que $0 \leq \lambda < 0.5$, es decir, siempre que $\mu \neq 0$, lo cual puede comprobarse claramente en la figura 8. En la figura se observa que la tasa de energía liberada para extensiones virtual de la grieta claramente superiores al tamaño de la zona de contacto es independiente del coeficiente de fricción, sin embargo, cuando $\Delta a \rightarrow 0$ y, por tanto, la extensión virtual de la grieta es de un tamaño inferior a la zona de contacto, la tasa de energía liberada es claramente dependiente del coeficiente de fricción y del tamaño de la extensión virtual de la grieta.

Representando los datos mostrados en la figura 8 en escala log-log y empleando un ajuste de mínimos cuadrados puede comprobarse que los resultados obtenidos siguen con gran precisión el comportamiento asintótico mostrado en (9) en el rango $10^{-7}a \leq \Delta a \leq 10^{-5}a$.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una solución numérica del problema de una grieta circular en la interfase entre dos materiales

distintos, de comportamiento isótropo elástico lineal, teniendo en cuenta el efecto de la fricción entre las caras de la grieta.

Se ha comprobado que la presencia de la fricción hace que disminuya el orden de singularidad y que aumente el tamaño de la zona de contacto que aparece en el entorno del vértice de la grieta.

Por último, se espera que la obtención de una solución precisa de la solución elástica a lo largo de toda la interfase sea de gran ayuda en el estudio de la propagación de este tipo de grietas, dado que, como se ha mostrado, la fricción en la zona de contacto provoca, por un lado, que cambien las dimensiones del factor de intensificación de tensiones y, por otro, que la tasa de energía liberada durante la propagación de la grieta no tienda a un valor constante cuando el tamaño de la extensión virtual de la misma tiende a cero y, por tanto, no es posible analizar la propagación de este tipo de grietas empleando los criterios clásicos de propagación.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido realizado con el apoyo de la Junta de Andalucía (Proyectos de Excelencia TEP1207 y TEP2045) y del Ministerio de Educación y Ciencia (Proyectos TRA2005-06764 y TRA2006-08077).

REFERENCIAS

- [1] Williams, M.L., *The stress around a fault or crack in dissimilar media*, B Seismol Soc Am, 49: 199-204, 1959.
- [2] Comninou, M., *The interface crack*, J Appl Mech, 44: 631-636, 1977.
- [3] Comninou, M., *Interface crack with friction in the contact zone*, J Appl Mech, 44: 780-781, 1977.
- [4] Hills, D.A. y Barber, J.R., *Interface cracks*. Int J Mech Sci, 35(1): 27-37, 1993.
- [5] Kassir, M.K. y Bregman, A.M., *The stress-intensity factor for a penny-shaped crack between two dissimilar materials*. J Appl Mech, 39: 308-310, 1972.
- [6] Keer, L.M., Chen, S.H. y Comninou, M., *The interfacial penny-shaped crack reconsidered*. Int J Eng Sci, 16: 765-772, 1978.
- [7] París, F. y Cañas, J. *Boundary Element Method: Fundamentals and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [8] Graciani, E., Mantič, V., París, F. y Blázquez, A., *Weak formulation of axis-symmetric frictionless contact problems with boundary elements. Application to interface cracks*, Comput Struct, 83: 836-855, 2005.
- [9] Graciani, E., Mantič, V. y París, F., *On the estimation of the first interpenetration point in the open model of interface cracks*, Int J Fracture, 143: 287-290, 2007.
- [10] Sun, C.T. y Qian, W., *A treatment of interfacial cracks in the presence of friction*, Int J Fracture, 94: 371-382, 1998.