UNIVERSIDAD DE SEVILLA

NUEVAS CONTRIBUCIONES SOBRE L^1 DE UNA MEDIDA VECTORIAL.

Memoria presentada por
Olvido Delgado Garrido
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Olvido Delgado Garrido

V° B° Director

D. Guillermo Curbera Costello.
Prof. del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Septiembre 2004.

NUEVAS CONTRIBUCIONES SOBRE L^1 DE UNA MEDIDA VECTORIAL.

Olvido Delgado Garrido

Tras un duro camino de largo recorrido, una etapa de mi viaje a través de la investigación matemática concluye con esta memoria, la cuál ha llegado a buen término gracias a la luz de guía que en todo momento me ha proporcionado mi director de Tesis Guillermo Curbera, a quién le expreso mi más profunda gratitud.

También quiero agradecer a todas aquellas personas que me alentaron durante la realización de este trabajo, en especial a mis padres, quienes me brindaron su apoyo incondicional y su cariño, a Sonia, por su energía y optimismo y a Emilio, mi paño de lágrimas.

A Emilio

Índice.

Introducción.

El origen de la integración de funciones escalares respecto de una medida vectorial se remonta al año 1955, cuando Bartle, Dunford y Schwartz extienden al caso vectorial el teorema de representación de Riesz. La versión clásica de este teorema establece que todo funcional lineal y positivo $T\colon C(K) \to \mathbb{C}$, donde K un espacio de Hausdorff compacto y $C(K)$ es el espacio de funciones escalares y continuas sobre K, se puede representar como un operador de integración respecto de una medida regular de Borel μ sobre K, es decir,

$$T(f) = \int f d\mu \quad \text{para todo } f \in C(K) .$$

En la versión vectorial se consideran operadores $T\colon C(K) \to X$ lineales y continuos, con valores en un espacio de Banach X. Bartle, Dunford y Schwartz [BDS, Theorem 3.2] prueban que, bajo la condición de que T sea débilmente compacto, existe una medida vectorial $\nu\colon \mathcal{B}(K) \to X$, definida sobre la σ–álgebra $\mathcal{B}(K)$ de los conjuntos de Borel de K, tal que

$$T(f) = \int f d\nu \quad \text{para todo } f \in C(K) .$$

Para llegar a este resultado, fue necesario el desarrollo de una teoría de integración de funciones escalares respecto de una medida vectorial $\nu\colon \Sigma \to X$, definida sobre una σ–álgebra Σ y con valores en un espacio de Banach X. Dicha teoría se creó partiendo de una definición tipo Lebesgue para la integral $\int f d\nu$ de una función f respecto de ν.

Posteriormente, en 1970, Lewis [L1] construye una teoría de integración de funciones escalares respecto de una medida vectorial ν con valores en un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo X, donde la integral de una función f respecto de ν, $\int f d\nu$, está definida por dualidad.

Esta teoría es equivalente a la de Bartle, Dunford y Schwartz cuando nos restringimos al caso en el que X es un espacio de Banach.

El espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de una medida vectorial ν con valores en un espacio de Banach X, ha sido estudiado en profundidad, y actualmente sus propiedades, así como las relaciones de éstas con las propiedades de la medida ν y del espacio X, son bien conocidas gracias a numerosos trabajos. Destacamos entre ellos los siguientes: Kluvanek y Knowles [KK]; Ricker [R1], [R2]; Okada [O]; Curbera [C2], [C3], [C4]; Okada y Ricker [OR1], [OR2], [OR3]; Okada, Ricker y Rodríguez-Piazza [ORR]; Sánchez Pérez [S1], [S2], [S3].

En la mayor parte de los trabajos citados anteriormente se consideran funciones reales y espacios vectoriales reales, aprovechándose en este caso la simplicidad de la estructura reticular de $L^1(\nu)$.

Recientemente, con las publicaciones de Ricker [R3]; Curbera [C5]; Curbera y Ricker [CR1]; [CR2]; y Okada y Ricker [OR4], se ha constatado la utilidad de la integración respecto de medidas vectoriales en el estudio de los dominios óptimos para operadores clásicos. En un marco general, dado un espacio de Banach de funciones E ([LT, Definition 1.b.17]) respecto de un espacio de medida finita, un espacio de Banach X y un operador lineal $T\colon E \to X$, un procedimiento clásico es asociar a T la función de conjuntos ν definida por $\nu(A) = T(\chi_A)$, para A medible. Curbera y Ricker [CR1, Corollary 3.3] prueban que bajo cierta condición natural sobre T, que hace a ν una medida vectorial, el espacio $L^1(\nu)$ es el dominio óptimo para T dentro de la clase de los espacios de Banach de funciones orden continuos, es decir, $L^1(\nu)$ es el mayor de esta clase de espacios, al que T puede ser extendido de manera continua conservando sus valores en X. Esta identificación del dominio óptimo de T es muy positiva en el sentido de que el espacio $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach con propiedades deducibles de las propiedades de ν (que provienen de las de T) y de las propiedades de X.

La finitud del espacio de medida respecto del cuál E es espacio de Banach de funciones es imprescindible, pues en caso contrario la función de conjuntos

ν asociada a T podría no estar definida para conjuntos de medida infinita. Ésto ocurre por ejemplo con la transformada de Hilbert sobre la recta real. Sin embargo, este obstáculo se puede salvar si consideramos ν definida sobre una estructura más débil que σ–álgebra, precisamente un δ–anillo (i.e. anillo cerrado por intersecciones numerables). En el caso de la transformada de Hilbert, la función de conjuntos asociada está definida para conjuntos de medida finita y éstos forman un δ–anillo.

Nosotros nos hemos planteado extender el resultado de Curbera y Ricker para operadores T definidos sobre espacios de Banach de funciones respecto de espacios de medida infinita, considerando la función de conjuntos ν asociada a T definida sobre un δ–anillo. Ésto conlleva realizar un estudio acerca de la integración respecto de estas medidas y del correspondiente espacio de funciones integrables.

La teoría de integración respecto de medidas vectoriales definidas sobre δ–anillos, fue estudiada en 1972 por Lewis [L2] como extensión del trabajo realizado en [L1] dos años antes, y continuada en 1989 por Masani y Niemi [MN1], [MN2].

La presente memoria consta de dos lineas de investigación dentro del contexto de las medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach real. La primera (Capítulo 1) contribuye a la comprensión del espacio $L^1(\nu)$ para una medida vectorial ν clásica (definida sobre una σ–álgebra), mediante el estudio de lo que llamaremos *subespacios de Banach de funciones* de $L^1(\nu)$. En la segunda, nos situamos en el marco más amplio de las *medidas vectoriales ν definidas sobre un δ–anillo*, estudiando, por un lado las propiedades reticulares de $L^1(\nu)$ y las relaciones de éstas con las propiedades analíticas de ν (Capítulo 2), y por otro, el problema de determinación del dominio óptimo para operadores entre espacios de funciones relativos a espacios de medida infinita, mediante aplicación de la integración respecto de ν (Capítulo 3).

La esencia del Capítulo 1 se muestra con el sencillo hecho de que dada una medida positiva y finita μ y $p \in (1, \infty)$, el espacio $L^p(\mu)$ está continuamente contenido en $L^1(\mu)$ y se puede describir en términos de μ como el espacio de funciones f tales que f^p es integrable respecto de μ. Consideramos el caso de una medida vectorial $\nu\colon \Sigma \to X$ definida sobre una σ–álgebra Σ y con valores en un espacio de Banach X, cuyo espacio $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones orden continuo respecto de cierto espacio de medida finita $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, [C2, Theorem 1]. Tomando un espacio de Banach de funciones Y respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, continuamente contenido en $L^1(\nu)$, al que llamaremos subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$, abordamos el siguiente problema: ¿Es posible describir Y en términos de la medida vectorial ν?

La herramienta que resuelve el problema anterior, es cierta aplicación $\rho\colon X^* \times \mathcal{M} \to [0, \infty]$, donde X^* es el espacio dual de X y $\mathcal{M}$ es el espacio de funciones medibles (relativas a Σ), que tiene propiedades naturalmente relacionadas con ν, y a la que llamamos función ν–norma. A partir de una función ν–norma ρ, construimos un subespacio de Banach de funciones $E(\rho_\nu)$ de $L^1(\nu)$, mediante la clausura de las funciones simples en el espacio de las funciones f de $\mathcal{M}$ tales que

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho(x^*, f) < \infty ,$$

respecto de la norma ρ_ν. Este método nos permite definir espacios de Orlicz $L^\Phi(\nu)$ respecto de la medida vectorial ν, como espacios $E(\rho_\nu)$ para una función ν–norma ρ adecuada, obteniéndose en el caso de ser Φ una función de Orlicz con la propiedad Δ_2, que $L^\Phi(\nu)$ es el espacio de funciones f de $\mathcal{M}$ tales que $\Phi(f)$ es integrable respecto de ν.

Finalizamos el capítulo probando que todo subespacio de Banach de funciones Y de $L^1(\nu)$ que sea orden continuo, se puede representar como un espacio $E(\rho_\nu)$ generado por una función ν–norma ρ (Teorema 1.17). De esta manera la cuestión planteada queda resuelta positivamente para subespacios de Banach de funciones orden continuos de $L^1(\nu)$.

En el Capítulo 2, trabajamos con medidas vectoriales $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ definidas sobre un δ–anillo $\mathcal{R}$ y con valores en un espacio de Banach X. En la primera sección, presentamos los principales resultados conocidos sobre integración respecto de este tipo de medidas vectoriales ν y sobre el espacio $L^1(\nu)$, comentando las diferencias existentes con el caso de medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras. En particular, $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo que puede carecer de unidad débil. Incluimos una proposición (Proposición 2.3) que nos da una condición equivalente a que una función sea integrable respecto de ν. Esta condición extiende la definición de función integrable dada por Bartle, Dunford y Schwartz para medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras [BDS, Definition 2.5] y no aparece en los trabajos de Lewis [L2] ni de Masani y Niemi [MN2].

En la segunda sección, estudiamos las propiedades de aditividad fuerte y σ–finitud para una medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo $\mathcal{R}$. Probamos que la condición de que ν sea σ–finita es equivalente a que $L^1(\nu)$ tenga una unidad débil g (Teorema 2.7), y en ese caso $L^1(\nu)$ es orden isómetrico a $L(\nu_g)$, donde ν_g es la medida vectorial con densidad g definida por $\nu_g(A) = \int_A g d\nu$ para todo A perteneciente a la σ–álgebra $\mathcal{R}^{loc}$ de conjuntos que están localmente en $\mathcal{R}$ (Teorema 2.9). En el caso de que ν sea fuertemente aditiva, $g = \chi_\Omega$ es una unidad débil de $L^1(\nu)$ y ν_g es una extensión de ν a la σ–álgebra $\mathcal{R}^{loc}$, de manera que $L^1(\nu)$ coincide con $L^1(\nu_g)$ (Teorema 2.6). Cuando ν no es σ–finita, representamos $L^1(\nu)$ como una suma directa incondicional de ideales disjuntos, cada uno de ellos orden isométrico a un espacio $L^1(\nu_A)$, donde la medida vectorial ν_A es la restricción de ν a cierta σ–álgebra del tipo $A \cap \mathcal{R}$ con $A \in \mathcal{R}$ (Teorema 2.10). Otra cuestión que nos planteamos es la posibilidad de que exista una "medida de Rybakov de control local" para ν, que dote a $L^1(\nu)$ de estructura de espacio de Banach de funciones.

El Capítulo 3 (inspirado en [CR1]) se divide en dos secciones. En la primera se considera un operador lineal $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to X$ definido sobre las funciones simples con soporte en un δ–anillo $\mathcal{R}$ de partes de un conjunto Ω y con valores en un espacio de Banach X. Cuando T cumple condiciones apropiadas, hallamos que el espacio $L^1(\nu)$, siendo $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ la medida vectorial definida por $\nu(A) = T(\chi_A)$, es el dominio óptimo para T dentro de la clase de espacios de Banach de funciones sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ (Definición 3.1) orden continuos y tales que μ es equivalente a ν, es decir, μ tiene los mismos conjuntos nulos que ν (Teorema 3.5). Además, en este caso el operador de integración $f \to \int f d\nu$ extiende T a $L^1(\nu)$.

La segunda sección se centra en los operadores con núcleo T definidos como

$$T(f) = \int_0^\infty f(y)K(\cdot\,,y)dy\ ,$$

siendo K una función medible y no negativa sobre $[0,\infty) \times [0,\infty)$ tal que la función de conjuntos ν asociada a T, está bien definida sobre el δ–anillo $\mathcal{B}_a$ de los conjuntos de Borel acotados de $[0,\infty)$. A tal función K la llamaremos núcleo admisible.

Para un espacio de Banach de funciones X tal que $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es medida vectorial, probamos que $L^1(\nu)$ es el dominio óptimo para T (considerado con valores en X) dentro de la clase de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, \mu)$ con μ equivalente a ν (Proposición 3.8). Bajo ciertas propiedades de integrabilidad y monotonía exigidas al núcleo admisible K, obtenemos que la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es una medida vectorial para cualquier espacio invariante por reordenamiento X sobre $[0,\infty)$. En este caso, si además X es orden continuo, damos una descripción precisa de $L^1(\nu)$ (i.e. el dominio óptimo de T) como un espacio de interpolación $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$, donde L^1_ω, L^1_ξ son los espacios de funciones integrables respecto de la medida de Lebesgue con densidad (definida a partir del núcleo admisible K) ω y ξ respectivamente (Teorema 3.15).

Preliminares.

En este apartado previo, exponemos los conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo de la memoria sobre retículos de Banach, en especial espacios de Banach de funciones. También haremos un breve repaso a la teoría de integración de funciones reales respecto de medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras.

Los espacios de Banach que aparezcan a lo largo de esta memoria se considerarán sobre el cuerpo de los números reales. Dado un espacio de Banach X, denotaremos a su bola unidad por B_X y a su espacio dual por X^*.

1. Retículos de Banach. Un *retículo de Banach* es un espacio de Banach E con norma $\|\cdot\|_E$, dotado de una relación de orden $\leq$ que cumple

1) si $x, y, z \in E$ con $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$,

2) si $x, y \in E$ y $a \geq 0$ con $x \leq y$, entonces $ax \leq ay$,

3) dados $x, y \in E$, existe el supremo y el ínfimo de x e y respecto del orden.

4) si $x, y \in E$ con $|x| \leq |y|$, entonces $\|x\|_E \leq \|y\|_E$, donde $|x| = \sup\{x, -x\}$ es el *módulo* de x.

Un *ideal* de E es un subespacio vectorial cerrado F donde se cumple que $y \in F$ siempre que $y \in E$ con $|y| \leq |x|$ para algún $x \in F$. Una *unidad débil* de E, es un elemento $0 \leq e \in E$ tal que si $\inf\{x, e\} = 0$ entonces $x = 0$.

Un conjunto A contenido en un retículo de Banach está dirigido decrecientemente si para todo $x, y \in A$ existe $z \in A$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

Un retículo de Banach es *orden continuo* si todo conjunto dirigido decrecientemente con ínfimo igual a cero, cumple que $\inf\{\|x\| : x \in A\} = 0$ [LT, Definition 1.a.6]. Un retículo de Banach es orden continuo si y sólo si toda sucesión creciente y acotada en orden es convergente en norma [LT, Proposition 1.a.8].

Una aplicación lineal $T\colon E \to F$ entre retículos de Banach es *positiva* si $T(x) \geq 0$ siempre que $x \geq 0$. Un importante resultado de la teoría de retículos de Banach afirma que toda aplicación lineal y positiva entre retículos de Banach es continua [LT, p. 2].

Dos retículos de Banach E y F son *orden isomorfos*, si existe entre ellos un operador lineal y biyectivo $T\colon E \to F$ que conserva la estructura de orden, es decir,

$$T(\sup\{x, y\}) = \sup\{T(x), T(y)\} \ , \quad \text{para todo } x, y \in E \ ,$$

o equivalentemente, al ser T lineal y biyectiva, $Tx \geq 0$ si y sólo si $x \geq 0$. Si además T es una isometría, se dirá que E y F son *orden isométricos.*

2. Espacios de Banach de funciones. Según Lindenstrauss y Tzafriri [LT, Definition 1.b.17], un *espacio de Banach de funciones o espacio de Köthe* respecto de un espacio de medida σ–finita (Ω, Σ, μ), es un espacio de Banach E de clases de funciones reales integrables respecto de μ sobre conjuntos de medida finita, cumpliendo

1) si f es una función medible, $g \in E$ y $|f| \leq |g|$ μ–e.c.t., entonces $f \in E$ y $\|f\|_E \leq \|g\|_E$,

2) $\chi_A \in E$ para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$,

donde funciones iguales en casi todo respecto de μ (μ–e.c.t.) están identificadas. Nótese que E es un retículo de Banach para el orden μ–e.c.t. ($f \geq 0$ si $f \geq 0$ μ–e.c.t.) y que la convergencia en norma de una sucesión implica la convergencia μ–e.c.t. para alguna subsucesión.

Dado un espacio de Banach de funciones E respecto de (Ω, Σ, μ), llamaremos a lo largo de esta memoria *subespacio de Banach de funciones* de

E, a un espacio de Banach de funciones F respecto de (Ω, Σ, μ), que esté contenido en E (no necesariamente con la misma norma). Esta inclusión es automáticamente continua al ser un operador lineal y positivo entre retículos de Banach.

El *dual de Köthe* de un espacio de Banach de funciones E respecto de (Ω, Σ, μ), es el espacio E' de funciones medibles $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que fg es integrable respecto de μ para toda $f \in E$. El espacio E' es un subespacio vectorial de E^* (el espacio dual de E) y está dotado de la misma norma que E^*. Los espacios E' y E^* coinciden si y sólo si E es orden continuo [LT, p. 29]. El *bidual de Köthe* de E es el dual de Köthe de E'.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ–finita, $\mathcal{M}$ el espacio de funciones medibles respecto de Σ y $\mathcal{M}^+$ el cono de funciones positivas de $\mathcal{M}$. Una *función norma* es una aplicación $\rho \colon \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$, cumpliendo

1) $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ–e.c.t.,

2) $\rho(af) = a\rho(f)$, para todo $a \geq 0$ y $f \in \mathcal{M}^+$,

3) $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$, para todo $f, g \in \mathcal{M}^+$,

4) si $f, g \in \mathcal{M}^+$ y $f \leq g$ μ–e.c.t., entonces $\rho(f) \leq \rho(g)$,

5) si $f, f_n \in \mathcal{M}^+$ y $f_n \uparrow f$ μ–e.c.t., entonces $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$,

6) $\rho(\chi_A) < \infty$ para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$,

7) para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$, existe $C_A > 0$ tal que

$$\int_A f d\mu \leq C_A \, \rho(f) \quad \text{para todo } f \in \mathcal{M}^+ .$$

Bennett y Sharpley definen un espacio de Banach de funciones [BS, Definition I.1.3], como un espacio del tipo $E(\rho) = \{f \in \mathcal{M} : \rho(|f|) < \infty\}$ para alguna función norma ρ.

El espacio $E(\rho)$ dotado de la norma $\|f\| = \rho(|f|)$ y del orden μ–e.c.t., es un espacio de Banach de funciones en el sentido de Lindenstrauss y Tzafriri, [BS, Theorem I.1.7].

Dado un espacio de Banach de funciones E respecto de (Ω, Σ, μ) en el sentido de Lindenstrauss y Tzafriri, la aplicación $\rho\colon \mathcal{M}^+ \to [0,\infty]$ definida por $\rho(f) = \|f\|_E$ si $f \in E$ y $\rho(f) = \infty$ si $f \notin E$, cumple las condiciones 1)–7) requeridas a una función norma, salvo la condición 5), conocida como la propiedad de Fatou, [LT, p. 30]. Luego, lo único que diferencia a las dos definiciones es la propiedad de Fatou, teniéndose que los espacios de Banach de funciones en el sentido de Bennett y Sharpley forman una subclase de los espacios de Banach de funciones en el sentido de Lindenstrauss y Tzafriri. En ambos casos hablaremos de espacios de Banach de funciones, especificando si es necesario cuando lo sean en el sentido de Bennett y Sharpley.

Sea E un espacio de Banach de funciones respecto de (Ω, Σ, μ). Una función $f \in E$ tiene *norma absolutamente continua* si $\|f\chi_{A_n}\|_E \to 0$ para toda sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ tal que $\chi_{A_n} \to 0$ μ–e.c.t. Nótese que si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita entonces una función $f \in E$ tiene norma absolutamente continua si y sólo si $\|f\chi_A\|_E \to 0$ cuando $\mu(A) \to 0$.

Un espacio de Banach de funciones E es orden continuo si y sólo si toda función de E tiene norma absolutamente continua. Este resultado se deduce de [BS, Proposition I.3.5], cuya prueba no utiliza la propiedad de Fatou y por tanto también es válida para espacios de Banach de funciones en el sentido de Lindenstrauss y Tzafriri.

3. Espacios invariantes por reordenamiento. Sea $\mathcal{B}$ la σ–álgebra de los subconjuntos de Borel de $[0,\infty)$ y m la medida de Lebesgue sobre $[0,\infty)$. Un espacio *invariante por reordenamiento* sobre $[0,\infty)$ es un espacio de Banach de funciones X respecto de $([0,\infty), \mathcal{B}, m)$ que tiene la propiedad de Fatou (i.e. en el sentido de Bennett y Sharpley), cumpliendo que si $f \in X$ entonces su reordenada decreciente $f^* \in X$ con $\|f^*\|_X = \|f\|_X$. La reordenada decreciente de una función f respecto de m es la función definida por

$$f^*(t) = \inf\left\{r \geq 0 \,:\, m\{x \in [0,\infty) \,:\, |f(x)| > r\} \leq t\right\} \quad \text{para } t \geq 0\,.$$

Espacios invariantes por reordenamiento sobre $[0,\infty)$ de gran relevancia son la suma e intersección de los espacios L^1 y L^∞. El espacio $L^1 \cap L^\infty$ está dotado de la norma $\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$ y el espacio $L^1 + L^\infty$ de funciones $f = g + h$ con $g \in L^1$ y $h \in L^\infty$, está dotado de la norma

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \inf\left\{\|f\|_1 + \|f\|_\infty : f = g+h \text{ con } g \in L^1,\ h \in L^\infty\right\} = \int_0^1 f^*(t)dt$$

[BS, Theorem II.6.4].

Si X es un espacio invariante por reordenamiento sobre $[0,\infty)$, entonces $L^1 \cap L^\infty \subset X \subset L^1 + L^\infty$, siendo las inclusiones continuas, [BS, Theorem II.6.6].

Sean (X_0, X_1) espacios de Banach continuamente incluidos en un espacio vectorial topológico Hausdorff común. El K–funcional de $x \in X_0 + X_1$ está definido para $t > 0$, como

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\left\{\|x_0\| + t\|x_1\| \ : \ x = x_0 + x_1\, ;\ x_0 \in X_0\, ,\ x_1 \in X_1\right\}.$$

Asumiremos que $X_0 \cap X_1$ es denso en X_0. La función $\mathcal{K}(\cdot, x; X_0, X_1)$ es creciente y cóncava y su derivada $\mathcal{K}'(\cdot, x; X_0, X_1)$ es no negativa y decreciente.

Dado un espacio invariante por reordenamiento X sobre $[0,\infty)$, el espacio $(X_0, X_1)_X$ está formado por los vectores $x \in X_0 + X_1$ tales que la derivada de su K–funcional, $\mathcal{K}'(\cdot, x; X_0, X_1)$ pertenece a X, y se le dota de la norma

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_X} = \|\mathcal{K}'(\cdot, x; X_0, X_1)\|_X\ .$$

El espacio $(X_0, X_1)_X$ así construido es un espacio de interpolación entre X_0 y X_1 (ver [BS, Chp. V]), es decir, si $T\colon X_0 + X_1 \to X_0 + X_1$ es un operador lineal tal que aplica X_i en X_i de manera continua para cada $i = 0, 1$, entonces T aplica $(X_0, X_1)_X$ en $(X_0, X_1)_X$ continuamente.

Todo espacio invariante por reordenamiento X sobre $[0,\infty)$, se puede obtener a través del procedimiento anterior, conocido por K–método de interpolación de Peetre, como $X = (L^1, L^\infty)_X$.

4. Espacios de Orlicz. Dados un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y una función $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ creciente, continua, convexa y cumpliendo que $\Phi(t) = 0$

si y sólo si $t = 0$, el espacio de Orlicz

$$L^{\Phi}(\mu) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} : \int \Phi(\alpha|f|)d\mu < \infty \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} ,$$

es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{\Phi} = \inf\left\{k > 0 : \int \Phi\Big(\frac{|f|}{k}\Big)d\mu \leq 1\right\} .$$

Más aún, $L^{\Phi}(\mu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de (Ω, Σ, μ), con la propiedad de Fatou. Para resultados relacionados con espacios de Orlicz, ver [KR] y [RR].

5. Espacios $L^1(\nu)$. Sea Σ una σ–álgebra de partes de un conjunto Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \Sigma \to X$ una *medida vectorial*, es decir, una función de conjuntos numerablemente aditiva: $\sum \nu(A_n)$ converge a $\nu(\cup A_n)$ en X, siempre que $(A_n) \subset \Sigma$ sea una sucesión de conjuntos disjuntos. Obsérvese que en este caso ν es *fuertemente aditiva*, es decir, $\nu(A_n) \to 0$ para toda sucesión de conjuntos disjuntos $(A_n) \subset \Sigma$. Luego ν es acotada, es decir, el rango de ν es un conjunto acotado de X, [DU, Corollary I.1.19].

Para cada $x^* \in X^*$, el espacio dual de X, la variación de la medida $x^*\nu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ será denotada por $|x^*\nu|$. La *semivariación* de ν es la función de conjuntos definida sobre Σ por

$$\|\nu\|(A) = \sup\{|x^*\nu|(A) : x^* \in B_{X^*}\} ,$$

donde B_{X^*} es la bola unidad de X^*. Se tiene que $\|\nu\|$ es una función monótona creciente, numerablemente subaditiva y para todo $A \in \Sigma$ cumple

$$\frac{1}{2}\|\nu\|(A) \leq \sup\{\|\nu(B)\|_X : B \in \Sigma \cap 2^A\} \leq \|\nu\|(A) ,$$

[DU, Proposition I.1.11]. El ser ν acotada equivale a que la semivariación de ν es una función finita. Un conjunto $A \in \Sigma$ es *ν–nulo* si $\|\nu\|(A) = 0$. Una propiedad se cumple *en casi todo* respecto de ν (ν–e.c.t.) si se cumple en todos los puntos de Ω salvo en los de un conjunto ν–nulo.

Una medida numerablemente aditiva $\lambda\colon \Sigma \to [0,\infty)$ es una *medida de control* para ν si

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \|\nu(A)\| = 0 \,.$$

Ésto implica que si $\lambda(A) = 0$ entonces $\|\nu\|(A) = 0$. Más aún, esta última condición equivale a que λ sea medida de control para ν, gracias a que λ y ν están definidas sobre una σ–álgebra y son numerablemente aditivas.

Bartle, Dunford y Schwartz prueban que toda medida vectorial definida sobre una σ–álgebra tiene una medida de control [BDS, Corollary 2.4]. Posteriormente, Rybakov prueba que dicha medida de control se puede tomar de la forma $|x_0^*\nu|$ para cierta $x_0^* \in B_{X^*}$, [DU, Theorem IX.2.2]. En este caso se dice que $|x_0^*\nu|$ es una *medida de control de Rybakov* para ν. Observamos que para una medida de control de Rybakov $\lambda = |x_0^*\nu|$ se cumple que $\|\nu\|(A) = 0$ si y sólo si $\lambda(A) = 0$. Los vectores $x^* \in X^*$ tales que $|x^*\nu|$ es medida de control para ν forman un conjunto denso en X^* [DU, Corollary IX.2.3], que además es G_δ [BL].

Para resultados generales sobre medidas vectoriales ver [DU] y [D].

Identificando funciones iguales ν–e.c.t., el espacio $L^1_w(\nu)$ de funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ integrables respecto de $x^*\nu$, para todo $x^* \in X^*$, es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\nu = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \int |f|d|x^*\nu| \,,$$

ver [KK] y también [St, Theorem 9]. Además, $L^1_w(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de (Ω,Σ,λ), siendo λ cualquier medida de control de Rybakov para ν. Nótese que $L^1_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou y por tanto es un espacio de Banach de funciones en el sentido de Bennett y Sharpley.

Una función $f \in L^1_w(\nu)$ es *integrable* respecto de ν (en el sentido de Lewis [L1, Definition 2.1]) si cumple que para cada $A \in \Sigma$, existe un vector $\int_A f d\nu \in X$ tal que

$$x^*\Big(\int_A f d\nu\Big) = \int_A f dx^*\nu \,, \quad \text{para todo } x^* \in X^* \,.$$

Cuando $A = \Omega$, escribiremos $\int f d\nu$ en lugar de $\int_\Omega f d\nu$.

El espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de ν con la norma $\|\cdot\|_\nu$ es un espacio de Banach, [KK, II.2, Theorem IV.4.1, Theorem IV.7.1]. Toda función simple $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $A_i \in \Sigma$, es integrable respecto de ν y

$$\int_A \varphi d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i \cap A) \ , \quad \text{para todo } A \in \Sigma \ .$$

Aún más, las funciones simples son densas en $L^1(\nu)$, [L2, Theorem 3.5].

El espacio $L^1(\nu)$ cumple el siguiente teorema de convergencia dominada: Dados $f_n, g \in L^1(\nu)$ tales que $f_n \to f$ ν–e.c.t. y $|f_n| \leq g$ para todo n, se tiene que $f \in L^1(\nu)$ y $f_n \to f$ en $L^1(\nu)$, [BDS, Theorem 2.8] y [L1, Theorem 2.2].

Dada una medida de control de Rybakov λ para ν, al ser $L^1_w(\nu)$ un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ en el sentido de Bennett y Sharpley, y $L^1(\nu)$ la clausura de las funciones simples en $L^1_w(\nu)$, se tiene que $L^1(\nu)$ es un *ideal de funciones medibles* repecto de λ, es decir, si f es una función medible tal que $|f| \leq |g|$ λ–e.c.t. para algún $g \in L^1(\nu)$, entonces $f \in L^1(\nu)$, [BS, Theorem I.3.11]. Por tanto, $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, que además es orden continuo y tiene unidad débil, [C2, Theorem 1]. Nótese que la orden continuidad de $L^1(\nu)$ se sigue directamente del teorema de convergencia dominada.

Como $L^1(\nu)$ es un ideal de funciones medibles que contiene a las funciones simples, toda función f medible y acotada está en $L^1(\nu)$ con $\|f\|_\nu \leq \|f\|_\infty \|\nu\|(\Omega)$.

El espacio $L^1(\nu)$ es un subespacio de Banach de funciones de $L^1_w(\nu)$, en este caso con la misma norma. Los espacios $L^1(\nu)$ y $L^1_w(\nu)$ coinciden cuando X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, [L2, Theorem 5.1].

CAPÍTULO 1: Subespacios de $L^1(\nu)$

El espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de una medida vectorial ν definida sobre una σ–álgebra y con valores en un espacio de Banach, como ya hemos señalado en los Preliminares, es un espacio de Banach de funciones orden continuo y con unidad débil respecto de cierto espacio de medida. En este capítulo consideraremos lo que llamamos subespacios de Banach de funciones de $L^1(\nu)$: espacios de Banach de funciones sobre el mismo espacio de medida que $L^1(\nu)$, continuamente contenidos en $L^1(\nu)$. Probaremos que todo subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$ con la propiedad de orden continuidad, se puede describir a través de cierta función estrechamente relacionada con ν, a la que llamamos función ν–norma. Cada función ν–norma genera un subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$. En particular, tomando la función ν–norma adecuada, obtenemos unos espacios tipo Orlicz $L^\Phi(\nu)$, entre los cuáles, aquél cuya función de Orlicz Φ tenga la propiedad Δ_2, se puede describir como el espacio de las funciones medibles f tales que $\Phi(f)$ es integrable respecto de ν.

Sea Σ una σ–álgebra de partes de un conjunto abstracto Ω y $\mathcal{M}$ el espacio de las funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ medibles. A lo largo del capítulo se considerarán diferentes medidas sobre Σ, por tanto sólo identificaremos funciones iguales en casi todo, una vez hallamos fijado la medida.

Sea $\nu\colon \Sigma \to X$ una medida vectorial con valores en un espacio de Banach X. Recordemos que X^* es el espacio dual de X y B_{X^*} la bola unidad de X^*. La siguiente definición nos proporciona la función a partir de la cuál construiremos subespacios de Banach de funciones de $L^1(\nu)$.

Definición 1.1. Una aplicación $\rho\colon X^* \times \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una *función ν–*

norma si tiene las siguientes propiedades:

a) Fijado un elemento $x^* \in X^*$, la aplicación $\rho_{x^*}\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$ definida por $\rho_{x^*}(f) := \rho(x^*, f)$, cumple

a1) $\rho_{x^*}(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ $|x^*\nu|$–e.c.t.,

a2) $\rho_{x^*}(af) = |a|\rho_{x^*}(f)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{M}$,

a3) $\rho_{x^*}(f+g) \leq \rho_{x^*}(f) + \rho_{x^*}(g)$, para todo f, $g \in \mathcal{M}$,

a4) si f, $g \in \mathcal{M}$ y $|f| \leq |g|$ $|x^*\nu|$–e.c.t., entonces $\rho_{x^*}(f) \leq \rho_{x^*}(g)$,

a5) si f, $f_n \in \mathcal{M}$ y $0 \leq f_n \uparrow f$ $|x^*\nu|$–e.c.t., entonces $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$,

a6) $\rho_{x^*}(\chi_\Omega) < \infty$,

a7) existe $C = C(x^*) > 0$ tal que

$$\int |f|d|x^*\nu| \leq C\rho_{x^*}(f) \quad \text{para todo } f \in \mathcal{M} \ .$$

b) Fijado un elemento $f \in \mathcal{M}$, la aplicación $\rho_f\colon X^* \to [0,\infty]$ definida por $\rho_f(x^*) := \rho(x^*, f)$, cumple

b1) $|a|\rho_f(x^*) \leq \rho_f(ax^*)$, para todo $a \in \mathbb{R}$ con $|a| \leq 1$ y $x^* \in X^*$,

b2) si $f = \chi_\Omega$ entonces $\sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_f(x^*) < \infty$.

Ejemplo 1.2. La aplicación $\rho\colon X^* \times \mathcal{M} \to [0,\infty]$ definida por

$$\rho(x^*, f) = \int |f|d|x^*\nu| \ ,$$

es una función ν–norma. De hecho, es esta aplicación la que motiva la definición de función ν–norma, y como veremos más adelante, es la función ν–norma que genera el propio espacio $L^1(\nu)$.

Dada una función ν–norma ρ, para cada $x^* \in X^*$ consideramos el espacio

$$E_{x^*} = \{f \in \mathcal{M} : \rho_{x^*}(f) < \infty\} \ ,$$

donde funciones iguales $|x^*\nu|$–e.c.t. están identificadas. Obsérvese que las propiedades a1)–a7) de la Definición 1.1, establecen que ρ_{x^*} restringida al cono de funciones positivas de $\mathcal{M}$, es una función norma en el sentido de Bennett y Sharpley (ver Preliminares) y como por la propiedad a4), $\rho_{x^*}(f) = \rho_{x^*}(|f|)$ para todo $f \in \mathcal{M}$, se tiene que E_{x^*} es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de medida $(\Omega, \Sigma, |x^*\nu|)$, con norma ρ_{x^*}.

Nótese que si ρ es la función ν–norma del Ejemplo 1.2, entonces cada espacio E_{x^*} es precisamente el espacio $L^1(|x^*\nu|)$.

Definición 1.3. Sea ρ una función ν–norma. Definimos $\rho_\nu \colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ por

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{x^*}(f) \ ,$$

y denotamos $E_w(\rho_\nu) = \{f \in \mathcal{M} : \rho_\nu(f) < \infty\}$, donde funciones iguales ν–e.c.t. están identificadas.

Para la función ν–norma ρ dada en el Ejemplo 1.2, se tiene que $\rho_\nu(f) = \|f\|_\nu$ para toda $f \in \mathcal{M}$ y $E_w(\rho_\nu) = L^1_w(\nu)$. Recordemos que $L^1_w(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, siendo λ una medida de control de Rybakov para ν.

Proposición 1.4. *Dada una función ν–norma ρ, el espacio $E_w(\rho_\nu)$ es un subespacio de Banach de funciones de $L^1_w(\nu)$, con norma ρ_ν.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda = |x_0^*\nu|$ una medida de control de Rybakov para ν, con $x_0^* \in B_{X^*}$. Veamos que ρ_ν cumple las propiedades 1)–7) de la definición de función norma respecto de la medida λ. Teniendo en cuenta que los conjuntos λ–nulos y los ν–nulos coinciden, y que un conjunto ν–nulo es $|x^*\nu|$–nulo para todo $x^* \in X^*$, las propiedades 1)–4) para ρ_ν se siguen de las propiedades correspondientes a1)–a4) para cada ρ_{x^*}.

Probemos la propiedad 5). Sean $f_n, f \in \mathcal{M}$ tales que $0 \leq f_n \uparrow f$ λ–e.c.t. Como ρ_ν cumple la propiedad 4), se tiene que

$$\rho_\nu(f_n) \uparrow \alpha := \sup_{n \geq 1} \rho_\nu(f_n) \leq \rho_\nu(f) \ .$$

Por otro lado, dado $x^* \in B_{X^*}$, como ρ_{x^*} cumple la propiedad a5), tenemos que

$$\rho_{x^*}(f) = \lim_{n\to\infty} \rho_{x^*}(f_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho_\nu(f_n) = \alpha \ .$$

Luego $\rho_\nu(f) \le \alpha$. Se sigue que $\rho_\nu(f_n) \uparrow \rho_\nu(f)$.

La propiedad 6) para ρ_ν es justamente la propiedad b2) para ρ y la propiedad 7) se cumple para la constante $C = C(x_0^*)$ que nos da la propiedad a7) para $\rho_{x_0^*}$.

Al ser ρ_ν una función norma respecto de λ con $\rho_\nu(f) = \rho_\nu(|f|)$ para todo $f \in \mathcal{M}$, se tiene que $E_w(\rho_\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ en el sentido de Bennett y Sharpley. En particular, $E_w(\rho_\nu)$ es un retículo de Banach.

Dado $x^* \in B_{X^*}$, de la propiedad a7) para ρ_{x^*} se sigue que

$$\int |f| d|x^*\nu| \le C(x^*)\rho_{x^*}(f) \le C(x^*)\rho_\nu(f) \ .$$

Luego, si $f \in E_w(\rho_\nu)$, f es integrable respecto de $|x^*\nu|$ para todo $x^* \in B_{X^*}$ y por tanto para todo $x^* \in X^*$. Entonces, $E_w(\rho_\nu)$ está contenido en $L^1_w(\nu)$ y la inclusión está bien definida, pues en ambos espacios se toman clases de equivalencia para funciones iguales ν–e.c.t., o equivalentemente, λ–e.c.t. Al ser un operador lineal y positivo entre retículos de Banach, la inclusión es continua. Luego, $E_w(\rho_\nu)$ es un subespacio de Banach de funciones de $L^1_w(\nu)$ (con distinta norma). □

La finalidad de la propiedad b1) de una función ν–norma ρ es conseguir que para toda $f \in E_w(\rho_\nu)$ se tenga que $f \in E_{x^*}$ para cada $x^* \in X^*$, tal y como ocurre con $L^1(|x^*\nu|)$ y $L^1_w(\nu)$. Dados $f \in \mathcal{M}$ y $x^* \in B_{X^*}$, por definición de ρ_ν se tiene que $\rho_{x^*}(f) \le \rho_\nu(f)$. Si tomamos $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| > 1$, aplicando la propiedad b1) obtenemos

$$\rho_\nu(f) \ge \rho_{\frac{x^*}{\|x^*\|}}(f) = \rho_f\left(\frac{x^*}{\|x^*\|}\right) \ge \frac{\rho_f(x^*)}{\|x^*\|} \ ,$$

y así $\rho_{x^*}(f) \leq \|x^*\| \rho_\nu(f)$. Luego cada $x^* \in X^*$ cumple

$$\rho_{x^*}(f) \leq \max\{1, \|x^*\|\} \rho_\nu(f) \quad \text{para todo } f \in \mathcal{M} .$$

Como todo conjunto ν–nulo es $|x^*\nu|$–nulo, se tiene que $f = g$ ν–e.c.t. implica $f = g$ $|x^*\nu|$–e.c.t y así dos funciones en la misma clase de equivalencia en $E_w(\rho_\nu)$, están en la misma clase de equivalencia en E_{x^*}. Entonces, la aplicación que lleva una clase de $E_w(\rho_\nu)$ representada por f a la clase de E_{x^*} representada por f está bien definida y es continua. Además, es inyectiva, es decir, es la aplicación identidad, si y sólo si $|x^*\nu|$ es una medida de control para ν.

En vista de lo anterior, se tiene la siguiente contención de conjuntos

$$E_w(\rho_\nu) \subset \{f \in \mathcal{M} \, : \, \rho_{x^*}(f) < \infty \quad \text{para todo } x^* \in X^*\} . \tag{1.1}$$

Los dos espacios coincidirán (tras identificar funciones iguales ν–e.c.t.) si para todo $f \in \mathcal{M}$ tal que la aplicación ρ_f es finita, se cumple que $\rho_f(B_{X^*})$ es un conjunto acotado, ya que en ese caso si $f \in \mathcal{M}$ es tal que $\rho_{x^*}(f) < \infty$ para todo $x^* \in X^*$, es decir, ρ_f es finita, se tiene que

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{x^*}(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_f(x^*) < \infty$$

y así $f \in E_w(\rho_\nu)$. Puesto que el hecho de que la inclusión en (1.1) sea una igualdad permite una descripción más sencilla del espacio $E_w(\rho_\nu)$, nos interesa obtener condiciones sobre la función ν–norma ρ que establezcan dicha igualdad.

Es conocido que la función ν–norma dada en el Ejemplo 1.2 cumple la igualdad en (1.1). Este hecho se deduce de aplicar el Teorema de Banach–Steinhaus a los operadores lineales y continuos dados por

$$x^* \in X^* \to \int_A \varphi_n dx^*\nu \in \mathbb{R} \ ,$$

con $A \in \Sigma$ y (φ_n) sucesión de funciones simples y positivas, creciente a $|f|$, para cada $f \in \mathcal{M}$ tal que $\int |f| d|x^*\nu| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$.

Partiendo de esta idea y con una versión del Teorema de Banach–Steinhaus aplicable a funciones del tipo $\rho_f \colon X^* \to [0,\infty)$, siendo ρ una función ν–norma, en la Proposición 1.6 hallamos condiciones que garantizan la igualdad en (1.1). La prueba del siguiente lema es similar a la prueba del resultado clásico de Banach–Steinhaus.

Lema 1.5. *Sea X un espacio de Banach y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de aplicaciones continuas $T_\alpha \colon X \to [0,\infty)$ cumpliendo*

1) $T_\alpha(x+y) \leq T_\alpha(x) + T_\alpha(y)$ para todo $x, y \in X$ (i.e. T_α subaditiva).

2) $|a|T_\alpha(x) \leq T_\alpha(ax)$ para todo $x \in X$ y $a \in \mathbb{R}$ con $|a| \leq 1$.

Si $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es puntualmente acotada (i.e. para cada $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $T_\alpha(x) \leq M_x$ para todo $\alpha \in I$), entonces es uniformemente acotada sobre B_X, es decir, existe $M > 0$ tal que $\sup_{x\in B_X} T_\alpha(x) \leq M$ para todo $\alpha \in I$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$F_n = \{x \in X \,:\, T_\alpha(x) \leq n \text{ para todo } \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha\in I} T_\alpha^{-1}([0,n]) \ .$$

Como cada T_α es continua, F_n es cerrado en X. Al ser $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ puntualmente acotada, se tiene que $X = \cup_{n\geq 1} F_n$. Por el teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} es de interior no vacío. Luego, existen $x_0 \in F_{n_0}$ y $0 < r < 1$ tal que

$$B(x_0, r) = \{x \in X \,:\, \|x - x_0\|_X < r\} \subset F_{n_0} \ .$$

Dados $x \in B_X$ y $\alpha \in I$, aplicando las condiciones 1) y 2), se tiene

$$T_\alpha(x) \leq \frac{1}{r} T_\alpha(rx) \leq \frac{1}{r}\big(T_\alpha(rx + x_0) + T_\alpha(-x_0)\big) \leq \frac{2n_0}{r} \ ,$$

pues $rx + x_0$ y x_0 pertenecen a $B(x_0, r)$ y por 2) $T_\alpha(-y) = T_\alpha(y)$ para todo $y \in X$. Luego, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es uniformemente acotada sobre B_X por $M = 2n_0/r$. □

Proposición 1.6. *Sea ρ una función ν–norma. Si para toda función simple φ, la aplicación $\rho_\varphi \colon X^* \to [0,\infty)$ es subaditiva y continua, entonces*

$$E_w(\rho_\nu) = \{f \in \mathcal{M} \,:\, \rho_{x^*}(f) < \infty \ \text{ para todo } x^* \in X^*\} \ .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{M}$ tal que $\rho_{x^*}(f) < \infty$ para todo $x^* \in X^*$. Dada una sucesión (φ_n) de funciones simples y positivas creciendo a $|f|$, por hipótesis se tiene que cada aplicación $\rho_{\varphi_n}\colon X^* \to [0,\infty)$ es subaditiva y continua, y por la propiedad b1) de ρ cumple que $|a|\rho_{\varphi_n}(x^*) \leq \rho_{\varphi_n}(ax^*)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ con $|a| \leq 1$ y $x^* \in X^*$. Además $\{\rho_{\varphi_n}\}$ es una familia de aplicaciones puntualmente acotada, pues $\rho_{\varphi_n}(x^*) = \rho_{x^*}(\varphi_n) \leq \rho_{x^*}(f)$ para todo n. Entonces, por el Lema 1.5, existe una constante $M > 0$ tal que $\sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{\varphi_n}(x^*) \leq M$ para todo n. Por la propiedad a5) de ρ, para cada $x^* \in B_{X^*}$ se tiene que $\rho_{x^*}(f) = \rho_{x^*}(|f|) = \lim_{n\to\infty} \rho_{x^*}(\varphi_n) \leq M$. Luego

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{x^*}(f) \leq M$$

y así $f \in E_w(\rho_\nu)$. □

Dada una función ν–norma ρ hemos construido un subespacio de Banach de funciones $E_w(\rho_\nu)$ de $L^1_w(\nu)$. A partir de $E_w(\rho_\nu)$, obtenemos un subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$.

Definición 1.7. Sea ρ una funcion ν–norma. Se define el espacio $E(\rho_\nu)$ como la clausura de las funciones simples en el espacio $E_w(\rho_\nu)$.

Obsérvese que, tal y como habíamos adelantado, para la función ν–norma ρ del Ejemplo 1.2 el espacio $E(\rho_\nu)$ es precisamente $L^1(\nu)$.

Proposición 1.8. *Dada una función ν–norma ρ, el espacio $E(\rho_\nu)$ es un subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$, con norma ρ_ν.*

DEMOSTRACIÓN. Como por definición $E(\rho_\nu)$ es un subespacio vectorial cerrado en $E_w(\rho_\nu)$, tenemos que $E(\rho_\nu)$ es un espacio de Banach. En la prueba de la Proposición 1.4 vimos que $E_w(\rho_\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ en el sentido de Bennett y Sharpley, siendo λ una medida de control de Rybakov para ν. Al ser $E(\rho_\nu)$ la clausura de las funciones simples en $E_w(\rho_\nu)$, se tiene que $E(\rho_\nu)$ es un ideal de funciones medibles respecto de λ, es decir, $f \in E(\rho_\nu)$ siempre que $f \in \mathcal{M}$ con $|f| \leq |g|$ λ–e.c.t. para algún $g \in E(\rho_\nu)$, [BS, Theorem I.3.11]. Luego $E(\rho_\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$. De hecho, $E(\rho_\nu)$ es un subespacio de Banach de funciones de $E_w(\rho_\nu)$.

Dada una función $f \in E(\rho_\nu)$, por definición existe una sucesión de funciones simples (φ_n) tales que $\varphi_n \to f$ en norma ρ_ν. Por la Proposición 1.4 tenemos que $E_w(\rho_\nu)$ está continuamente contenido en $L^1_w(\nu)$, entonces $\varphi_n \to f$ en norma $\|\cdot\|_\nu$ y como $L^1(\nu)$ es la clausura de las funciones simples en $L^1_w(\nu)$, se tiene que $f \in L^1(\nu)$. Luego $E(\rho_\nu)$ está continuamente contenido en $L^1(\nu)$. □

La orden continuidad de un subespacio de Banach de funciones Y de $L^1(\nu)$, será una de las claves para que Y se pueda representar como un espacio $E(\rho_\nu)$ generado por una función ν–norma ρ. Con respecto a la orden continuidad de un espacio del tipo $E(\rho_\nu)$, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.9. *Sea ρ una función ν–norma y λ una medida de control de Rybakov para ν. Se cumple*

a) $E(\rho_\nu)$ es orden continuo si y sólo si $\rho_\nu(\chi_A) \to 0$ cuando $\|\nu\|(A) \to 0$.

b) Si $E(\rho_\nu)$ es orden continuo, entonces

$$E(\rho_\nu) = \left\{ f \in \mathcal{M} : \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \rho_\nu(f\chi_A) = 0 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. El espacio $E(\rho_\nu)$ es orden continuo si y sólo si todas sus funciones tienen norma absolutamente continua respecto de λ (ver Preliminares). Como $E(\rho_\nu)$ es la clausura de las funciones simples en el espacio de Banach de funciones (en el sentido de Bennett y Sharpley) $E_w(\rho_\nu)$ respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ y λ es finita, de [BS, Theorem I.3.13] se deduce que $E(\rho_\nu)$ es orden continuo si y sólo si χ_Ω tiene norma absolutamente continua, es decir, $\rho_\nu(\chi_A) \to 0$ cuando $\lambda(A) \to 0$, o equivalentemente, $\|\nu\|(A) \to 0$. Por tanto a) se cumple.

Probemos b). Supongamos que $E(\rho_\nu)$ es orden continuo. Entonces toda función $f \in E(\rho_\nu)$ tiene norma absolutamente continua respecto de λ y como λ es medida de control para ν, $\rho_\nu(f\chi_A) \to 0$ cuando $\|\nu\|(A) \to 0$.

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{M}$ con $\rho_\nu(f\chi_A) \to 0$ cuando $\|\nu\|(A) \to 0$, o equivalentemente $\lambda(A) \to 0$. Tomando $f_n = f\chi_{|f|^{-1}([0,n])}$ se tiene que $f_n \in E(\rho_\nu)$, pues $E(\rho_\nu)$ es un ideal que contiene a las funciones simples y cada f_n es acotada. Como $\lambda\big(|f|^{-1}((n,m])\big) \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, se tiene que $\rho_\nu(f_m - f_n) = \rho_\nu\big(f\chi_{|f|^{-1}((n,m])}\big) \to 0$. Entonces, existe $h \in E(\rho_\nu)$ tal que $f_n \to h$ en $E(\rho_\nu)$ y existe una subsucesión $f_{n_k} \to h$ λ–e.c.t. Al ser $f_n \to f$ puntualmente, se concluye que $f = h \in E(\rho_\nu)$. $\square$

Los espacios $L^p(\nu) = \{f \in \mathcal{M} : f^p \in L^1(\nu)\}$, estudiados por Sánchez [S1], pueden ser generados a través de una función ν–norma.

Ejemplo 1.10. Dado $p \in [1,\infty)$, sea ρ: $X^* \times \mathcal{M} \to [0,\infty]$ la aplicación definida por

$$\rho(x^*, f) = \Big(\int |f|^p d|x^*\nu|\Big)^{1/p} .$$

Se comprueba de forma directa que ρ es una función ν–norma. Para cada $x^* \in X^*$, el espacio E_{x^*} coincide con el espacio $L^p(|x^*\nu|)$. Además, para todo $f \in \mathcal{M}$ se tiene que

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{x^*}(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \Big(\int |f|^p d|x^*\nu|\Big)^{1/p} = \|f^p\|_\nu^{1/p} .$$

Por tanto $E_w(\rho_\nu) = \{f \in \mathcal{M} : f^p \in L^1_w(\nu)\}$, alcanzándose en este caso la igualdad en (1.1). El espacio $L^p(\nu)$, obviamente contenido en $E_w(\rho_\nu)$, dotado de la norma ρ_ν, es un espacio de Banach donde las funciones simples son densas, [S1, Proposition 4]. Entonces, $E(\rho_\nu)$ coincide con $L^p(\nu)$. La orden continuidad del espacio $L^p(\nu)$, probada por Sánchez en [S1, Proposition 6], se puede comprobar directamente a través del Lema 1.9.a):

$$\lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \rho_\nu(\chi_A) = \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \|\chi_A\|_\nu^{1/p} = \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \|\nu\|(A)^{1/p} = 0 .$$

Basándonos en normas de espacios de Banach conocidos, podemos crear funciones ν–norma y con ellas definir subespacios de Banach de funciones de $L^1(\nu)$. Ésto es lo que haremos a continuación con los espacios de Orlicz.

Ejemplo 1.11. Sea Φ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ una función creciente, continua, convexa, tal que $\Phi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Consideramos la aplicación

$\rho\colon X^* \times \mathcal{M} \to [0,\infty]$ definida por

$$\rho(x^*, f) = \inf\Big\{k > 0 : \int \Phi\Big(\frac{|f|}{k}\Big) d|x^*\nu| \leq 1\Big\}\,. \tag{1.2}$$

Obsérvese que si el ínfimo en (1.2) es finito y estrictamente positivo, entonces es un mínimo. Se comprueba de forma directa que ρ es una función ν–norma. Para cada $x^* \in X^*$, el espacio $E_{x^*} = \{f \in \mathcal{M} : \rho_{x^*}(f) < \infty\}$ es el espacio de Orlicz clásico $L^\Phi(|x^*\nu|)$.

A partir de la función ν–norma dada en el Ejemplo 1.11, construimos los espacios $E_w(\rho_\nu)$ y $E(\rho_\nu)$ a los que denotaremos por $L^\Phi_w(\nu)$ y $L^\Phi(\nu)$ respectivamente. Denominaremos a $L^\Phi(\nu)$ espacio de Orlicz respecto de la medida vectorial ν y la función Φ. Aunque por analogía con los espacios de Orlicz clásicos este título pudiera corresponder a $L^\Phi_w(\nu)$, en vista de la próxima Observación 1.16, creemos más conveniente otorgárselo a $L^\Phi(\nu)$. Los espacios $L^\Phi(\nu)$ generalizan a los espacios $L^p(\nu)$, los cuáles se obtienen tomando la función $\Phi(t) = t^p$.

Proposición 1.12. *El espacio $L^\Phi_w(\nu)$ cumple la igualdad en* (1.1). *Además, el espacio $L^\Phi(\nu)$ es orden continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que para toda función $f \in \mathcal{M}$, la aplicación $\rho_f\colon X^* \to [0,\infty]$ es subaditiva. Sean $f \in \mathcal{M}$ y $x_1^*, x_2^* \in X^*$. Supongamos que $\rho_f(x_i^*) < \infty$ para $i = 1,2$, entonces existen $k_1, k_2 > 0$ cumpliendo que $\int \Phi\big(\frac{|f|}{k_i}\big) d|x_i^*\nu| \leq 1$ con $i = 1,2$ y así

$$\begin{aligned}
\int \Phi\Big(\frac{|f|}{k_1 + k_2}\Big) d|(x_1^* + x_2^*)\nu| \;&\leq\; \sum_{i=1,2} \int \Phi\Big(\frac{|f|}{k_1 + k_2}\Big) d|x_i^*\nu| \\
&\leq\; \sum_{i=1,2} \frac{k_i}{k_1 + k_2} \int \Phi\Big(\frac{|f|}{k_i}\Big) d|x_i^*\nu| \leq 1\,.
\end{aligned}$$

Luego, de (1.2) se sigue que $\rho_f(x_1^* + x_2^*) \leq k_1 + k_2$, de donde tomando ínfimo en k_1 y k_2 se obtiene $\rho_f(x_1^* + x_2^*) \leq \rho_f(x_1^*) + \rho_f(x_2^*)$. El caso $\rho_f(x_i^*) = \infty$ para algún $i = 1,2$ es trivial.

Sea $h \in \mathcal{M}$ acotada ν–e.c.t. por una constante $C > 0$. La aplicación $\rho_h : X^* \to [0, \infty)$ es continua en cero, pues dado $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\int \Phi\Big(\frac{|h|}{\varepsilon}\Big) d|x^*\nu| \leq \Phi\Big(\frac{C}{\varepsilon}\Big)|x^*\nu|(\Omega) \leq \Phi\Big(\frac{C}{\varepsilon}\Big)\|\nu\|(\Omega)\|x^*\| \leq 1$$

siempre que $\|x^*\| \leq \delta_\varepsilon = \big(\|\nu\|(\Omega)\Phi(C/\varepsilon)\big)^{-1}$ y así, por (1.2), $\rho_h(x^*) \leq \varepsilon$ para todo $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq \delta_\varepsilon$. De la subaditividad de ρ_h, se sigue que es continua en todo $x^* \in X^*$.

En particular, para toda función simple φ la aplicación $\rho_\varphi : X^* \to [0, \infty)$ es subaditiva y continua. Luego, por la Proposición 1.6 se tiene que $L_w^\Phi(\nu)$ cumple la igualdad en (1.1).

El espacio $L^\Phi(\nu)$ es orden continuo si y sólo si $\rho_\nu(\chi_A) \to 0$ cuando $\|\nu\|(A) \to 0$ (Lema 1.9 a)). Dado $\varepsilon > 0$, para todo $x^* \in B_{X^*}$ tenemos

$$\int \Phi\Big(\frac{\chi_A}{\varepsilon}\Big) d|x^*\nu| = \Phi\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)|x^*\nu|(A) \leq \Phi\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)\|\nu\|(A) \leq 1$$

siempre que $\|\nu\|(A) \leq \delta_\varepsilon = \Phi\big(\frac{1}{\varepsilon}\big)^{-1}$ y en este caso, por (1.2), $\rho_{x^*}(\chi_A) \leq \varepsilon$. Luego, $\rho_\nu(\chi_A) \leq \varepsilon$ siempre que $\|\nu\|(A) \leq \delta_\varepsilon$. Por tanto $L^\Phi(\nu)$ es orden continuo. □

Una propiedad importante de las funciones de Orlicz es la propiedad Δ_2, es decir, la existencia de una constante $b > 0$ tal que $\Phi(2t) \leq b\Phi(t)$ para todo $t \geq 0$. En nuestro caso, nos permite dar una descripción simple y elegante de los espacios $L_w^\Phi(\nu)$ y $L^\Phi(\nu)$.

En el caso de que Φ tenga la propiedad Δ_2, para cada $x^* \in X^*$ y $f \in \mathcal{M}$, se tiene que $\rho_{x^*}(f) < \infty$ si y sólo si $\int \Phi(|f|) d|x^*\nu| < \infty$. Luego, de la igualdad (1.1) para $L_w^\Phi(\nu)$, obtenemos

$$L_w^\Phi(\nu) = \{f \in \mathcal{M} : \Phi(|f|) \in L_w^1(\nu)\}\ .$$

Para describir $L^\Phi(\nu)$ de manera análoga, necesitaremos la siguiente caracterización de convergencia en $L_w^\Phi(\nu)$.

Proposición 1.13. *Supongamos que la función Φ tiene la propiedad Δ_2. Entonces, una sucesión (f_n) converge a cero en la norma de $L^\Phi_w(\nu)$ si y sólo si la sucesión $(\Phi(|f_n|))$ converge a cero en la norma de $L^1_w(\nu)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (f_n) una sucesión convergente a cero en $L^\Phi_w(\nu)$. Entonces para n suficientemente grande tenemos que $\rho_{x^*}(f_n) \le \rho_\nu(f_n) \le 1$ para todo $x^* \in B_{X^*}$. Si $\rho_{x^*}(f_n) > 0$, de la convexidad de Φ se sigue que

$$\int \Phi(|f_n|)d|x^*\nu| \le \rho_{x^*}(f_n) \int \Phi\Big(\frac{|f_n|}{\rho_{x^*}(f_n)}\Big)d|x^*\nu| \le \rho_{x^*}(f_n) \le \rho_\nu(f_n) \ .$$

Si $\rho_{x^*}(f_n) = 0$, entonces $f_n = 0$ $|x^*\nu|$–e.c.t. y así $\int \Phi(|f_n|)d|x^*\nu| = 0$. Luego $\|\Phi(|f_n|)\|_\nu \le \rho_\nu(f_n)$ y por tanto $(\Phi(|f_n|))$ converge a cero en $L^1_w(\nu)$.

Recíprocamente, supongamos que $(\Phi(|f_n|))$ converge a cero en norma $\|\cdot\|_\nu$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k_\varepsilon} < \varepsilon$. Por la propiedad Δ_2 de Φ, se tiene que

$$\int \Phi(2^{k_\varepsilon}|f_n|)d|x^*\nu| \le b^{k_\varepsilon} \int \Phi(|f_n|)d|x^*\nu| \le b^{k_\varepsilon}\|\Phi(|f_n|)\|_\nu \le 1$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$ y para n suficientemente grande (dependiendo sólo de ε). Luego $\rho_\nu(f_n) \le 1/2^{k_\varepsilon} < \varepsilon$ para n suficientemente grande. □

Observación 1.14. La condición de necesidad en la Proposición 1.13 se cumple aunque Φ no satisfaga la condición Δ_2, es decir, si Φ es una función de Orlicz cualquiera entonces $f_n \to 0$ en $L^\Phi_w(\nu)$ implica que $\Phi(|f_n|) \to 0$ en $L^1_w(\nu)$. Respecto de la suficiencia, podemos relajar la hipótesis y exigir sólo la condición Δ_2 en el infinito, es decir, existe $t_0 > 0$ y $b > 0$ tales que si $t \ge t_0$ entonces $\Phi(2t) \le b\Phi(t)$. En este caso, si $\|\Phi(|f_n|)\|_\nu \to 0$, existe una subsucesión $\Phi(|f_{n_j}|) \to 0$ ν–e.c.t., entonces como Φ es una función positiva, creciente, que sólo se anula en cero, se tiene que $f_{n_j} \to 0$ ν–e.c.t. Dado $\varepsilon > 0$, sea $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k_\varepsilon} < \varepsilon$. Por la propiedad Δ_2 de Φ se tiene que

$$\int_{|f_{n_j}|^{-1}[t_0,\infty)} \Phi(2^{k_\varepsilon}|f_{n_j}|)d|x^*\nu| \le b^{k_\varepsilon} \int \Phi(|f_{n_j}|)d|x^*\nu| \le b^{k_\varepsilon}\|\Phi(|f_{n_j}|)\|_\nu$$

y así

$$\int \Phi(2^{k_\varepsilon}|f_{n_j}|)d|x^*\nu| \le b^{k_\varepsilon}\|\Phi(|f_{n_j}|)\|_\nu + \|\Phi(2^{k_\varepsilon}|f_{n_j}|)\chi_{|f_{n_j}|^{-1}[0,t_0)}\|_\nu \le 1$$

para j suficientemente grande (dependiendo sólo de ε), donde se ha usado el teorema de convergencia dominada para las funciones $\Phi(2^{k_\varepsilon}|f_{n_j}|)\chi_{|f_{n_j}|^{-1}[0,t_0)}$ que están acotadas por $\Phi(2^{k_\varepsilon}t_0)\chi_\Omega \in L^1(\nu)$ y cumplen $\Phi(2^{k_\varepsilon}|f_{n_j}|) \to 0$ ν–e.c.t. Luego, $\rho_\nu(f_{n_j}) \leq 1/2^{k_\varepsilon} < \varepsilon$ para j suficientemente grande.

Por tanto, si Φ tiene la propiedad Δ_2 en el infinito, la condición de suficiencia en la Proposición 1.13 se obtiene sólo para una subsucesión (f_{n_k}), pero ésto nos basta para obtener la descripción de $L^\Phi(\nu)$ dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.15. *Si Φ cumple la propiedad Δ_2 en el infinito, entonces*

$$L^\Phi(\nu) = \{f \in \mathcal{M} \, : \, \Phi(|f|) \in L^1(\nu)\} \, .$$

DEMOSTRACIÓN. El espacio $L^\Phi(\nu)$ es orden continuo (Proposición 1.12), entonces por el Lema 1.9.b), se tiene

$$L^\Phi(\nu) = \left\{f \in \mathcal{M} \, : \, \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \rho_\nu(f\chi_A) = 0\right\} .$$

Si Φ tiene la propiedad Δ_2 en el infinito, de la Observación 1.14, se sigue

$$\begin{aligned} L^\Phi(\nu) &= \left\{f \in \mathcal{M} : \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \|\Phi(|f|)\chi_A\|_\nu = 0\right\} \\ &= \{f \in \mathcal{M} : \Phi(|f|) \in L^1(\nu)\} \, , \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de [L1, Theorem 2.6], que viene a ser el Lema 1.9.b) aplicado al espacio $L^1(\nu)$. □

Observación 1.16. Supongamos que Φ cumple la propiedad Δ_2 en el infinito. Entonces, $L^\Phi(\nu) = L^\Phi_w(\nu)$ si y sólo si $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$. Luego existen medidas vectoriales ν tales que $L^\Phi(\nu) \subsetneq L^\Phi_w(\nu)$, mientras que las funciones simples son densas en el espacio de Orlicz $L^\Phi(\mu)$ para una medida μ positiva y finita, pues Φ cumple la propiedad Δ_2. Nótese que si X no contiene ninguna copia de c_0, entonces $L^1_w(\nu) = L^1(\nu)$ y así $L^\Phi(\nu) = L^\Phi_w(\nu)$.

Hemos visto que toda función ν–norma ρ genera el subespacio de Banach de funciones $E(\rho_\nu)$ de $L^1(\nu)$. La cuestión ahora es si cualquier subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$ en el sentido que hemos dado nosotros a este concepto, se puede generar a través de una función ν–norma. La respuesta será positiva para subespacios orden continuos.

Teorema 1.17. *Sea Σ una σ–álgebra de partes de un conjunto Ω, X un espacio de Banach, $\nu\colon \Sigma \to X$ una medida vectorial y λ una medida de control de Rybakov para ν. Sea Y un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ tal que Y está continuamente incluido en $L^1(\nu)$. Entonces existe una función ν–norma ρ tal que $Y = E(\rho_\nu)$ y $\|f\|_Y = \rho_\nu(f)$ para todo $f \in Y$.*

Antes de probar el Teorema 1.17, conozcamos los elementos que entran en juego.

Sea $\nu\colon \Sigma \to X$ una medida vectorial, Y un subespacio de Banach de funciones de $L^1(\nu)$ y $\lambda = |x_0^*\nu|$ una medida de control de Rybakov para ν.

Definición 1.18. Dado $x^* \in X^*$, definimos el espacio

$$Y'_{x^*} = \left\{ g \in Y' \,:\, g\chi_{[h_{x^*}=0]} = 0 \ \lambda\text{–e.c.t.} \right\} \subset Y' ,$$

donde Y' es el dual de Köthe de Y (respecto de λ) y h_{x^*} es la derivada de Radon-Nikodym de la medida $|x^*\nu|$ respecto de λ. En Y'_{x^*} consideramos la norma y el orden de Y'.

Obsérvese que como Y está continuamente contenido en $L^1(\nu)$ y todo $f \in L^1(\nu)$ es integrable respecto de $|x^*\nu|$, se tiene que $h_{x^*} \in Y'_{x^*}$. El espacio Y'_{x^*} es un ideal de Y', es decir, un subespacio vectorial cerrado para el cuál $f \in Y'_{x^*}$ siempre que $|f| \leq |g|$ λ–e.c.t. para algún $g \in Y'_{x^*}$. De hecho Y'_{x^*} es una banda de Y' [LT, p. 3].

En general, las funciones simples no están incluidas en Y'_{x^*}, pues si lo estuvieran entonces para todo $A \in \Sigma$ con $|x^*\nu|(A) = 0$ (o equivalentemente

$h_{x^*}\chi_A = 0$ λ–e.c.t.) como $\chi_{A\cap[h_{x^*}=0]} = 0$ λ–e.c.t. se tendría que $\lambda(A) = 0$, es decir, λ sería absolutamente continua respecto de $|x^*\nu|$. De hecho las funciones simples están en Y'_{x^*} si y sólo si λ es absolutamente continua respecto de $|x^*\nu|$, o equivalentemente $Y'_{x^*} = Y'$, pues si $\lambda(A) = 0$ para todo $A \in \Sigma$ con $|x^*\nu|(A) = 0$, dado $g \in Y'$, como $Sop(g) \cap [h_{x^*} = 0]$ es $|x^*\nu|$–nulo, se tiene que $g\chi_{[h_{x^*}=0]} = 0$ λ–e.c.t., es decir, $g \in Y'_{x^*}$.

Los ideales Y'_{x^*} nos permitirán definir una función ν–norma ρ tal que el espacio $E_w(\rho_\nu)$ es precisamente Y'', el bidual de Köthe de Y.

Proposición 1.19. *La aplicación* ρ: $X^* \times \mathcal{M} \to [0,\infty]$ *definida por*

$$\rho(x^*, f) = \sup_{g \in B_{Y'_{x^*}}} \int |gf| d\lambda \ ,$$

es una función ν–norma.

DEMOSTRACIÓN. Dado $x^* \in X^*$, veamos que $\rho_{x^*} : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ cumple la condición a) de la Definición 1.1. Si $f = 0$ $|x^*\nu|$–e.c.t., entonces su conjunto soporte $Sop(f)$ cumple que $\lambda\big(Sop(f) \cap Sop(h_{x^*})\big) = 0$ y así $f\chi_{Sop(h_{x^*})} = 0$ λ–e.c.t. Luego $fg = 0$ λ–e.c.t. para todo $g \in Y'_{x^*}$ y por tanto $\rho_{x^*}(f) = 0$. Recíprocamente, si $\rho_{x^*}(f) = 0$, como $h_{x^*} \in Y'_{x^*}$ tenemos que $\int |f| d|x^*\nu| = \int |f| h_{x^*} d\lambda = 0$ y así $f = 0$ $|x^*\nu|$–e.c.t. Ésto prueba que ρ_{x^*} cumple la propiedad a1). Se comprueba directamente que ρ_{x^*} cumple las propiedades a2)-a4).

Probemos la propiedad a5). Sean $f_n, f \in \mathcal{M}$ tales que $0 \leq f_n \uparrow f$ en Z^c, el complementario de $Z \in \Sigma$ con $|x^*\nu|(Z) = 0$, o equivalentemente, $\lambda(Z \cap [h_{x^*} \neq 0]) = 0$. Dada $g \in B_{Y'_{x^*}}$ se tiene que $0 \leq f_n|g| \uparrow f|g|$ λ–e.c.t., ya que $\lambda(Z \cap Sop(g)) \leq \lambda(Z \cap [h_{x^*} \neq 0]) + \lambda(Sop(g) \cap [h_{x^*} = 0]) = 0$. Por el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$\int |fg| d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int |f_n g| d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \rho_{x^*}(f_n) \leq \rho_{x^*}(f) \ ,$$

de donde tomando supremo en $g \in B_{Y'_{x^*}}$ se sigue que $\rho_{x^*}(f_n) \uparrow \rho_{x^*}(f)$.

Para todo $A \in \Sigma$ se tiene $\rho_{x^*}(\chi_A) \leq \|\chi_A\|_Y$, por tanto la propiedad a6) también se cumple. La propiedad a7) se sigue de

$$\int |f| d|x^*\nu| = \int |f| h_{x^*} d\lambda \leq \|h_{x^*}\|_{Y'} \rho_{x^*}(f) .$$

Fijemos $f \in \mathcal{M}$. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $h_{ax^*} = |a| h_{x^*}$ λ–e.c.t. Ésto implica que $Y'_{ax^*} = Y'_{x^*}$ para $a \neq 0$. Luego $\rho_f(ax^*) = \rho_f(x^*) \geq |a|\rho_f(x^*)$ siempre que $0 < |a| \leq 1$. Por tanto la aplicación $\rho_f \colon X^* \to [0, \infty]$ cumple la propiedad b1) (el caso $a = 0$ es trivial). También cumple la propiedad b2), pues $\sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{\chi_\Omega}(x^*) \leq \|\chi_\Omega\|_Y$. □

Sea ρ la función ν–norma definida en la Proposición 1.19. Para cada $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\rho_{x^*}(f) = \sup_{g \in B_{Y'_{x^*}}} \int |fg| d\lambda \leq \sup_{g \in B_{Y'}} \int |fg| d\lambda = \rho_{x_0^*}(f) ,$$

pues $Y'_{x_0^*} = Y'$ al ser $|x_0^*\nu|$ una medida de control de Rybakov para ν, con $x_0^* \in B_{X^*}$. Entonces

$$\rho_\nu(f) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \rho_{x^*}(f) = \rho_{x_0^*}(f) = \|f\|_{Y''}$$

y así $E_w(\rho_\nu) = Y''$. Luego, el espacio $E(\rho_\nu)$ no es más que la clausura de las funciones simples en Y''.

De todo lo anterior se deduce la tesis del Teorema 1.17. Si Y es orden continuo, se tiene que Y' es orden isométrico a Y^* y entonces

$$\|f\|_Y = \sup_{g \in B_{Y'}} \left| \int g f d\lambda \right| = \|f\|_{Y''} \quad \text{para todo } f \in Y .$$

Además, la orden continuidad implica que las funciones simples son densas en Y, luego Y es la clausura de las funciones simples en Y'' y por tanto $Y = E(\rho_\nu)$.

CAPÍTULO 2: $L^1(\nu)$ para ν definida sobre un δ–anillo.

SECCIÓN 1. En esta sección repasaremos la teoría de integración respecto de medidas vectoriales definidas sobre unas estructuras de conjuntos más débiles que las σ–álgebras, llamadas δ–anillos. Esta teoría de integración debida a Lewis [L2] y a Masani y Niemi [MN1], [MN2], amplía la teoría ya conocida para medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras, permitiéndonos integrar respecto de un mayor número de medidas.

Un *δ–anillo* es una colección $\mathcal{R}$ de partes de un conjunto Ω, cerrado por uniones finitas, diferencia e intersecciones numerables de conjuntos. A cada δ–anillo $\mathcal{R}$ se le asocia la σ-álgebra

$$\mathcal{R}^{loc} = \{A \subset \Omega \,:\, A \cap B \in \mathcal{R} \text{ para todo } B \in \mathcal{R}\} .$$

El espacio de funciones reales y medibles sobre $(\Omega, \mathcal{R}^{loc})$ será denotado por $\mathcal{M}$. Las funciones simples se consideran respecto de $\mathcal{R}^{loc}$. Una *función $\mathcal{R}$–simple* es una función del tipo $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $A_i \in \mathcal{R}$. Nótese que el espacio de las funciones $\mathcal{R}$–simples es precisamente el espacio de las funciones simples con soporte en $\mathcal{R}$.

Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo y $\lambda\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una medida numerablemente aditiva, es decir, $\sum \lambda(A_n)$ converge a $\lambda(\cup A_n)$ siempre que (A_n) sea una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{R}$ tales que $\cup A_n \in \mathcal{R}$. La *variación* de λ es la medida numerablemente aditiva $|\lambda|\colon \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ definida por

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum |\lambda(A_i)| \,:\, (A_i) \text{ sucesión finita disjunta en } \mathcal{R} \cap 2^A\right\},$$

[MN1, Definition 2.3, Lemma 2.4]. Una función $f \in \mathcal{M}$ es *integrable* respecto de λ si $|f|_{1,\lambda} = \int |f| d|\lambda| < \infty$, donde $|\lambda|$ es la variación de λ. Identificando funciones iguales $|\lambda|$–e.c.t., el espacio $L^1(\lambda)$ de funciones integrables respecto de λ, es un espacio de Banach con norma $|\cdot|_{1,\lambda}$, en el que las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas [MN1, Triv. 2.15]. Dada una función $\mathcal{R}$–simple $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$, la integral de φ respecto de λ sobre un conjunto $A \in \mathcal{R}^{loc}$ se define como $\int_A \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^n a_i\lambda(A_i \cap A)$. Dada $f \in L^1(\lambda)$, la integral de f respecto de λ sobre $A \in \mathcal{R}^{loc}$ está definida por $\int_A f \, d\lambda = \lim \int_A \varphi_n \, d\lambda$, donde (φ_n) es una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples que converge a f en $L^1(\lambda)$.

Para cada $f \in L^1(\lambda)$, la función de conjuntos $\lambda_f \colon \mathcal{R}^{loc} \to \mathbb{R}$ definida por $\lambda_f(A) = \int_A f d\lambda$, es una medida numerablemente aditiva con variación finita dada por $|\lambda_f|(A) = \int_A |f| d|\lambda|$ para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$, [MN1, Lemma 2.21, Corollary 2.24, Theorem 2.32].

Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo, X un espacio de Banach y $\nu \colon \mathcal{R} \to X$ una *medida vectorial*, es decir, $\sum \nu(A_n)$ converge a $\nu(\cup A_n)$ en X, siempre que (A_n) sea una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{R}$ tal que $\cup A_n \in \mathcal{R}$. La *semivariación* de ν es la función de conjuntos definida sobre $\mathcal{R}^{loc}$ por

$$\|\nu\|(A) = \sup\left\{|x^*\nu|(A) \ : \ x^* \in B_{X^*}\right\} ,$$

donde $|x^*\nu|$ es la variación de la medida $x^*\nu \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. La semivariación de ν es una función monótona creciente, numerablemente subaditiva, finita sobre $\mathcal{R}$ y para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$ cumple

$$\frac{1}{2}\|\nu\|(A) \leq \sup\left\{\|\nu(B)\|_X \ : \ B \in \mathcal{R} \cap 2^A\right\} \leq \|\nu\|(A) , \tag{2.1}$$

[MN2, Lemma 3.4, Corollary 3.5]. En vista de (2.1), la medida vectorial ν es acotada si y sólo si $\|\nu\|(\Omega) < \infty$. Un conjunto $A \in \mathcal{R}^{loc}$ es *ν–nulo* si $\|\nu\|(A) = 0$, o equivalentemente si $\nu(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{R} \cap 2^A$. Una propiedad se cumple ν–e.c.t. si se cumple excepto en los puntos de un conjunto ν–nulo.

Denotamos por $L^1_w(\nu)$ al espacio de funciones de $\mathcal{M}$ que son integrables respecto de $x^*\nu$, para todo $x^* \in X^*$, identificando funciones iguales ν–e.c.t. El espacio $L^1_w(\nu)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\nu = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int |f| d|x^*\nu| ,$$

que contiene a las funciones $\mathcal{R}$–simples y en el que la convergencia de una sucesión en norma $\|\cdot\|_\nu$ implica la convergencia de una subsucesión ν–e.c.t. [MN2, Lemma 3.13].

El espacio $L^1_w(\nu)$ dotado del orden ν–e.c.t. (i.e. $f \geq 0$ si $f \geq 0$ ν–e.c.t.), es un retículo de Banach. Además es un ideal de funciones medibles, es decir, dadas $f \in \mathcal{M}$ y $g \in L^1_w(\nu)$, tales que $|f| \leq |g|$ ν–e.c.t., se tiene que $f \in L^1_w(\nu)$.

Una función $f \in L^1_w(\nu)$ es *integrable respecto de* ν si cumple que para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$ existe un vector $\int_A f d\nu \in X$ tal que

$$x^*\left(\int_A f d\nu\right) = \int_A f\, dx^*\nu \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

Cuando $A = \Omega$, escribiremos $\int f d\nu$ en lugar de $\int_\Omega f d\nu$.

Denotamos por $L^1(\nu)$ al espacio de funciones integrables respecto de ν, donde funciones iguales ν–e.c.t. están identificadas. Toda función $\mathcal{R}$–simple $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ es integrable respecto de ν con $\int_A \varphi\, d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i \cap A)$ para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$. El espacio $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\nu$, en el que las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas, [MN2, Theorem 4.7]. Además, $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach con el orden ν–e.c.t.

El espacio $L^1(\nu)$ coincide con $L^1_w(\nu)$ cuando X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 [L2, Theorem 5.1].

El operador integación, definido por $f \in L^1(\nu) \to \int f\, d\nu \in X$, es lineal y continuo, cumpliendo

$$\left\|\int f d\nu\right\|_X \leq \|f\|_\nu \,. \tag{2.2}$$

Dada $f \in L^1(\nu)$, la función de conjuntos

$$A \in \mathcal{R}^{loc} \to \nu_f(A) = \int_A f\, d\nu \in X \tag{2.3}$$

es una medida vectorial sobre el σ–álgebra $\mathcal{R}^{loc}$, con semivariación $\|\nu_f\|(A) = \|f\chi_A\|_\nu$ para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$, [L2, Theorem 3.2], [MN2, Theorem 4.4].

Para cada $f \in L^1(\nu)$, aplicando las desigualdades dadas en (2.1) a la medida vectorial ν_f y al conjunto total Ω, se tiene que

$$\frac{\|f\|_\nu}{2} \leq |||f|||_\nu = \sup\left\{\left\|\int_A f\,d\nu\right\|_X : A \in \mathcal{R}\right\} \leq \|f\|_\nu\,. \tag{2.4}$$

Por tanto, $|||\cdot|||_\nu$ es una norma en $L^1(\nu)$ equivalente a $\|\cdot\|_\nu$.

Lewis prueba el siguiente teorema de convergencia dominada [L2, Theorem 3.3]:

Dada una sucesión (f_n) en $L^1(\nu)$ que converge ν–e.c.t. a una función f y tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, para alguna $g \in L^1(\nu)$, entonces $f \in L^1(\nu)$ y (f_n) converge a f en $L^1(\nu)$.

De este teorema se deduce que $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo. Además, $L^1(\nu)$ es un ideal de funciones medibles [MN2, Theorem 4.10].

Contrariamente a lo que sucede con medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras, las medidas vectoriales definidas sobre δ–anillos pueden ser no acotadas.

Ejemplo 2.1. Sea $\mathcal{R}$ el δ–anillo de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue m finita. Para $1 \leq p < \infty$, la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to L^p(\mathbb{R})$ definida por $\nu(A) = \chi_A$ es no acotada, ya que $\|\nu(A)\|_p = m(A)^{1/p}$ para todo $A \in \mathcal{R}$. En este caso, $\|\varphi\|_\nu = \|\varphi\|_p$ para toda función $\mathcal{R}$–simple φ y como las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas en $L^1(\nu)$ y en $L^p(\mathbb{R})$, se tiene que $L^1(\nu) = L^p(\mathbb{R})$. Además $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$, ya que $L^p(\mathbb{R})$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.

Dada una medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo $\mathcal{R}$ de partes de Ω, al ser $L^1(\nu)$ un ideal de funciones medibles, se tiene que el espacio de las funciones medibles y acotadas está contenido en $L^1(\nu)$ si y sólo si $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$. Este hecho no se cumple si ν es no acotada, pues en este caso

χ_Ω ni siquiera pertenece a $L^1_w(\nu)$ al ser $\|\nu\|(\Omega) = \|\chi_\Omega\|_\nu = \infty$. Por tanto, las funciones medibles y acotadas pueden ser no integrables respecto de ν. Dada una función f medible y acotada, si su conjunto soporte $Sop(f)$ tiene semivariación finita, o equivalentemente $\chi_{Sop(f)} \in L^1_w(\nu)$, entonces $f \in L^1_w(\nu)$ con

$$\|f\|_\nu \leq \|\nu\|\big(Sop(f)\big) \cdot \|f\|_\infty .$$

Si además $\chi_{Sop(f)}$ es integrable respecto de ν, entonces $f \in L^1(\nu)$.

Curbera prueba en [C2, Theorem 8] que la clase de los retículos de Banach orden continuos que tienen unidad débil coincide con la clase de los espacios obtenidos como L^1 de una medida vectorial definida sobre una σ–álgebra. Los espacios $L^1(\nu)$ con ν medida vectorial definida sobre un δ–anillo, pueden carecer de unidad débil, como muestra el próximo ejemplo, aunque siguen siendo retículos de Banach orden continuos. De hecho, se caracterizan mediante estos últimos, pues Curbera prueba en [C1, p. 22–23] que para todo retículo de Banach E orden continuo, existe una medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo, tal que E es orden isométrico a $L^1(\nu)$.

Ejemplo 2.2. Sea Γ un conjunto abstracto y $\mathcal{R}$ el δ–anillo formado por todas las partes finitas de Γ. En este caso tenemos que $\mathcal{R}^{loc} = 2^\Gamma$ y $\mathcal{M}$ es el espacio de todas las funciones $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$. Dado $p \in [1,\infty]$, denotamos $X_p = \ell^p(\Gamma)$ para $p < \infty$ y $X_p = c_0(\Gamma)$ para $p = \infty$. Consideramos la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to X_p$ definida por

$$\nu(A) = \sum_{\gamma \in A} e_\gamma ,$$

donde e_γ es la función característica del punto $\gamma \in \Gamma$. El único conjunto ν–nulo es el conjunto vacío. Cada $x^* \in X_p^*$ está identificado con un elemento $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell^q(\Gamma)$, donde $1/p + 1/q = 1$. Entonces, $x^*\nu(A) = \sum_{\gamma\in A} x_\gamma$ y $|x^*\nu|(A) = \sum_{\gamma\in A} |x_\gamma|$ para todo $A \in \mathcal{R}$. Para $p < \infty$, el espacio $X_p = \ell^p(\Gamma)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, luego $L^1_w(\nu) = L^1(\nu)$. En este caso, dada una función $\mathcal{R}$–simple φ, para cada $x^* = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X_p^*$ se tiene que

$$\int |\varphi| d|x^*\nu| = \sum |\varphi(\gamma)||x_\gamma| \leq \Big(\sum |\varphi(\gamma)|^p\Big)^{1/p} \|x^*\|_{X_p^*} ,$$

luego

$$\|\varphi\|_\nu \le \left(\sum |\varphi(\gamma)|^p\right)^{1/p} = \left\| \sum \varphi(\gamma) e_\gamma \right\|_{\ell^p(\Gamma)} = \left\| \int \varphi d\nu \right\|_{\ell^p(\Gamma)} ,$$

y por (2.2) $\|\varphi\|_\nu = \|\varphi\|_{\ell^p(\Gamma)}$. Por tanto, al ser las funciones $\mathcal{R}$–simples densas en $\ell^p(\Gamma)$, se tiene que $L^1(\nu) = \ell^p(\Gamma)$. Supongamos ahora que $p = \infty$. Dado $f \in \mathcal{M}$, cada $x^* = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X_p^*$ tiene soporte numerable y cumple

$$\int |f| d|x^*\nu| = \sum |f(\gamma)||x_\gamma| \le \|f\|_\infty \|x^*\|_{X_p^*} ,$$

luego

$$|f(\gamma)| = \int |f| d|e_\gamma \nu| \le \|f\|_\nu \le \|f\|_\infty \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma ,$$

es decir, $\|f\|_\nu = \|f\|_\infty$. Por tanto, $L^1_w(\nu) = \ell^\infty(\Gamma)$. Las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas en $c_0(\Gamma)$, entonces $L^1(\nu) = c_0(\Gamma)$. En particular, $L^1(\nu)$ es un subespacio propio de $L^1_w(\nu)$. En cualquier caso, $1 \le p \le \infty$, como cada elemento de X_p tiene soporte numerable, el espacio $L^1(\nu) = X_p$ tendrá unidad débil si y sólo si Γ es numerable.

La siguiente proposición nos da una condición equivalente a la integrabilidad de una función respecto de una medida vectorial definida sobre un δ–anillo. Esta condición, que no aparece en los trabajos de Lewis [L2] ni de Masani y Niemi [MN2], es una extensión de la definición de función integrable dada por Bartle, Dunford y Schwartz para medidas vectoriales definidas sobre σ–álgebras, [BDS, Definition 2.5].

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Una función $f \in \mathcal{M}$ es integrable respecto de ν si y sólo si existe una sucesión (φ_n) de funciones $\mathcal{R}$–simples cumpliendo*

1) (φ_n) converge a f ν–e.c.t.

2) $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)$ converge en la norma de X para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$.

DEMOSTRACIÓN. La condición de necesidad se obtiene tomando una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples que converjan a f en norma de $L^1(\nu)$ y ν–e.c.t., y usando la continuidad del operador integración.

Supongamos que (φ_n) es una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples cumpliendo 1) y 2). Para ver que f es integrable respecto de ν, basta probar que (φ_n) es sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$, ya que en ese caso (φ_n) converge a g en $L^1(\nu)$ para alguna $g \in L^1(\nu)$ y alguna subsucesión de (φ_n) converge a g ν–e.c.t., luego 1) implica que $f = g$ ν–e.c.t. y así $f \in L^1(\nu)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos las medidas vectoriales $\nu_n \colon \mathcal{R}^{loc} \to X$ definidas por $\nu_n(A) = \int_A \varphi_n d\nu$. Sea $\lambda_n = |x_n^* \nu_n|$ una medida de control de Rybakov para ν_n, siendo $x_n^* \in B_{X^*}$. Tomando la medida finita no negativa $\mu = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2^n(\lambda_n(\Omega)+1)}$, para cada n fijo se cumple $\lim_{\mu(A)\to 0} \|\nu_n(A)\|_X = 0$. Este hecho junto con la condición 2), son las hipótesis del teorema de Vitali-Hahn-Saks (ver [DU, Corollary I.5.6]) que nos asegura la uniformidad respecto de n del límite anterior. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ y para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$ con $\mu(A) < \delta$, se tiene que

$$\left\| \int_A \varphi_n d\nu \right\|_X = \|\nu_n(A)\|_X < \varepsilon \, . \tag{2.5}$$

Tomamos los conjuntos $B_m = \cap_{j=1}^m \varphi_j^{-1}(\{0\})$ y $B = \cap_{m\geq 1} B_m$. Como $\mu(B_m \backslash B) \to 0$ cuando $m \to \infty$, existe m_δ tal que $\mu(B_{m\delta} \backslash B) < \delta/2$.

Por otro lado, la condición 1) implica que $\varphi_n \to f$ μ–e.c.t., cuando $n \to \infty$, ya que todo conjunto ν–nulo es μ–nulo. Por el teorema de Egoroff, obtenemos un conjunto Z_δ con $\mu(Z_\delta) < \delta/2$ tal que $\varphi_n \to f$ uniformemente en Z_δ^c (conjunto complementario de Z_δ). Entonces, teniendo en cuenta que $B_{m_\delta}^c \in \mathcal{R}$ y así $\|\nu\|(B_{m_\delta}^c) < \infty$, se tiene que existe n_δ tal que

$$\|(f - \varphi_n)\chi_{Z_\delta^c}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\nu\|(B_{m_\delta}^c))} \, ,$$

para todo $n \geq n_\delta$. Por tanto, para todo $m, n \geq n_\delta$ y para todo $D \in \mathcal{R}^{loc}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \int_{D\cap Z_\delta^c \cap B_{m_\delta}^c} (\varphi_n - \varphi_m) d\nu \right\|_X &\leq \|(\varphi_n - \varphi_m)\chi_{Z_\delta^c \cap B_{m_\delta}^c}\|_\nu \\ &\leq \|(\varphi_n - \varphi_m)\chi_{Z_\delta^c}\|_\infty \cdot \|\nu\|(B_{m_\delta}^c) \leq \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Denotamos $H_\delta = Z_\delta \cup B_{m_\delta}$. Nótese que $\varphi_n \chi_B = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(H_\delta \backslash B) \leq \mu(Z_\delta) + \mu(B_{m_\delta} \backslash B) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Entonces, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ y para todo $D \in \mathcal{R}^{loc}$, se sigue de (2.5)

$$\Big\| \int_{D \cap H_\delta} (\varphi_n - \varphi_m) d\nu \Big\|_X = \Big\| \int_{D \cap (H_\delta \backslash B)} (\varphi_n - \varphi_m) d\nu \Big\|_X \leq 2\varepsilon \,.$$

Por tanto, se tiene que $\| \int_D (\varphi_n - \varphi_m) d\nu \|_X \leq 3\varepsilon$ para todo $n, m \geq n_\delta$ y $D \in \mathcal{R}^{loc}$. Por (2.4) se concluye $\|\varphi_n - \varphi_m\|_\nu \leq 6\varepsilon$, para todo $n, m \geq n_\delta$, es decir, (φ_n) es sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$. Luego $f \in L^1(\nu)$. □

Observación 2.4. En la prueba de la Proposición 2.3, se obtiene que si $f \in \mathcal{M}$ y (φ_n) es una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples tales que $\varphi_n \to f$ ν–e.c.t. y $(\int_A \varphi_n d\nu)$ converge en X para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$, entonces $f \in L^1(\nu)$ y $\varphi_n \to f$ en $L^1(\nu)$. En particular, $\int_A \varphi d\nu \to \int_A f d\nu$ para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$.

SECCIÓN 2. Las propiedades de una medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo $\mathcal{R}$ influyen sobre el espacio $L^1(\nu)$. En esta sección estudiaremos como afectan la aditividad fuerte y la σ–finitud con respecto a $\mathcal{R}$ de ν, a las propiedades reticulares de $L^1(\nu)$.

Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. La medida ν es *fuertemente aditiva* si $(\nu(A_n))$ converge a cero siempre que (A_n) sea una sucesión disjunta en $\mathcal{R}$. Obsérvese que ν es fuertemente aditiva si y solo si $\sum \nu(A_n)$ converge incondicionalmente para toda sucesión disjunta (A_n) en $\mathcal{R}$, [BD, Section 1].

La medida $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ es *σ–finita* respecto de $\mathcal{R}$, o abreviadamente σ–finita, si existe una sucesión (A_n) en $\mathcal{R}$ y un conjunto ν–nulo $N \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $\Omega = (\cup A_n) \cup N$. Es obvio que toda medida vectorial definida sobre una σ–álgebra, es fuertemente aditiva y σ–finita.

Toda medida vectorial definida sobre un δ–anillo que sea fuertemente aditiva es σ–finita, [BD, Lemma 1.1]. El recíproco no se cumple, como muestra el Ejemplo 2.1.

Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial, siguiendo [BD, Section 2] diremos que una medida numerablemente aditiva $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ es *medida de control* para ν , si cumple

1) $\lim_{\lambda(A)\to 0} \|\nu(A)\|_X = 0$,

2) todo conjunto ν–nulo de $\mathcal{R}^{loc}$ es λ–nulo.

Obsérvese la diferencia entre esta definición y la correspondiente al caso de σ–álgebras.

El espacio L^1 de una medida vectorial definida sobre una σ–álgebra, puede ser dotado de estructura de espacio de Banach de funciones a través de una medida de control de Rybakov. Desafortunadamente, este hecho no se extiende a medidas vectoriales definidas sobre δ–anillos, pues estas medidas pueden carecer de medida de control de Rybakov. En el Ejemplo 2.2, para $p > 1$ y Γ no numerable, dado $x^* = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X_p^*$ vimos que $|x^*\nu|(A) = \sum_{\gamma\in A} |x_\gamma|$ para todo $A \in \mathcal{R}$. Como $x^* \in \ell^q(\Gamma)$ y $q < \infty$, se tiene que $I = \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}$ es numerable. Entonces, todo $A \subset \Gamma\backslash I$ no vacío y finito cumple $|x^*\nu|(A) = 0$, mientras que A no es ν–nulo. Luego, $|x^*\nu|$ no es medida de control de Rybakov para ν. En cambio, en el mismo ejemplo para $p = 1$, tomando $x_0^* = (1)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell^\infty(\Gamma)$ se tiene que $|x_0^*\nu|(A) = \sum_{\gamma\in A} 1$ para todo $A \in \mathcal{R}$, es decir, $|x_0^*\nu|$ es la medida cardinal. Luego $|x_0^*\nu|$ es medida de control de Rybakov para ν. En este caso, $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Gamma, \mathcal{R}^{loc}, |x_0^*\nu|)$. Nótese que consideramos un espacio de Banach de funciones respecto de un espacio de medida no σ–finita definido en el sentido de Lindenstrauss y Tzafriri, de la misma manera que para medidas σ–finitas.

En realidad, ni siquiera podemos asegurar (para medidas no fuertemente aditivas) la existencia de medida de control. Sin embargo, se puede salvar este problema considerando el límite de la condición 1) en la definición de medida de control, como un límite local.

Una medida numerablemente aditiva $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ es *medida de control* *local* para ν ([BD, Section 2]) si cumple

1') $\lim_{A\subset B,\lambda(A)\to 0} \|\nu(A)\|_X = 0$ para cada $B \in \mathcal{R}$.

2) todo conjunto ν–nulo de $\mathcal{R}^{loc}$ es λ–nulo.

La dependencia del límite en 1') de cada conjunto $B \in \mathcal{R}$, está justificada en [MN1, p. 231–232]. La condición 1') es precisamente la definición dada en [MN1, Definition 2.36] para ν absolutamente continua respecto de λ sobre $\mathcal{R}$, y equivale a que $\nu(A) = 0$ siempre que $A \in \mathcal{R}$ con $\lambda(A) = 0$ [MN2, Proposition 3.6]. Por (2.1), ésto ocurre si y sólo si todo conjunto λ–nulo de $\mathcal{R}^{loc}$ es ν–nulo. Las condiciones 1) y 1') coinciden cuando ν está definida sobre una σ–álgebra.

Como ya adelantábamos, toda medida vectorial fuertemente aditiva tiene medida de control. De hecho, este resultado es válido para medidas vectoriales definidas sobre un anillo. La próxima proposición recoge diversos resultados que muestran condiciones equivalentes a la aditividad fuerte de una medida vectorial definida sobre un anillo.

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) La medida ν es fuertemente aditiva.

b) Existe una σ–álgebra Σ y una medida vectorial $\hat{\nu}\colon \Sigma \to X$ tal que $\mathcal{R} \subset \Sigma$ y $\hat{\nu}(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{R}$ (i.e. $\hat{\nu}$ extiende a ν).

c) Existe una medida de control acotada para ν.

Si alguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces podemos tomar una medida de control acotada para ν del tipo $|x_0^*\nu|$ para cierto $x_0^* \in B_{X^*}$.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia de a) y c) fue probada por Brooks en [B, Theorem 2].

Kluvanek prueba que a) es equivalente a la existencia de una medida vectorial $\tilde{\nu}\colon \sigma(\mathcal{R}) \to X$ que extiende a ν, siendo $\sigma(\mathcal{R})$ el σ–anillo generado por $\mathcal{R}$, [K, Theorem on Extrension]. En este caso, por aplicación del lema de Zorn, en [BD, Lemma 1.1] se prueba que ν es σ–finita, es decir, existe una sucesión (A_n) contenida en $\mathcal{R}$ tal que $N = \Omega \setminus \cup A_n$ es un conjunto ν–nulo en el sentido de que $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^N$. Consideremos la σ–álgebra $\Sigma = \{A \cup B : A \in \sigma(\mathcal{R}) \text{ y } B \subset N\}$. Teniendo en cuenta que $\tilde{\nu}(A) = 0$ para todo conjunto $A \in \sigma(\mathcal{R})$ ν–nulo, se sigue que la función de conjuntos $\hat{\nu}\colon \Sigma \to X$ dada por $\hat{\nu}(A \cup B) = \tilde{\nu}(A)$, está bien definida y es una medida vectorial que extiende a ν. Por tanto a) y b) son equivalentes.

Supongamos que se cumplen las condiciones a)–c). Sea $|x_0^*\hat{\nu}|$ una medida de control de Rybakov para la medida vectorial $\hat{\nu}$ dada en b). Puesto que $|x_0^*\nu| \leq |x_0^*\hat{\nu}|$, alcanzándose la igualdad sobre $\mathcal{R}$, se tiene que $|x_0^*\nu|$ es medida de control para ν, acotada al serlo $|x_0^*\hat{\nu}|$. □

Aplicando la Proposición 2.5 al caso de una medida vectorial definida sobre un δ–anillo obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.6. *Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Se cumple:*

a) Si ν es fuertemente aditiva entonces $L^1(\nu)$ coincide con $L^1(\hat{\nu})$, donde $\hat{\nu}\colon \mathcal{R}^{loc} \to X$ es una medida vectorial que extiende a ν.

b) La medida vectorial ν es fuertemente aditiva si y sólo si $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$.

c) Si ν es fuertemente aditiva entonces $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de medida $(\Omega, \mathcal{R}^{loc}, |x_0^*\nu|)$, donde $|x_0^*\nu|$ es una medida de control acotada para ν, para cierto $x_0^* \in B_{X^*}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que ν es fuertemente aditiva. Al ser $\mathcal{R}$ un δ–anillo y así $\mathcal{R}^{loc}$ es σ–álgebra, en la prueba de la Proposición 2.5 tenemos que $N \in \mathcal{R}^{loc}$, $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}^{loc} \subset \Sigma$ y $\hat{\nu}\colon \mathcal{R}^{loc} \to X$ es una medida vectorial que extiende a ν. Nótese que los conjuntos $\hat{\nu}$–nulos y los ν–nulos coinciden. Para toda función $\mathcal{R}$–simple φ tenemos que $\|\varphi\|_\nu = \|\varphi\|_{\hat{\nu}}$. Entonces $L^1(\nu)$ coincidirá con $L^1(\hat{\nu})$ si las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas en $L^1(\hat{\nu})$. En la prueba de la Proposición 2.5 obtenemos que $\Omega = (\cup A_n) \cup N$ con $A_n \in \mathcal{R}$

y $N \in \mathcal{R}^{loc}$ ν–nulo, es decir, ν es σ–finita. Sea $0 \leq f \in L^1(\hat{\nu})$ y (ψ_n) una sucesión de funciones simples tales que $0 \leq \psi_n \uparrow f$. Para cada n fijo se cumple que $\varphi_m^n = \psi_n \chi_{\cup_{j=1}^m A_j} \uparrow \psi_n$ ν–e.c.t., o equivalentemente $\hat{\nu}$–e.c.t. Por la orden continuidad de $L^1(\hat{\nu})$, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existen n_ε y $m_\varepsilon = m_\varepsilon(n_\varepsilon)$, tales que

$$\|f - \varphi_{m_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\|_{\hat{\nu}} \leq \|f - \psi_{n_\varepsilon}\|_{\hat{\nu}} + \|\psi_{n_\varepsilon} - \varphi_{m_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\|_{\hat{\nu}} < \varepsilon \, .$$

Como φ_m^n es función $\mathcal{R}$–simple para todo m, n, se tiene que las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas en $L^1(\hat{\nu})$. Luego se cumple a).

Probemos b). Si ν es fuertemente aditiva, por la condición a) tenemos que existe una medida vectorial $\hat{\nu}$: $\mathcal{R}^{loc} \to X$ que extiende a ν y tal que $L^1(\hat{\nu}) = L^1(\nu)$. Como $\chi_\Omega \in L^1(\hat{\nu})$ al estar $\hat{\nu}$ definida sobre una σ–álgebra, entonces $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$. Recíprocamente, si $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$, por (2.3) la función de conjuntos

$$A \in \mathcal{R}^{loc} \to \hat{\nu}(A) = \int_A \chi_\Omega \, d\nu \in X$$

es una medida vectorial que extiende a ν. Entonces, de la Proposición 2.5 se sigue que ν es fuertemente aditiva.

Observemos que si ν es fuertemente aditiva, por la Proposición 2.5, existe una medida de control acotada para ν del tipo $|x_0^*\nu|$ con $x_0 \in B_{X^*}$, que está definida sobre $\mathcal{R}^{loc}$ al ser la variación de la medida $x_0^*\nu$: $\mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Además, se tiene que $L^1(\nu)$ está continuamente contenido en $L^1(|x_0^*\nu|)$, $L^1(\nu)$ es un ideal de funciones medibles respecto del orden $|x_0^*\nu|$–e.c.t., al serlo respecto del orden ν–e.c.t. y $\chi_A \in L^1(\nu)$ para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$, pues $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$. Luego se cumple la propiedad c). $\square$

Como consecuencia del Teorema 2.6, obtenemos que dada una medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo, las funciones medibles y acotadas están contenidas en $L^1(\nu)$ si y sólo si ν es fuertemente aditiva.

Toda medida vectorial ν fuertemente aditiva es acotada, pues en ese caso $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$ y en particular $\|\nu\|(\Omega) = \|\chi_\Omega\|_\nu < \infty$. Una prueba más clásica de este hecho es, por reducción al absurdo, suponer que $\|\nu\|(\Omega) = \infty$ y entonces, como la semivariación de ν es subaditiva y finita sobre conjuntos de $\mathcal{R}$, hallamos una sucesión $(A_n) \subset \mathcal{R}$ de conjuntos disjuntos con $\|\nu(A_n)\| \geq n$. El Ejemplo 2.2 para $p = \infty$, muestra una medida acotada ν que no es fuertemente aditiva, ya que $\|\nu(A)\|_\infty = 1$ para todo conjunto $A \in \mathcal{R}$ no vacío.

Como ya hemos señalado, de (2.1) se sigue que una medida vectorial ν es acotada si y sólo si $\|\nu\|(\Omega) = \|\chi_\Omega\|_\nu < \infty$, lo que equivale a que $\chi_\Omega \in L^1_w(\nu)$. Luego si X es un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, toda medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ definida sobre un δ–anillo $\mathcal{R}$, cumple que $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$ y por tanto ν es acotada si y sólo si es fuertemente aditiva.

La medida vectorial ν dada en el Ejemplo 2.2, para cualquier $p \in [1, \infty]$, es σ–finita si y sólo si Γ es numerable. En el caso $p = \infty$, ν es acotada. Para $p < \infty$ y Γ infinito, ν es no acotada. Es decir, no existe relación entre acotación y σ–finitud.

Obsérvese que si ν es fuertemente aditiva, $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$ es una unidad débil de $L^1(\nu)$. El siguiente resultado muestra que la σ–finitud de ν equivale a la existencia de unidad débil para $L^1(\nu)$. En este caso, sólo podemos garantizar la existencia de una medida de control local para ν.

Teorema 2.7. *Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) La medida ν es σ–finita.

b) El espacio $L^1(\nu)$ tiene unidad débil.

c) Existe una medida de control local acotada para ν.

DEMOSTRACIÓN. Si ν es σ–finita, existen $A_n \in \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{R}^{loc}$ ν–nulo tales que $\Omega = (\cup A_n) \cup N$. Entonces la serie $\sum \left(2^n(\|\nu\|(A_n) + 1)\right)^{-1} \chi_{A_n}$ converge en $L^1(\nu)$ y su suma g es unidad débil en $L^1(\nu)$, pues $g^{-1}(\{0\}) = N$ es ν-nulo. Por tanto a) implica b).

Probemos que b) implica c). Sea g una unidad débil en $L^1(\nu)$. Como $g \in L^1(\nu)$, se sigue que la función de conjuntos $\nu_g\colon \mathcal{R}^{loc} \to X$ definida por $\nu_g(A) = \int_A g\,d\nu$ es una medida vectorial. Sea $\lambda = |x_0^*\nu_g|$ una medida de control de Rybakov para ν_g, donde $x_0^* \in B_{X^*}$. Un conjunto $A \in \mathcal{R}^{loc}$ es λ–nulo si y sólo si $\|g\chi_A\|_\nu = \|\nu_g\|(A) = 0$, es decir, $g\chi_A = 0$ ν–e.c.t., lo que equivale a que A sea ν–nulo, ya que $g^{-1}(\{0\})$ es ν–nulo. Por tanto λ es una medida de control local acotada para ν.

Supongamos que $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ es una medida de control local acotada para ν. Entonces $|\lambda|(\Omega) = \sup_{A\in\mathcal{R}} |\lambda|(A) < \infty$. Luego existe una sucesión (A_n) de conjuntos de $\mathcal{R}$ tales que $|\lambda|(\Omega\backslash A_n) < 1/n$ y así $\Omega = (\cup A_n) \cup N$ donde $N = \Omega\backslash(\cup A_n)$ es λ–nulo o equivalentemente ν–nulo, es decir, ν es σ–finita. Por tanto c) implica a). □

Observación 2.8. Dada una medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ σ–finita, en la prueba del Teorema 2.7, al ser g una unidad débil de $L^1(\nu)$, se tiene que $|x_0^*\nu_g|(A) = \int_A g d|x_0^*\nu| = 0$ si y sólo si $|x_0^*\nu|(A) = 0$, luego $|x_0^*\nu|$ es también una medida de control local para ν, aunque en este caso (si ν es no acotada) no podemos asegurar que sea acotada. Además, $L^1(\nu)$ será un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \mathcal{R}^{loc}, |x_0^*\nu|)$, si para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$ con $|x_0^*\nu|(A) < \infty$ se cumple que $\chi_A \in L^1(\nu)$. Desafortunadamente, existen medidas vectoriales ν que no cumplen esta propiedad. En el Ejemplo 2.2 para $p = \infty$ y Γ numerable e infinito, se tiene que $|x^*\nu|(A) = \sum_{\gamma\in A} |x_\gamma| < \infty$ para todo $x^* = (x_\gamma) \in \ell^1(\Gamma)$ y para todo $A \in \mathcal{R}^{loc}$, mientras que $\chi_\Gamma \notin L^1(\nu) = c_0(\Gamma)$. Por tanto $L^1(\nu)$ no es espacio de Banach de funciones respecto de ningún $(\Gamma, \mathcal{R}^{loc}, |x^*\nu|)$. Sin embargo, para cualquier $p \in [1,\infty]$ (incluso con Γ no numerable) la medida cardinal $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ es una medida de control para ν tal que $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Gamma, \mathcal{R}^{loc}, |\lambda|)$.

Dada una medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ σ–finita y no fuertemente aditiva, no podemos asegurar que $L^1(\nu)$ sea un espacio de Banach de funciones respecto de algún espacio de medida $(\Omega, \mathcal{R}^{loc}, \lambda)$, con λ medida de control local para ν. Aunque por el Teorema 2.7, $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil y por tanto existe un espacio de medida (S, Σ, μ) y un espacio de Banach de funciones Y respecto de (S, Σ, μ) tal que $L^1(\nu)$

es orden isométrico a Y, [LT, Theorem 1.b.14]. Aún más, $L^1(\nu)$ es orden isométrico al espacio $L^1(\hat{\nu})$ para la medida vectorial $\hat{\nu}\colon \Sigma \to Y$ definida por $\hat{\nu}(A) = \chi_A$, [C2, Theorem 8]. La medida $\hat{\nu}$ es un tanto imprecisa al serlo Y y el espacio de medida (S, Σ, μ). El siguiente resultado da una representación de $L^1(\nu)$ como un espacio L^1 de una medida vectorial más precisa definida sobre la σ–álgebra $\mathcal{R}^{loc}$ y con valores en X.

Teorema 2.9. *En las mismas condiciones del Teorema 2.7, si ν es σ–finita, entonces $L^1(\nu)$ es orden isométrico a $L^1(\nu_g)$, donde $\nu_g\colon \mathcal{R}^{loc} \to X$ es la medida vectorial definida por $\nu_g(A) = \int_A g\, d\nu$, siendo g una unidad débil en $L^1(\nu)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una función simple $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ con (A_i) conjuntos disjuntos de $\mathcal{R}^{loc}$, se tiene que $g\varphi \in L^1(\nu)$ y

$$\int |\varphi| d|x^*\nu_g| = \sum_{i=1}^{n} |a_i||x^*\nu_g|(A_i) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \int_{A_i} g d|x^*\nu| = \int g|\varphi| d|x^*\nu|$$

para todo $x^* \in X^*$. Luego $\|\varphi\|_{\nu_g} = \|g\varphi\|_\nu$. Sea $f \in L^1(\nu_g)$ y (φ_n) una sucesión de funciones simples que converge a f en la norma de $L^1(\nu_g)$ y ν_g–e.c.t. Entonces $(g\varphi_n)$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$ y por tanto converge en norma a cierta función $h \in L^1(\nu)$. Además, existe una subsucesión $(g\varphi_{n_k})$ que converge a h ν–e.c.t., o equivalentemente ν_g–e.c.t., luego $gf = h \in L^1(\nu)$ y $\|gf\|_\nu = \|f\|_{\nu_g}$.

Veamos que si $h \in L^1(\nu)$ entonces $h/g \in L^1(\nu_g)$. Supongamos que $h \geq 0$ y sea (φ_n) una sucesión de funciones simples y positivas creciente a h/g. Entonces $(g\varphi_n)$ crece a h, y por orden continuidad, $(g\varphi_n)$ converge a h en $L^1(\nu)$. Ésto implica que (φ_n) es sucesión de Cauchy en $L^1(\nu_g)$, entonces converge en norma a una función $f \in L^1(\nu_g)$ y existe una subsucesión (φ_{n_k}) tal que converge a f ν_g–e.c.t. Luego $f = h/g \in L^1(\nu_g)$.

Por tanto, el operador $T\colon L^1(\nu_g) \to L^1(\nu)$ dado por $T(f) = gf$, es una orden isometría. La inyectividad y la conservación del orden se deducen fácilmente del hecho de que los conjuntos ν–nulos y los ν_g–nulos coinciden. $\square$

Brooks y Dinculeanu prueban que toda medida vectorial ν definida sobre un δ–anillo (sin propiedades añadidas), tiene una medida de control local $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$, [BD, Theorem 3.2]. Por el Teorema 2.7, si ν no es σ–finita, entonces λ debe ser no acotada.

Al ser $L^1(\nu)$ un retículo de Banach orden continuo, se puede representar como una suma directa incondicional de una familia de ideales disjuntos, cada uno de ellos con unidad débil, [LT, Proposition 1.a.9]. Además, por [C2, Theorem 8], cada uno de estos ideales es el espacio L^1 de una medida vectorial definida sobre una σ–álgebra. El próximo resultado precisa una de estas representaciones.

Teorema 2.10. *Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach y $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. El espacio $L^1(\nu)$ se puede descomponer en una suma directa incondicional de una familia de ideales disjuntos, cada uno de ellos orden isométrico a un espacio $L^1(\nu_A)$, donde cada ν_A es la medida vectorial ν restringida a una σ–álgebra del tipo $A \cap \mathcal{R}$ para algún $A \in \mathcal{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. En la prueba de [BD, Theorem 3.2], se establece la existencia de una familia maximal $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos no ν–nulos de $\mathcal{R}$, tales que $A_\alpha \cap A_\beta$ es ν–nulo si $\alpha \neq \beta$. Para cada $\alpha \in \Delta$, consideramos la clase de conjuntos $\mathcal{R}_\alpha = A_\alpha \cap \mathcal{R} = \{B \in \mathcal{R} : B \subset A_\alpha\}$. Al ser $\mathcal{R}$ un δ–anillo, $\mathcal{R}_\alpha$ también lo es y como además $A_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$, se tiene que $\mathcal{R}_\alpha$ es una σ–álgebra de subconjuntos de A_α. Sea $\nu_\alpha\colon \mathcal{R}_\alpha \to X$ la restricción de ν a la σ–álgebra $\mathcal{R}_\alpha$ y sea $\lambda_\alpha = |x_\alpha^*\nu_\alpha|$ una medida de control de Rybakov para ν_α. Para cada $B \in \mathcal{R}$, se prueba que $\lambda_\alpha(B \cap A_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, salvo para un conjunto numerable de índices. Entonces, la función de conjuntos $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ definida por $\lambda(A) = \sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha(A \cap A_\alpha)$, es una medida de control local para ν.

Consideramos las proyecciones lineales y acotadas $P_\alpha\colon L^1(\nu) \to L^1(\nu)$ dadas por $P_\alpha(f) = f\chi_{A_\alpha}$. Obsérvese que $\big(P_\alpha(L^1(\nu))\big)_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de ideales (cerrados) disjuntos de $L^1(\nu)$. Sea $f \in L^1(\nu)$ y (φ_n) una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples que converge a f en la norma de $L^1(\nu)$ y ν–e.c.t.

Para cada n, sea $I_n \subset \Delta$ un conjunto numerable tal que $\varphi_n\chi_{A_\alpha} = 0$ ν–e.c.t. para todo $\alpha \notin I_n$. Entonces $f\chi_{A_\alpha} = 0$ ν–e.c.t. para todo $\alpha \notin I$, siendo $I = \cup_n I_n$ numerable. Luego $f = \sum_{\alpha\in I} f\chi_{A_\alpha}$ ν–e.c.t. y la suma converge incondicionalmente en $L^1(\nu)$ por la orden continuidad de $L^1(\nu)$. Por tanto f está representada de manera única como suma directa incondicional de elementos de $\left(P_\alpha(L^1(\nu))\right)_{\alpha\in\Delta}$. Cada espacio $P_\alpha(L^1(\nu))$ es orden isométrico a $L^1(\nu_\alpha)$, vía restricción al conjunto A_α. □

Finalizamos el capítulo analizando varios ejemplos de medidas vectoriales definidas sobre δ–anillos. El primero es una generalización de Ejemplo 2.2.

Ejemplo 2.11. Sea Γ un conjunto abstracto, X un espacio de Banach y $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de elementos no nulos de X. Tomamos el δ–anillo $\mathcal{R}$ de los subconjuntos finitos de Γ y consideramos la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ definida por

$$\nu(A) = \sum_{\gamma\in A} x_\gamma\ .$$

Observamos que $\mathcal{R}^{loc} = 2^\Gamma$ y que el único conjunto ν–nulo es el conjunto vacío. Por tanto ν es σ–finita si y sólo si Γ es numerable. Si Γ es no numerable, entonces ν no es fuertemente aditiva. En el caso de que Γ sea numerable, entonces ν es fuertemente aditiva si y sólo si $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ es incondicionalmente convergente. En cualquier caso (Γ numerable o no numerable), ν es acotada si y sólo si $|x^*\nu|(\Gamma) < \infty$ para cada $x^* \in X^*$ (i.e. $\chi_\Gamma \in L^1_w(\nu)$), o equivalentemente si $\sum |x^*(x_\gamma)|$ converge para cada $x^* \in X^*$, es decir, $\sum x_\gamma$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy.

El espacio $L^1_w(\nu)$ es el espacio de funciones $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tales que $\sum f(\gamma)x_\gamma$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy, ya que $f \in L^1_w(\nu)$ si y sólo si $\int |f|d|x^*\nu| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$ y $\int |f|d|x^*\nu| \geq \sum |f(\gamma_j)||x^*(x_{\gamma_j})|$ para todo $(\gamma_j) \subset \Gamma$.

Veamos que el espacio $L^1(\nu)$ es el espacio de funciones $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tales que $\sum f(\gamma)x_\gamma$ es incondicionalmente convergente. Si φ es una función $\mathcal{R}$–simple, se tiene que $\int \varphi d\nu = \sum \varphi(\gamma)x_\gamma$. Sea $f \in L^1(\nu)$ y sea (φ_n) una sucesión de funciones $\mathcal{R}$–simples convergiendo a f en $L^1(\nu)$ y ν–e.c.t. El soporte de f está contenido en la unión de los soportes de φ_n, luego es un conjunto numerable (γ_j). Entonces $f = \sum f(\gamma_j)e_{\gamma_j}$, donde e_γ es la función característica del punto γ. La orden continuidad de $L^1(\nu)$ implica que la serie converge incondicionalmente en $L^1(\nu)$. Para cualquier subsucesión (γ_{k_j}) tenemos

$$\Big\| \sum_{j=n}^{m} f(\gamma_{k_j})x_{\gamma_{k_j}} \Big\|_X = \Big\| \int \Big(\sum_{j=n}^{m} f(\gamma_{k_j})e_{\gamma_{k_j}} \Big) d\nu \Big\|_X \leq \Big\| \sum_{j=n}^{m} f(\gamma_{k_j})e_{\gamma_{k_j}} \Big\|_\nu .$$

Por tanto, la serie $\sum f(\gamma)x_\gamma$ es incondicionalmente convergente en X. Supongamos ahora que $\sum f(\gamma)x_\gamma$ es incondicionalmente convergente en X. Como x_γ es no nulo para todo γ, el soporte de f ha de ser numerable $\{\gamma_j\}$. Las funciones $\mathcal{R}$–simples $\varphi_n = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma_j)e_{\gamma_j}$ convergen puntualmente a f. Para cualquier $A \in \mathcal{R}^{loc}$, $\left(\int_A \varphi_n d\nu\right)$ converge en X, ya que

$$\Big\| \int_A (\varphi_m - \varphi_n) d\nu \Big\|_X = \Big\| \sum_{j=n+1,\, \gamma_j \in A}^{m} f(\gamma_j)x_{\gamma_j} \Big\|_X .$$

Por tanto, de la Proposición 2.3 se sigue que $f \in L^1(\nu)$.

Por último, observemos que el espacio $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Gamma, \mathcal{R}^{loc}, \lambda)$, donde $\lambda\colon \mathcal{R}^{loc} \to [0,\infty]$ es la medida cardinal.

En los siguientes ejemplos estudiaremos algunas medidas vectoriales asociadas a operadores clásicos.

Ejemplo 2.12. Dado $p \in [1,\infty)$, consideramos un isomorfismo cualquiera $T\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$. Sea $\mathcal{R}$ el δ–anillo de los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue m finita. Entonces $\mathcal{R}^{loc}$ es la σ–álgebra de todos los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$. La función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{R} \to L^p(\mathbb{R})$ definida por $\nu(A) = T(\chi_A)$, es una medida vectorial σ–finita. Además $L^1_w(\nu) = L^1(\nu)$, ya que $L^p(\mathbb{R})$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Al ser T un isomorfismo, para toda función $\mathcal{R}$–simple φ se tiene

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|\varphi\|_p \leq \|T(\varphi)\|_p = \Big\| \int \varphi d\nu \Big\|_p \leq \|T\|\|\varphi\|_p . \tag{2.6}$$

Entonces, de (2.4) se sigue que $\|T^{-1}\|^{-1}\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_\nu \leq 2\|T\|\|\varphi\|_p$. En particular, los conjuntos ν–nulos coinciden con los m–nulos. Luego, la densidad de las funciones $\mathcal{R}$–simples en ambos espacios $L^1(\nu)$ y $L^p(\mathbb{R})$, implica que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^p(\mathbb{R})$. Por (2.6) tenemos que $\|T^{-1}\|^{-1}\|\chi_A\|_p \leq \|\nu(A)\|_p$ para todo $A \in \mathcal{R}$, por tanto ν no es ni acotada y ni fuertemente aditiva.

Algunos ejemplos de isomorfismos $T\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ son:

(I) El operador multiplicación por una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $1/\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(II) El operador dilatación por un factor $\alpha > 0$, es decir, $Tf(x) = f(\alpha x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

(III) La transformada de Hilbert H para $p > 1$ (ver [Ste]), definida por el valor principal integral

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt\ .$$

Ejemplo 2.13. Sea $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función integrable y $\mathcal{V}$ el operador de Volterra de convolución definido por

$$\mathcal{V}(f)(x) = \int_0^x \phi(x-y)f(y)dy\ ,$$

para $f \in \mathcal{M}$ tal que exista la integral m–e.c.t. $x \in [0,\infty)$, siendo m la medida de Lebesgue. Este operador ha sido estudiado por Curbera en [C5] para el intervalo $[0,1]$. Sea $\mathcal{R}$ el δ–anillo de los subconjuntos de Borel de $[0,\infty)$ con medida de Lebesgue finita y $\mathcal{R}^{loc}$ la σ–álgebra de todos los subconjuntos de Borel de $[0,\infty)$.

El operador $\mathcal{V}$ está definido sobre $f = \chi_A$, con $A \in \mathcal{R}^{loc}$, ya que ϕ es integrable. Además, si $A \in \mathcal{R}$ se tiene que $\mathcal{V}(\chi_A) \in (L^1 \cap L^\infty)[0,\infty)$, con

$$\|\mathcal{V}(\chi_A)\|_1 = \int_0^\infty \mathcal{V}(\chi_A)(x)dx = m(A)\|\phi\|_1$$

y

$$\|\mathcal{V}(\chi_A)\|_\infty = \sup_{x\geq 0} \mathcal{V}(\chi_A)(x) \leq \|\phi\|_1 \,.$$

Consideremos la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{R} \to (L^1 \cap L^\infty)[0,\infty)$ dada por $\nu(A) = \mathcal{V}(\chi_A)$. Veamos que ν es medida vectorial (i.e. numerablemente aditiva). Para ello basta probar que $\|\nu(A)\|_\infty \to 0$ cuando $m(A) \to 0$, pues en ese caso, dada una sucesión (A_n) de conjuntos disjuntos de $\mathcal{R}$ tales que $\cup A_n \in \mathcal{R}$, como $m(H_n) \to 0$, siendo $H_n = \cup_{j>n} A_j$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Big\|\nu(\cup A_n) - \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)\Big\|_{L^1\cap L^\infty} &= \max\big\{\|\nu(H_n)\|_1, \|\nu(H_n)\|_\infty\big\} \\ &= \max\big\{m(H_n)\|\phi\|_1, \|\nu(H_n)\|_\infty\big\} \to 0 \,. \end{aligned}$$

Al ser ϕ integrable, se cumple que

$$\|\nu(A)\|_\infty = \sup_{x\geq 0} \int_0^x \phi(x-y)\chi_A(y)dy = \sup_{x\geq 0} \int_{(x-A)\cap[0,x]} \phi(s)ds \to 0$$

cuando $m(A) \to 0$, ya que $m((x-A)\cap[0,x]) \leq m(A)$ para todo $x \geq 0$.

Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre $[0,\infty)$. Como $(L^1 \cap L^\infty)[0,\infty)$ está continuamente contenido en X, se tiene que $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ es también una medida vectorial. La acotación y la aditividad fuerte de ν depende del espacio X donde tome valores. La medida $\nu\colon \mathcal{R} \to L^1[0,\infty)$ es no acotada, pues $\|\nu(A)\|_1 = \|\phi\|_1 m(A)$ para todo $A \in \mathcal{R}$, mientras que la medida $\nu\colon \mathcal{R} \to L^\infty[0,\infty)$ sí lo es, ya que $\|\nu(A)\|_\infty \leq \|\phi\|_1$ para todo $A \in \mathcal{R}$. En ambos casos ν no es fuertemente aditiva. El primer caso está claro, pues ν es no acotada y toda medida vectorial fuertemente aditiva es acotada. Para ν tomando valores en $L^\infty[0,\infty)$ se tiene que

$$\|\nu\big((na,(n+1)a)\big)\|_\infty \geq \int_{na}^{(n+1)a} \phi\big((n+1)a - y\big)dy = \int_0^a \phi(s)ds > 0 \,,$$

para todo n y para $a > 0$ suficientemente grande.

Veamos que la medida $\nu\colon \mathcal{R} \to (L^1 + L^\infty)[0,\infty)$ es fuertemente aditiva. Por el Teorema 2.6, tenemos que probar que $\chi_{[0,\infty)} \in L^1(\nu)$. Como

$$\|\nu(A)\|_{L^1+L^\infty} \leq \|\nu(A)\|_\infty \leq \|\phi\|_1 \,, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{R} \,,$$

se tiene que ν es acotada, es decir, $\|\chi_{[0,\infty)}\|_\nu = \|\nu\|[0,\infty) < \infty$. Luego $\chi_{[0,\infty)} \in L^1_w(\nu)$.

Entonces, tendremos que $\chi_{[0,\infty)} \in L^1(\nu)$ si probamos que para cada conjunto $B \in \mathcal{R}^{loc}$, existe $h_B \in (L^1 + L^\infty)[0,\infty)$ tal que

$$x^*(h_B) = \int_B \chi_{[0,\infty)}\, dx^*\nu \ , \quad \text{para todo } x^* \in \big((L^1 + L^\infty)[0,\infty)\big)^* \ .$$

Al ser $(L^1 + L^\infty)[0,\infty)$ orden continuo, su espacio dual coincide con el dual de Köthe $\big((L^1 + L^\infty)[0,\infty)\big)' = (L^1 \cap L^\infty)[0,\infty)$, [BS, Theorem II.6.4]. Por tanto, a cada elemento $x^* \in \big((L^1 + L^\infty)[0,\infty)\big)^*$ le corresponde una función $g \in (L^1 \cap L^\infty)[0,\infty)$ tal que

$$x^*(f) = \int_0^\infty g(x) f(x) dx \ , \quad \text{para todo } f \in (L^1 + L^\infty)[0,\infty) \ .$$

Dado $B \in \mathcal{R}^{loc}$, tomamos $h_B = \mathcal{V}(\chi_B)$, que está en $(L^1 + L^\infty)[0,\infty)$ al ser h_B acotado por $\|\phi\|_1$. Sea $B_n = B \cap [0,n] \in \mathcal{R}$ y $h_n = \mathcal{V}(\chi_{B_n}) = \nu(B_n)$. Como $\chi_{B_n} \uparrow \chi_B$ y $\chi_B \in L^1(x^*\nu)$ al ser $\chi_{[0,\infty)} \in L^1_w(\nu)$, por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\int_B \chi_{[0,\infty)} dx^*\nu = \int \chi_B dx^*\nu = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{B_n} dx^*\nu \ . \tag{2.7}$$

Además, como Φ es positiva, aplicando el teorema de convergencia monótona se sigue que

$$h_n = \int_0^x \Phi(x-y)\chi_{B_n}(y) dy \ \uparrow \ \int_0^x \Phi(x-y)\chi_B(y) dy = h_B \ .$$

Entonces, $gh_n \to gh_B$ e.c.t. y $|gh_n| \le |gh_B|$ siendo $gh_B \in L^1[0,\infty)$, puesto que $h_B \in (L^1 + L^\infty)[0,\infty)$ y $g \in \big((L^1 + L^\infty)[0,\infty)\big)'$. Luego por el teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\int_0^\infty g(x) h_B(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g(x) h_n(x) dx \ . \tag{2.8}$$

Como $\int \chi_{B_n} dx^*\nu = x^*\nu(B_n) = x^*(h_n) = \int_0^\infty g(x)h_n(x)dx$, de (2.7) y (2.8) se sigue que

$$\int_B \chi_{[0,\infty)} dx^*\nu = \int_0^\infty g(x) h_B(x) dx = x^*(h_B) \ .$$

Luego $\chi_{[0,\infty)} \in L^1(\nu)$.

CAPÍTULO 3: Dominios óptimos de operadores

SECCIÓN 1. Las medidas vectoriales definidas sobre δ-anillos, nos permiten llevar a cabo un estudio acerca de los dominios óptimos de operadores definidos sobre ciertos espacios de funciones, entre los cuáles se encuentran los espacios de Banach de funciones respecto de espacios de medida σ–finita, similar al realizado por Curbera y Ricker en [CR1], para operadores definidos sobre espacios de Banach de funciones respecto de espacios de medida finita.

Sea $\mathcal{R}$ un δ-anillo de partes de un conjunto Ω. Denotaremos por $\mathcal{M}$ al espacio de funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ medibles respecto de $\mathcal{R}^{loc}$ y por $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ al espacio de las funciones $\mathcal{R}$–simples. Sea X un espacio de Banach y $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to X$ un operador lineal. El *dominio óptimo* de T dentro de una familia de espacios $\mathcal{F}$, es un espacio $Y \in \mathcal{F}$ al que T puede ser extendido como un operador lineal y continuo conservando sus valores en X, y tal que si T se extiende a un $F \in \mathcal{F}$ entonces F está continuamente contenido en Y.

Al operador T se le asocia la función de conjuntos finitamente aditiva $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ definida por $\nu(A) = T(\chi_A)$. Probaremos que si el operador T cumple las propiedades adecuadas, entonces la función de conjuntos ν es una medida vectorial y T se extiende a $L^1(\nu)$ como un operador lineal y continuo con valores aún en X. Más aún, $L^1(\nu)$ será el dominio óptimo para T dentro de los espacios de funciones de "su misma clase", es decir, espacios de funciones que se comportan como $L^1(\nu)$.

Curbera y Ricker consideran operadores T para los cuales la función de conjuntos ν asociada es una medida vectorial definida sobre una σ–álgebra, llegando a la conclusión de que el espacio $L^1(\nu)$ es el dominio óptimo para T dentro de la clase de los espacios de Banach de funciones orden continuos, [CR1, Corollary 3.3]. En nuestro caso, la medida vectorial ν asociada a T está definida sobre un δ–anillo, así que, como vimos en el capítulo anterior, no podemos asegurar que $L^1(\nu)$ sea espacio de Banach de funciones. Por tanto, buscaremos el dominio óptimo de T dentro de una clase de espacios mayor. La siguiente definición extiende el concepto de espacio de Banach de funciones, considerando un δ–anillo en el papel desempeñado por los conjuntos de medida finita en la definición clásica.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω y $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ una medida numerablemente aditiva. Un *espacio de Banach de funciones* respecto de $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ es un espacio de Banach E de clases de funciones medibles respecto de $\mathcal{R}^{loc}$, cumpliendo

1) si $f \in \mathcal{M}$, $g \in E$ y $|f| \leq |g|$ μ–e.c.t., entonces $f \in E$ y $\|f\|_E \leq \|g\|_E$,

2) $\chi_A \in E$ para todo $A \in \mathcal{R}$,

donde se identifican funciones que son iguales excepto en un conjunto N de $\mathcal{R}^{loc}$ con $|\mu|(N) = 0$ (i.e. μ–e.c.t.).

A diferencia de los espacios de Banach de funciones respecto de espacios de medida sobre una σ–álgebra, en un espacio de Banach de funciones E respecto de $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ con $\mathcal{R}$ δ–anillo, no exigimos que para cada $A \in \mathcal{R}$ se tenga que f sea integrable respecto de μ en A, es decir, que $\chi_A \in E^*$, donde χ_A actúa sobre $f \in E$ como $\int_A f d\mu$. La razón es que buscamos espacios con las propiedades de $L^1(\nu)$ para $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ medida vectorial. Sabemos que existe $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ medida de control local para ν ([BD, Theorem 3.2]), pero no sabemos si dado $A \in \mathcal{R}$ se tiene que $f\chi_A \in L^1(\lambda)$ para todo $f \in L^1(\nu)$. Si ν es σ–finita, hemos visto que existe una medida de control local de Rybakov λ para ν, es decir, $\lambda = |x_0^*\nu|$ para cierto $x_0^* \in B_{X^*}$ (Observación 2.8) y para esta medida λ si se cumple la condición anterior, pues para todo $f \in L^1(\nu)$ se tiene que $f \in L^1(\lambda)$.

En cualquier caso todo espacio de Banach de funciones E sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ es un retículo de Banach para el orden μ–e.c.t., en el que la convergencia en norma de una sucesión implica la convergencia μ–e.c.t. para alguna subsucesión. Veamos que dada $(f_n) \subset E$ con $\|f_n\|_E \to 0$, tomando $\|f_{n_j}\|_E \leq \frac{1}{2^j}$

se tiene que $\cup_{N\geq 1}\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}\{\omega\in\Omega : |f_{n_j}(\omega)| > 1/N\}$ es un conjunto μ–nulo de $\mathcal{R}^{loc}$, así tendremos que $f_{n_j} \to 0$ μ–e.c.t. Fijado $N \geq 1$ y denotando $A_{N,j} = \{\omega\in\Omega : |f_{n_j}(\omega)| > 1/N\}$ con $j \geq 1$, para todo $k \geq 1$, se tiene que

$$\chi_{\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}} \leq \chi_{\cup_{j\geq k}A_{N,j}} \leq \sum_{j\geq k}\chi_{A_{N,j}} \leq N\sum_{j\geq k}|f_{n_j}|$$

y $N\sum_{j\geq k}|f_{n_j}| \in E$, pues $\sum_{j\geq 1} f_{n_j}$ converge en E. Luego por la condición 1) de la Definición 3.1 tenemos que $\chi_{\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}} \in E$ y

$$\|\chi_{\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}}\|_E \leq N\Big\|\sum_{j\geq k}|f_{n_j}|\Big\|_E \leq N\sum_{j\geq k}\|f_{n_j}\|_E \leq \frac{N}{2^k}$$

para todo $k \geq 1$, de donde se sigue que $\|\chi_{\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}}\|_E = 0$. Entonces $\chi_{\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}} = 0$ μ–e.c.t. y así $\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k} A_{N,j}$ es μ–nulo para cada $N \geq 1$. Luego $\cup_{N\geq 1}\cap_{k\geq 1}\cup_{j\geq k}A_{N,j}$ también es μ–nulo.

Ejemplo 3.2.

(I) Un espacio de Banach de funciones sobre un espacio de medida σ–finita (Ω, Σ, μ), donde Σ es una σ–álgebra, es un espacio de Banach de funciones sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$, siendo $\mathcal{R}$ el δ–anillo de los conjuntos de Σ con medida μ finita. En este caso, $\mathcal{R}^{loc} = \Sigma$.

(II) Sea $\mathcal{R}$ un δ–anillo de subconjuntos de Ω, X un espacio de Banach, $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial y $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida de control local para ν. En el Capítulo 2 se vió que $L^1(\nu)$ es un ideal de funciones medibles respecto del orden ν–e.c.t., o equivalentemente respecto del orden λ–e.c.t., que contiene a las funciones $\mathcal{R}$–simples. Luego, $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \lambda)$.

A partir de ahora y hasta el final de esta sección, fijamos un δ–anillo $\mathcal{R}$ de partes de un conjunto Ω.

Proposición 3.3. *Sea E un espacio de Banach de funciones sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$, X un espacio de Banach y $T\colon E \to X$ un operador lineal cumpliendo:*

1) Si $f_n, f \in E$ con $0 \leq f_n \uparrow f$ μ–e.c.t., entonces Tf_n converge débilmente a Tf en X.

2) Dados $A \in \mathcal{R}^{loc}$ con $\chi_A \in E$ y $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\sup_{B \in \mathcal{R} \cap 2^A} |x^*T(\chi_B)| = 0 \implies x^*T(\chi_A) = 0 .$$

Entonces, la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ dada por $\nu(A) = T(\chi_A)$ es una medida vectorial y para todo $f \in E$ se tiene que $f \in L^1(\nu)$ con $\int f d\nu = Tf$. Más aún, si μ y ν son equivalentes, es decir, $|\mu|(B) = 0$ si y sólo si $\|\nu\|(B) = 0$ con $B \in \mathcal{R}^{loc}$, entonces E está continuamente contenido en $L^1(\nu)$ y el operador integración respecto de ν extiende a T.

DEMOSTRACIÓN. Sea (A_n) una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{R}$ tales que $\cup A_n \in \mathcal{R}$. Para cualquier subsucesión (A_{n_j}), de 1) se sigue que $T(\chi_{\cup_{j=1}^N A_{n_j}}) = \sum_{j=1}^N \nu(A_{n_j})$ converge débilmente en X a $T(\chi_{\cup A_{n_j}}) = \nu(\cup A_{n_j})$. Entonces, por el teorema de Orlicz-Pettis, $\sum \nu(A_n)$ es incondicionalmente convergente a $\nu(\cup A_n)$, [DU, Corollary I.4.4]. Por tanto, ν es medida vectorial sobre $\mathcal{R}$.

Supongamos en primer lugar que para toda función simple (respecto de $\mathcal{R}^{loc}$) $\psi \in E$, se tiene que $\psi \in L^1(\nu)$ y $\int \psi d\nu = T(\psi)$.

Sea $0 \leq f \in E$ y (ψ_n) una sucesión de functiones simples tales que $0 \leq \psi_n \uparrow f$. Entonces $\psi_n \in E$ y por suposición $\psi_n \in L^1(\nu)$ con $\int \psi_n d\nu = T(\psi_n)$. Al ser las funciones $\mathcal{R}$–simples densas en $L^1(\nu)$, podemos tomar $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ con $\|\psi_n - \varphi_n\|_\nu \leq \frac{1}{n}$. Como $\psi_n - \varphi_n \to 0$ en $L^1(\nu)$, existe una subsucesión tal que $\psi_{n_k} - \varphi_{n_k} \to 0$ ν–e.c.t. y así $\varphi_{n_k} \to f$ ν–e.c.t.

Dado $x^* \in X^*$ fijo, veamos que f es integrable respecto de $x^*\nu$. Por la Proposición 2.3 aplicada a la medida $x^*\nu\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, sólo hay que probar que $\left(\int_A \varphi_{n_k} dx^*\nu\right)$ converge en $\mathbb{R}$, para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$.

Dado $A \in \mathcal{R}^{loc}$, de la condición 1) de las hipótesis se sigue que $T(\psi_{n_k}\chi_A)$ converge débilmente a $T(f\chi_A)$ en X, luego $x^*T(\psi_{n_k}\chi_A) \to x^*T(f\chi_A)$. Como por suposición $T(\psi_{n_k}\chi_A) = \int_A \psi_{n_k} d\nu$, tenemos que

$$x^*\Big(\int_A \psi_{n_k} d\nu\Big) = \int_A \psi_{n_k} dx^*\nu \to x^*T(f\chi_A) .$$

Por otro lado, se tiene que

$$\left|\int_A \varphi_{n_k} dx^*\nu - \int_A \psi_{n_k} dx^*\nu\right| \leq \int_A |\psi_{n_k} - \varphi_{n_k}| d|x^*\nu| \leq \|x^*\| \|\psi_{n_k} - \varphi_{n_k}\|_\nu \to 0 \ .$$

Luego,

$$\int_A \varphi_{n_k} dx^*\nu \to x^*T(f\chi_A) \ .$$

Por tanto f es integrable respecto de $x^*\nu$ y además por la Observación 2.4 se tiene que

$$\int_A f dx^*\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_{n_k} dx^*\nu = x^*T(f\chi_A) \ .$$

Ésto prueba que $f \in L^1(\nu)$ y $\int f d\nu = T(f)$.

Obsérvese que por la linealidad de T todo conjunto μ–nulo es ν–nulo, pues dado $B \in \mathcal{R}^{loc}$ con $|\mu|(B) = 0$ entonces para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^B$ se tiene que $\mu(A) = 0$ y así $\chi_A = 0$ en E, luego $\nu(A) = T(\chi_A) = 0$ y por tanto B es ν–nulo. Entonces si $f \in E$ y $f = g$ μ–e.c.t., se tiene que $f = g$ ν–e.c.t. y así f y g corresponden a la misma clase de equivalencia en $L^1(\nu)$. Por tanto la aplicación que lleva una clase de E representada por la función f a la clase de $L^1(\nu)$ representada por f, está bien definida. En el caso de que μ y ν sean equivalentes, esta aplicación es inyectiva, pues si $f = g$ ν–e.c.t. entonces $f = g$ μ–e.c.t., es decir, es la aplicación identidad. En este caso E está contenido en $L^1(\nu)$ y la inclusión es continua, pues se trata de una aplicación lineal y positiva entre retículos de Banach.

Por tanto, sólo queda probar que para $A \in \mathcal{R}^{loc}$ con $\chi_A \in E$, se tiene que $\chi_A \in L^1(\nu)$ con $\int \chi_A d\nu = T(\chi_A)$. Veamos que $|x^*\nu|(A) < \infty$ para todo $x^* \in X^*$. Si suponemos que existe $x^* \in X^*$ con $|x^*\nu|(A) = \infty$, podemos tomar $B_n \in \mathcal{R} \cap 2^A$ tal que $|x^*\nu(B_1)| > 1$ y $|x^*\nu(B_n)| > n|x^*\nu|(\cup_{j=1}^{n-1} B_j)$ para cada $n \geq 2$. Entonces, denotando $H_n = \cup_{j=1}^{n} B_j$, se tiene que

$$\begin{aligned} |x^*\nu(H_n)| &= |x^*\nu(B_n) + x^*\nu(H_n \backslash B_n)| \\ &\geq |x^*\nu(B_n)| - |x^*\nu(H_n \backslash B_n)| \\ &\geq n|x^*\nu|(H_{n-1}) - |x^*\nu|(H_{n-1}) \\ &\geq (n-1)|x^*\nu|(B_1) \\ &\geq n - 1 \ . \end{aligned}$$

Por otro lado, al ser χ_{H_n} creciente a $\chi_{\cup H_n} \in E$, por la condición 1) se tiene que $T(\chi_{H_n})$ converge débilmente a $T(\chi_{\cup H_n})$, en particular $x^*T(\chi_{H_n}) = x^*\nu(H_n)$ converge, lo que contradice a la desigualdad anterior. Luego, $|x^*\nu|(A) < \infty$ para todo $x^* \in X^*$, es decir, $\chi_A \in L^1_w(\nu)$.

Dados $B \in \mathcal{R}^{loc}$ y $x^* \in X^*$, al ser

$$|x^*\nu|(A \cap B) = \sup\{|x^*\nu|(H) : H \in \mathcal{R} \cap 2^{A\cap B}\} < \infty ,$$

podemos tomar una sucesión creciente (H_n) de conjuntos en $\mathcal{R} \cap 2^{A\cap B}$ tal que $|x^*\nu|((A \cap B)\backslash H_n) \to 0$. Entonces, $\chi_{H_n} \uparrow \chi_{A\cap B}$ $|x^*\nu|$–e.c.t. y como $\int \chi_{H_n} dx^*\nu = x^*\nu(H_n) = x^*T(\chi_{H_n})$, aplicando convergencia dominada y por la condición 1), se tiene que

$$\int_B \chi_A dx^*\nu = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{H_n} dx^*\nu = \lim_{n\to\infty} x^*T(\chi_{H_n}) = x^*T(\chi_{\cup H_n}) = x^*T(\chi_{A\cap B}) ,$$

donde la última igualdad se obtiene al ser $(A \cap B)\backslash(\cup H_n)$ un conjunto $|x^*\nu|$–nulo, pues de la condición 2) se sigue que $x^*T(\chi_{(A\cap B)\backslash(\cup H_n)}) = 0$. Por tanto, $\chi_A \in L^1(\nu)$ y $\int_B \chi_A d\nu = T(\chi_{A\cap B})$ para todo $B \in \mathcal{R}^{loc}$. □

En las condiciones iniciales de la Proposición 3.3, siempre se tiene que los conjuntos μ–nulos son ν–nulos. Los conjuntos μ–nulos y los ν–nulos coincidirán si y sólo si el operador T cumple la siguiente condición: si $B \in \mathcal{R}^{loc}$ es tal que $T(\chi_A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^B$, entonces B es μ–nulo. Una condición suficiente para que T cumpla la condición anterior es que para todo $A \in \mathcal{R}$ con $T(\chi_A) = 0$ se tenga $\mu(A) = 0$. En particular, si T es inyectiva entonces μ y ν son equivalentes. Nótese que el ser μ y ν equivalentes coincide con el concepto de que μ es medida de control local para ν (ver Capítulo 2, Sección 2).

Como consecuencia de la Proposición 3.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4. *Sea E un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$, X un espacio de Banach y $T\colon E \to X$ un operador lineal y continuo cumpliendo que B es μ–nulo siempre que $B \in \mathcal{R}^{loc}$ con $T(\chi_A) = 0$*

para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^B$. *Entonces, la función de conjuntos* $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ *asociada a* T *es una medida vectorial,* E *está continuamente incluido en* $L^1(\nu)$ *y el operador integración respecto de* ν *extiende a* T.

DEMOSTRACIÓN. Sólo hay que probar que se cumplen las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.3, ya que en ese caso, por la condición exigida a T, μ y ν son equivalentes. De la orden continuidad de E y de la continuidad de T se sigue 1). Si probamos que las funciones $\mathcal{R}$–simples son densas en E, como T es continuo, la condición 2) se cumplirá. A través del lema de Zorn, obtenemos una familia maximal $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos $A_\alpha \in \mathcal{R}$, con $\mu(A_\alpha) > 0$ y $\mu(A_\alpha \cap A_\beta) = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Dado $f \in E$, para cualquier sucesión $(\alpha_j) \subset \Delta$ tenemos que $\sum_{j=1}^{n} |f|\chi_{A_{\alpha_j}} = |f|\chi_{\cup_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}}$ crece a $|f|\chi_{\cup A_{\alpha_j}}$ μ–e.c.t. y como E es orden continuo, la serie $\sum_{j\geq 1} |f|\chi_{A_{\alpha_j}}$ converge en E. Luego, $\sum_{\alpha\in\Delta} |f|\chi_{A_\alpha}$ cumple la condición de Cauchy y por tanto, $f\chi_{A\alpha} = 0$ μ–e.c.t. salvo para un conjunto numerable $\{\alpha_j\}$. Supongamos $f \geq 0$ y sea (ψ_n) una sucesión de funciones simples respecto de $\mathcal{R}^{loc}$ con $0 \leq \psi_n \uparrow f$. Entonces, $\varphi_n = \psi_n \chi_{\cup_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}}$ son funciones $\mathcal{R}$–simples tales que $0 \leq \varphi_n \uparrow f\chi_{\cup A_{\alpha_j}} = f$ μ–e.c.t. De nuevo por orden continuidad, (φ_n) converge a f en E. $\square$

A partir del resultado anterior obtenemos el dominio óptimo de un operador lineal $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to X$ con la única condición de que su función de conjuntos asociada sea una medida vectorial.

Teorema 3.5. *Sea* X *un espacio de Banach y* $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to X$ *un operador lineal tal que* $T(\chi_{A_n})$ *converge débilmente a* $T(\chi_A)$ *en* X, *para toda sucesión creciente* (A_n) *de conjuntos de* $\mathcal{R}$, *tal que* $A = \cup A_n \in \mathcal{R}$. *Entonces, la función de conjuntos* $\nu\colon \mathcal{R} \to X$ *dada por* $\nu(A) = T(\chi_A)$ *es una medida vectorial y* $L^1(\nu)$ *es el dominio óptimo para* T *dentro de la clase de espacios de Banach de funciones orden continuos sobre* $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ *siendo* μ *equivalente a* ν.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que la condición requerida a T es necesaria y suficiente para que ν sea una medida vectorial. Entonces, el espacio $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \lambda)$ siendo λ una medida de control local para ν, es decir, λ es equivalente a ν (ver Ejemplo 3.2.(II)). Además, el operador integración extiende a T.

Supongamos que $\tilde{T}\colon F \to X$ es una extensión lineal y continua de T, siendo F un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ con μ equivalente a ν. Dado $B \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^B$ se tiene que $\tilde{T}(\chi_A) = 0$, como $\tilde{T}(\chi_A) = T(\chi_A) = \nu(A)$ se sigue que B es ν–nulo y como μ es equivalente a ν, entonces B es μ–nulo. Luego se cumplen las hipótesis del Corolario 3.4 para $\tilde{T}$ y por tanto F está continuamente incluido en $L^1(\tilde{\nu})$, donde $\tilde{\nu}\colon \mathcal{R} \to X$ es la medida vectorial dada por $\tilde{\nu}(A) = \tilde{T}(\chi_A)$. Al ser $\tilde{\nu}$ igual a ν se tiene que $L^1(\tilde{\nu}) = L^1(\nu)$. □

Como consecuencia directa del Teorema 3.5, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *Sea E un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$, X un espacio de Banach y $T\colon E \to X$ un operador lineal y continuo cumpliendo que B es μ–nulo siempre que $B \in \mathcal{R}^{loc}$ con $T(\chi_A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{R} \cap 2^B$. Entonces, el dominio óptimo para T dentro de la clase de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $(\Omega, \mathcal{R}, \lambda)$ con λ equivalente a ν, es el espacio $L^1(\nu)$, siendo ν la medida vectorial asociada a T.*

La condición exigida al operador lineal y continuo T en el Corolario 3.6 es necesaria para que el operador integración sea realmente una extensión de T a $L^1(\nu)$, es decir, que E se inyecte en $L^1(\nu)$.

Ejemplo 3.7. Sea $\mathcal{R}$ el δ–anillo de los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue m finita y $\mathcal{R}^{loc}$ la σ–álgebra de todos los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$. Dado $p \in [1, \infty)$, el espacio $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, m)$. Para cualquier isomorfismo $T\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ se cumplen las hipótesis del Corolario 3.6, en particular los conjuntos m–nulos y los ν–nulos coinciden. Entonces, $L^1(\nu)$ para la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{R} \to L^p(\mathbb{R})$ dada por $\nu(A) = T(\chi_A)$, es el dominio óptimo de T dentro de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mu)$ con μ equivalente a ν, en particular $\mu = m$. Para estos operadores T tenemos una descripción precisa del dominio óptimo, pues vimos en el Ejemplo 2.12 que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^p(\mathbb{R})$.

SECCIÓN 2. Una clase importante de operadores entre espacios de funciones la forman los operadores definidos a partir de un núcleo. En esta sección consideraremos funciones definidas sobre $[0,\infty)$ y hallaremos descripciones precisas para los dominios óptimos de aquellos operadores cuyos núcleos cumplan las propiedades adecuadas. Notamos que se puede llegar a conclusiones análogas si consideramos operadores con núcleo entre espacios de funciones definidas sobre cualquier espacio de medida σ–finita.

Sea $\mathcal{B}$ la σ–álgebra de los subconjuntos de Borel de $[0,\infty)$ y $\mathcal{B}_a$ el δ–anillo de los conjuntos de $\mathcal{B}$ acotados. Entonces $\mathcal{B}_a^{loc} = \mathcal{B}$. Denotaremos por m a la medida de Lebesgue sobre $[0,\infty)$.

Sea $K\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función medible tal que para todo $x\in[0,\infty)$, la función K_x definida por $K_x(y)=K(x,y)$, es integrable respecto de m sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$. Diremos que una función K cumpliendo las condiciones anteriores es un *núcleo admisible.* A cada núcleo admisible K se le asocia la función de conjuntos finitamente aditiva ν definida sobre $\mathcal{B}_a$ por

$$\nu(A) = \int_A K(\cdot\,,y)\,dy\ ,$$

y el operador lineal T definido por

$$T(f) = \int_0^\infty f(y)K(\cdot\,,y)\,dy$$

siempre que la integral tenga sentido, es decir, para todo $x\in[0,\infty)$ la integral sea convergente. Obsérvese que ν es la función de conjuntos asociada a T, es decir, $\nu(A)=T(\chi_A)$ para todo $A\in\mathcal{B}_a$.

Dada una función de conjuntos ν asociada a un núcleo admisible K, el primer problema que nos planteamos es el de hallar espacios de Banach X para los que $\nu\colon\mathcal{B}_a\to X$ sea medida vectorial (i.e. bien definida y numerablemente aditiva). Nos centraremos en buscar espacios de Banach de funciones sobre $[0,\infty)$, es decir, sobre $([0,\infty),\mathcal{B},m)$.

Proposición 3.8. *Sea X un espacio de Banach de funciones sobre $[0,\infty)$ y*

K un núcleo admisible con operador T y función de conjuntos ν asociados. Supongamos que $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ está bien definida.

a) Si X es orden continuo, entonces $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es numerablemente aditiva.

b) Si $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es numerablemente aditiva, entonces todo $f \in L^1(\nu)$ cumple que $T(f) \in X$ y $T(f) = \int f d\nu$.

c) Si $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es numerablemente aditiva, entonces $L^1(\nu)$ es el dominio óptimo para $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{B}_a) \to X$, dentro de la clase de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, \mu)$ siendo μ equivalente a ν.

DEMOSTRACIÓN. Probemos a). Sea $(A_n) \subset \mathcal{B}_a$ tal que $\cup A_n \in \mathcal{B}_a$. Al ser K no negativo, se tiene que $\nu(\cup_{j=1}^n A_j) \uparrow \nu(\cup A_j) \in X$ y como X es orden continuo, $\sum_{j=1}^n \nu(A_j) = \nu(\cup_{j=1}^n A_j)$ converge a $\nu(\cup A_j)$ en X.

Supongamos $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es numerablemente aditiva. Sea $0 \le f \in L^1(\nu)$ y (ψ_n) una sucesión de funciones simples con $0 \le \psi_n \uparrow f$. Las funciones $\varphi_n = \psi_n \chi_{[0,n]}$ son $\mathcal{B}_a$–simples y $0 \le \varphi_n \uparrow f$. Como $L^1(\nu)$ es orden continuo, φ_n converge a f en $L^1(\nu)$, luego $\int \varphi_n d\nu \to \int f d\nu$ en X. Consideremos una subsucesión $\int \varphi_{n_k} d\nu = T(\varphi_{n_k})$ que converja m–e.c.t. a $\int f d\nu$. Como K es no negativo, $0 \le T(\varphi_{n_k}) = \int_0^\infty \varphi_{n_k}(y) K(\cdot\,,y)dy$ crece a $\int_0^\infty f(y)K(\cdot\,,y)dy$. Luego, $T(f) = \int f d\nu \in X$. Por tanto se cumple b).

Si $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es numerablemente aditiva, entonces $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{B}_a) \to X$ cumple las hipótesis del Teorema 3.5, luego también se cumple c). □

Sea X un espacio de Banach de funciones sobre $[0,\infty)$ y K un núcleo admisible tal que la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ es una medida vectorial. La medida de Lebesgue m es equivalente a ν si y sólo si K cumple la siguiente condición: si $A \in \mathcal{B}_a$ es tal que $\int_A K(x,y)dy = 0$ m–e.c.t. $x \in [0,\infty)$, entonces $m(A) = 0$. Una condición suficiente para que se cumpla lo anterior es que para casi todo x, $K_x > 0$ (e.c.t.).

En vista de la Proposición 3.8, una vez que determinemos espacios de Banach de funciones X sobre $[0,\infty)$ cumpliendo que la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ asociada a un núcleo admisible K, es una medida vectorial, el problema de hallar el dominio óptimo para el operador T asociado a K, equivale a identificar el espacio $L^1(\nu)$.

Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre $[0,\infty)$. El espacio $L^1 \cap L^\infty$ está continuamente contenido en X, luego toda medida vectorial con valores en $L^1 \cap L^\infty$, también lo es con valores en X. Por tanto nos interesa obtener condiciones sobre K que garanticen que su función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es una medida vectorial.

Proposición 3.9. *Dado un núcleo admisible K, la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es una medida vectorial si y sólo si K cumple:*

1) La función K_y definida por $K_y(x) = K(x,y)$, es integrable m–e.c.t. $y \in [0,\infty)$.

2) La función $y \to \int_0^\infty K_y(x)dx$ es integrable sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$.

3) $\sup_{x\geq 0} \int_A K(x,y)dy < \infty$, *para cada $A \in \mathcal{B}_a$.*

4) $\lim_{m(B)\to 0} \int_{B\cap A} K_x(y)dy = 0$ *uniformemente en $x \in [0,\infty)$, para cada $A \in \mathcal{B}_a$.*

DEMOSTRACIÓN. Es obvio que $\nu(A) \in L^\infty$ para todo $A \in \mathcal{B}_a$ si y sólo si K cumple la condición 3). Por otro lado, $\nu(A) \in L^1$ si y sólo si

$$\int_0^\infty \int_A K(x,y)dydx = \int_A \int_0^\infty K(x,y)dxdy < \infty ,$$

y ésto ocurre para todo $A \in \mathcal{B}_a$ si y sólo si K cumple las condiciones 1) y 2). Luego, ν está bien definida si y sólo si K cumple 1)–3). Como L^1 es orden continuo, de la Proposición 3.8.a) se sigue que $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es numerablemente aditiva si y sólo si $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^\infty$ es numerablemente aditiva.

Supongamos que K cumple 4). Sea (A_n) una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{B}_a$, tal que $A = \cup A_n \in \mathcal{B}_a$. Como $m(A) < \infty$, tenemos que

$m(\cup_{j>n}A_j) \to 0$ y de 4) se sigue que

$$\Big\|\nu(A) - \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)\Big\|_\infty = \|\nu(\cup_{j>n} A_j)\|_\infty = \sup_{x\geq 0} \int_{\cup_{j>n}A_j} K(x,y)dy \to 0 \, .$$

Luego, $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^\infty$ es numerablemente aditiva.

Recíprocamente, supongamos que $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^\infty$ es numerablemente aditiva. Si K no cumple 4), para algún $A \in \mathcal{B}_a$, existen $\delta > 0$ y conjuntos (B_n) con $m(B_n) < 1/2^n$, tales que

$$\delta < \sup_{x\geq 0} \int_{B_n\cap A} K_x(y)dy = \|\nu(B_n \cap A)\|_\infty \leq \|\chi_{B_n\cap A}\|_\nu \leq \|\chi_{H_n}\|_\nu \, ,$$

donde $H_n = \cup_{j\geq n}B_j \cap A$. Como χ_{H_n} son funciones $\mathcal{B}_a$–simples decrecientes a cero m–e.c.t. y por tanto ν–e.c.t., la orden continuidad de $L^1(\nu)$ implica que $\|\chi_{H_n}\|_\nu \to 0$. Con ésto llegamos a contradicción. $\square$

Ejemplo 3.10. Sea $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función medible. Consideramos $K\colon [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $K(x,y) = \phi(x-y)\chi_{[0,x]}(y)$. La función K es un núcleo admisible cumpliendo las condiciones 1)–4) de la Proposición 3.9 si y sólo si ϕ es integrable, y en ese caso la función $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ asociada a K, es una medida vectorial. Ésto ya se había visto en el Ejemplo 2.13, pues ν es la función de conjuntos asociada al operador de Volterra de convolución por ϕ. Por tanto, suponiendo que ϕ es integrable, para todo espacio invariante por reordenamiento X sobre $[0,\infty)$, el operador $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{B}_a) \to X$ asociado a K, tiene por dominio óptimo dentro de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, \mu)$ con μ equivalente a ν, a $L^1(\nu)$ con $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$.

Veamos que la medida de Lebesgue m es equivalente a ν. Sea $A \in \mathcal{B}_a$ tal que m–e.c.t. $x \in [0,\infty)$ se tiene que $\int_A \phi(x-y)\chi_{[0,x]}(y)dy = 0$. Integrando respecto de x en $[0,\infty)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x-y)\chi_{[0,x]}(y)\chi_A(y)dydx \\ &= \int_0^\infty \chi_A(y) \int_y^\infty \phi(x-y)dxdy \\ &= \int_0^\infty \chi_A(y) \int_0^\infty \phi(s)dsdy \\ &= \|\phi\|_1 m(A) . \end{aligned}$$

Si $\phi = 0$ m–e.c.t., K no tiene interés, por tanto suponemos lo contrario. Entonces, $\|\phi\|_1 > 0$ y así $m(A) = 0$.

Con objeto de facilitar la tarea de identificar el espacio $L^1(\nu)$ de una medida vectorial ν asociada a un núcleo admisible K cumpliendo las condiciones 1)-4) de la Proposición 3.9, le exigiremos a K que cumpla la siguiente propiedad de monotonía.

Un núcleo admisible K es *monótono decreciente* si cumple que $K_{x_1}(y) \geq K_{x_2}(y)$ m–e.c.t. $y \in [0,\infty)$ siempre que $x_1 \leq x_2$. Todo núcleo admisible monótono decreciente K cumple las condiciones 3) y 4) de la Proposición 3.9, pues para todo $x \geq 0$ se tiene que $K_x \leq K_0$ m–e.c.t. y K_0 es integrable sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$. Luego, para estos núcleos, la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es una medida vectorial si y sólo si K cumple las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.9. En ese caso, si K además cumple que $K_{x_n} \uparrow K_0$ m–e.c.t. siempre que $x_n \downarrow 0$, se tiene que ν y m son equivalentes si y sólo si $K_0 > 0$ m–e.c.t.

Obsérvese que los núcleos admisibles monótonos crecientes ($K_{x_1}(y) \leq K_{x_2}(y)$ m–e.c.t. $y \in [0,\infty)$ para $x_1 \leq x_2$) son incompatibles con la condición 1) de la Proposición 3.9, pues m–e.c.t. $y \in [0,\infty)$, la función K_y es creciente y positiva sobre $[0,\infty)$.

Ejemplo 3.11. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, sea $K\colon [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ el núcleo admisible definido por $K(x,y) = \exp\big(-\lambda(y-x)\big)\chi_{[x,\infty)}(y)$. Es directo comprobar que K cumple las condiciones 1)–4) de la Proposición 3.9. Por tanto, la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ asociada a K es medida vectorial, con todo lo que ello conlleva. Además, ν es equivalente a m, pues $\int_A K(x,y)dy = e^{\lambda x}\int_A e^{-\lambda y}\chi_{[x,\infty)}(y)dy = 0$ m–e.c.t. implica que $\int_A e^{-\lambda y}dy = 0$ y así $m(A) = 0$. En el caso $\lambda \leq 0$ se tiene que K es monótono decreciente.

Para cada núcleo admisible monótono decreciente K cumpliendo las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.9, consideramos las funciones ω y ξ definidas por

$$\omega(y) = \int_0^\infty K_y(x)dx \quad \text{y} \quad \xi(y) = K(0,y) \quad \text{para } y \in [0,\infty)\ .$$

Nótese que ω y ξ son funciones integrables sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$, pues K cumple la condición 2) de la Proposición 3.9 y $\xi = K_0$. Denotamos por L^1_ω al espacio de funciones integrables respecto de la medida de Lebesgue con densidad ω y por $\|\cdot\|_\omega$ a su norma. Adoptamos la misma notación para ξ.

Teorema 3.12. *Sea K un núcleo admisible, monótono decreciente, tal que cumple las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.9. Entonces, la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es una medida vectorial y el espacio $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1_\omega \cap L^1_\xi$.*

DEMOSTRACIÓN. Las hipótesis implican, por la Proposición 3.9, que $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 \cap L^\infty$ es una medida vectorial.

El espacio $L^1_\omega \cap L^1_\xi$ dotado de la norma $\|f\|_{L^1_\omega \cap L^1_\xi} = \max\{\|f\|_\omega, \|f\|_\xi\}$ y el orden m_ψ–e.c.t., donde m_ψ es la medida de Lebesgue con densidad $\psi = \max\{\omega, \xi\}$, es un espacio de Banach de funciones orden continuo respecto de $([0,\infty), \mathcal{B}, m_\psi)$. Además, por orden continuidad, las funciones $\mathcal{B}_a$–simples son densas en $L^1_\omega \cap L^1_\xi$.

Por la Proposición 3.8.b) se tiene que $\int f d\nu = \int f(y)K(\cdot,y)dy \in L^1 \cap L^\infty$

para todo $f \in L^1(\nu)$. Luego, para cada función $\mathcal{B}_a$–simple φ, se cumple

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\omega &= \int_0^\infty |\varphi(y)|\omega(y)dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty |\varphi(y)|K(x,y)dydx \qquad (3.1) \\ &= \int_0^\infty \Big(\int |\varphi| d\nu\Big)(x)dx \\ &= \Big\| \int |\varphi| d\nu \Big\|_1 , \end{aligned}$$

y al ser K monótona decreciente,

$$\|\varphi\|_\xi = \int_0^\infty |\varphi(y)|\xi(y)dy = \sup_{x\geq 0} \int_0^\infty |\varphi(y)|K(x,y)dy = \Big\| \int |\varphi| d\nu \Big\|_\infty . \qquad (3.2)$$

Entonces, $\|\varphi\|_{L^1_\omega \cap L^1_\xi} = \| \int |\varphi| d\nu \|_{L^1 \cap L^\infty}$. En particular, los conjuntos m_ψ–nulos y los ν–nulos coinciden. De las desigualdades (2.4), se sigue que $\frac{1}{2}\|\varphi\|_\nu \leq \|\varphi\|_{L^1_\omega \cap L^1_\xi} \leq \|\varphi\|_\nu$. Por tanto, de la densidad de las funciones $\mathcal{B}_a$–simples en ambos espacios, se concluye que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1_\omega \cap L^1_\xi$. □

Observación 3.13. Bajo las mismas condiciones del Teorema 3.12, la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1$ es una medida vectorial. Considerando $x^* \in (L^1)^*$ asociado a una función $g \in L^\infty$, se tiene que $x^*\nu(A) = \int g(x)\nu(A)(x)dx$ y $|x^*\nu|(A) \leq \int |g(x)|\nu(A)(x)dx$ para todo $A \in \mathcal{B}_a$. Entonces toda función $\mathcal{B}_a$–simple φ cumple

$$\int |\varphi| d|x^*\nu| \leq \int |g(x)| \Big(\int |\varphi| d\nu \Big)(x)dx .$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Big\| \int |\varphi| d\nu \Big\|_1 &\leq \|\varphi\|_\nu = \sup_{x^* \in B_{(L^1)^*}} \int |\varphi| d|x^*\nu| \\ &\leq \sup_{g \in B_{L^\infty}} \int |g(x)| \Big(\int |\varphi| d\nu \Big)(x)dx \\ &= \Big\| \int |\varphi| d\nu \Big\|_1 , \end{aligned}$$

y por (3.1) se tiene que $\|\varphi\|_\nu = \|\varphi\|_\omega$. Así, $L^1(\nu)$ coincide con L^1_ω y además $\|f\|_\nu = \|f\|_\omega = \| \int |f| d\nu \|_1$ para todo $f \in L^1_\omega$.

Si consideramos ahora la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^\infty$, de (2.4) y (3.2) se sigue que $\frac{1}{2}\|\varphi\|_\nu \leq \|\varphi\|_\xi \leq \|\varphi\|_\nu$ para toda función $\mathcal{B}_a$–simple φ. Así, $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a L^1_ξ y $\|f\|_\xi = \| \int |f| d\nu \|_\infty$ para todo $f \in L^1_\xi$.

Para hallar el espacio $L^1(\nu)$ de la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 + L^\infty$ asociada a un núcleo admisible K como el del Teorema 3.12, necesitaremos añadir una nueva propiedad a K.

Teorema 3.14. *Sea K un núcleo admisible, monótono decreciente, tal que cumple las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.9. Supongamos que K cumple la siguiente condición: existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^1 K_y(x)dx \geq C \min\left\{ \int_0^\infty K_y(x)dx\, ,\, K(0,y)\right\}, \quad \textit{para todo } y \geq 0\,. \qquad (3.3)$$

Entonces, la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to L^1 + L^\infty$ es una medida vectorial y el espacio $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1_\omega + L^1_\xi$.

DEMOSTRACIÓN. El espacio $L^1_\omega + L^1_\xi$ de funciones medibles f tales que $f = g + h$ para algún $g \in L^1_\omega$ y $h \in L^1_\xi$, dotado de la norma

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1_\omega + L^1_\xi} &= \inf\left\{\|g\|_\omega + \|h\|_\xi \,:\, f = g + h \text{ con } g \in L^1_\omega,\, h \in L^1_\xi\right\} \\ &= \int_0^\infty |f(y)| \min\{\omega(y), \xi(y)\} dy\end{aligned}$$

(ver [BK, (3.1.39) p. 307]) y el orden m_η–e.c.t., donde m_η es la medida de Lebesgue con densidad $\eta = \min\{\omega, \xi\}$, es un espacio de Banach de funciones orden continuo respecto de $([0,\infty), \mathcal{B}, m_\eta)$. Además, las funciones $\mathcal{B}_a$–simples son densas en $L^1_\omega + L^1_\xi$.

Sea φ una función $\mathcal{B}_a$–simple. Dados $g \in L^1_\omega$ y $h \in L^1_\xi$ tales que $\varphi = g + h$, por la Observación 3.13, se tiene que $\|g\|_\omega = \| \int |g| d\nu \|_1$ y $\|h\|_\xi = \| \int |h| d\nu \|_\infty$ y entonces

$$\|g\|_\omega + \|h\|_\xi \geq \left\| \int (|g| + |h|) d\nu \right\|_{L^1 + L^\infty} \geq \left\| \int |\varphi| d\nu \right\|_{L^1 + L^\infty},$$

de donde tomando ínfimo en g y h, tenemos $\|\varphi\|_{L^1_\omega+L^1_\xi} \geq \|\int|\varphi|d\nu\|_{L^1+L^\infty}$. Por otro lado, teniendo en cuenta que para cualquier función medible f se cumple que $\int_A|f(x)|dx \leq \int_0^{m(A)} f^*(x)dx$ para todo $A \in \mathcal{B}$, donde f^* es la reordenada decreciente de f [BS, Theorem II.2.2], y aplicando la condición (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Big\|\int|\varphi|d\nu\Big\|_{L^1+L^\infty} &= \int_0^1\Big(\int|\varphi|d\nu\Big)^*(x)dx \\
&\geq \int_0^1\Big(\int|\varphi|d\nu\Big)(x)dx \\
&= \int_0^\infty|\varphi(y)|\int_0^1 K_y(x)dxdy \\
&\geq C\int_0^\infty|\varphi(y)|\min\{\omega(y)\,,\,\xi(y)\}dy \\
&= C\|\varphi\|_{L^1_\omega+L^1_\xi}\,.
\end{aligned}$$

Como ya hemos notado en el Ejemplo 2.13, $(L^1+L^\infty)^* = L^1\cap L^\infty$. Siguiendo el mismo razonamiento dado en la Observación 3.13 para ν con valores en L^1, obtenemos que $\|\varphi\|_\nu = \|\int|\varphi|d\nu\|_{L^1+L^\infty}$. Luego, $\|\varphi\|_\nu \leq \|\varphi\|_{L^1_\omega+L^1_\xi} \leq \frac{1}{C}\|\varphi\|_\nu$. En particular m_η y ν tienen los mismos conjuntos nulos. Por tanto $L^1(\nu)$ y $L^1_\omega + L^1_\xi$ son orden isomorfos. □

Por último, daremos una descripción del espacio $L^1(\nu)$ para la medida vectorial $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ asociada a un núcleo admisible K como el de los teoremas anteriores, siendo X cualquier espacio invariante por reordenamiento orden continuo sobre $[0,\infty)$. Para ello, imponemos que K cumpla una condición más estricta que (3.3) y recurrimos al K–método de interpolación de Peetre.

Teorema 3.15. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento orden continuo sobre $[0,\infty)$ y K un núcleo admisible, monótono decreciente, que cumple las condiciones 1) y 2) de la Proposición 3.9. Supongamos que K cumple la siguiente condición: existe una constante $C>0$ tal que*

$$\int_0^t K_y(x)dx \geq C\min\Big\{\int_0^\infty K_y(x)dx\,,\,tK(0,y)\Big\}\,,\ \textit{para todo } t,y\geq 0\,. \quad (3.4)$$

Entonces, la función de conjuntos asociada $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ *es una medida vectorial y el espacio* $L^1(\nu)$ *es orden isomorfo a* $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$.

DEMOSTRACIÓN. Para toda función $f \in L^1_\omega + L^1_\xi$, de [BK, (3.1.39) p. 307] se sigue que

$$\mathcal{K}(t, f; L^1_\omega, L^1_\xi) = \int_0^\infty |f(y)| \min\{\omega(y), t\xi(y)\} dy \ . \tag{3.5}$$

En el próximo Lema 3.16, probaremos que $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ es un espacio de Banach de funciones sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, m_\eta)$, siendo $\eta = \min\{\omega, \xi\}$, al que X le transmite la propiedad de orden continuidad. Luego las funciones $\mathcal{B}_a$–simples son densas en $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$.

Sea φ una función $\mathcal{B}_a$–simple. Recordando que $\omega(y) = \int_0^\infty K_y(x)dx$ y $\xi(y) = K(0, y)$, de las condiciones (3.4) y (3.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, \varphi; L^1_\omega, L^1_\xi) &\le \frac{1}{C} \int_0^\infty |\varphi(y)| \int_0^t K_y(x) dx dy \\ &= \frac{1}{C} \int_0^t \int_0^\infty |\varphi(y)| K(x, y) dy dx \\ &= \frac{1}{C} \int_0^t \Big(\int |\varphi| d\nu \Big)(x) dx \\ &\le \frac{1}{C} \int_0^t \Big(\int |\varphi| d\nu \Big)^*(x) dx \ . \end{aligned}$$

Por otra parte $\mathcal{K}(t, \varphi; L^1_\omega, L^1_\xi) \ge \int_0^t (\int |\varphi| d\nu)^*(x) dx$, pues dados $g \in L^1_\omega$ y $h \in L^1_\xi$ con $\varphi = g + h$, por la Observación 3.13, se tiene que

$$\begin{aligned} \|g\|_\omega + t\|h\|_\xi &= \Big\| \int |g| d\nu \Big\|_1 + t \Big\| \int |h| d\nu \Big\|_\infty \\ &\ge \mathcal{K}\Big(t, \int (|g| + |h|) d\nu; L^1, L^\infty\Big) \\ &\ge \mathcal{K}\Big(t, \int |\varphi| d\nu; L^1, L^\infty\Big) \\ &= \int_0^t \Big(\int |\varphi| d\nu \Big)^*(x) dx \ , \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\mathcal{K}(t,f;L^1,L^\infty)=\int_0^t f^*(x)dx$ para cualquier función $f\in L^1+L^\infty$, [BS, Theorem V.1.6].

Dadas $f_1,f_2\in X$ tales que $\int_0^t f_1^*(x)dx\le\int_0^t f_2^*(x)dx$ para todo $t>0$, se cumple que $\|f_1\|_X\le\|f_2\|_X$, [BS, Corollary II.4.7]. Al ser φ una función $\mathcal{B}_a$–simple se tiene que $\int|\varphi|d\nu$, $\mathcal{K}'(\cdot,\varphi;L^1_\omega,L^1_\xi)\in X$ y hemos visto que

$$\begin{aligned}\int_0^t\Big(\int|\varphi|d\nu\Big)^*(x)dx &\le \mathcal{K}(t,\varphi;L^1_\omega,L^1_\xi)=\int_0^t\mathcal{K}'(x,\varphi;L^1_\omega,L^1_\xi)dx\\ &\le \frac{1}{C}\int_0^t\Big(\int|\varphi|d\nu\Big)^*(x)dx,\ \text{para todo } t>0,\end{aligned}$$

entonces, como $\mathcal{K}'(\cdot,\varphi;L^1_\omega,L^1_\xi)$ es una función decreciente y por tanto coincide con su reordenada decreciente, se tiene que

$$\Big\|\int|\varphi|d\nu\Big\|_X\le\|\varphi\|_{(L^1_\omega,L^1_\xi)_X}=\|\mathcal{K}'(\cdot,\varphi;L^1_\omega,L^1_\xi)\|_X\le\frac{1}{C}\Big\|\int|\varphi|d\nu\Big\|_X.$$

Al ser X orden continuo, X^* coincide con el dual de Köthe X', entonces podemos repetir el razonamiento de la Observación 3.13 para obtener que $\|\varphi\|_\nu=\|\int|\varphi|d\nu\|_X$. Luego, $\|\varphi\|_\nu\le\|\varphi\|_{(L^1_\omega,L^1_\xi)_X}\le\frac{1}{C}\|\varphi\|_\nu$. En particular m_η y ν tienen los mismos conjuntos nulos. Por tanto $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $(L^1_\omega,L^1_\xi)_X$. □

Probemos el lema técnico utilizado en el teorema anterior. Seguimos manteniendo la notación L^1_ω para el espacio de funciones integrables respecto de la medida de Lebesgue con densidad ω y $\|\cdot\|_\omega$ para su norma, siendo $\omega\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función medible.

Lema 3.16. *Sean $\omega,\xi\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ funciones integrables sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$ y X un espacio invariante por reordenamiento orden continuo sobre $[0,\infty)$. Entonces $(L^1_\omega,L^1_\xi)_X$ es un espacio de Banach de funciones orden continuo sobre $([0,\infty),\mathcal{B}_a,m_\eta)$, donde m_η es la medida de Lebesgue con densidad $\eta=\min\{\omega,\xi\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la notación usaremos $\mathcal{K}(t,f)$ en lugar de $\mathcal{K}(t,f;L^1_\omega,L^1_\xi)$. Para cualquier función $f\in L^1_\omega+L^1_\xi$, podemos escribir

$\mathcal{K}'(t,f)$ como

$$\mathcal{K}'(t,f) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h,f) - \mathcal{K}(t,f)\Big) . \tag{3.6}$$

De (3.5) (válido para cualesquiera ω, ξ), denotando $\Phi(t,y) = \min\{\omega(y), t\xi(y)\}$ se sigue

$$\frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h,f) - \mathcal{K}(t,f)\Big) = \frac{1}{h}\int_0^\infty |f(y)|\big(\Phi(t+h,y) - \Phi(t,y)\big)dy . \tag{3.7}$$

Para todo $A \in \mathcal{B}_a$ se tiene que $\chi_A \in L^1_\omega \cap L^1_\xi \subset (L^1_\omega, L^1_\xi)_X$. Veamos que $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ es un ideal de funciones medibles. Sean f medible y $g \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ tales que $|f| \le |g|$ m_η–e.c.t. Como $m_\eta(A) = 0$ si y sólo si $m(A\cap Sop(\eta)) = 0$, y $Sop(\eta) = Sop(\omega) \cap Sop(\xi)$, tenemos que

$$|f|\big(\Phi(t+h,\cdot) - \Phi(t,\cdot)\big) \le |g|\big(\Phi(t+h,\cdot) - \Phi(t,\cdot)\big) \quad m\text{–e.c.t.}$$

para todo $t,h > 0$, pues $\Phi(t+h,\cdot) \ge \Phi(t,\cdot)$. Entonces, de (3.6) y (3.7) se sigue que $\mathcal{K}'(t,f) \le \mathcal{K}'(t,g)$ para todo $t > 0$. Al ser $\mathcal{K}'(\cdot,g) \in X$, ya que $g \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_X$, se tiene que $\mathcal{K}'(\cdot,f) \in X$, es decir $f \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_X$, y además

$$\|f\|_{(L^1_\omega,L^1_\xi)_X} = \|\mathcal{K}'(\cdot,f)\|_X \le \|\mathcal{K}'(\cdot,g)\|_X = \|g\|_{(L^1_\omega,L^1_\xi)_X} .$$

Luego, $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ es un espacio de Banach de funciones sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, m_\eta)$.

Veamos ahora que $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ es orden continuo. Si probamos que para $f_n, f \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ con $0 \le f_n \uparrow f$ m_η–e.c.t., se cumple que $\mathcal{K}'(\cdot,f_n) \uparrow \mathcal{K}'(\cdot,f)$, entonces como X es orden continuo, se tendrá que $\mathcal{K}'(\cdot,f_n)$ converge a $\mathcal{K}'(\cdot,f)$ en X. Entonces, al ser $0 \le f_n \le f$ m_η-e.c.t., de (3.6) y (3.7) se sigue que

$$\mathcal{K}'(t,f) - \mathcal{K}'(t,f_n) = \mathcal{K}'(t,f-f_n)$$

y por tanto tendremos que f_n converge a f en $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$.

Veamos entonces que $\mathcal{K}'(\cdot,f_n) \uparrow \mathcal{K}'(\cdot,f)$ cuando $0 \le f_n \uparrow f$ m_η–e.c.t. Al ser $\mathcal{K}'$ decreciente (ver Preliminares), para cualquier función $g \in L^1_\omega + L^1_\xi$ se tiene que

$$\frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h,g) - \mathcal{K}(t,g)\Big) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{K}'(s,g)ds \le \mathcal{K}'(t,g) . \tag{3.8}$$

Si $0 \leq f_n \uparrow f$ m_η-e.c.t., ya se ha visto que $\mathcal{K}'(t, f_n) \leq \mathcal{K}'(t, f_{n+1}) \leq \mathcal{K}'(t, f)$ para todo $t > 0$. De aplicar el teorema de convergencia monótona en (3.5) se sigue que $\mathcal{K}(t, f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}(t, f_n)$ para todo $t > 0$. Entonces, por (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h, f) - \mathcal{K}(t, f)\Big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h, f_n) - \mathcal{K}(t, f_n)\Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}'(t, f_n) \leq \mathcal{K}'(t, f)\ , \end{aligned}$$

de donde tomando limite cuando $h \to 0^+$, obtenemos $\mathcal{K}'(t, f_n) \uparrow \mathcal{K}'(t, f)$ para todo $t > 0$. □

Consideremos el núcleo admisible K dado en el Ejemplo 3.11 para $\lambda \leq 0$, en cuyo caso es monótono decreciente y cumple las propiedades 1) y 2) de la Proposición 3.9. Recordamos que $K(x, y) = \exp\big(-\lambda(y - x)\big)\chi_{[x,\infty)}(y)$. Veamos que cumple la condición (3.4) del Teorema 3.15, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^t K(x, y)dx \geq C \min\{\omega(y), t\xi(y)\}\ , \quad \text{para todo } t, y \geq 0\ , \tag{3.9}$$

donde $\omega(y) = \int_0^\infty K(x, y)dx$ y $\xi(y) = K(0, y)$.

Si $\lambda = 0$ se tiene que $\omega(y) = y$ y $\xi(y) = 1$, entonces

$$\min\{\omega(y), t\xi(y)\} = \min\{y, t\} = \int_0^t K(x, y)dx\ ,$$

luego se cumple (3.9).

Supongamos que $\lambda < 0$. Entonces $\omega(y) = \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}$, $\xi(y) = e^{-\lambda y}$ y

$$\int_0^t K(x, y)dx = \begin{cases} \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda} & \text{si } y \leq t \\ \frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) & \text{si } y > t \end{cases}$$

Si $y \leq t$ se tiene que $\min\{\omega(y), t\xi(y)\} \leq \omega(y) = \int_0^t K(x, y)dx$. Cuando $y > t$ distinguimos dos casos. Si $t \geq 1$, como $\lambda < 0$ se tiene que $1 - e^{\lambda t} \geq 1 - e^{\lambda} > 0$

y así

$$\begin{aligned}\int_0^t K(x,y)dx &= \frac{e^{-\lambda y}}{(-\lambda)}(1-e^{\lambda t})\\ &\geq \omega(y)(1-e^{\lambda})\\ &\geq (1-e^{\lambda})\min\{\omega(y), t\xi(y)\}\ .\end{aligned}$$

Supongamos que $t < 1$. La función $g(s) = 1 - e^{-s} - e^{\lambda}s$ es creciente en $[0, -\lambda]$ y como $0 \leq (-\lambda)t \leq -\lambda$ se tiene que $0 = g(0) \leq g(-\lambda t)$ y así $(-\lambda)te^{\lambda} \leq 1 - e^{\lambda t}$. Entonces,

$$\min\{\omega(y), t\xi(y)\} \leq t\xi(y) \leq \frac{1}{(-\lambda)e^{\lambda}}(1-e^{\lambda t})\xi(y) = e^{-\lambda}\int_0^t K(x,y)dx\ .$$

En cualquier caso tenemos que

$$\min\{\omega(y), t\xi(y)\} \leq \max\left\{e^{-\lambda}, \frac{1}{1-e^{\lambda}}\right\}\int_0^t K(x,y)dx\ ,$$

por tanto se cumple (3.9).

Luego, por el Teorema 3.15, para todo espacio X invariante por reordenamiento y orden continuo sobre $[0,\infty)$, la función de conjuntos $\nu\colon \mathcal{B}_a \to X$ definida por $\nu(A) = \int_A K(\cdot,y)dy$ es una medida vectorial y $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$. Además, por la Proposición 3.8, $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$ es el dominio óptimo, dentro de los espacios de Banach de funciones orden continuos sobre $([0,\infty), \mathcal{B}_a, \mu)$ con μ equivalente a ν (en particular $\mu = m$), del operador $T\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to X$ con núcleo K definido por $T(f) = \int_0^\infty f(y)K(\cdot,y)dy$.

Para precisar más el espacio $(L^1_\omega, L^1_\xi)_X$, necesitamos conocer mejor la función $\mathcal{K}'(\cdot, f; L^1_\omega, L^1_\xi)$.

Lema 3.17. *Sean $\omega, \xi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ funciones integrables sobre conjuntos de $\mathcal{B}_a$. Para toda función $f \in L^1_\omega + L^1_\xi$ se cumple que*

$$\mathcal{K}'(t, f; L^1_\omega, L^1_\xi) = \int_{\{y\geq 0\,:\, t\xi(y)\leq\omega(y)\}} |f(y)|\xi(y)dy\ , \quad \textit{para todo } t > 0\ . \tag{3.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomamos $\mathcal{K}(t,f) = \mathcal{K}(t,f;L^1_\omega,L^1_\xi)$. Describiremos $\mathcal{K}'(t,f)$ usando (3.6) y (3.5). Denotando $\Phi(t,y) = \min\{\omega(y), t\xi(y)\}$, observamos que

$$\Phi(t+h,\cdot) - \Phi(t,\cdot) = (\omega - t\xi)\chi_{[t\xi<\omega\leq(t+h)\xi]} + h\xi\chi_{[(t+h)\xi<\omega]} \,.$$

Sea $f_1 \in L^1_\omega$ y $f_2 \in L^1_\xi$ tales que $f = f_1+f_2$, como $|f|\xi\chi_{[t\xi\leq\omega]} \leq \frac{1}{t}|f_1|\omega+|f_2|\xi \in L^1[0,\infty)$, aplicando convergencia dominada tenemos que

$$\frac{1}{h}\int_{[t\xi<\omega\leq(t+h)\xi]} |f(y)|(\omega(y) - t\xi(y))dy \leq \int_{[t\xi<\omega\leq(t+h)\xi]} |f(y)|\xi(y)dy \to 0$$

y

$$\int_{[(t+h)\xi<\omega]} |f(y)|\xi(y)dy \to \int_{[t\xi<\omega]} |f(y)|\xi(y)dy$$

cuando $h \to 0^+$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}'(t,f) &= \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\Big(\mathcal{K}(t+h,f) - \mathcal{K}(t,f)\Big) \\
&= \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_0^\infty |f(y)|\Big(\Phi(t+h,y) - \Phi(t,y)\Big)dy \\
&= \int_{[t\xi<\omega]} |f(y)|\xi(y)dy \,.
\end{aligned}$$

□

Considerando de nuevo el núcleo admisible del Ejemplo 3.11, para $\lambda = 0$ tenemos que

$$\mathcal{K}'(t,f;L^1_\omega,L^1_\xi) = \int_t^\infty |f(y)|dy$$

y para $\lambda < 0$,

$$\mathcal{K}'(t,f;L^1_\omega,L^1_\xi) = \int_{\ln(1+\lambda t)^{1/\lambda}}^\infty |f(y)|e^{-\lambda y}dy \,.$$

Tomando por ejemplo el espacio de Lorentz Λ_ϕ de funciones medibles f

tales que $\int_0^\infty f^*(s)\phi'(s)ds < \infty$, cuando $\lambda = 0$ se tiene que $f \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_{\Lambda_\phi}$ si

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{K}'(s,f;L^1_\omega,L^1_\xi)\phi'(s)ds &= \int_0^\infty \phi'(s)\int_s^\infty |f(y)|dyds \\ &= \int_0^\infty |f(y)|\int_0^y \phi'(s)dsdy \\ &= \int_0^\infty |f(y)|\phi(y)dy < \infty\ ,\end{aligned}$$

luego $(L^1_\omega, L^1_\xi)_{\Lambda_\phi} = L^1_\phi$. Cuando $\lambda < 0$ se tiene que $f \in (L^1_\omega, L^1_\xi)_{\Lambda_\phi}$ si

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{K}'(s,f;L^1_\omega,L^1_\xi)\phi'(s)ds &= \int_0^\infty \phi'(s)\int_{\ln(1+\lambda s)^{1/\lambda}}^\infty |f(y)|e^{-\lambda y}dyds \\ &= \int_0^\infty |f(y)|e^{-\lambda y}\phi\Big(\frac{e^{\lambda y}-1}{\lambda}\Big)dy\ ,\end{aligned}$$

luego $(L^1_\omega, L^1_\xi)_{\Lambda_\phi} = L^1_g$ donde $g(y) = e^{-\lambda y}\phi\Big(\frac{e^{\lambda y}-1}{\lambda}\Big)$.

Referencias.

[BDS] R. G. Bartle, N. Dunford y J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math., **7** (1955) 289–305.

[BS] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators* (Academic Press, Boston, 1988).

[BL] R. G. Bilyeu y P. W. Lewis, *Differentiability of convex functions and Rybakov's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **86** (1982) 186–187.

[B] J. K. Brooks, *On the existence of a control measure for strongly bounded vector measures*, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971) 999–1001.

[BD] J. K. Brooks y N. Dinculeanu, *Strong additivity, absolute continuity and compactness in spaces of measures*, J. Math. Anal. and Appl., **45** (1974) 156–175.

[BK] Yu. A. Brudnyĭ y N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces* (North–Holland, Amsterdam, 1991).

[C1] G. P. Curbera, *El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial* (Ph. D. Thesis, Univ. de Sevilla, 1992).

[C2] G. P. Curbera, *Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*, Math. Ann., **293** (1992) 317–330.

[C3] G. P. Curbera, *When L^1 of a vector measure is an AL–space*, Pacific J. Math., **162** (1994) 287–303.

[C4] G. P. Curbera, *Banach space properties of L^1 of a vector measure*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995) 3797–3806.

[C5] G. P. Curbera, *Volterra convolution operators with values in rearrangement invariant spaces*, J. London Math. Soc., **60** (1999) 258–268.

[CR1] G. P. Curbera y W. J. Ricker, *Optimal domains for kernel operators via interpolation*, Math. Nachr., **244** (2002) 47–63.

[CR2] G. P. Curbera y W. J. Ricker, *Optimal domains for the kernel operator associated with Sobolev's inequality*, Studia Math., **158** (2003) 131–152.

[DU] J. Diestel y Jr. J.J. Uhl, *Vector Measures* (Amer. Math. Soc. Surveys, vol. 15, Providence, RI, 1977).

[D] N. Dinculeanu, *Vector Measures* (Pergamon, Oxford, 1953).

[K] I. Kluvánek, *The extension and closure of vector measures*, in Vector Operator-Valued Measures and Applications, Symposium (Alta, Utah, 1972), pp. 175–189, Academic Press, New York, 1973.

[KK] I. Kluvánek y G. Knowles, *Vector Measures and Control Systems* (North-Holland, Amsterdam, 1975).

[KR] M. A. Krasnosel'skiĭ y Ya. B. Rutickiĭ , *Convex Functions and Orlicz Spaces* (P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961).

[L1] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math., **33** (1970) 157–165.

[L2] D. R. Lewis, *On integrability and summability in vector spaces*, Illinois J. Math., **16** (1972) 294–307.

[LT] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces vol. II* (Springer-Verlag, Berlin, 1979).

[MN1] P. R. Masani y H. Niemi, *The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar–valued measures on δ–rings*, Adv. Math., **73** (1989) 204–241.

[MN2] P. R. Masani y H. Niemi, *The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration*, Adv. Math., **75** (1989) 121–167.

[O] S. Okada, *The dual space of $L^1(\mu)$ for a vector measure μ*, J. Math. Anal. and Appl., **177** (1993) 583–599.

[OR1] S. Okada y W. J. Ricker, *Nonweak compactness of the integration map for vector measures*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **54** (1993) 287–303.

[OR2] S. Okada y W. J. Ricker, *Compactness properties of the integration map associated with a vector measure*, Colloq. Math., **66** (1994) 175–185.

[OR3] S. Okada y W. J. Ricker, *The range of the integration map of a vector measure*, Arch. Math., **64** (1995) 512–522.

[OR4] S. Okada y W. J. Ricker, *Optimal domains and integral representations of convolution operators in $L^p(G)$*, Integral Equations Operator Theory, **48** (2004) 525–546.

[ORR] S. Okada, W. J. Ricker y L. Rodríguez-Piazza, *Compactness of the integration operator associated with a vector measure*, Studia Math., **150** (2002) 133–149.

[RR] M. M. Rao y Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1991).

[R1] W. J. Ricker, *Completeness of the L^1-space of closed vector measures*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **33** (1990) 71–78.

[R2] W. J. Ricker, *Separability of the L^1-space of a vector measure*, Glasgow. Math. J., **34** (1992) 1–9.

[R3] W. J. Ricker, *Compactness properties of extended Volterra operators in $L^p([0,1])$ for $1 \leq p \leq \infty$*, Arch. Math., **66** (1996) 132–140.

[S1] E. A. Sánchez Pérez, *Compactness arguments for spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces*, Illinois J. Math., **45** (2001) 907-923.

[S2] E. A. Sánchez Pérez, *Spaces of integrable functions with respect to vector measures of convex range and factorization of operators from L_p-spaces*, Pacific J. Math., **207** (2002) 489-495.

[S3] E. A. Sánchez Pérez, *Vector measure duality and tensor product representations of L_p-spaces of vector measures*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004) 3319-3326.

[St] G. F. Stefansson, L_1 *of a vector measure*, Le Matematiche, **48** (1993) 219–234.

[Ste] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).

ña Olvido Delgado Garrido
Nuevas Contribuciones sobre L^1
de una medida vectorial

Sobresaliente cum
laude por unanimidad
15 Diciembre de 2004

El Vocal

W. Ricker

Susumu Okada

El Doctorando

El Presidente,