

CALCULO DEL TÉRMINO NO SINGULAR DE TENSIONES EN UNA GRIETA 3D MEDIANTE UNA INTEGRAL INDEPENDIENTE DEL DOMINIO

J. E. Ortiz, V. Mantič y F. París

Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n, E-41092 Sevilla, España.
E-mail: jortiz@esi.us.es, mantic@esi.us.es, paris@esi.us.es
Tfno: 954-487299. Fax: 954-461637

RESUMEN

El término no singular de tensiones, denominado también “T-stress”, es el término asociado al autovalor $\lambda=1$ en la serie desarrollada por Williams (1957) para el campo de tensiones lineal elástico cercano al vértice de una grieta. En las tres últimas décadas se ha demostrado que este término puede incidir en muchos de los problemas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Por ejemplo, puede cambiar el tamaño y la forma de la zona plástica en el entorno del vértice de la grieta o cambiar la dirección de la propagación, entre otros aspectos. Los métodos de cálculo de esta tensión finita usualmente se han desarrollado para problemas planos. En este trabajo se presenta un método para determinar las tensiones no singulares existentes en el campo de tensiones en el entorno del vértice de una grieta tridimensional. El método está basado en una integral independiente del dominio que utiliza convenientemente campos auxiliares para eliminar los términos singulares de la serie. Se presenta su implementación en la etapa de postprocesamiento del método de los elementos de contorno. Se ha modelado el problema de una placa con grieta lateral para la cual se ha determinado el término T-stress en deformación plana y su variación a lo largo del frente de la grieta para el problema tridimensional.

ABSTRACT

T-stress is the no-singular stress of the Williams (1957) series expansion for linear elastic crack tip fields. It is known that this term has a significant influence on crack growth direction and crack path stability. Several numerical or analytical methods were developed to calculate the elastic T-stress in 2D in the past. Many researchers have provided T-stress solutions for 2D cracked bodies under uniform tension, bending loading conditions or under non-linear stress distributions. However, T-stress solutions for 3D cracked specimens are very limited. In the present paper a path independent integral is presented to evaluate the T-stress along the crack front for 3D bodies. The method used adequate auxiliary fields to eliminate the singular terms of the series expansion. The domain-independent representation for this integral is presented together with the details of its BEM implementation. The present procedure allows a direct evaluation of the T-stress to be performed in a precise way. A benchmark problem is modelled by BEM to evaluate T-stress in the plane strain and 3D solutions.

ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS: Métodos Analíticos y Numéricos.

PALABRAS CLAVE: T-stress, integral independiente del dominio, elementos de contorno.

1. INTRODUCCIÓN

El denominado “T-stress” es el término no singular en la serie desarrollada por Williams [1] para el campo de tensiones elástico lineal cercano al vértice de una grieta. En 2D, este término es una tensión paralela a la grieta y es el segundo parámetro después del conocido factor de intensidad de tensiones asociado a los términos singulares. Depende fuertemente del tipo de carga así como de la longitud de grieta y de la geometría de la probeta.

En las dos décadas últimas, se ha demostrado que este parámetro puede llegar a incidir en problemas de la Mecánica de la Fractura. Por ejemplo, en la propagación

de grietas, controlada por la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, la estabilidad está gobernada por el valor y el signo del “T-stress”. Teóricamente se sabe que cuando esta tensión es positiva, la grieta es direccionalmente inestable siguiendo una pequeña desviación que hace que ésta no retorne a su línea inicial de propagación [2]. A su vez, en la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica se ha demostrado que los campos de tensiones y deformaciones en la zona plástica alrededor del vértice de la grieta pueden ser caracterizados de una forma más precisa cuando están determinados los parámetros J y T [3, 4]. En este caso, los valores negativos (compresivos) de “T-stress” pueden causar una reducción de la constricción en el vértice de la grieta y por tanto disminuir el nivel de las

tensiones de apertura en el fondo de ésta para un mismo valor de J aplicado. Consecuentemente, estructuras con altos niveles de T compresivo, tales como una placa con grieta central sujeta a tracción, requieren mayores valores de J para alcanzar las condiciones necesarias de fractura. Por ello, aparentemente en estos casos el material exhibe mayores valores de tenacidad de fractura. Por otro lado, en estructuras con T positivo, tales como barras con grietas profundas sujetas a flexión, exhiben una aparente disminución en la tenacidad respecto su valor cuando T es igual cero.

En el contexto de la fractura bidimensional, "T-stress" es independiente de las propiedades elásticas del material. Los valores de "T-stress" coinciden en tensión plana o deformación plana. Por el contrario, en fractura tridimensional el valor de T depende de las propiedades mecánicas del material así como del espesor de la probeta. En estos casos, T puede incrementarse considerablemente a lo largo del espesor de la probeta logrando cambiar sustancialmente la forma y el tamaño de la zona plástica alrededor y a lo largo del frente de la grieta. Sin embargo, los estudios de la incidencia del "T-stress" en fractura tridimensional son limitados [5, 6] y en la actualidad no se conoce el comportamiento de este parámetro para distintas geometrías de probetas 3D.

En este trabajo se presenta un método para el cálculo de los valores del "T-stress" en grietas 3D en medios homogéneos. El método está basado en una integral independiente del dominio. Se presenta su implementación en la etapa de post-procesamiento del Método de los Elementos de Contorno. Se ha modelado el problema de una placa con grieta lateral para la cual se ha determinado el término T-stress en deformación plana y su variación a lo largo del frente de la grieta para el problema tridimensional.

2. INTEGRAL INDEPENDIENTE DE DOMINIO PARA EL CALCULO DE "T-STRES"

La distribución de tensiones y desplazamientos en la vecindad del frente de una grieta 3D puede expresarse en función de los primeros términos de un desarrollo en serie [6, 7]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) & 0 \\ f_{21}(\theta) & f_{22}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & f_{33}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}(z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (T_{11}-\nu T_{33}) \frac{r \cos \theta}{E} \\ -(T_{11}+T_{33}) \frac{r \sin \theta}{E} \\ \int (T_{33}-\nu T_{11}) \frac{dz}{E} \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde K_I representa el factor de intensidad de tensiones y T_{ij} el estado de tensiones constantes, definidos ambos a lo largo del frente de la grieta. Usualmente se denomina $T_{11}=T$.

Según Huber et al. [8], la integral J para grietas 3D puede escribirse como sigue:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma \quad (3)$$

donde W es la densidad de energía de deformación y n_j es el vector normal a Γ , ver figura 1.

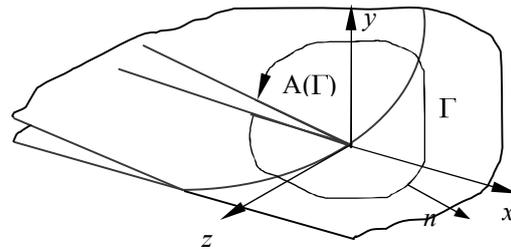


Figura 1: Camino de integración en una grieta 3D.

Considere dos estados de equilibrio con variables de campo denotadas con superíndices (A) y (B), respectivamente. El principio de superposición de dos estados de equilibrio da un tercer estado también en equilibrio (A+B). Aplicando este principio se establece [5]:

$$M^{(A,B)} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B n_1 - \sigma_{ij}^A u_{i,1}^B n_j - \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A n_j) d\Gamma \quad (4)$$

$M^{(A,B)}$ se denomina integral de interacción y puede expresarse en términos de la integral J . Usando (4) pueden calcularse los términos "T-stress"; para ello en este trabajo se asume como estado (A) la solución correspondiente a la obtenida por el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el problema de la grieta 3D. Para el segundo estado (B) se asume la solución correspondiente al problema de la grieta semiinfinita cargada por una fuerza puntual perpendicular al frente de la grieta y contenida en el plano de ésta, bajo la condición de deformación plana [11], ver Apéndice.

Para un camino circular Γ de radio ε que tiende a cero, la integral (4) se escribe como sigue:

$$M^{(A,B)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B n_1 - \sigma_{ij}^A u_{i,1}^B n_j - \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A n_j) \varepsilon d\theta \quad (5)$$

Considerando que $n_3=0$, $\sigma_{3\alpha}=0$ ($\alpha=1,2$) y $u_{3,1}=0$ en ambos campos (A, B) en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y que las tensiones singulares en (1) y los gradientes de los desplazamientos compatibles con estas tensiones contribuyen solamente a las componentes del plano, se demuestra que:

$$M^{(A,B)} = \frac{f}{E} (T - \nu T_{33}) \quad (6)$$

Adicionalmente una segunda relación puede establecerse para problemas 3D bajo la condición de deformación plana generalizada [6]:

$$T_{33} = \nu T + E \varepsilon_{33} \quad (7)$$

Reemplazando en (6), se obtiene una expresión para T:

$$T = \frac{E}{f(1-\nu^2)} (M^{(A,B)} + \nu E \varepsilon_{33}) \quad (8)$$

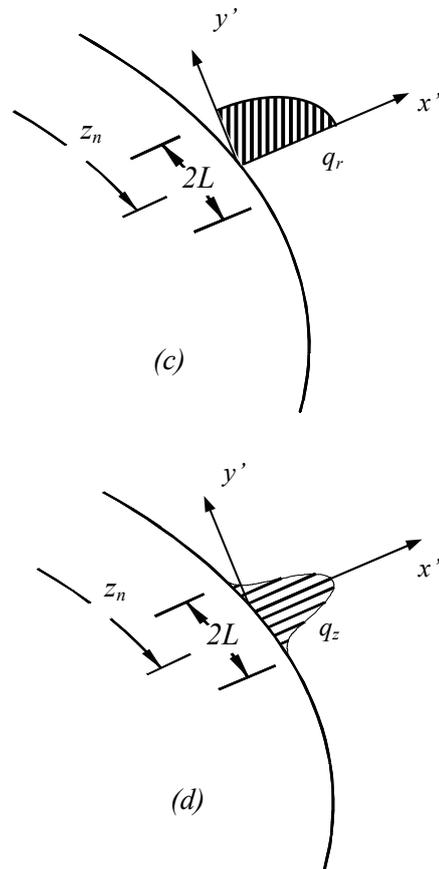


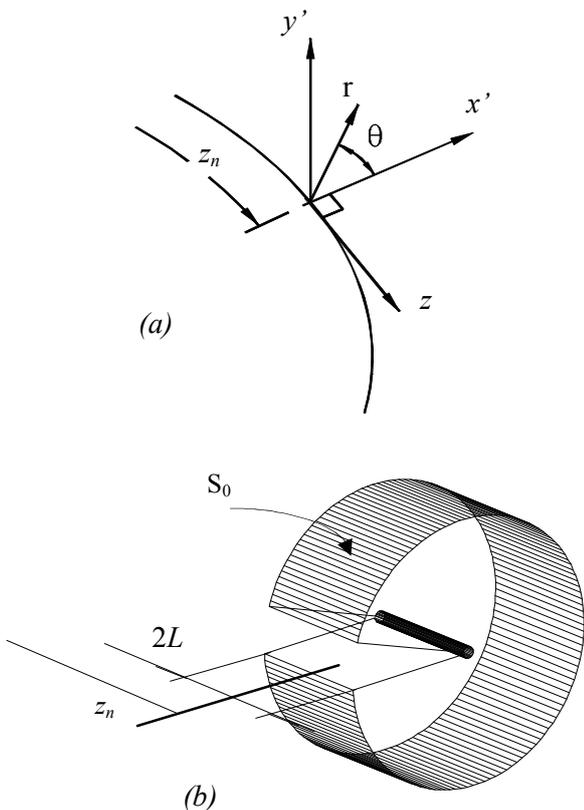
Figura 2: (a) Definición del sistema de coordenadas cartesianas locales en el punto z_n , (b) Dominio cilíndrico V , (c) Función auxiliar q_r a lo largo del segmento $2L$, (d) Función auxiliar q_z a lo largo del segmento $2L$.

La expresión (4) es válida únicamente en el límite cuando $\Gamma \rightarrow 0$ por lo que una expresión más conveniente en 3D puede obtenerse usando las estrategias introducidas en [12], así:

$$M^{(A,B)} = \int_V (\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B n_1 - \sigma_{ij}^A u_{i,1}^B n_j - \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A n_j) h_{,1} dV \quad (9)$$

Donde V es un volumen conteniendo al punto z_n sobre el frente de grieta donde los términos “T-stress” serán calculados.

La evaluación de la integral (9) se lleva a cabo en un sistema de coordenadas locales (x', y', z') con origen en la posición global en un punto fijo z_n sobre el frente de grieta donde $T(z_n)$ es requerido, ver figura 2 (a). En este trabajo el volumen V es un dominio cilíndrico de longitud $2L$ alrededor del frente de la grieta conteniendo



el punto z_n , ver figura 2 (b). La función auxiliar q está definida en el dominio V como el producto de dos funciones $q_r(r)$ y $q_z(z)$. La primera de estas funciones tiene valor unitario sobre el frente de la grieta, cero sobre la superficie cilíndrica del volumen V y es suave en el resto del volumen, mientras que la segunda es una función suave entre $-L$ y $+L$ y cero en estos puntos, ver figura 2 (c) y (d).

3. DETALLES DE LA IMPLEMENTACIÓN

El procedimiento para obtener $T(z_n)$ vía la expresión (8) ha sido implementado en la etapa de postprocesamiento del código del MEC 3-D. El código MEC aplicado para resolver el problema elástico isótropo 3-D esta basado en la solución de las ecuaciones integrales de contorno usando la identidad de desplazamientos de Somigliana. Algunas características relevantes de este código son: elementos cuadráticos isoparamétricos de nueve nodos, integración numérica regular por cuadratura Gaussiana con 16 puntos usando subdivisión de elementos en el caso de la integral cuasi-singular, transformación a coordenadas polares para la integral débilmente singular y la condición de movimiento como sólido rígido para la evaluación de la suma de los coeficientes de los términos libres y el valor principal de Cauchy de la integral fuertemente singular.

El cálculo de “T-stress” en una posición z_n sobre el frente de grieta mediante la expresión (8) requiere de la evaluación de una integral de dominio presentada en (9). Una selección natural usando un código del MEC es considerar los puntos z_n coincidentes con los nodos del modelo del MEC sobre el frente de la grieta mientras la longitud de integración L en la figura 2(b) es igual a la longitud de los elementos según corresponda el caso, tal como se explicará más adelante. La porción de volumen V en la que la integral de dominio es evaluada, se discretiza usando celdas de 27-nodos. Las tensiones y las derivadas de los desplazamientos dentro de las celdas son aproximadas por productos de las funciones de interpolación de las celdas Ψ_i y los valores nodales de σ_{ij} y u_{ij} , respectivamente. Los valores nodales de estas variables se calculan siguiendo los procedimientos para puntos internos [13]. La integración se lleva a cabo usando la cuadratura de Gauss con $8 \times 8 \times 8$ puntos en el volumen de cada celda, ver figura 3.

Como se describe en la figura 4, tres casos diferentes necesitan ser considerados, dependiendo si el nodo M de interés (correspondiente con la posición z_n) está situado en el centro del lado del elemento que coincide con el frente de grieta (nodo central), si está entre dos elementos (nodo compartido) o si se encuentra situado en la superficie externa (nodo sobre la superficie). Si M es un nodo central o se encuentra sobre la superficie, la longitud $2L$ (el segmento sobre el frente de la grieta en el cual se calcula la integral) abarca un elemento, conectando los nodos $M-1$, M , y $M+1$ y los nodos $M-2$, $M-1$ y M , respectivamente.

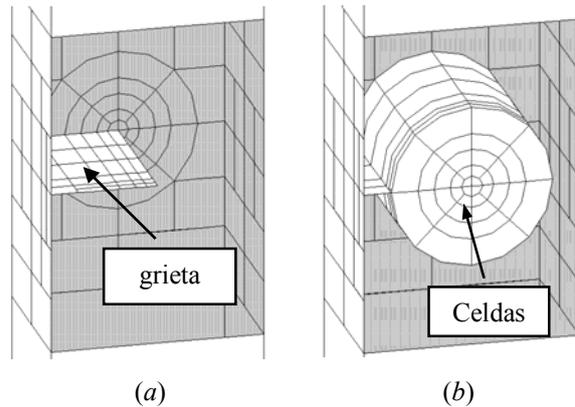


Figura 3: (a) discretización del MEC, (b) celdas de integración.

Por otro lado, si M es un nodo compartido, $2L$ abarca dos elementos, conectando los nodos desde $M-2$ a $M+2$, ver figura 4. La evaluación de $T(z_n)$ vía (8) para un punto z_n coincidente con el nodo de la superficie, ver figura 4, no es admitida en general.

En este trabajo ambas funciones $q_z(z)$ y $q_r(r)$ varían cuadráticamente en la dirección tangencial y normal al frente de la grieta, respectivamente. Esta definición bicuadrática de q ha sido empleada con excelentes resultados en la evaluación de la integral de interacción para grietas en trabajos previos, ver Cisilino y Ortiz [9]. La función $q=q_r(r)q_z(z)$ es interpolada en todos los puntos dentro del volumen de integración usando los elementos de volumen isoparamétricos estándar:

$$q = \sum_{i=1}^{27} \Psi_i Q^i \tag{10}$$

donde Ψ_i son las funciones de forma definidas dentro del volumen de cada celda y Q^i son los valores nodales de la función q para cada nodo i . De acuerdo a la definición de q (ver Ec. (10)), $Q^i = 0$ si el nodo i está sobre S_o , mientras que para el resto de los nodos, los Q^i vienen dados por los valores del producto $q_r(r)q_z(z)$ en esos nodos, en particular $Q^i = 1$ sobre el frente de la grieta, ver figura 2. Aplicando la regla de la cadena:

$$q_{,j} = \sum_{i=1}^{27} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Psi_i}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} Q^i \tag{11}$$

donde ζ_k son las coordenadas intrínsecas en el espacio de las celdas isoparamétricas.

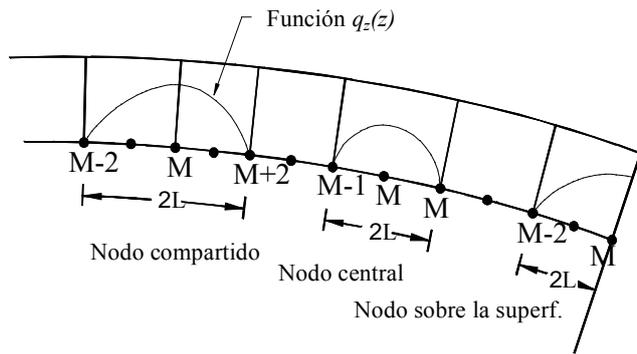


Figura 4: Esquema de las celdas en la región del frente de la grieta.

x_3/t	r/a			promedio
	0.2	0.3	0.4	
0.0000	0.987	1.030	1.018	1.012
0.1430	0.987	1.029	1.018	1.011
0.2860	0.987	1.029	1.018	1.011
0.4290	0.987	1.029	1.018	1.011
0.5710	0.987	1.029	1.018	1.011
0.6430	0.986	1.029	1.017	1.011
0.7140	0.986	1.028	1.016	1.010
0.7860	0.984	1.026	1.015	1.008
0.8570	0.980	1.023	1.011	1.005
0.9290	0.983	1.028	1.015	1.009
1.0000	0.986	1.031	1.017	1.011

Tabla I: valores de T/T_{ref} a lo largo del frente de grieta en deformación plana.

4. EJEMPLO NUMÉRICO: PLACA GRUESA CON GRIETA LATERAL

Considérese una placa gruesa con grieta lateral y sujeta a una tensión remota uniaxial σ . Detalles de la geometría y dimensiones se presentan en la figura 5. La malla del modelo MEC consiste en 136 elementos cuadráticos y 565 nodos. Para el cálculo del “T-stress”, se ha dispuesto de cuatro anillos de celdas con radio r/a igual a 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 alrededor y a lo largo del frente de la grieta, resultando así un total de 140 celdas.

En la Tabla I se presentan los valores del “T-stress” en deformación plana para celdas con radio r/a igual a 0.2, 0.3 y 0.4. Estos valores han sido normalizados respecto a la solución numérica obtenida por Sherry et al. [10]. Las diferencias entre ambas soluciones no superan el 3% y para el promedio entre los valores de “T-stress” antes obtenido apenas llega a superar el 1%.

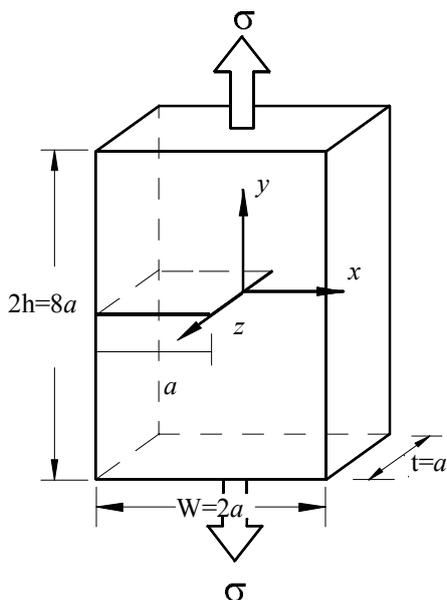


Figura 5: Placa con grieta lateral.

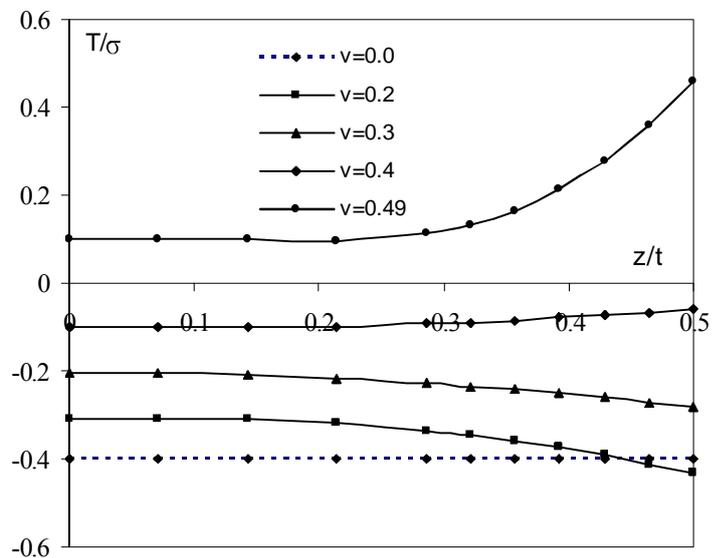


Figura 6: Valores normalizados T/σ a lo largo del frente de la grieta 3D.

Las soluciones para “T-stress” en 3D se presentan en la figura 6 para valores del coeficiente de Poisson igual a 0.0, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.49. Los patrones de comportamiento de estos valores a lo largo del frente de grieta concuerdan con los presentados por Sládek y Sládek [6].

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una integral independiente del dominio para el cálculo de los términos no singulares de tensiones en grietas 3D. Asimismo, se ha presentado su implementación usando la solución del Método de los Elementos de Contorno. El método desarrollado permite obtener excelentes resultados numéricos para el cálculo del “T-stress” en problemas de grietas 3D.

6. AGRADECIMIENTOS

Se desea agradecer al Programa Juan de la Cierva por financiamiento concedido al Dr. J. Ortiz. Por su parte, el Dr. V. Mantič y el Dr. F. París agradecen la financiación del proyecto No. MAT2003-03315 del Ministerio de Educación y Ciencia del gobierno de España.

REFERENCIAS

[1] Williams, M.L., On the stress distribution at the base of a stationary crack., *J. of Appl. Mech.* 24, 109-114, 1957.

[2] Cotterell, B., Notes on the paths and stability of cracks, *Int. J. Fract. Mech.* 2, 526-533, 1966.

[3] Harlin, G. and Willis, J. R., The influence of crack size on the ductile-brittle transition, *Proc Roy. Soc. A415*, 197-226, 1988.

[4] Betegon, C. and Hancock, J. W., The effect of non-parameter characterisation of elastic-plastic crack-tip fields, *J. Appl. Mech.* 58, 104-113, 1991.

[5] Nakamura, T. and Parks, D.M., Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral, *Int. J. Solids Struct.* 29, 1597-1611, 1992.

[6] Sládek, J. and Sládek, V., Evaluation of the elastic T-stress in three-dimensional crack problems using an integral formula, *Int. J. of Fract.* 101, L47-L52, 2000.

[7] Parks, D.M., Three-dimensional aspect of HRR-dominance, *Defect Assesment in Components – Fundamentals and Applications ESIS/EGF9. Mechanical Engineering Publications, London* 205-231, 1991.

[8] Huber, O., Nickel, J and Kuhn, G., On the decomposition of the *J*-integral for 3D crack problems, *Int. J. of Fract.* 64, 339-348, 1993.

[9] Csilino, A. and Ortiz, J., Boundary element analysis of three-dimensional mixed-mode cracks via the interaction integral, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, 935–956, 2005.

[10] Sherry, A.H., France, C.C. and Goldthorpe M.R., Compendium of T-stress solution for two and three-dimensional cracked geometries, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 18, 141-155, 1995.

[11] Kfoury, A.P., Some evaluation of the elastic T-term using Eshelby’s method, *Int. J. Fract.* 30, 301-315, 1986.

[12] Shih, C.F. Moran, B. and Nakamura, T., Energy release rate along a three-dimensional crack front in and thermally stressed body, *Int. J. Fract.* 30, 79-102, 1986.

[13] Sladek V. and Sladek J. Improved computation of stresses using the boundary element method. *Applied Mathematic Modelling* 10, 249-255, (1986).

APENDICE

Componentes cartesianas de las derivadas de desplazamientos y tensiones en una grieta semiinfinita cargada por una fuerza puntual perpendicular al frente de la grieta y contenida en el plano de ésta, bajo condición de deformación plana [11].

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= -\frac{f}{4\pi r} \frac{k \cos \theta + \cos 3\theta}{2G} \\
 u_{1,2} &= -\frac{f}{4\pi r} \frac{-k \sin \theta + \sin 3\theta}{2G} \\
 u_{2,1} &= -\frac{f}{E' \pi r} [1 + (1 + \nu') \cos^2 \theta] \sin \theta \\
 u_{2,2} &= -\frac{f}{E' \pi r} (-\sin^2 \theta + \nu' \cos^2 \theta) \cos \theta \\
 \sigma_{11} &= -\frac{f}{\pi r} \cos^3 \theta \\
 \sigma_{12} &= -\frac{f}{\pi r} \cos^2 \theta \sin \theta \\
 \sigma_{22} &= -\frac{f}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta \\
 \sigma_{33} &= -\nu \frac{f \cos \theta}{\pi r}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Donde E es el módulo elástico, G es el módulo de cizalladura y ν es el coeficiente de Poisson. En deformación plana $k=(3-4\nu)$, $E'=E/(1-\nu^2)$ y $\nu'=\nu/(1-\nu)$.