

CALCULO FOTOELASTICO DE LOS FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIONES MEDIANTE DESARROLLOS EN SERIE. INFLUENCIA DE LOS TERMINOS NO SINGULARES.

J. Marín, R. Picón, F. París, J. Cañas
 Departamento de Mecánica de Medios Continuos
 E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla. Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla

Resumen.- Se presenta un estudio experimental para demostrar la necesidad de incluir dos funciones en la reproducción de problemas antisimétricos de grietas. La no inclusión de una de estas funciones conduce a resultados inválidos de los Factores de Intensidad de Tensiones. Algunas peculiaridades de la probeta utilizada son analizadas mediante un modelo de Elementos Finitos. Por último, se comentan algunos aspectos numéricos del método utilizado.

Abstract.- An experimental study has been done to show that two stress functions are needed for the proper simulation of skewsymmetric problems defined on cracks. Invalid results of Stress Intensity Factors are obtained if this two functions are not included. Some features of the specimen are analysed by using a finite element model. Finally, some numerical features of the method are commented.

1.- INTRODUCCION.

La aplicación de la fotoelasticidad al cálculo de los factores de Intensidad de Tensiones en problemas planos se basa en la determinación del campo general de isocromáticas [1]

$$(N \lambda e)^2 = [\sigma_{xx}(r, \theta) - \sigma_{yy}(r, \theta)]^2 + [2 \sigma_{xy}(r, \theta)]^2 \quad (1)$$

a partir de un conjunto de datos experimentales tomados del mapa de isocromáticas obtenido en el laboratorio al ensayar el modelo. En la ec. (1), N es el orden de la isocromática, λ el factor de franja, e el espesor de la placa y r, θ las coordenadas de un punto en el plano.

El tensor de tensiones σ_{ij} (i, j=x, y) debe ahora expresarse en función de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) en modo simétrico (K_I) y antisimétrico (K_{II}) y, en su caso, de otros parámetros. El valor óptimo de estos parámetros (entre los cuales están K_I y K_{II}) es aquel que consiga un mejor ajuste entre la ec. (1) y el conjunto de datos experimentales.

Inicialmente las expresiones de las tensiones utilizadas fueron las del campo singular, válido sólo en puntos muy próximos al borde de la grieta, lo que crea problemas experimentales de medida, pues

en dicha zona aparecen diversos tipos de no linealidades y con frecuencia las isocromáticas no están bien definidas.

Desde el trabajo de Williams [2] es bien conocido el hecho de que el campo singular de tensiones en el borde de una grieta viene dado por los primeros términos de los desarrollos en serie que dan la solución exacta de tensiones. Esta idea se usó para aproximar el campo de tensiones usando más términos de estos desarrollos lo que permitió ampliar la zona de medida. Una revisión de la ingente bibliografía sobre el tema puede encontrarse en las referencias [3] y [4].

Consideremos ahora el número de funciones que deben ser utilizadas para reproducir un campo general de tensiones. Es bien conocido de la aplicación de la teoría de variable compleja a la Elasticidad plana [5] que la solución general del problema elástico plano puede ser expresada a partir de dos funciones $Z(z)$ y $\eta(z)$ de la variable compleja $z=x+iy$. Dos posibles formas de la solución general de tensiones son [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= R_e Z_I - y I_m Z_I' + y I_m \eta_I' - 2R_e \eta_I \\ \sigma_{yy}^I &= R_e Z_I + y I_m Z_I' - y I_m \eta_I' \\ \sigma_{xy}^I &= -y R_e Z_I' + y R_e \eta_I' - I_m \eta_I \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\text{II}} &= 2 I_m Z_{\text{II}} + y R_e Z_{\text{II}}' - y R_e \eta_{\text{II}}' - I_m \eta_{\text{II}} \\ \sigma_{yy}^{\text{II}} &= - y R_e Z_{\text{II}}' + y R_e \eta_{\text{II}}' - I_m \eta_{\text{II}} \\ \sigma_{xy}^{\text{II}} &= R_e Z_{\text{II}} - y I_m Z_{\text{II}}' + y I_m \eta_{\text{II}}'\end{aligned}\quad (2b)$$

Ambas representaciones son equivalentes y su estructura permite imponer fácilmente las condiciones de contorno en una grieta semiinfinita en $y = 0, x < 0$, para los caso simétrico y antisimétrico

Simétrico:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{xy}^{\text{I}} = 0 \text{ en } y = 0 &\Rightarrow I_m \eta_{\text{I}} = 0 \text{ en } y = 0 \\ \sigma_{yy}^{\text{I}} = 0 \text{ en } y = 0, x < 0 &\Rightarrow R_e Z_{\text{I}} = 0 \text{ en } y = 0, x < 0\end{aligned}\right\} (3a)$$

Antisimétrico

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{yy}^{\text{II}} = 0 \text{ en } y = 0 &\Rightarrow I_m \eta_{\text{II}} = 0 \text{ en } y = 0 \\ \sigma_{xy}^{\text{II}} = 0 \text{ en } y = 0, x < 0 &\Rightarrow R_e Z_{\text{II}} = 0 \text{ en } y = 0, x < 0\end{aligned}\right\} (3b)$$

En el caso de aparecer un modo mixto la solución de tensiones sería la suma de σ_{ij}^{I} y σ_{ij}^{II} . Para satisfacer las condiciones de contorno (3) tomamos:

$$Z_{\text{I}}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(n - \frac{1}{2}\right) A_n z^{n - \frac{1}{2}}$$

$$\eta_{\text{I}}(z) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p z^p \quad (4a,b)$$

$$Z_{\text{II}}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \left(m - \frac{1}{2}\right) B_m z^{m - \frac{1}{2}}$$

$$\eta_{\text{II}}(z) = \sum_{q=0}^{Q-1} D_q z^q \quad (5a,b)$$

Los primeros términos de los desarrollos de Z_{I} y Z_{II} dan lugar a los campos singulares de tensiones. Refiriéndonos al modo I (simétrico), la necesidad de incluir términos constantes en las leyes de tensiones fue ya enfatizada por Sih [7] y Eftis y Liebowitz [8], y finalmente Sandford [9] apuntó que la solución general del modo simétrico debería incluir una función general $\eta_{\text{I}}(z)$ que

satisfaga $I_m \eta_{\text{I}} = 0$ en $y = 0$ (ver ec. (3b)). El desarrollo en serie de η_{I} (ec. (4b)) satisface tal condición.

El campo general de tensiones derivado de las ecs. (4) fue usado en [10] para obtener FIT en modo simétrico. En cuanto a la generalización de estas ideas para el caso de modo mixto, el único trabajo conocido por los autores es el de la Referencia [11], en la que, bastante sorprendentemente, la función η_{II} no fue incluida, considerándose solo las funciones $Z_{\text{I}}, \eta_{\text{I}}$ y Z_{II} .

Un examen de la cuestión no revela ninguna razón aparente por la cual la función η_{II} no deba ser incluida. De entrada, si estamos tratando con un problema antisimétrico puro, la solución del problema general debe seguir dependiendo de dos funciones de variable compleja, y sólo en algunos problemas concretos una de las funciones se anulará. A nivel tensional, un examen del desarrollo de la función η_{II} revela que el primer término de dicho desarrollo da lugar, vía ecs. (2b), a una distribución de tensiones en la que la única componente no nula es $\sigma_{xx} = \text{cte.}$ y. El problema asociado es por tanto el de una placa infinita o finita, sometida a momento flector. Cabe esperar por tanto que la necesidad del uso de la función η_{II} sea más evidente en los casos prácticos en que se de tal situación.

Siguiendo estas ideas, el objetivo principal de este trabajo es poner de manifiesto la influencia de la inclusión o no de la función η_{II} , en un caso práctico (que se describe en un apartado posterior) escogido buscando la presencia de un momento flector. Adicionalmente, algunos aspectos numéricos del método utilizado que se revelaron durante este estudio son también comentados, complementando los resultados que se expusieron en trabajos previos [6], [12].

2. ASPECTOS NUMERICOS

La sustitución de las ecs. (4) y (5) en las ecs. (2), la suma de estas y la sustitución en la ec. (1) da la ecuación de una isocromática en función de los coeficientes de los desarrollos y de las coordenadas reales del

borde de grieta, r_c, θ_c , que se incluyen también como variables [12].

$$F(A_n, B_m, C_p, D_q, r_c, \theta_c, r^*, \theta^*, N) = 0 \quad (6)$$

, donde r^*, θ^* son los valores medidos. Los coeficientes de la ec. (6), en número $N + M + P + Q + 2 = T$ se calculan particularizando dicha ecuación en S puntos de distintas isocromáticas, cada uno con unos valores r_s^*, θ_s^*, N_s ($s = 1, S$). Para minimizar el efecto de los errores de medida es conveniente adoptar $S > T$, lo que da un sistema sobredeterminado no lineal de ecuaciones, que en general no tendrá ninguna solución. Si denominamos vector residuo al conjunto de valores $F_s \neq 0$ en cada punto, se busca la solución que minimice el módulo del vector residuo. Dicha solución se obtiene mediante un procedimiento iterativo que combina el método de Newton-Raphson generalizado [6] con el de mínimos cuadrados [13].

La función usada como ec. (6) es la denominada F3 en [6], cuya estructura permite esperar un ajuste más uniforme entre el campo cercano y el lejano.

Una vez calculados los coeficientes se representan las isocromáticas obtenidas sobre los puntos experimentales, para evaluar visualmente la bondad del ajuste obtenido. Obviamente, sólo un buen ajuste da validez a los valores de K_{I} y K_{II} resultantes.

2.1. Solución inicial.

El método de ajuste descrito necesita partir de una solución inicial. En trabajos previos [3], [12] se encontró que los resultados presentaban una dependencia débil de la solución inicial. Sin embargo, para la probeta utilizada en el presente trabajo, los resultados encontrados dependían fuertemente de la solución inicial, no pudiendo encontrarse buenos ajustes cuando se partía de la solución inicial utilizada en trabajos previos: $K_{\text{I}} = K_{\text{II}} = 1$ y el resto de los coeficientes nulos. Hubo de acudir a lo que podríamos denominar solución encadenada, cuya idea básica es simple. Dado que habitualmente se efectúan diversas series de casos en los que el número de coeficientes se va aumentando hasta que el ajuste se considera óptimo, se utilizó para el primer caso de la serie la solución

mencionada más arriba, mientras que los sucesivos casos usaron como solución inicial la obtenida en el caso precedente. Esta estrategia se ha aplicado en todos los casos resueltos y mediante la misma se han conseguido anular los problemas derivados de usar una solución inicial arbitraria.

2.2. Necesidad de pivotamiento

La matriz utilizada en cada etapa de aplicación del método de mínimos cuadrados (producto de las matrices jacobianas respecto a las variables de ajuste [13]) es una matriz muy mal condicionada, y en cada fila aparecen muchos términos de órdenes muchas veces superiores al diagonal, lo que a primera vista haría aconsejable adoptar un proceso de pivotamiento parcial entre filas.

Sin embargo, el análisis de los pivotes naturales obtenidos en un proceso de Gauss sin pivotamiento reveló que éstos eran positivos en todos los casos analizados, lo que es una condición suficiente para que una matriz simétrica sea definida positiva. Para este tipo de matrices no es conveniente introducir pivotamientos, pues éste puede llevar a obtener mayores errores [14], como efectivamente se pudo comprobar en los casos analizados. En consecuencia, se ha resuelto el sistema de ecuaciones con un método de Gauss sin pivotamiento.

3. CASO ANALIZADO

La probeta analizada se muestra en la Fig. 1. Obviamente a la derecha de la grieta existe un momento flector, por lo que los términos en η_{II} deben influir fuertemente en el resultado, tal como comentamos anteriormente.

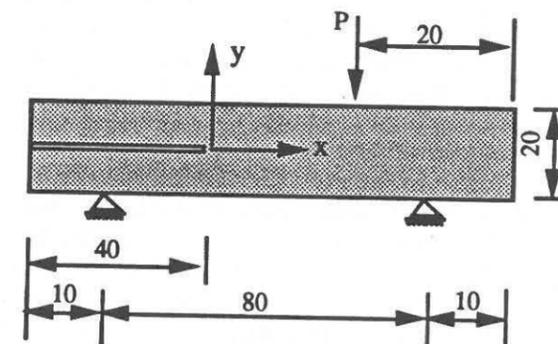


Fig. 1.- Probeta analizada

Una fotografía del campo de isocromáticas se muestra en la Fig. 2. De dicho campo se tomaron 374 puntos que son los que se usan para el ajuste.

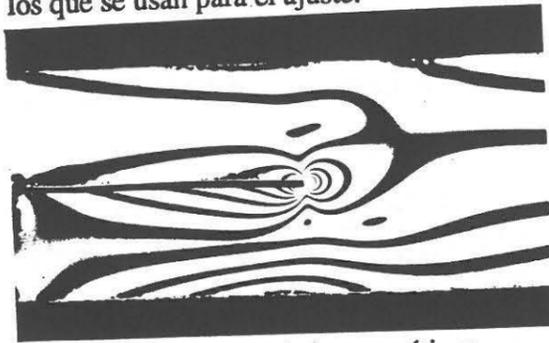


Fig. 2.- Campo de isocromáticas

Para poner de manifiesto la influencia de los términos de la función η_{II} se ha realizado primeramente una serie de casos incluyendo dichos términos y haciendo uso de la solución encadenada descrita en el apartado anterior. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3 en la que se muestra la

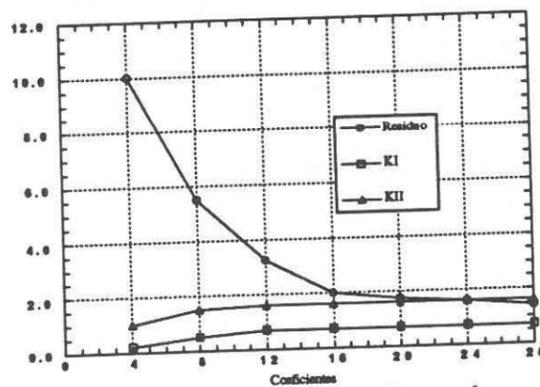
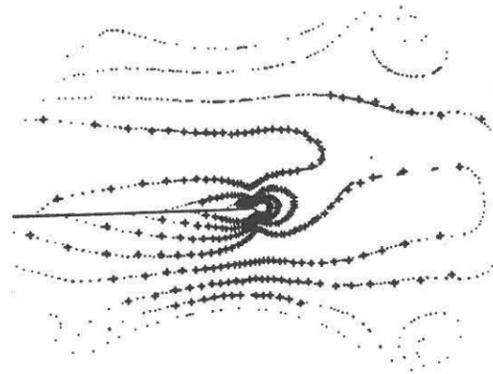


Fig. 3.- Evolución del residuo y de K_I y K_{II} . Serie óptima.

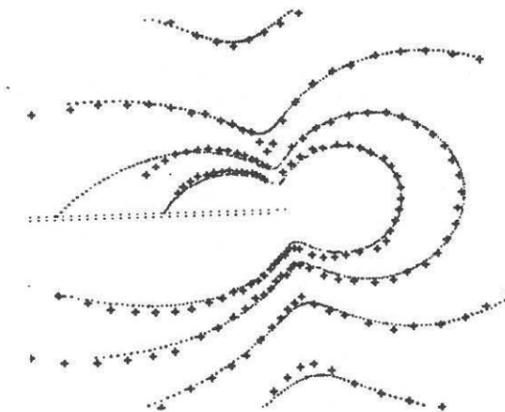
evolución del módulo del vector residuo en función del número total de coeficientes utilizados, repartidos por igual entre los cuatro desarrollos de las ecs. (4) y (5). Se observa como, tras una fuerte variación del residuo al comienzo, éste tiende a estabilizarse cuando el número de términos de la serie utilizados es ya suficiente para reproducir el campo de isocromáticas. Los valores de K_I y K_{II} , representados también en la gráfica, muestran una evolución similar; las variaciones aparentemente menores son debidas a la escala común.

Se tomó como óptimo el caso de 28 coeficientes. En las Figs. 4a y b se muestra el ajuste obtenido. En dichas figuras, las cruces representan los puntos experimentales

usados y los puntos representan el campo de isocromáticas reproducido a partir de los valores hallados para los coeficientes de los desarrollos. Como puede verse, el ajuste es excelente.



a)



b)

Fig. 4.- Caso óptimo. a) Vista general. b) Ampliación

El efecto de la función η_{II} en el ajuste se pone claramente de manifiesto cuando la misma serie anterior de casos se ejecuta pero no incluyendo la función η_{II} . Los resultados obtenidos de K_I y K_{II} para el número análogo de coeficientes (21 entre las funciones Z_I , Z_{II} y η_I) se muestran en la Tabla 1, en la que ΔK_I y ΔK_{II} representan las variaciones en % sobre los valores óptimos. Un aumento posterior de coeficientes no mejora en absoluto los resultados obtenidos. Asociado a los grandes

Tabla 1.- Valores de K_I y K_{II}

CASO	K_I	ΔK_I	K_{II}	ΔK_{II}
OPTIMO	0'687	—	1'631	—
SIN η_{II}	0'109	-84	0'949	-42
SIN SE	0'509	-26	1'566	-4

errores de K_I y K_{II} encontramos un pésimo ajuste; en la Fig. 5 se incluye una vista cercana del ajuste obtenido, y su comparación con la Fig. 4b pone claramente de manifiesto que la función η_{II} es absolutamente necesaria para conseguir un ajuste correcto.

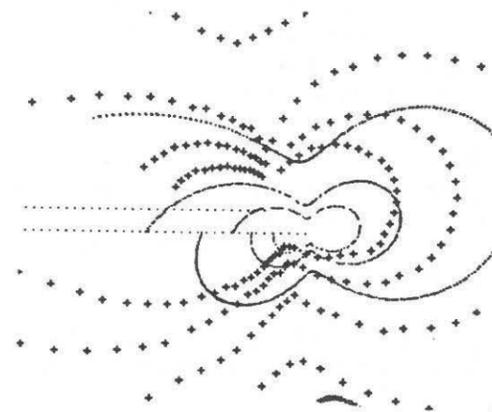


Fig. 5.- Ajuste sin η_{II} . Ampliación

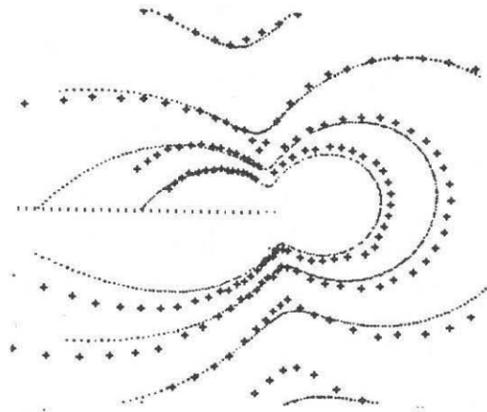


Fig. 6.- Influencia de la solución inicial

Tal como se comentó en el apartado anterior, el método puede presentar, dependiendo del caso estudiado, una fuerte

dependencia de la solución inicial. Si se intenta un ajuste usando 28 coeficientes pero partiendo de la solución inicial $K_I = K_{II} = 1$, y resto de los coeficientes nulos, se obtienen los resultados mostrados en la última fila de la Tabla 1, y el ajuste de la Fig. 6; obviamente el método ha convergido a otro mínimo relativo, por lo que parece recomendable utilizar las soluciones encadenadas en la forma descrita en el apartado anterior.

4. ESTUDIO NUMERICO

El problema analizado (Fig. 1) es, en teoría, un caso de modo II puro, es decir, con $K_I = 0$ [15]. Sin embargo la solución obtenida proporcionaba un valor de K_I del orden de la mitad de K_{II} . Para intentar aclarar este punto se realizó un estudio numérico mediante elementos finitos, usando el programa ANSYS. En primer lugar se modeló la grieta ideal, definiendo dos líneas distintas para simular los labios de la grieta. Los desplazamientos verticales de ambas líneas se hicieron iguales para simular un contacto sin rozamiento. El mapa numérico de isocromáticas se muestra en la Fig. 7, en la que se observa la simetría perfecta de un modo II puro.

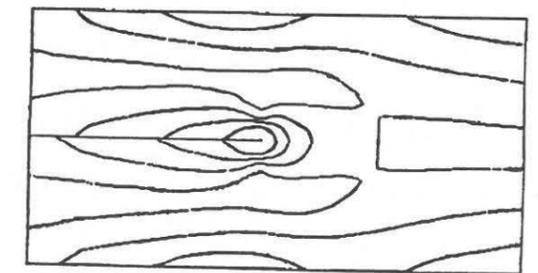


Fig. 7.- Grieta ideal. Isocromáticas

Obviamente, había algún factor en nuestro experimento que introducía un modo I y ese factor no podía ser otro que la separación finita entre los labios de la grieta, que fue realizada con una sierra de 0'5 mm. Así pues se redefinió la malla de elementos finitos para simular una grieta de ese espesor, obteniéndose el campo numérico de isocromáticas de la Fig. 8, que presenta una obvia concordancia cualitativa con el campo real de la Fig. 2. Los valores numéricos estimados de K_I y K_{II} , obtenidos extrapolando los campos singulares de desplazamientos y tensiones dieron un valor promedio de K_I y K_{II} de -1. y -1.85

respectivamente, lo que confirma la suposición realizada.

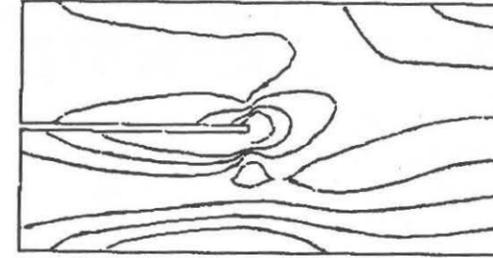


Fig. 8 Grieta real. Isocromáticas

Nótese, por último, que el modo simétrico es de cierre, por lo que K_I es negativo, lo cual es desde luego una situación imposible en grietas reales.

5. CONCLUSIONES

El estudio realizado confirma que se requieren dos funciones para obtener la solución general de un problema de grietas antisimétrico. La inclusión de la función η_{II} es absolutamente imprescindible para obtener valores fiables de los Factores de Intensidad de Tensiones.

La influencia de la solución inicial puede conducir a resultados erróneos, por alcanzarse mínimos relativos distintos del óptimo. La técnica de soluciones encadenadas parece adecuada para solucionar este problema.

No es conveniente usar pivotamiento en la resolución del sistema de ecuaciones involucrado en el método de mínimos cuadrados, ya que las matrices que aparecen son simétricas definidas positivas.

6. REFERENCIAS

1. Dally, J.W. y Riley, W.F. (1978) "Experimental stress analysis" McGraw
2. Willians, M.L. (1957) "On the stress distribution at the base of a stationary crack" J. of Appl. Mach, Vol. 24, pp. 109-114.
3. Rivas, C. et al (1988) "Campo tensional en el entorno de una fisura. Determinación de K_I y K_{II} usando técnicas fotoelásticas". Anales de Ingeniería Mecánica (AIM), Año 6, Nº 3, pp. 45-52.
4. Ostervig, C.B.(1987) "Stress intensity factor determination from isochromatic

- fringe patterns.A review". Engineering Fracture Mechanics, Vol. 26, pp.937-944
5. Mushkelishvili, N.I. (1953) "Some basic problems of the mathematical theory of Elasticity". Noordhoff.
6. Picón, R.; París, F. y Rivas, C. (1990) "Cálculo fotoelástico de factores de intensidad de tensiones mediante desarrollos en serie. Estudio numérico" Anales de Mecánica de la Fractura, (AMF) Vol. 7 pp. 218-224.
7. Sih, G.C.(1966) "On the Westergaard Method of crack analysis". J. of Fract. Mech., Vol. 2, pp. 628-631.
8. Eftis, J. y Liebowitz, H.(1972) "On the modified Westergaard equations for certain plane crack problems". J. of Fract. Mech., Vol. 8, pp. 383-392.
9. Sanford, R.J. (1978). "A critical reexamination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems" Mechanics Research Communications. Vol.6, Nº 5, pp 289-294.
10. Cottron, M. et al.(1981)"Sur le calcul du facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture pour un probleme plan a partir des donnés de la photoelasticité". Revue Francaise de Mecanique, pp.31- 36.
11. Cottron, M. y Lagarde, A. (1982) "A far field method for the determination of mixedmode SIF from isochromatic fringe patterns" SM Archives, Vol. 7, pp. 1-18.
12. Picón, R. et al. (1991) "Aspectos numéricos del cálculo fotoelástico de factores de intensidad de tensiones mediante desarrollos en serie". AMF, Vol. 8, pp. 231-236.
13. Sanford, R.I. y Dally J.W. (1979) "A general method for determining mixed mode SIF from isochromatic fringe patterns". Engng. Frac. Mech., Vol. 11, pp. 621-633.
14. Jennings, A.(1977) "Matrix computation for Engineers and Scientists". Wiley.
15. Murakami, Y. (ed) (1987). "Stress Intensity Factors Handbook" Pergamon

6. AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido posible gracias al fino trabajo de Antonio Cañas en todo lo relativo a fotografías, preparación de probetas y asistencia en los ensayos.

Los autores agradecen la financiación de este trabajo mediante el Proyecto 5853 de la Junta de Andalucía, "Caracterización de Grietas en Régimen Elastodinámico".