

# Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies

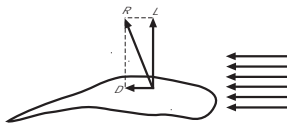
Alejandro G. Bedoya • Alfonso Carriazo • M. Carmen Márquez

**Resumen.** En este trabajo presentamos una primera aproximación al estudio geométrico de la aerodinámica de curvas y superficies. En primer lugar, motivaremos el estudio a partir de situaciones concretas y ejemplos físicos, para después adaptar el método de aproximación normal de curvas y superficies regulares, mediante curvas y superficies de Bézier, introducido por A. Carriazo, M. C. Márquez y H. Ugail. Concluiremos presentando ejemplos gráficos.

## 1. Introducción

¿Qué entendemos por aerodinámica? La aerodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia las acciones que aparecen sobre los cuerpos sólidos cuando existe un movimiento relativo entre éstos y el fluido que los baña, en nuestro caso el aire.

En general, la fuerza  $R$  actuando sobre el cuerpo se descompone en una componente  $D$  (drag) en la misma dirección del aire y una componente  $L$  (lift) en la dirección normal a la superficie, tal y como puede verse en la siguiente figura:



Sea  $p$  la presión del aire sobre una porción mínima de área  $dA$  y  $\tau$  la fuerza de fricción por unidad de área. La fuerza  $p dA$  actúa en la normal a la superficie, mientras que la fuerza de fricción se ejerce tangencialmente.

---

Alejandro G. Bedoya, [alegarbed@alum.us.es](mailto:alegarbed@alum.us.es)

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla

Alfonso Carriazo, [carriazo@us.es](mailto:carriazo@us.es)

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla

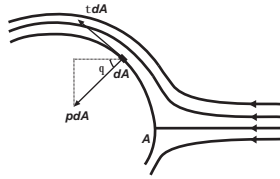
M. Carmen Márquez, [cmgarcia@us.es](mailto:cmgarcia@us.es)

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla

Nuestro objetivo es minimizar la fuerza de presión que viene determinada por la ecuación

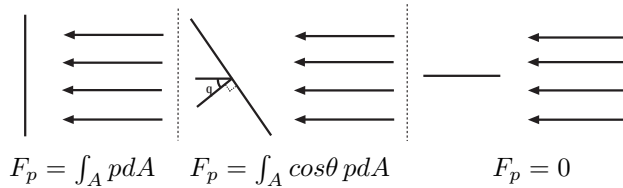
$$F_p = \int_A \cos \theta p dA,$$

siendo  $\theta$  el ángulo formado por la dirección del aire (que consideraremos horizontal durante todo el trabajo) y el vector normal de la curva:



Físicamente no hay una forma explícita de calcular la resistencia al aire; se prueba mediante experimentos.

En la siguiente figura, vemos cómo a medida que variamos la inclinación del segmento, la fuerza de presión disminuye hasta el último caso donde  $F_p = 0$  y podemos afirmar que la fuerza de presión se anula.



Entonces, queda verificado que el ángulo  $\theta$  es significativo al evaluar la fuerza de presión del aire sobre una curva o superficie. A medida que el  $\cos \theta$  disminuye, la fuerza de rozamiento es menor.

## 2. Método de aproximación normal de curvas y superficies

Para poder presentar el método introducido en [1] necesitamos algunos conceptos básicos de curvas y superficies de Bézier.

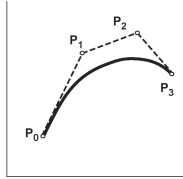
Dados  $n + 1$  puntos  $P_0, \dots, P_n$ , determinan la **curva de Bézier**

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1],$$

donde

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n$$

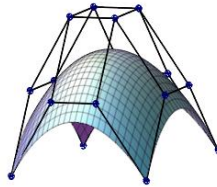
es el **polinomio de Bernstein** de grado  $n$ .



Por otra parte, dada la malla de  $m \cdot n$  puntos  $P_{ij}$ ,  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ , se determina la **superficie de Bézier**

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij}, \quad u, v \in [0, 1],$$

donde  $B_i^m(u)$  y  $B_j^n(v)$  son los polinomios de Bernstein de grados  $m$  y  $n$ , respectivamente.

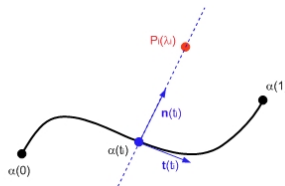


Sea ahora  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, donde  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ ,  $P_0 = \alpha(0)$  y  $P_n = \alpha(1)$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n - 1$ , consideramos el punto

$$P_i(\lambda_i) = \alpha(t_i) + \lambda_i \mathbf{n}(t_i),$$

donde  $\mathbf{n}(t_i)$  es el vector normal de  $\alpha$  en  $\alpha(t_i)$ :



Entonces, definimos la curva de Bézier

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = B_0^n(t)P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)P_i(\lambda_i) + B_n^n(t)P_n,$$

donde  $B_i^n(t)$  son los polinomios de Bernstein. Ahora, definimos la función

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \int_0^1 |\alpha(t) - B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t)|^2 dt.$$

Para minimizar esta función, buscamos los valores  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0$  que mejor aproximan  $B(\lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-1}^0, t)$  a la curva  $\alpha(t)$ .

En este paso, necesitamos resolver un sistema de ecuaciones lineales dado por  $\partial H / \partial \lambda_j = 0$ , para cada  $j = 1, \dots, n-1$ . De hecho:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} dt,$$

donde

$$G(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t) = \sum_{k=1}^2 (\alpha^k(t) - B^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, t))^2.$$

Por lo tanto:

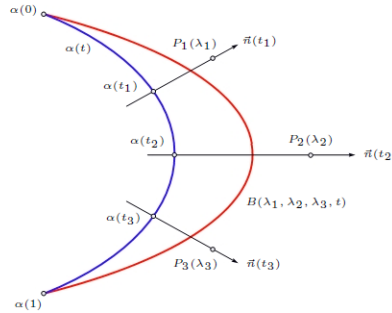
$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = & -2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_j) \left( \int_0^1 \alpha^k(t) B_j^n(t) dt - P_0^k \int_0^1 B_0^n(t) B_j^n(t) dt \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^k(t_i) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt - P_n^k \int_0^1 B_n^n(t) B_j^n(t) dt \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}^k(t_i) \mathbf{n}^k(t_j) \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) dt \right) \lambda_i. \end{aligned}$$

Al igualar esta expresión a cero, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales en  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ .

### 3. Método de aproximación aerodinámica de curvas y superficies

La idea principal de este método es modificar la curva del mismo modo que en la sección anterior, pero ahora movemos los puntos de control, a través de

sus normales, para mejorar el rendimiento aerodinámico minimizando el  $\cos^2\theta$ . Nótese que evaluamos el  $\cos^2\theta$  para que no influya el signo.



Observemos que es necesario fijar una cota superior ya que, en caso contrario, nuestra deformación de la curva tendería a infinito.

### 3.1. Ejemplos

Sea  $\alpha(t)$  el segmento que une el punto  $(0, 1)$  con el  $(0, 0)$ , con  $t \in [0, 1]$ .

#### Estudio con un punto de control intermedio:

La expresión depende de un solo parámetro  $\lambda$  y de  $t$ :

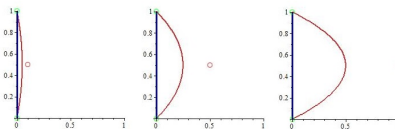
$$B(\lambda, t) = (2\lambda(1-t)t, (1-t)^2 + (1-t)t),$$

$$\cos^2 \theta(\lambda, t) = \frac{1}{16\lambda^2 t^2 - 16\lambda^2 t + 4\lambda^2 + 1}.$$

Como necesitamos minimizar este coseno,  $\lambda$  debería ser suficientemente grande (tanto como sea posible en el medio en que nos encontremos). En este caso particular, cuando evaluamos el coseno en el punto que hemos variado, resulta:

$$\cos^2 \theta(\lambda, 1/2) = 1.$$

No es significativo, pues justo en ese punto se alcanza la máxima resistencia con el aire (la tangente de la curva en ese punto es perpendicular a la dirección del aire).



### Estudio con tres puntos de control intermedios:

La nueva expresión de la curva es

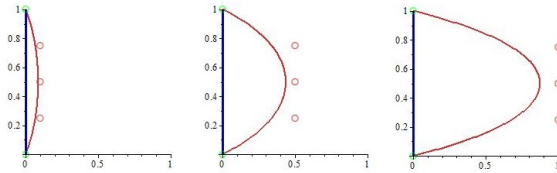
$$B(\lambda_i, t) = (4t(1-t)^3\lambda_1 + 6t^2(1-t)^2\lambda_2 + 4t^3(1-t)\lambda_3, (1-t)^4 + 3t(1-t)^3 + 3t^2(1-t)^2 + t^3(1-t)),$$

con

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 1/4) = \frac{1}{1 + \frac{81}{64}\lambda_2^2 + \frac{9}{8}\lambda_2\lambda_3 + \frac{1}{4}\lambda_3^2},$$

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 1/2) = \frac{1}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2},$$

$$\cos^2 \theta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 3/4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\lambda_1^2 + \frac{9}{8}\lambda_1\lambda_2 + \frac{81}{64}\lambda_2^2}.$$



De nuevo, en  $t = 1/2$  se alcanza el punto de máxima resistencia al aire. En los otros puntos  $t = 1/4$  y  $t = 3/4$  tenemos una expresión del coseno que sí podemos minimizar para que la curva sea más aerodinámica.

En este caso,  $\lambda_i$  crece a la misma velocidad para todo  $i = 1, 2, 3$ .

## Conclusiones

Sería interesante plantear este mismo método sin buscar la simetría y trasladarlo del mismo modo a superficies.

## Agradecimientos

Parcialmente financiado por el grupo FQM-327 (PAIDI, Junta de Andalucía)

## Referencias

- [1] A. Carriazo, M. C. Márquez, H. Ugail, *Normal approximations of regular curves and surfaces*, Filomat **29** (2015), no. 3, 457–464.