

APLICACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL AL ANALISIS  
DE VIGAS QUE FLECTAN POR CONTACTO EN RETROCESO SIN FRICCION

FOCES, A. <sup>(\*)</sup>; GARRIDO, J. A. <sup>(\*)</sup>; PARIS, F. <sup>(\*\*)</sup>

(\*) = E.T.S.I.I. de Valladolid ( Paseo del Cauce s/n; 47011-Valladolid )  
(\*\*) = E.T.S.I.I. de Sevilla ( Avda. Reina Mercedes s/n; 41012-Sevilla )

**RESUMEN.**- Cuando sólidos asimilables a vigas que descansan sobre una cimentación son sometidos a cargas de compresión, éstos se separan en zonas alejadas de la carga ( contacto en retroceso ). En este trabajo se presentan resultados obtenidos al aplicar el Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad 3D a este tipo de problemas. En el sentido del eje de la viga los resultados que se obtienen están en concordancia con los de un análisis 2D. Sin embargo, en el sentido transversal aparece la típica evolución tensional asociada a un caso de contacto conforme, por lo que las tensiones de contacto máximas no quedarían recogidas en un análisis 2D. Los resultados que se presentan son de aplicación entre cualesquiera rigideces relativas de la viga y la cimentación, y se ciñen al caso de que no exista fricción entre ambos sólidos.

**SUMMARY.**- When beams lying on a foundation are compressed, a gap between the beam and the foundation appears at a certain distance of the zone where the load is applied ( receding contact ). Results obtained applying Boundary Element Method in Elasticity 3D to this kind of problem are presented in this paper. Along the direction of the axis of the beam the results obtained with the 3D analysis are very similar to those obtained using a 2D analysis. However, a typical contact pressure evolution associated to a conforming case appears along any transversal direction, the maximum contact pressure not being recovered, therefore, in a two dimensional analysis. The results presented assume no friction along the contact surface, covering any relation between the compliances of the beam and the foundation.

1.- INTRODUCCION

Es habitual clasificar los problemas de mecánica de sólidos en contacto en función de la evolución del tamaño de la zona inicial de contacto ( configuración indeformada ) al aplicar las cargas [Gladwell,1980] [Johnson,1985]. Así, se dice que el contacto es con avance, estacionario o en retroceso según aumente, no varíe o disminuya el tamaño de dicha zona cuando se deforma la estructura.

No son muchas las publicaciones que hacen referencia a problemas de contacto en retroceso. Una relación exhaustiva de las investigaciones clásicas más relevantes en este campo pueden encontrarse en [Gladwell,1980]. Entre los trabajos más conocidos caben citar los artículos de Keer, Dundurs y Tsai [Keer,1972] [Tsai,1974] sobre el análisis tensional de problemas planos y axisimétricos de contacto entre elementos de longitud infinita, en los que el retroceso se presenta súbitamente al aplicar la carga.

En trabajos más recientes, basados en planteamientos integrales del problema, se presentan resultados de casos de contacto en retroceso entre sólidos de dimensiones finitas. Así,

Mahmoud, Salamon y Marks, haciendo uso del Método de los Elementos Finitos en Elasticidad Bidimensional, deducen el valor final del tamaño de la zona de contacto de una viga que retrocede al ser comprimida sobre una cimentación elástica, considerando una estrategia de contacto en avance ficticio hasta llegar a una solución exenta de incompatibilidades cinemáticas ( sin interpenetraciones entre los dos dominios ) [Mahmoud,1982]. Anderson utiliza el Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad Bidimensional para resolver problemas de conexiones mecánicas en los que el retroceso no se produce súbitamente, sino que ocurre a partir de una situación en la que la zona de contacto ha sido previamente comprimida por la acción de otras cargas [Anderson,1981]. Desde el punto de vista de la sistematización del análisis, este tipo de situaciones resultan menos complejas de resolver que la anterior, pues admiten un tratamiento en el que el retroceso se detecta por incrementos asociados a la descarga de un par de nodos en contacto.

Más recientemente, Paris y Garrido abordan algunos problemas particulares de contacto plano entre más de dos sólidos en los que aparecen fenómenos de retroceso súbito [Paris,1988b], y

luego describen un procedimiento sistemático para la resolución de problemas planos de contacto en retroceso ( súbito o progresivo ) con fricción [Garrido,1989a], utilizando elementos de contorno lineales discontinuos [Paris,1985]. En casos de retroceso súbito, la estrategia se basa en el chequeo simultáneo de las condiciones cinemáticas en la zona de retroceso ( ausencia de interpenetraciones ) y de las estáticas en la zona de contacto (ausencia de tracciones), mientras que en contacto con retroceso progresivo se sigue la técnica descrita por Anderson [Anderson,1981].

El presente trabajo tiene como objetivo aplicar el procedimiento antes mencionado al análisis de problemas tridimensionales de contacto en retroceso súbito y sin fricción, representando la continuación natural de los estudios realizados por Garrido, Foces y Paris [Garrido,1989a] sobre la aplicación del M.E.C. a problemas tridimensionales de contacto estacionario sin fricción.

2.- PLANTEAMIENTO INTEGRAL DEL PROBLEMA DE CONTACTO EN RETROCESO

Como es sabido, el planteamiento integral del problema elástico a partir de los Teoremas de Reciprocidad conduce a la conocida Identidad de Somigliana para desplazamientos. En ausencia de fuerzas de volumen esta ecuación integral, escrita para un punto genérico ( x ) del contorno ( ∂D ) del dominio elástico ( D ) en estudio, es de la forma :

$$C_{ij}(x)u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y)u_j(y)ds(y) - \int_{\partial D} U_{ij}(x,y)t_j(y)ds(y) = 0 \quad (2.1)$$

$i, j = X, Y, Z ; x, y \in \partial D$

$u_j(y)$  y  $t_j(y)$  representan, respectivamente, a las componentes del desplazamiento y de la tensión en puntos ( y ) de  $\partial D$ , expresadas en el sistema global de coordenadas ( X, Y, Z ). Los tensores  $T_{ij}(x,y)$  y  $U_{ij}(x,y)$  representan las soluciones tridimensionales de Kelvin para tensiones y desplazamientos, respectivamente [Cruse,1973].

El término libre de la ecuación integral,  $C_{ij}(x)$ , depende de la forma local del contorno en el punto ( x ). En puntos donde la superficie es suave se tiene :

$$C_{ij}(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En una estructura elástica en la que intervienen dos cuerpos en contacto, puede aplicarse la ecuación (2.1) a todo punto ( x ) del contorno de cada cuerpo, resultando :

$$\int_{\partial D^K} T_{ij}^{*K}(x,y)u_j^K(y)ds^K(y) - \int_{\partial D^K} U_{ij}^K(x,y)t_j^K(y)ds^K(y) = 0 \quad (2.2)$$

$K = A, B ; i, j = X, Y, Z ; x, y \in \partial D^K$

siendo

$$T_{ij}^{*K}(x,y) = \begin{cases} T_{ij}^K(x,y) & \text{si } y \neq x \\ T_{ij}^K(x,y) + C_{ij}^K(x) & \text{si } y=x \end{cases}$$

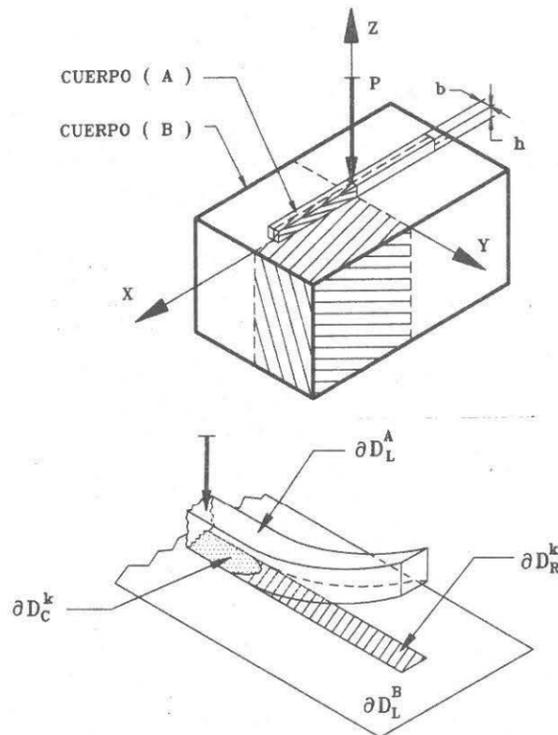


Figura 2.1 : Definición del problema

Con referencia a la Figura 2.1, podemos considerar la siguiente partición del contorno (  $\partial D^K$  ) de un sólido en contacto con retroceso :

$$\partial D^K = \partial D_L^K + \partial D_R^K + \partial D_C^K \quad (2.3)$$

donde

-  $\partial D_L^K$  incluye toda la superficie del dominio  $D^K$  a excepción de su interfase natural ( en la estructura indeformada ) con el otro sólido. En puntos de esta zona se desconocen siempre tres variables del modelo matemático (  $u_j^K(y)$ ,  $t_j^K(y)$  ó combinaciones de ambas en el caso de condiciones de contorno mixtas ) y se desconocen otras tres.

-  $\partial D_R^K$  representa a la parte de la superficie de interfase natural con el otro cuerpo que sufre retroceso al cargar la estructura. En puntos

de esta zona el vector tensión es idénticamente nulo y se desconocen las tres componentes del vector de desplazamientos. Por tanto, a efectos de incluir la partición (2.3) en la representación integral (2.2) consideraremos que :

$$\int_{\partial D_R^K} U_{ij}^K(x,y)t_j^K(y)ds^K(y) = 0 \quad (2.4)$$

$K = A, B$

-  $\partial D_C^K$  es la superficie que realmente permanece en contacto con el otro cuerpo al cargar la estructura. En estos puntos se desconocen las tres variables cinemáticas (  $u_j^K(y)$  ) y las tres estáticas (  $t_j^K(y)$  ), lo que implica doce variables desconocidas considerando que estos puntos pertenecen a las superficies de los dos cuerpos. De estas, solamente seis resultan ser independientes al aplicar las condiciones de contacto :

Equilibrio en el contorno de la zona de contacto

$$t_j^A(y) - t_j^B(y) = 0$$

$$t_2^A(y) + t_2^B(y) = 0 \quad (2.5)$$

$$j = 1, 3 ; y \in \partial D_C^A, \partial D_C^B$$

Condición de contacto sin fricción

$$t_2^K(y) = t_3^K(y) = 0$$

$K = A, B ; y \in \partial D_C^A, \partial D_C^B$  (2.6)

A efectos de la regionalización propuesta (2.3) la condición de contacto sin fricción implica que:

$$\int_{\partial D_C^K} U_{i2}^K(x,y)t_2^K(y)ds^K(y) = 0$$

$$\int_{\partial D_C^K} U_{i3}^K(x,y)t_3^K(y)ds^K(y) = 0 \quad (2.7)$$

Condición cinemática de continuidad

$$u_1^A(y) + u_1^B(y) = 0 \quad (2.8)$$

En estas ecuaciones los subíndices 1, 2 y 3 representan a las direcciones locales utilizadas para referenciar los grados de libertad asociados a puntos de la zona de contacto, Figura 2.1. La dirección 1 es, en cada cuerpo, la de la normal exterior a  $\partial D_C^K$  en ( y ). Las direcciones 2 y 3 se orientan arbitrariamente en el plano indeformado de contacto de uno de los cuerpos, tomándose en el otro cuerpo como se indica en la Figura 2.2.

En lo que sigue, consideraremos que los tensores  $U_{ij}^K$  y  $T_{ij}^{*K}$  han sido expresados en confor-

midad con las transformaciones de coordenadas que son necesarias para referenciar todas las variables del modelo en su sistema local de coordenadas.

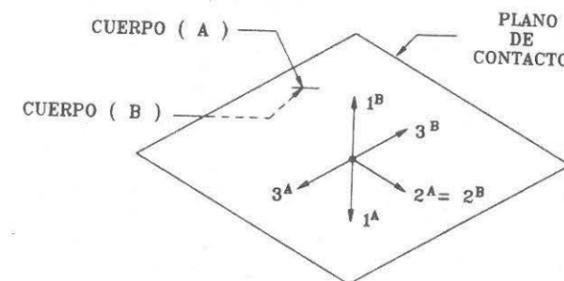


Fig 2.2 : Definición del sistema local de coordenadas.

Definitivamente, las seis variables desconocidas en los puntos de la zona de contacto son :

$$u_1^A(y), u_2^A(y), u_3^A(y), u_2^B(y), u_3^B(y), t_1^A(y)$$

Obsérvese que los desplazamientos en el plano de contacto (  $u_2^A(y), u_2^B(y), u_3^A(y), u_3^B(y)$  ) son desconocidos, pues la (2.6) implica el libre deslizamiento entre los sólidos a través de ( y ).

Haciendo uso de la partición (2.3) y considerando las condiciones de contacto antes enumeradas, podemos particionar la ecuación (2.2) del siguiente modo :

$$x, y \in \partial D^A$$

$$\int_{\partial D_L^A + \partial D_R^A + \partial D_C^A} T_{ij}^{*A}(x,y)u_j^A(y)ds^A(y) - \int_{\partial D_C^A} U_{i1}^A(x,y)t_1^A(y)ds^A(y) - \int_{\partial D_L^A} U_{ij}^A(x,y)t_j^A(y)ds^A(y) = 0 \quad (2.9)$$

$$x, y \in \partial D^B$$

$$\int_{\partial D_L^B + \partial D_R^B} T_{ij}^{*B}(x,y)u_j^B(y)ds^B(y) - \int_{\partial D_C^B} T_{i1}^{*B}(x,y)u_1^B(y)ds^B(y) + \int_{\partial D_C^B} T_{i2}^{*B}(x,y)u_2^B(y)ds^B(y) + \int_{\partial D_C^B} T_{i3}^{*B}(x,y)u_3^B(y)ds^B(y) - \int_{\partial D_C^B} U_{i1}^B(x,y)t_1^B(y)ds^B(y) - \int_{\partial D_L^B} U_{ij}^B(x,y)t_j^B(y)ds^B(y) = 0 \quad (2.10)$$

Cualquier punto del contorno de la estructura aporta el mismo número de variables desconocidas que de ecuaciones aplicables en él ( tres en el caso de puntos de  $\partial D_L^K$  y  $\partial D_R^K$  y seis en puntos de la zona de contacto ).

Es claro, por tanto, que conocido el tamaño de la zona en retroceso ( o bien la de contacto) es posible caracterizar el problema mediante un sistema de 3N ecuaciones lineales, asociadas a N puntos fijados sobre el contorno de la estructura de contacto, siguiendo la técnica de aproximación del Método de los Elementos de Contorno.

3.- FORMULACION NUMERICA

Los contornos de los cuerpos en contacto se discretizan con elementos de contorno triangulares. Sobre cada elemento se supone una distribución constante de los campos de tensiones y de desplazamientos ( Los nodos son los baricentros de los triángulos)

La interfase natural común a ambos cuerpos (  $\partial D_R^K \cup \partial D_C^K$  ) se discretiza de idéntica forma en cada contorno ( los elementos que virtualmente pudieran contactar al cargar la estructura son idénticos ).

Las integraciones sobre los elementos se realizan analítica o numéricamente según pertenezca o no, respectivamente, el nodo al que se aplica la ecuación integral al elemento sobre el que se integra. En el caso de integraciones analíticas, éstas se realizan en la forma descrita por Cruse [Cruse,1973]. Detalles complementarios sobre el análisis numérico pueden encontrarse en [Paris,1979].

Si  $N^A$  y  $N^B$  representan respectivamente a los números de elementos de contorno utilizados para modelar  $\partial D^A$  y  $\partial D^B$ , la aplicación de las ecuaciones (2.9) y (2.10) a cada baricentro conduce a un sistema de 3 (  $N^A + N^B$  ) ecuaciones lineales, acopladas a través de las  $6N_C$  variables de la zona de contacto (  $N_C$  es el número de elementos que, en cada cuerpo, resultan pertenecer a  $\partial D_C^K$  ).

Este sistema de ecuaciones admite la siguiente representación

$$\begin{pmatrix} G_R^A & 0 & 0 \\ 0 & G_C^B & 0 \\ 0 & 0 & G_L^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R^A \\ u_C^B \\ u_L^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R^B \\ u_C^A \\ u_L^B \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$= \begin{pmatrix} H_C^A & 0 & 0 \\ 0 & H_C^B & 0 \\ 0 & 0 & H_L^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_C^A \\ t_C^B \\ t_L^A \end{pmatrix}$$

Las submatrices G y H recogen, respectivamente, las integraciones de los tensores  $T_{ij}$  y  $U_{ij}$  sobre los elementos de contorno. Los subíndices R, C y L definen las zonas del contorno ( de retroceso, de contacto y libre, respectivamente ) a que hacen referencia las integraciones. Un esquema más detallado sobre la organización del sistema, especialmente en lo que se refiere a su acoplamiento a través de las condiciones de contacto, puede encontrarse en [Garrido,1989a].

4.- DETERMINACION DE LA ZONA EN RETROCESO

En general, no es posible establecer a priori la partición (2.3), por lo que se hace necesario realizar un proceso de resolución autocorrectivo que permita definirla, y, con ello, resolver el sistema (3.1).

A todos los efectos, la estrategia de resolución utilizada para resolver problemas tridimensionales de contacto en retroceso es análoga a la que se propone en [Paris,1988a] y [Garrido,1989a] para el tratamiento de casos planos :

- 1 - Inicialmente, se supone que no existe zona de retroceso (  $\partial D_R^K = \emptyset$  ).
- 2 - Se resuelve el sistema (3.1).
- 3 - Se constituye la zona de retroceso con los elementos cuyos nodos han resultado traccionados.
- 4 - Se resuelve de nuevo el sistema (3.1), teniendo en cuenta las modificaciones realizadas en el apartado anterior.
- 5 - Se repiten los pasos 3 y 4 hasta encontrar una zona de contacto exenta de tracciones.

En los casos en los que la discretización no sea lo suficientemente fina es posible que aparezcan pequeñas interpenetraciones en la zona en retroceso próxima a la zona de contacto. Esto se produce porque el tamaño real de la zona de contacto no puede ser detectado exactamente con un procedimiento aproximado. En estos casos podría establecerse un proceso de mejora de la solución siguiendo las directrices que se marcan en [Garrido,1988], aunque desde el punto de vista ingenieril la solución podría darse por buena dado que las tensiones en esta zona son despreciables.

Destacaremos, por último, que el costo computacional del procedimiento autocorrectivo antes descrito se ve notablemente reducido resolviendo el sistema (3.1) mediante la técnica del gradiente conjugado considerando en cada prueba la solución obtenida en la anterior.

5.- RESULTADOS

Como ejemplo ilustrativo sobre la aplicación práctica del procedimiento antes descrito al análisis de vigas que flectan por contacto en retroceso, se ha resuelto ( para todo el abanico de rigideces relativas entre viga y sustentación ) el problema tridimensional mostrado en la Figura 2.1. Las dimensiones de la estructura se recogen en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 : Características geométricas

	X (L)	Y (L)	Z (L)
Viga ( A )	16	1	1
Sustentación ( B )	20	12	10

(L) = Unidad de longitud

Las características mecánicas de los materiales son variables, y se representan a través del parámetro de flexibilidad  $\alpha$  definido por Dundurs y Stippes [Dundurs,1970] :

$$\alpha = \frac{G^B ( 1 + \nu^B ) - G^A ( 1 + \nu^A )}{G^B ( 1 + \nu^B ) + G^A ( 1 + \nu^A )}$$

(  $-1 \leq \alpha \leq 1$  );  $G^K (F/L^2)$ ; (F) = Unidad de fuerza

donde  $G^K$  representa el Módulo de Rigidez del cuerpo (K) y  $\nu^K$  su Coeficiente de Poisson.

Para el análisis con elementos de contorno se considera solamente un cuarto de estructura, aplicando simetría implícita en la forma descrita por Watson [Watson,1979]. Se utilizan 117 elementos de contorno para modelar la superficie de la viga y 145 para representar a la sustentación. Por tanto, el modelo tiene, en total, 786 grados de libertad. La carga que provoca el retroceso de la viga P (F) se ha modelado con una distribución de tensiones constante ( $F/L^2$ ) aplicada sobre un conjunto de elementos situados en el entorno del punto de aplicación de P (F). Estos elementos se han considerado de tamaño lo suficientemente pequeño como para garantizar que la solución no se vea afectada significativamente por la forma de modelar la carga.

En la Figura 5.1 se representa una vista de las distribuciones de tensiones normales de contacto para cuatro valores concretos del parámetro de flexibilidad  $\alpha$ .

En dicha Figura se aprecia el efecto de punzonamiento de la viga sobre la línea exterior de la zona de contacto. Este efecto, no es recogido por los modelos bidimensionales.

A efectos de tensiones, los modelos bidimensionales son válidos para profundidades lo suficientemente grandes como para garantizar que el retroceso se produce también en la dirección ( Y ). En estos casos, el contacto se produce sin tensión normal singular y la presión de contacto dominante actúa sobre la línea  $Y = 0$ .

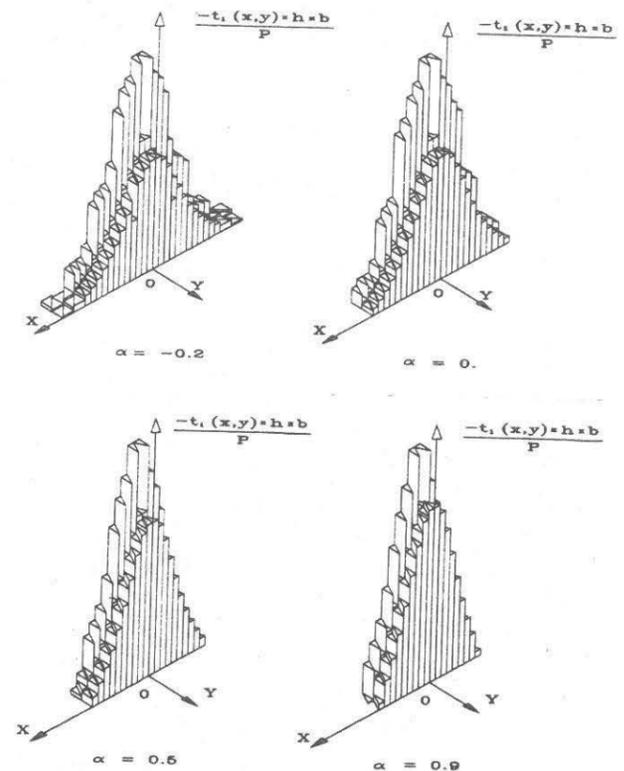


Figura 5.1 : Distribuciones de tensiones en la zona de contacto para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ .

En la Figura 5.2 se muestra la variación de la tensión de contacto máxima ( punto (0,b/2,0)) y la variación del valor máximo de la tensión en el punto central ( 0,0,0 ) con el parámetro de flexibilidad  $\alpha$ . En la misma figura se incluye la variación de la tensión normal máxima supuesto el problema bidimensional.

En la mencionada Figura se aprecia que conforme aumenta la rigidez de la sustentación en relación a la de la viga (  $\alpha \rightarrow 1$  ), las presiones máximas aumentan, ya que la zona de contacto disminuye ( Ver Figura 5.3 ). Asimismo, se aprecia también que las presiones máximas sobre la línea media se ajustan bastante a las que se deducen con el modelo 2D.

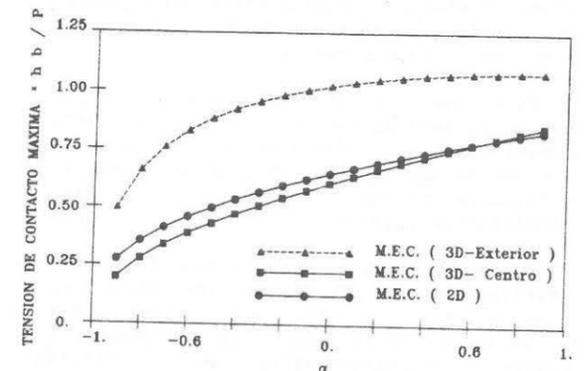


Figura 5.2 : Variación de la tensión máxima con el parámetro  $\alpha$ .

Finalmente, en la Figura 5.3 se muestra la variación de la semilongitud de contacto con el parámetro  $\alpha$ .

Para valores positivos de  $\alpha$ , lo cual implica que la sustentación es más rígida que la viga, los resultados que arroja el modelo tridimensional coinciden prácticamente con los deducidos con representaciones 2D por Keer, Dundurs y Tsai para casos con longitud infinita, así como con las obtenidas mediante el Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad bidimensional.

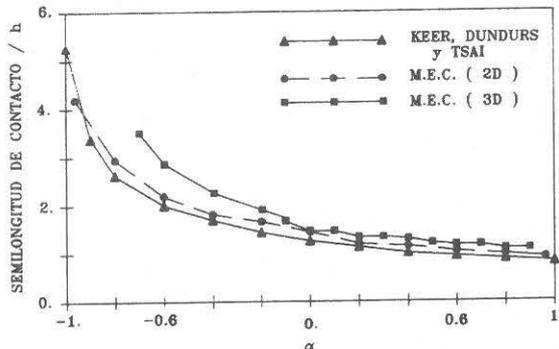


Figura 5.3 : Variación de la semilongitud de contacto con el parámetro  $\alpha$ .

Para valores negativos de  $\alpha$ , que implican que la viga es más rígida que la sustentación, con el modelo tridimensional se obtienen zonas de contacto mayores que con los bidimensionales, consiguiéndose el contacto completo para  $\alpha = -0.8$ .

## 6.- CONCLUSIONES

Se ha descrito un procedimiento general de análisis numérico, con el Método de los Elementos de Contorno, para la resolución de problemas de contacto tridimensionales que evolucionan con retroceso de la superficie inicial de contacto.

De la aplicación del método a un caso simple en el que una viga flexa por contacto en retroceso, se aprecia que es necesario abordar este tipo de problemas usando el modelo elástico tridimensional, pues la solución de tensiones que se deriva de representaciones bidimensionales no recoge el efecto de punzonamiento en el contorno exterior de la zona de contacto, donde las tensiones resultan ser máximas.

En lo que a la estrategia para la determinación de la zona de retroceso se refiere, ésta no presenta particularidades especiales en relación a la que se utiliza para tratar problemas bidimensionales de contacto en retroceso [Paris, 1988a] [Garrido, 1989a].

Por último, se comprueba que las ventajas tradicionales del Método de los Elementos de Contorno sobre las técnicas de dominio (Método de los Elementos Finitos, fundamentalmente) en problemas bidimensionales de interfase [Paris, 1988], se acentúan en el caso del análisis tridimensional.

## 7.- REFERENCIAS

- ANDERSON, T. (1981); The Boundary Element Method Applied to Two Dimensional Contact Problems with Friction. *Boundary Element Method*, Ed. por C.A. Brebbia, Springer Verlag.
- CRUSE, T.A. (1973); Application of the Boundary Integral Equation Method to Three Dimensional Stress Analysis. *Computers and Structures*, Vol. 3, pp. 509-527.
- DUNDURS, J.; STIPPES, M. (1970); Role of Elastic Constants in Certain Contact Problems. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 965-970
- GARRIDO, J.A.; CALVO, F.; PARIS, F. (1988); Sobre Problemas de Contacto con Retroceso Usando el Método de los Elementos de Contorno. *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 6, Nº 3, pp. 115-122
- GARRIDO, J.A.; FOCES, A.; PARIS, F. (1989a); B.E.M. Applied to Receding Contact Problems With Friction. *Enviado para su publicación en el Int. Journal of Computers and Mathematics With Applications*.
- GARRIDO, J.A.; FOCES, A.; PARIS, F. (1989b); Three Dimensional Conforming Frictionless Contact Using B.E.M. *Advances in Boundary Elements*, Vol. 3, pp. 135-149, Ed. por C.A. Brebbia, Springer Verlag.
- GLADWELL, G. (1980); Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Ed. Sijthoff and Noordhoff.
- JOHNSON, K.L. (1985); Contact Mechanics, Cambridge.
- KEER, L.; DUNDURS, J.; TSAI, K. (1972); Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. de Diciembre, pp. 1115-1120.
- MAHMOUD, F.F.; SALAMON, N.J.; MARKS, N.R. (1982); A Direct Automated Procedure for Frictionless Contact Problems, *Int. J. for Num. Met. in Eng.*, Vol. 18, pp. 245-257.
- PARIS, F. (1979); Análisis de Continuos Elásticos Tridimensionales Mediante el Método de los Elementos de Contorno, Monografía ETSII-79001, Universidad Politécnica de Madrid.
- PARIS, F.; GARRIDO, J.A. (1988a); An Incremental Procedure for Friction Contact Problems With B.E.M., *Aceptado para su publicación en Engineering Analysis*, (Ref. EA-244).
- PARIS, F.; GARRIDO, J.A. (1988b); Friction Multicontact Problems With B.E.M., *Boundary Elements X*, Ed. por C.A. Brebbia, Springer Verlag.
- PARIS, F.; GARRIDO, J.A. (1985); On the Use of Discontinuous Elements in Two Dimensional Contact Problems, *Boundary Elements VII*, Ed. por C.A. Brebbia, Springer-Verlag.
- TSAI, K.; DUNDURS, J.; KEER, L. (1974); Elastic Layer Pressed Against a Half Space, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. Septiembre, pp. 703-707.
- WATSON, J. (1979); Advanced Implementation of the B.E.M. for Two and Three-dimensional Elastostatics, *Developments in Boundary Elements Methods - 1*, Ed. por Banerjee and R. Butterfield App. Science Pub.