SOFTWARE EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

José María Gavilán Izquierdo
gavilan@cica.es
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En esta comunicación relato cómo se realizó una parte del Proyecto *Software en el aprendizaje de las Matemáticas* dentro de un programa de formación inicial de maestros. En concreto me referiré a la experiencia llevada a cabo en un curso básico de Análisis Matemático con el programa Derive. El uso que hacemos[1] del software es incorporarlo en las asignaturas de contenido matemático. Destacar la idea de no neutralidad del software con respecto a las matemáticas.

ABSTRACT

In this paper I report how we was carried out a part of the Proyecto *Software in the learning of the Mathematics* inside a program of teachers' initial formation. In short I will refer to the experience carried out in a basic course of Mathematical Analysis with the program it Derives. The use that we make of the software is to incorporate it in the subjects of mathematical content. To highlight the idea of non neutrality of the software with regard to the mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

Software en el aprendizaje de las Matemáticas fue un Proyecto de Ayuda a la Docencia Universitaria, aprobado y financiado por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla para el curso 97/98. Realizado en la Facultad de Ciencias de la Educación con estudiantes de distintas especialidades del Título de Profesor de E.G.B.

Varios son los motivos que en justifican el llevar a cabo proyectos de este tipo, además estos motivos tienen muy distinta naturaleza:

Desde el punto de vista epistemológico: nos planteamos una concepción de la matemática que va más allá de la colección de un conjunto de conceptos con sus definiciones, teoremas, propiedades y aplicaciones. Nuestra visión de las matemáticas tiene en cuenta también como parte de su contenido los procesos de construcción, validación y significación de los conceptos a los que antes nos referimos. No sólo incluimos los productos del trabajo matemático, también consideramos todas aquellas actividades que se

---

1 Junto con el autor, han colaborado en este Proyecto los profesores Antonio Ariza García, Ricardo Barroso Campos y Ángel Sánchez Sotelo de la Universidad de Sevilla.

tienen en cuenta al "hacer matemáticas". El uso de software en la clase de matemáticas va a permitir centrarnos en aspectos más conceptuales y dejar en parte de lado algunos procedimientos algorítmicos.

Desde el punto de vista curricular de la formación inicial de profesores , algunas asociaciones de prestigio, tales como la Mathematical Association of America (1.991) recomiendan que los programas de formación de profesores de matemáticas de todos los niveles debe incluir el uso apropiado de ordenadores, entre los estándares comunes se incluye "Usar Tecnología" ya que permiten visualizar conceptos abstractos y crear nuevos entornos que permiten construir diferentes representaciones de los conceptos. Como ejemplos se proponen, software de representación gráfica (en dos y tres dimensiones), de análisis de datos, simulación, que integren posibilidades gráficas/numéricas/simbólicas. En este mismo sentido los estándares curriculares (N.C.T.M., 1.989) recomiendan que en la formación de profesores éstos deben ser enseñados de forma parecida a cómo ellos habrán de enseñar (explorando, elaborando conjeturas, comunicando...).

2.- EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

Hay varias formas en las que se puede utilizar el ordenador por parte de los profesores en relación a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas[2]:

- Cómo herramienta de planificación: el profesor dispone de un ordenador con el que prepara las clases, por ejemplo, dispone de un programa que le calcule las derivadas de funciones definidas por una fórmula. En este caso puede calcular casi cualquier derivada (de orden deseado) en pocos minutos, la mayoría de ellos en labores de edición. En la clase no se necesita ningún material adicional.
- Cómo herramienta de enseñanza: el profesor tiene en el aula un ordenador con posibilidad de proyectar lo que ocurre en la pantalla (a través de una pantalla de cristal líquido, un video proyector, etc).. En este caso tenemos una "pizarra electrónica" que permite rapidez en las acciones del profesor, por ejemplo, podemos realizar representaciones gráficas o figuras geométricos necesarias para resolver un determinado problema. Los "dibujos" son más precisos y rápidos de realizar. Los estudiantes no tienen acceso al ordenador para realizar actividades.
- Como herramienta de aprendizaje: en este caso hay un conjunto de ordenadores disponible para uso de los estudiantes. Los estudiantes pueden trabajar, tanto de forma individual, como en grupo. En este caso se propone a los estudiantes tareas matemáticas para que las resuelvan. Los estudiantes tienen un "control" sobre su propio aprendizaje, y esta es una de las posibles ventajas del uso de estas herramientas.

Las dos primeras utilizaciones del ordenador no afectan propia mente al aprendizaje de los estudiantes, más bien afectan al trabajo y conocimiento que deben disponer los profesores. La tercera utilización afecta claramente al trabajo del profesor, ya

2

Sólo haré referencia a los programas que se usaron en el Proyecto. Por supuesto en algunos casos pueden usarse otros tipos de programas, procesadores de texto, etc.

que obliga en principio a una gestión diferente del aula. Pero también afecta al contenido de enseñanza, así, hay que introducir nuevas preguntas que permitan obtener el máximo partido posible de los programas y que tengan en cuenta sus limitaciones. Por ejemplo, las tareas (claramente ejercicios[3]) de repetición de algoritmos dejan de ser un foco de atención principal. Hay nuevas posibilidades brindadas por los programas que permiten (obligan) a plantear nuevas tareas, por ejemplo, podemos pedir a los estudiantes que construyan un rectánguio, con el objetivo de hacer explícitas las propiedades del mismo y que pongan de manifiesto su relación con otros paralelogramos o con el cuadrado. O bien, podemos pedir a los estudiantes que interpreten en el modo de representación gráfico acciones llevadas a cabo en el modo algebraico.

Teniendo presente las consideraciones anteriores, el uso como herramienta de aprendizaje afecta claramente al aprendizaje de los estudiantes. Como he señalado anteriormente, al control de los estudiantes sobre su propio aprendizaje, al contenido del aprendizaje, a las actitudes frente a las matemáticas y por tanto también a las creencias sobre lo que es la matemática.

En los Proyectos de Ayuda a la Docencia Universitaria (cursos 97/98, 98/99 y 99/00) en los que hemos participado nos hemos decantado por el uso del ordenador como una herramienta de aprendizaje, a través de lo que denominamos Laboratorio de Matemáticas.

La consideración de Laboratorio de Matemáticas está determinada por el uso del software, por ejemplo, Derive puede ser utilizado como un "microscopio" bajo el cual mirar las propiedades locales de una función dada, o como un gran angular para observar la conducta global de una función en el infinito (Gavilán y cols, 1.999). Por otro lado el uso de Cabri-Géomètre como un material para la experimentación en geometría se ajusta a la misma metáfora.

Dos han sido los programas que utilizamos en este Proyecto, uno de ellos para abordar el contenido geométrico de la asignatura, Cabri-Géomètre (http://www.cabri.net, o bien http://www.ti.com/calc) y el otro para tratar fundamentalmente el contenido sobre Cálculo Infinitesimal, Derive (http://www.derive.com).

Hay que señalar que la elección del software está condicionada por distintos factores, entre ellos, económicos, idioma, disponibilidad y, facilidad de su uso. Pero no es una elección neutra desde el punto de vista del contenido matemático. Al seleccionar una herramienta estamos condicionando el contenido matemático y la forma de abordarlo. Por ejemplo, al seleccionar un programa como Derive, estamos asumiendo que las funciones vienen definidas "por una regla" generalmente bien determinada en modo de representación algebraico.

3

Desde un punto de vista didáctico las tareas matemáticas que realizan los estudiantes pueden clasificarse en ejercicios y problemas. La diferencia entre ellos es si se dispone de un "camino" o hay que buscarlo para resolver la tarea.

3. SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO: DERIVE

Este programa se utilizó principalmente en la asignatura Matemáticas II, de segundo curso de la Especialidad de Ciencias del Título de Profesor de E.G.B. Esta asignatura tenía un contenido que incluía, números complejos, funciones reales, límites, cálculo diferencial y cálculo integral. Su horario era de tres horas semanales.

Para llevar a cabo la innovación se dedicó a partir del mes de diciembre una hora semanal al Laboratorio. Las primeras dos sesiones se dedicaron a familiarizar a los estudiantes con el programa: reglas de edición (sintaxis de algunas órdenes, funciones y expresiones), usos de comandos del menú y gestión de archivos.

Además de las sesiones de clase los estudiantes disponían de libre acceso al Laboratorio (realizado en el Aula de Informática) varios días de la semana. Los estudiantes hicieron uso frecuente de esta posibilidad. Lo que para nosotros era un indicio del interés y motivación.

Una vez que los estudiantes se familiarizan con el programa, los éstos trabajaron en el Laboratorio con problemas fundamentalmente en forma simbólica (en la ventana algebraica) y se sorprendieron enormemente de las posibilidades de este tipo de programas. La tareas de esta primera parte eran de tipo algorítmico: calcular el módulo y argumento de un número complejo, resolver ecuaciones y sistemas, factorizar expresiones, etc.

Las posibilidades de factorización de expresiones en Derive son varias (en la **figura 1** – Interfaz en árbol de comandos para factorizar expresiones algebraicas- puede verse el árbol de comandos que se tiene disponible al usar el comando **Factoriz** del menú principal, sistema que evita dedicar mucho tiempo a la sintaxis). Estas posibilidades permitieron comenzar a incidir en aspectos de tipo conceptual, más que algorítmico, poner de manifiesto que las factorizaciones dependen del campo numérico en el que las realicemos.

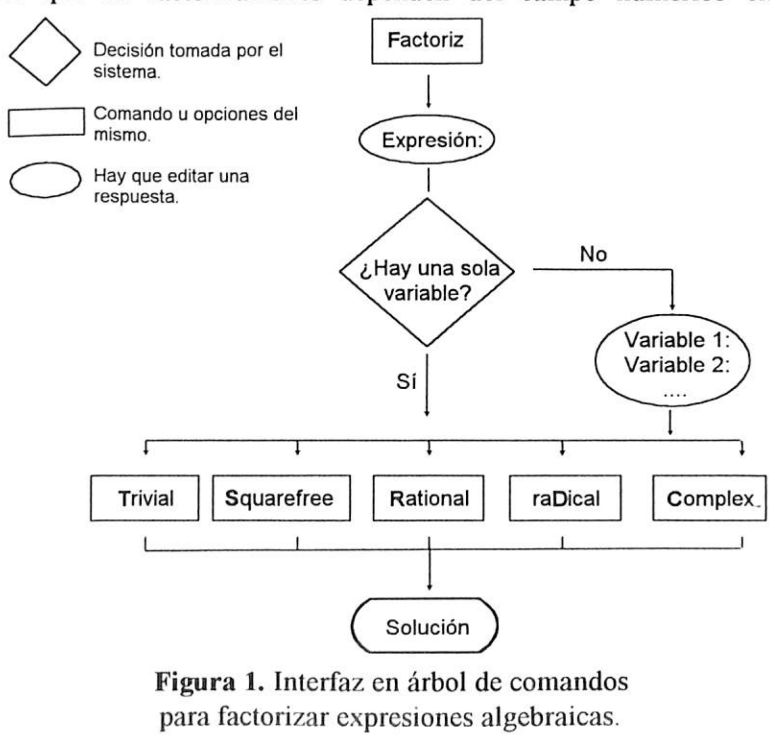


Figura 1. Interfaz en árbol de comandos para factorizar expresiones algebraicas.

El comando **Factoriz** discrimina automáticamente si hay una o más variables, otros comandos también discriminan, como **resoLver** que detecta si hay una o más variables o, el comando **rePresen**, que si la expresión resaltada (la que considera el programa por defecto) se representa en tres dimensiones defina la ventana 3-D en lugar de 2-D.

Las ventajas del interfaz de Derive, queda de manifiesto con la siguiente ilustración, **figura 2**, para realizar acciones relacionadas con el cálculo infinitesimal. En un mismo comando del menú principal **Cálculo**, aparece la posibilidad de calcular derivadas (derivar), integrales (integrar), límites (Límite), polinomios de Taylor de cualquier grado (Taylor), etc.

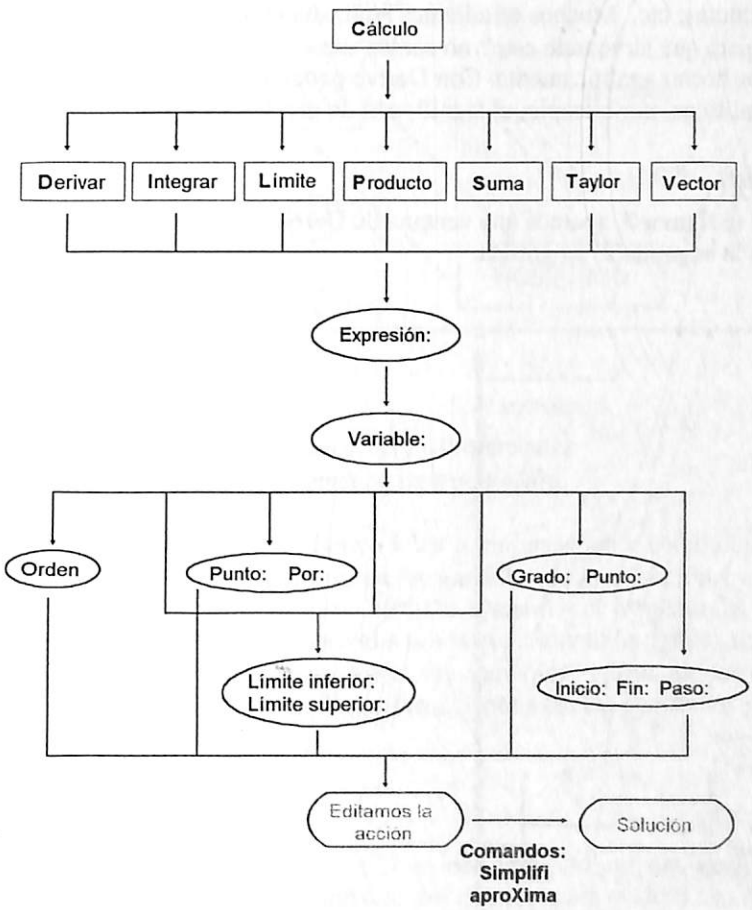


Figura 2. Comandos del comando principal Cálculo.

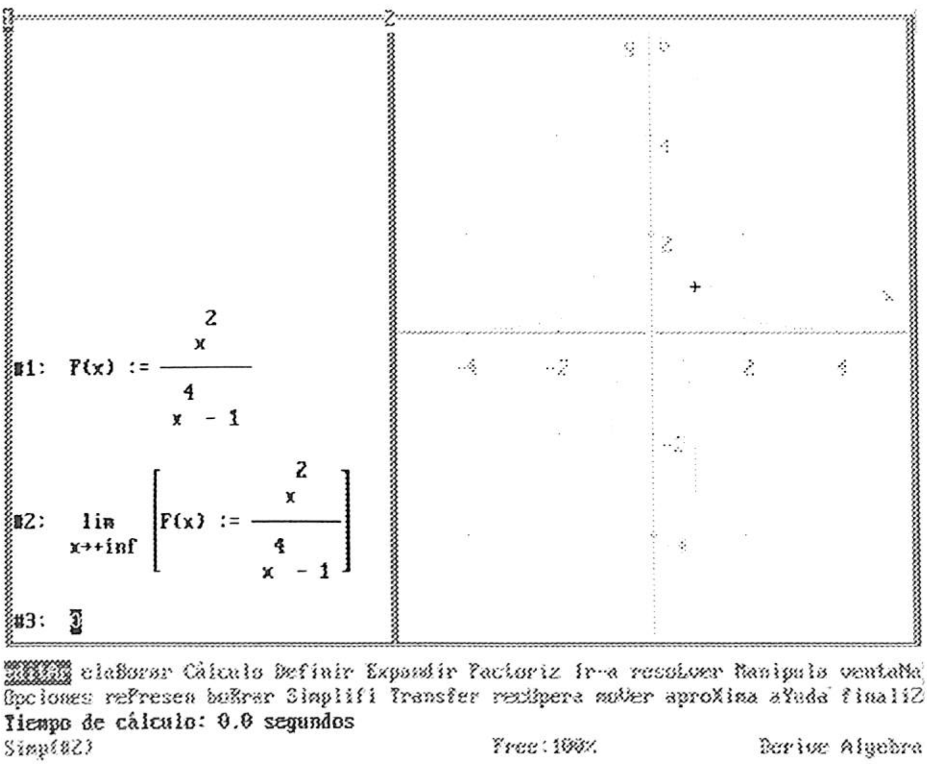
Posteriormente se introdujo a los estudiantes en el uso de las posibilidades gráficas del programa: uso de la ventana gráfica en dos dimensiones, y de algunos de los comandos disponibles en ella, por ejemplo, **eScala**, **Zoom**, **Rango**, **Despejar**.

En este momento es cuando se le comenzó a sacar el máximo rendimiento al uso de Derive en el curso. Con el programa es posible utilizar de forma casi simultánea varias ventanas de distinto tipo, nosotros principalmente utilizábamos dos ventanas (algebraica-gráfica), ambas pueden estar disponibles al mismo tiempo en la pantalla.

Utilizamos estas capacidades de Derive para dar significado a algunos conceptos matemáticos relacionados con el Análisis Matemático, en concreto relacionados con las funciones . Entendíamos como dar significado a un concepto conocer el mismo en más de un modo de representación. Esta cuestión nos la habíamos planteado el curso anterior cuando al estudiar la representación gráfica de funciones, dada una función F(x) hacer un estudio de la misma y representarla. El estudio incluye, dominio, cortes con los ejes, simetrías, asíntotas, etc.. Muchos estudiantes realizaban bien el estudio analítico, pero luego planteaban ¿para qué sirve todo esto? no somos capaces de pasar a interpretar gráficamente los que hemos hecho analíticamente. Con Derive podemos interpretar gráficamente algunos conceptos analíticos, por ejemplo, el significado de una asíntota horizontal, dada por un límitE

$$\mathop{Lim}_{x \to +\infty} F(x)$$

. En la **figura 3**, aparece una ventana de Derive con dos ventanas, en la primera (1) el límite y en la segunda(2) su gráfica.



Se abordaron las relaciones entre distintos modos de representación que se podían manejar: modo gráfico, numérico y algebraico. En la **figura 4**, se recogen algunas formas de usar el programa en relación al contenido de funciones y modos de representación.

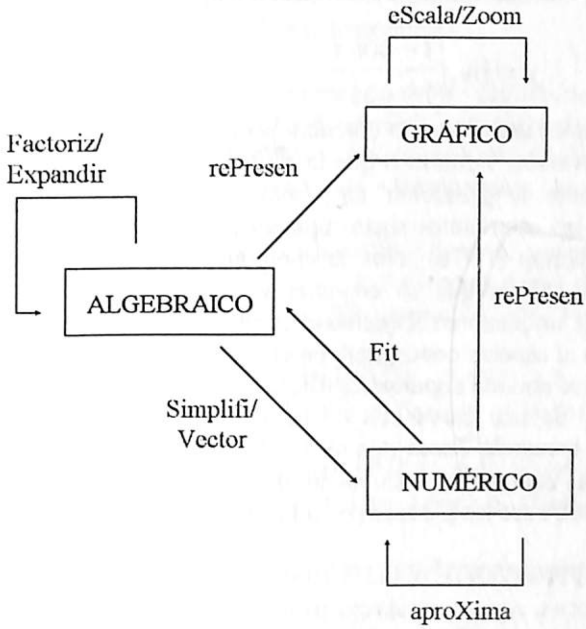


Figura 4. Traslaciones y transformaciones entre modos de representación.

Un ejemplo de tarea que se planteó a los estudiantes tenía como objetivo indagar sobre las transformaciones que se realizan en las variables de una función $\gamma = f\ (x)$, éstas se realizaban sobre el modo algebraico (ventana de álgebra) y el resultado se observaba en la ventana gráfica. La pregunta era ¿cómo afecta a la representación gráfica de una función realizar determinadas transformaciones sobre las variables? ¿Hay alguna jerarquía de dificultad en las transformaciones?. Las transformaciones eran las planteadas por Eisenberg (1.991): $\gamma \pm k$, $f\ (\chi \pm k)$

4. ALGUNOS RESULTADOS

Cuando presentamos la memoria final del Proyecto no era posible establecer algunos resultados. Hay que tener presente que los criterios para evaluar una innovación no son los mismos que en una investigación. Ahora con la perspectiva del tiempo transcurrido podemos ir detallando algunos de ellos. Hay que señalar que los resultados son de muy distinto tipo:

Sobre las actitudes de los estudiantes, pensamos que la actividad realizada ha tenido efectos positivos en relación a las actitudes de los estudiantes frente a las matemáticas.

Sobre aprendizaje obtuvimos un resultado que puede parecer sorprendente, relativo al dominio de procedimientos algorítmicos. A pesar de dedicar menos tiempo a ejercicios repetitivos, para cuya resolución simplemente se necesitaba recordar alguna "regla", por ejemplo, calcular límites o derivadas del tipo

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

los estudiantes del grupo no obtenían peores resultados que los del grupo que no llevó a cabo la innovación. Pensamos que la respuesta a esta aparente paradoja está en la existencia de un "punto de saturación" en la realización de tereas repetitivas, llegado este punto por más que los estudiantes sigan repitiendo no obtienen más destreza. Usando la caracterización de Skemp (1.976) sobre la comprensión en matemáticas, la comprensión instrumental, aquélla en la que se conocen y utilizan reglas pero sin necesidad de comprenderlas, posee un punto en el que no es posible llegar más allá.

En relación al aspecto conceptual, en el análisis de algunas tareas de las llevadas a cabo pensamos que se obtiene algunos resultados positivos. Así, analizando los órdenes de los puntos de corte de una curva con el eje OX, algunos estudiantes manifestaron la necesidad de usar el comando **Zoom** (también valdría el comando **eScala**) para distinguir el orden dos del orden cuatro. De este modo manifiestan la "localidad" de la propiedad presente y cómo el software les permite profundizar en el contenido matemático.

5. PROYECTOS DE PRESENTE Y FUTURO

Estos proyectos necesitan tiempo para consolidarse, deben empezar con vocación de permanencia y desarrollo. Desde su origen nos ha movido al grupo de profesores que han participado en este Proyecto continuar con esta línea de trabajo. Algunas de las líneas de trabajo han sufrido un paréntesis debido a la modificación de los Planes de Estudios, que comenzaron en el curso 98/99, que han afectado a las distintas materias de los diferentes Títulos de Maestro, valga como ejemplo, que si bien en los anteriores Planes de Estudios una especialidad disponía de más 30 créditos para asignaturas del área de Didáctica de las Matemáticas, ahora la especialidad que dispone de mayor número de créditos (troncale y obligatorios) tiene 11.

En las sucesivas convocatorias de Ayudas a la Docencia Universitaria hemos presentado otras propuestas de trabajo que tienden a consolidar el objetivo global de incorporar software y nuevas tecnologías en general, a los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y con una visión más amplia, a los procesos de formación de maestros y profesores en el área de la Didáctica de las Matemáticas.

Entre los proyectos de trabajo dentro del marco institucional de las ayudas a la Docencia Universitaria organizados por el I.C.E., y dentro de la línea de innovación curricular se encuentran los siguientes:

Curso 98/99: *La enseñanza/aprendizaje de la Geometría en entornos informáticos*. Que consiguió consolidar el trabajo con el software Cabri-Géomètre, dando el salto a las nuevas versiones del mismo como Cabri II, en entorno Windows. Además se incorporó otro software específicamente diseñado con fines educativos como Win-Logo.

Curso 99/00: *Nuevas tecnologías en Didáctica de las Matemáticas*. En este proyecto que actualmente se está desarrollando, los programas que estamos utilizando son

Cabri II y Win-Logo. Pero además pretendemos incorporar herramientas de Internet útiles para el futuro profesor de matemáticas.

REFERENCIAS

CABRI-GÉOMÈTRE (1.998) [Software]. Texas Instruments.

DERIVE (1.988) [software]. Soft Warehouse.

EISENBERG T. (1.991): *Funtions and Associated Learning Difficulties.* En Tall D. (edt) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, Dordrech.

GAVILÁN J.M., ARIZA A. BARROSO R. Y SÁNCHEZ A. (1.999): *Software en el aprendizaje de las Matemáticas.* Revista de Enseñanza Universitaria, número extraordinario, pp. 349-360.

GAVILÁN J. M. (1.998): *Los Sistemas de Cálculo Simbólico y el concepto de Función.* En DELGADO F.J., CÁRDENAS D. Y LÓPEZ A. J. (editores) Actas de la VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática THALES. Servicios de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (1.991): *A Call for Change: Recomendations For the Mathematical Preparation of Teacher of Mathematical.* En Leitzel J. (edt) An MAA report.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (1.989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia. [Traducción al castellano de SAEM "Thales"]

SKEMP R (1.976): *Relational understanding and instrumental understanding.* Mathematics Teaching, 77, pp 20-26.